MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- *Mệnh đề logic* (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định đúng hoặc sai. Một câu khẳng định đúng gọi là một *mệnh đề đúng*, một câu khẳng định sai gọi là một *mệnh đề sai*. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Cho mệnh đề P. Mệnh đề "không phải P" được gọi là *mệnh đề phủ định* của P và kí hiệu là $\overline{P}$. Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.
- Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là *mệnh đề kéo theo* và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.
- Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề có dạng "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là *mệnh đề tương đương* và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.
- *Mệnh đề chứa biến* $P(x)$ là một câu chứa biến (không phải là mệnh đề đúng hay sai), nhưng với mỗi giá trị của biến x trong tập xác định X nào đó ta được một mệnh đề.
- Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định "với mọi x thuộc X, $P(x)$ đúng" là một mệnh đề. Mệnh đề này sai nếu có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là một mệnh đề sai. Mệnh đề trên được kí hiệu là "$\forall x \in X,\ P(x)$".

➢ Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó khẳng định "tồn tại x thuộc X, $P(x)$ đúng" là một mệnh đề. Mệnh đề này đúng nếu có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ là một mệnh đề đúng. Mệnh đề trên được kí hiệu là "$\exists x \in X, P(x)$".

➢ Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X,\ P(x)$" là $\exists x \in X,\ \overline{P(x)}$.

Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X,\ P(x)$" là $\forall x \in X,\ \overline{P(x)}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Xác định mệnh đề, tính đúng sai của mệnh đề

1. PHƯƠNG PHÁP

Căn cứ trên định nghĩa mệnh đề và tính đúng sai của chúng. Lưu ý rằng :

* P, $\overline{P}$ không cùng tính đúng sai.
* $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai.
* $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.
* $\forall x \in X, P(x)$ đúng khi $P(x_0)$ đúng với mọi $x_0 \in X$.
* $\exists x \in X, P(x)$ đúng khi có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng.

2. VÍ DỤ

Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không ? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai ?

a) $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ.

b) Iran là một nước thuộc châu Âu phải không ?

c) Phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$ vô nghiệm.

d) Chứng minh bằng phản chứng khó thật !

e) $x + 4$ là một số âm.

f) Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.

g) Nếu n chia hết cho 4 thì n là số chẵn.

h) n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết cho 4.

i) $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3.

j) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

Giải

a) Đây là mệnh đề đúng.

b) Đây là câu hỏi, không phải là mệnh đề.

c) Đây là mệnh đề sai vì phương trình có nghiệm $x = -2$.

d) Đây là câu cảm, không phải là mệnh đề.

e) Đây không phải là mệnh đề. Ta có đây là mệnh đề chứa biến.

f) Đây là mệnh đề sai vì n là số chẵn nhưng n chưa chắc chia hết cho 4.

g) Đây là mệnh đề đúng.

h) Đây là mệnh đề đúng.

i) Đây là mệnh đề sai vì $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n = (n-1)n(n+1) \ \vdots\ 3$.

j) Đây là mệnh đề đúng.

3. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm mệnh đề trong các câu sau và cho biết chúng đúng hay sai ?

a) 5 là số chẵn.

b) Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông.

c) 2 có phải là số nguyên tố không ?

d) Hôm nay trời không mưa, chúng ta đi xem ca nhạc nhé !

e) Nếu phương trình bậc hai có $\Delta \geq 0$ thì nó có nghiệm.

f) Cấm hút thuốc lá nơi công cộng.

Vấn đề 2

Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

1. PHƯƠNG PHÁP

Mệnh đề phủ định của P là "không phải P".

Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X, P(x)$" là $\exists x \in X, \overline{P(x)}$.

Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X, P(x)$" là $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo này đúng hay sai : "Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau".

Giải

Mệnh đề đã cho có dạng : $P \Rightarrow Q$ trong đó P là "hai góc đối đỉnh", Q là "hai góc bằng nhau". Vậy mệnh đề đảo là "Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh". Mệnh đề này sai.

Ví dụ 2. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai.

a) $P =$ "$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$".

b) $Q =$ "Có một tam giác không có góc nào lớn hơn 60^o".

