CÁC DẠNG BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ VÀ CÁCH GIẢI

A. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG.

* **Hai bất phương trình được gọi tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm**.

* **Một số phép biến đổi tương đương:**

+) Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình.

+) Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức (luôn dương hoặc âm) mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình.

+) Lũy thừa bậc lẻ hai vế, khai căn bậc lẻ hai vế của một bất phương trình.

+) Lũy thừa bậc chẵn hai vế, khai căn bậc chẵn hai vế khi hai vế của bất phương trình cùng dương.

+) Nghịch đảo hai vế của bất phương trình khi hai vế cùng dương ta phải đổi chiều.

I. Kỹ thuật lũy thừa hai vế.

1. Phép lũy thừa hai vế:

a) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

b) $\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$.

*) $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B < 0 \\ A \ge 0 \end{cases}$.

*) $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \\ A < B^2 \end{cases}$.

*) $\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow 0 \le A < B$.

(Đối với các trường hợp còn lại với dấu $\ge, \le, <$ các bạn có thể tự suy luận).

2. Lưu ý:

Đặc biệt chú ý tới điều kiện của Bài toán. Nếu điều kiện đơn giản có thể kết hợp vào bất phương trình, còn điều kiện phức tạp nên để riêng.

3. Ví dụ:

Bài 1: Giải các BPT sau:

a) $\sqrt{x-3} < 2x-1$; b) $\sqrt{x^2-x+1} \le x+3$

c) $\sqrt{3x-2} > 4x-3$; d) $\sqrt{3x^2+x-4} \ge x+1$

Giải:

a) $\sqrt{x-3} < 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ x-3 \ge 0 \\ x-3 < (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \ge 3 \\ 4x^2-5x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $[3;+\infty)$.

b) $\sqrt{x^2-x+1} \le x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \\ x^2-x+1 \le (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{8}{7}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\dfrac{8}{7};+\infty\right)$.

Hai Bài tập còn lại các bạn tự giải.

Bài 2: Giải BPT: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} \le \sqrt{1-2x}$ (1).

Giải:

* $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+4} \le \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \\ x+4 \ge 0 \\ x+4 \le \left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x+1 \le \sqrt{2x^2-3x+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 2x+1<0 \\ \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 2x^