Giải

a) Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$ = "$\exists x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 < 0$". Đây là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$ = "Mọi tam giác luôn có một góc lớn hơn 60^o". Đây là mệnh đề sai vì tam giác đều không có góc lớn hơn 60^o.

3. BÀI TẬP

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai ?

a) Có vô số số nguyên tố.

b) Một năm có tối đa 52 ngày chủ nhật.

c) Các số nguyên tố đều là số lẻ.

d) Giải thưởng lớn nhất của Toán học là giải Nobel.

Bài 3. Viết mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai ? Vì sao ?

a) Nếu a, b chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c.

b) Nếu tam giác có hai góc bằng 60^o thì tam giác đó đều.

c) Nếu n là số nguyên lẻ thì $3n + 1$ là số nguyên chẵn.

d) Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có a, c trái dấu thì nó có hai nghiệm phân biệt.

Bài 4. Cho tam giác ABC có AI là trung tuyến. Xét hai mệnh đề sau :

P : "Tam giác ABC vuông tại A";

Q : "AI bằng một nửa cạnh BC".

a) Viết mệnh đề $P \Rightarrow Q$, chứng minh đây là mệnh đề đúng.

b) Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$, chứng minh đây là mệnh đề đúng.

Bài 5. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^4 = x$".

a) Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau : $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$.

b) Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để sửa $P(x)$ thành mệnh đề đúng.

Bài 6. Viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, mệnh đề phủ định này đúng hay sai ? Vì sao ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 9 \leq 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n \vdots 3$.

§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các mệnh đề chứa biến, X là tập hợp nào đó.
- Cho định lí "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1), $P(x)$ gọi là giả thiết, $Q(x)$ là kết luận.
- $P(x)$ là *điều kiện đủ* để có $Q(x)$; $Q(x)$ là *điều kiện cần* để có $P(x)$.

➢ Mệnh đề "$\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)$" (2) là mệnh đề đảo của định lí (1). Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là *định lí đảo* của định lí (1). Khi đó định lí (1) gọi là *định lí thuận*. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành định lí "$\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$", đọc là $P(x)$ là điều kiện cần và đủ để có $Q(x)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Phương pháp chứng minh phản chứng

1. PHƯƠNG PHÁP

* Đề bài yêu cầu chứng minh $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Xác định giả thiết $P(x)$, kết luận $Q(x)$ của định lí.
* Giả sử $Q(x)$ sai ta suy ra vô lí (kết hợp với $P(x)$ khi cần).

2. VÍ DỤ

Chứng minh rằng : "Nếu nhốt n con thỏ vào k cái chuồng ($k < n$) thì có một chuồng chứa nhiều hơn một con thỏ" (nguyên lí Dirichlet).

Giải

Giả sử không có chuồng nào có nhiều hơn một con thỏ.
Suy ra mỗi chuồng có tối đa một con thỏ.
Suy ra số thỏ tối đa là k con (vô lí).
Vậy có một chuồng có nhiều hơn một con thỏ.

3. BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh nếu n^2 là số chẵn thì n cũng là số chẵn.

Bài 2. Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Vấn đề 2

Phát biểu định lí, định lí đảo dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

1. PHƯƠNG PHÁP

* Một định lí thường có dạng "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$", xác định $P(x)$, $Q(x)$.
* Lấy $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng, chứng minh $Q(x)$ đúng.
* $P(x)$ là điều kiện đủ để có $Q(x)$ hay $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

2. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên lẻ thì $3n + 2$ cũng là số nguyên lẻ.

Giải

Lấy số nguyên lẻ n, $n = 2k + 1$ (k là số nguyên)

$\Rightarrow 3n + 2 = 3(2k+1) + 2 = 6k + 5 = 2(3k+2) + 1$

$\Rightarrow 3n + 2$ lẻ (đpcm).

Ví dụ 2. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" phát biểu các định lí sau :

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

b) Nếu $a + b > 0$ thì ít nhất có một số a hay b dương.

Giải

a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau. Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.

b) $a + b > 0$ là điều kiện đủ để trong hai số a, b có ít nhất một số dương. Trong hai số a, b có ít nhất một số dương là điều kiện cần để có $a + b > 0$.

3. BÀI TẬP

Bài 3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau :

a) Nếu $ABCD$ là hình thoi thì chúng có hai đường chéo vuông góc.

b) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì chúng có hai đường chéo bằng nhau.

c) Nếu một số nguyên dương lẻ là tổng của hai số chính phương thì số nguyên dương đó có dạng $4k + 1$.

Bài 4. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau :

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng đồng dạng.

b) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi chúng có hai góc đối bù nhau.

c) Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Bài 5. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu các định lí sau :

a) Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

b) Trong đường tròn, đường kính vuông góc dây cung không đi qua tâm nếu và chỉ nếu đường kính đó qua trung điểm của dây cung.

Bài 6. Cho định lí : "Nếu m, n là hai số nguyên dương và mỗi số đều chia hết cho 3 thì $m^2 + n^2$ cũng chia hết cho 3".

Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên (nếu có), rồi sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

- *Tập hợp* là một khái niệm cơ bản của toán học.
- Tập A được gọi là *tập con* của B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B.
- Phép *giao* : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.
- Phép *hợp* : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.
- Phép *hiệu* hai tập hợp : $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.
- Phép lấy *phần bù* : Nếu $A \subset E$ thì $C_E A = E \setminus A = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin A\}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Xác định tập hợp và các phép toán trên tập hợp hữu hạn

1. PHƯƠNG PHÁP

* Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
* Dùng định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

2. VÍ DỤ

Cho $A=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $B=\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$;

$$C=\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2-3x=0\right\}.$$

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C.

b) Xác định các tập hợp sau : $A \cap B, B \cap C, A \cap C$.

c) Xác định các tập hợp sau : $A \cup B, B \cup C, A \cup C$.

d) Xác định các tập hợp sau : $A \setminus B, B \setminus C, A \setminus C$.

Giải

a) $B=\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$; $C=\left\{0 ; \dfrac{3}{2}\right\}$.

b) $A \cap B=\{1 ; 2\}$; $B \cap C=\{0\}$; $A \cap C=\varnothing$.

c) $A \cup B=\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$;

$B \cup C=\left\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dfrac{3}{2}\right\}$;

$A \cup C=\left\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \dfrac{3}{2}\right\}$.

d) $A \setminus B=\{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $B \setminus C=\{-3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2\}$;

$A \setminus C=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

3. BÀI TẬP

Bài 1. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập con của tập nào ?

A : tập hợp các tứ giác ;

B : tập hợp các hình thang ;

C : tập hợp các hình thoi ;

D : tập hợp các hình chữ nhật ;

E : tập hợp các hình vuông.

Bài 2. Cho $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$; $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 2\right\}$;

$$C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\right\}.$$

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C.

b) Xác định các tập hợp sau : $A \cap B, B \cap C, A \cap C$.

c) Xác định các tập hợp sau : $A \cup B, B \cup C, A \cup C$.

d) Xác định các tập hợp sau : $A \setminus B, B \setminus C, A \setminus C$.

Bài 3. Cho $A = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$; $B = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$;

$C = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$. Hãy liệt kê phần tử của các tập hợp dưới đây.

a) $A \cap (B \cap C)$; b) $A \cup (B \cup C)$;

c) $A \cap (B \cup C)$; d) $A \cup (B \cap C)$;

e) $(A \cap B) \cup C$.

Bài 4. Tìm tất cả các tập con của tập hợp $A = \{1 ; 2 ; 3\}$.

Vấn đề 2

Xác định tập hợp và các phép toán trên tập hợp các số thực

1. PHƯƠNG PHÁP

* Biểu diễn các tập hợp lên trục số, lưu ý vị trí các phần tử trên trục số (phần tử nào nhỏ hơn thì đứng ở bên trái).

* Dùng định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

2. VÍ DỤ

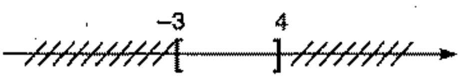
Ví dụ 1. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $[-3 ; 1) \cup (0 ; 4]$; b) $(-2 ; 15) \cup (3 ; +\infty)$;

c) $(0 ; 2) \cup [-1 ; 1)$; d) $(-\infty ; 1) \cup (-1 ; +\infty)$.

Giải

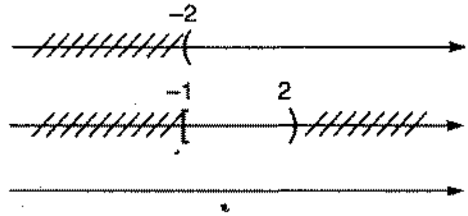
a) $[-3 ; 1) \cup (0 ; 4] = [-3 ; 4]$.



b) $(-2\ ;15)\cup(3\ ;\ +\infty)=(-2\ ;\ +\infty)$.

c) $(0\ ;2)\cup[-1\ ;1)=[-1\ ;2)$.

d) $(-\infty\ ;1)\cup(-1\ ;\ +\infty)=\mathbb{R}$.



Hình 1.1

Ví dụ 2. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số :

a) $[-12\ ;3)\cap(-1\ ;4]$;　　　　b) $(4\ ;7)\cap(-7\ ;-4)$;

c) $(2\ ;3)\cap[3\ ;5)$;　　　　d) $(-\infty\ ;1)\cap(-1\ ;+\infty)$.

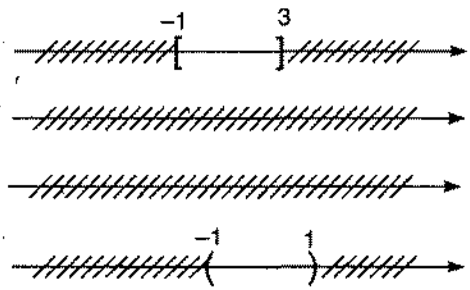
Giải

a) $[-12\ ;3)\cap(-1\ ;4]=[-1\ ;3]$.

b) $(4\ ;7)\cap(-7\ ;-4)=\varnothing$.

c) $(2\ ;3)\cap[3\ ;5)=\varnothing$.

d) $(-\infty\ ;1)\cap(-1\ ;+\infty)=(-1\ ;1)$.



Hình 1.2

3. BÀI TẬP

Bài 5. Cho $A=\{2\ ;3\ ;4\ ;5\ ;6\ ;7\}$; $B=\{0\ ;2\ ;4\ ;6\ ;8\}$.

Tìm tất cả các tập X sao cho $X\subset A$ và $X\subset B$.

Bài 6. Cho $A=[-2\ ;4]$; $B=(2\ ;+\infty)$; $C=(-\infty\ ;3)$.

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng lên trục số.

a) $A\cup B\ ;B\cup C\ ;A\cup C$;　　　　b) $A\cap B\ ;B\cap C\ ;A\cap C$;

c) $A\setminus B\ ;B\setminus A$;　　　　d) $\mathbb{R}\setminus A\ ;\mathbb{R}\setminus B\ ;\mathbb{R}\setminus C$.

Bài 7. Cho tập hợp $A=\{a\ ;b\ ;c\ ;d\ ;e\ ;f\ ;g\}$. Tìm tất cả tập con có 6 phần tử của A.

Bài 8. Tìm m sao cho : $(m-7\ ;\ m)\subset(-4\ ;3)$.

Bài 9. Tuỳ theo m tìm $(-\infty\ ;\ m]\cap(5\ ;+\infty)$.

Vấn đề 3

Giải bài toán bằng biểu đồ Venn

1. PHƯƠNG PHÁP

* Vẽ các vòng tròn đại diện các tập hợp (mỗi vòng tròn là một tập hợp), lưu ý hai vòng tròn có phần chung nếu giao của hai tập hợp khác rỗng.
* Dùng các biến để chỉ số phần tử của từng phần không giao nhau.
* Từ giả thiết bài toán, lập hệ phương trình giải tìm các biến.

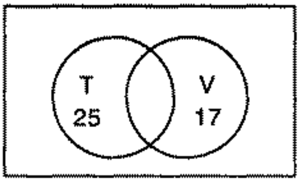
2. VÍ DỤ

Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp 10A có 45 học sinh và có 13 học sinh không đạt học sinh giỏi.

Giải

Số bạn được công nhận học sinh giỏi là $45 - 13 = 32$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Văn và Toán là : $25 + 17 - 32 = 10$ (học sinh).



Hình 1.3

3. BÀI TẬP

Bài 10. Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp học lực giỏi, 20 bạn được xếp hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được học sinh giỏi vừa được hạnh kiểm tốt. Hỏi :

a) Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hay hạnh kiểm tốt ?

b) Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt ?

BÀI TẬP ÔN

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Phát biểu nào sau đây là mệnh đề ?

a) Phở là món ăn của người Việt Nam.

b) Hôm qua trời đẹp quá !

c) $6 : 2 = 3$.

d) $6 - 2 = 3$.

e) $9 \geq 9$.

Bài 2. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau :

a) 2007 là số nguyên tố.

b) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ vô nghiệm.

c) $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 - n$ chia hết cho 2.

d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 > 0$.

Bài 3. Cho mệnh đề : "Nếu tam giác cân thì nó có hai đường trung tuyến bằng nhau"

a) Chứng minh mệnh đề trên đúng.

b) Phát biểu mệnh đề trên dùng thuật ngữ "điều kiện cần".

c) Phát biểu mệnh đề trên dùng thuật ngữ "điều kiện đủ".

d) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai.

Bài 4. Chứng minh $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Bài 5. Cho các tập hợp sau :

$$A = \left\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N} ; n \leq 3 \right\} ;$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 \right\} ;$$

$$C = \left\{ 2n \middle| n \in \mathbb{Z} ; -1 \leq n \leq 2 \right\}.$$

a) Liệt kê các phần tử của A, B, C.

b) Xác định các tập hợp sau và so sánh :

i) $(A \cup B) \cup C$; $A \cup (B \cup C)$.

ii) $(A \cap B) \cap C$; $A \cap (B \cap C)$.

iii) $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

iv) $A \cap (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 5\}$;

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge 2\}.$$

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

$$A \cup B \cup C \text{ ; } A \cap B \cap C \text{ ; } (A \cup B) \cap C \text{ ; } (A \cap C) \cup B.$$

Bài 7. Lớp 10A có 45 học sinh, trong kì thi học kì I có 25 em đạt loại giỏi môn Toán, 20 em đạt loại giỏi môn Lí, 18 em đạt loại giỏi môn Hoá, 6 em không đạt loại giỏi bất kì môn nào, 5 em đạt loại giỏi cả ba môn. Hỏi số em chỉ đạt loại giỏi một môn.

Bài 8. Cho tập hợp A và B có số phần tử hữu hạn. Chứng minh tổng số phần tử của A và B bằng số phần tử của $A \cup B$ cộng với số phần tử $A \cap B$.

Bài 9. Gọi B_n là tập hợp các số nguyên là bội số của n. Tìm mối liên hệ của m và n sao cho :

a) $B_n \subset B_m$.   b) $B_n \cap B_m = B_{m.n}$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề ?

   a) Paris có phải là thủ đô của nước Pháp không ?

   b) Paris là thủ đô của nước Pháp.

   c) $\sqrt{3}$ là số nguyên.

   d) Tam giác ABC luôn có góc tù.

2. Cho mệnh đề "Phương trình $x^2 + 2x + 1 = 0$ có nghiệm". Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề trên và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định.

   a) "Phương trình $x^2 + 2x + 1 = 0$ có nghiệm kép". Đây là mệnh đề sai.

   b) "Phương trình $x^2 + 2x + 1 = 0$ có nghiệm kép". Đây là mệnh đề đúng.

c) "Phương trình $x^2+2x+1=0$ vô nghiệm". Đây là mệnh đề sai.

d) "Phương trình $x^2+2x+1=0$ vô nghiệm". Đây là mệnh đề đúng.

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

a) $7 \le 7$; b) $7 \le 10$; c) $\pi^2 \ge 10$; d) $\pi^2 \le 10$.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Nếu $a \ge b$ thì $a^2 \ge b^2$.

b) Nếu $a^2 \ge b^2$ thì $a \ge b$.

c) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

d) Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng ?

a) Nếu cả hai số chia hết cho 3 thì tổng hai số đó chia hết cho 3.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

c) Nếu số đó tận cùng bằng 0 thì nó chia hết cho 5.

d) Nếu một số chia hết cho 5 thì nó có tận cùng bằng không.

6. Tìm x để mệnh đề chứa biến sau đúng : "$x^3-4x^2+3x=0$".

a) $x=0$; $x=1$; b) $x=0$; $x=1$; $x=3$;

c) $x=0$; $x=3$; d) $x=1$; $x=0$.

7. Cho mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, 2n^2-n-1 \ge 0$". Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề trên.

a) "$\exists n \in \mathbb{N}, 2n^2-n-1 \ge 0$"; b) "$\exists n \in \mathbb{N}, 2n^2-n-1 > 0$";

c) "$\exists n \in \mathbb{N}, 2n^2-n-1 < 0$"; d) "$\exists n \in \mathbb{N}, 2n^2-n-1 \le 0$".

8. Cho mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, n^3-2n^2+3n \ge 0$". Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề trên và cho biết mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.

a) "$\forall n \in \mathbb{N}, n^3-2n^2+3n \ge 0$". Đây là mệnh đề đúng.

b) "$\forall n \in \mathbb{N}, n^3-2n^2+3n < 0$". Đây là mệnh đề đúng.

c) "$\forall n \in \mathbb{N}, n^3-2n^2+3n \ge 0$". Đây là mệnh đề sai.

d) "$\forall n \in \mathbb{N}, n^3-2n^2+3n < 0$". Đây là mệnh đề sai.

9. Cho a, b là hai số tự nhiên. Mệnh đề nào sau đây sai ?

a) Nếu a và b lẻ thì $a + b$ chẵn.

b) Nếu a chẵn và b lẻ thì ab lẻ.

c) Nếu a, b là các số lẻ thì ab lẻ.

d) Nếu a^2 lẻ thì a lẻ.

10. Cho x là số tự nhiên. Phủ định của mệnh đề "$\forall x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn" là mệnh đề nào dưới đây ?

a) "$\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số lẻ".

b) "$\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn".

c) "$\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ".

d) "$\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số chẵn".

11. Kí hiệu nào sau đây để chỉ 3 là số tự nhiên ?

a) $3 \subset \mathbb{N}$; b) $3 \in \mathbb{N}$; c) $3 \notin \mathbb{N}$; d) $3 = \mathbb{N}$.

12. Kí hiệu nào sau đây để chỉ π không là số hữu tỉ ?

a) $\pi \subset \mathbb{Q}$; b) $\pi \in \mathbb{Q}$; c) $\pi \notin \mathbb{Q}$; d) $\pi = \mathbb{Q}$.

13. Cho $A = \{1 ; 2 ; 3\}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

a) $\varnothing \subset A$; b) $1 \in A$; c) $\{1;2\} \subset A$; d) $2 = A$.

14. Cho tập $A = \{a ; b ; c ; d\}$. Tập A có mấy tập con ?

a) 14 ; b) 15 ; c) 16 ; d) 17.

15. Cho hai tập hợp : $A = \{x \mid x$ là ước số nguyên dương của $12\}$;

$B = \{x \mid x$ là ước số nguyên dương của $18\}$.

Hãy liệt kê các phần tử của $A \cap B$.

a) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6\}$;

b) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$;

c) $\{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$;

d) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$.

16. Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Xét các tập hợp sau :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\};$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid [P(x)]^2 + [Q(x)]^2 = 0\right\}.$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $C = A \cap B$;

b) $C = A \cup B$;

c) $C = A \setminus B$;

d) $C = B \setminus A$.

17. Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Xét các tập hợp sau :

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x).Q(x) = 0\}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $C = A \cap B$; b) $C = A \cup B$;

c) $C = A \setminus B$; d) $C = B \setminus A$.

18. Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Xét các tập hợp sau :

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$; $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0\right\}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $C = A \cap B$; b) $C = A \cup B$; c) $C = A \setminus B$; d) $C = B \setminus A$.

19. Cho $M = [-4\ ;\ 7]$ và $N = (-\infty\ ; -2) \cup (3\ ; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là :

a) $[-4\ ; -2]$; b) $(3\ ;\ 7]$;

c) $[-4\ ; -2) \cup (3\ ;\ 7]$; d) $[-4\ ; -2) \cap (3\ ;\ 7]$.

20. Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để hai tập hợp $(-\infty\ ;\ 9a)$ và $\left(\dfrac{4}{a}\ ; +\infty\right)$ có giao khác rỗng là :

a) $-\dfrac{2}{3} < a < 0$; b) $-\dfrac{2}{3} \le a < 0$; c) $-\dfrac{3}{4} < a < 0$; d) $-\dfrac{3}{4} \le a < 0$.

21. Tìm mệnh đề đúng.

a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để chúng đồng dạng.

b) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng đồng dạng.

c) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng đồng dạng.

d) Nếu hai tam giác đồng dạng thì chúng bằng nhau.

22. Cho mệnh đề: "Với mọi số nguyên n không chia hết cho 3, $n^2 - 1$ chia hết cho 3". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là mệnh đề nào dưới đây ?

a) "Tồn tại số nguyên n không chia hết cho 3, $n^2 - 1$ không chia hết cho 3".

b) "Tồn tại số nguyên n không chia hết cho 3, $n^2 - 1$ chia hết cho 3".

c) "Tồn tại số nguyên n chia hết cho 3, $n^2 - 1$ không chia hết cho 3".

d) "Tồn tại số nguyên n chia hết cho 3, $n^2 - 1$ chia hết cho 3".

23. Tìm mệnh đề đúng.

a) AC vuông góc BD là điều kiện cần để $ABCD$ là hình thoi.

b) AC vuông góc BD là điều kiện đủ để $ABCD$ là hình thoi.

c) AC vuông góc BD là điều kiện cần và đủ để $ABCD$ là hình thoi.

d) Nếu AC vuông góc BD thì $ABCD$ là hình thoi.

24. Cho x là số thực, mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) $12-3x>0 \Rightarrow x>4$;　　b) $12-3x>0 \Rightarrow -3x>12$;

c) $12-3x>0 \Rightarrow 3x>12$;　　d) $12-3x>0 \Rightarrow x<4$.

25. Cho A, B là hai điểm trên đường tròn (C) tâm O và I là một điểm trên đoạn AB (cung AB không đi qua tâm O). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) "Nếu I là trung điểm AB thì $OI = AB$".

b) "Nếu I là trung điểm AB thì $OI \perp AB$".

c) "Nếu I là trung điểm AB thì $OI \,//\, AB$".

d) "Nếu I là trung điểm AB thì $OI \equiv AB$".

26. Cho các tập hợp : $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $N = \{1; 3; 5; 7\}$; $P = \{2; 4; 6; 8\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) $M \cap N = M \cap P$;　　b) $N \cup P = M \cup P$;

c) $M \setminus (N \setminus P) = M \setminus N$;　　d) $M \cup (P \setminus N) = N$.

27. Số các tập con có hai phần tử của $B = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$ là bao nhiêu ?

a) 15 ;　　b) 16 ;　　c) 22 ;　　d) 25.

28. Có bao nhiêu tập con ba phần tử có chứa a, b của

$$C = \{a ; b ; c ; d ; e ; f ; g ; h ; i ; j\} ?$$

a) 8 ;　　b)10 ;　　c) 12 ;　　d) 14.

29. Cho hai tập hợp : $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 9\}$, $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây ?

a) $\{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$;　　b) $\{6 ; 9 ; 1 ; 3\}$;

c) $\{6 ; 9\}$;　　d) $\varnothing$.

30. Tìm các mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

a) $x \in [-4 ; 1) \Leftrightarrow -4 \le x < 1$;　　b) $x \in [-4 ; 1) \Leftrightarrow -4 \le x \le 1$;

c) $x \in [-4 ; 1) \Leftrightarrow -4 < x \le 1$;　　d) $x \in [-4 ; 1) \Leftrightarrow -4 < x < 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

§1. MỆNH ĐỀ

1. a) mệnh đề sai ; b) mệnh đề đúng ; c) không là mệnh đề ;
d) không là mệnh đề ; e) mệnh đề đúng ; f) không là mệnh đề.

2. a) Có hữu hạn số nguyên tố. (Sai)
b) Một năm có hơn 52 ngày chủ nhật. (Đúng)
c) Có số nguyên tố chẵn. (Đúng)
d) Giải thưởng lớn nhất của Toán học không phải giải Nobel. (Đúng)

3. a) Nếu $(a + b)$ chia hết cho c thì a, b chia hết cho c. (Sai)
b) Tam giác đều thì có hai góc bằng 60^o. (Đúng)
c) Nếu $3n + 1$ là số chẵn thì n là số lẻ. (Đúng)
d) Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì a, c trái dấu. (Sai)

4. $P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC vuông tại A thì AI bằng một nửa cạnh BC".

5. a) $P(0)$ đúng, $P(1)$ đúng, $P(2)$ sai.
b) $\exists x \in \mathbb{R},\ P(x)$ đúng.

6. a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$. (Sai)
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 6x + 9 > 0$. (Sai)
c) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^3 - n \not\vdots\ 3$. (Sai)

§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

2. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow$ có hai số m, n nguyên tố cùng nhau sao cho $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$. Ta chứng minh m, n đều chia hết cho 2.

3. a) $ABCD$ là hình thoi là điều kiện đủ để có hai đường chéo vuông góc.
b) $ABCD$ là hình chữ nhật là điều kiện đủ để có hai đường chéo bằng nhau.
c) Một số nguyên dương lẻ là tổng của hai số chính phương là điều kiện đủ để số nguyên dương đó có dạng $4k + 1$.

4. a) Hai tam giác đồng dạng là điều kiện cần để chúng bằng nhau.
   b) Hai góc đối bù nhau là điều kiện cần để tứ giác $ABCD$ nội tiếp.
   c) Hình thang cân là điều kiện cần để chúng có hai đường chéo bằng nhau.

5. a) Điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
   b) Trong đường tròn, đường kính vuông góc dây cung là điều kiện cần và đủ để đường kính đó qua trung điểm của dây cung.

6. ***Chú ý :*** một số không chia hết cho 3 thì bình phương số đó chia 3 dư 1.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. $E \subset D \subset B \subset A$; $E \subset C \subset B \subset A$.

2. a) $B = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$; $C = \{2\}$.
   b) $A \cap B = \{2\}; B \cap C = \{2\}; A \cap C = \{2\}$.
   c) $A \cup B = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$;
   $B \cup C = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$; $A \cup C = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
   d) $A \setminus B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$; $B \setminus C = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1\}$;
   $A \setminus C = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

3. a) $\{4 ; 6\}$; b) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$;
   c) $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$; d) $\{0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10\}$;
   e) $\{2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

4. 8 tập con.

5. $X \subset \{2 ; 4 ; 6\}$, có 8 tập con thoả yêu cầu bài toán.

6. a) $[-2 ; +\infty)$; $\mathbb{R}$; $(-\infty ; 4]$; b) $[2 ; 4]$; $(2 ; 3)$; $[-2 ; 3)$;
   c) $[-2; 2]$; $(4; +\infty)$.

7. Có 7 tập con thoả yêu cầu bài toán.

8. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 \geq -4 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

9. $m \le 5 : \varnothing$; $m > 5 : (5\ ;\ m]$.

10. a) 25 ;

b) 20.

BÀI TẬP ÔN

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

7. Gọi a, b, c lần lượt là số học sinh đạt loại giỏi một môn, hai môn, ba môn. Ta có :

$$\begin{cases} a+b+c=39 \\ a+2b+3c=63 \\ c=5 \end{cases}$$

Từ đó suy ra số em đạt loại giỏi một môn là 20 em.

9. a) n là bội của m ; b) m, n nguyên tố cùng nhau.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	c	c	c	d	b	c	d	b	a

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	d	c	c	a	b	c	c	a

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
b	a	a	d	b	c	a	a	c	a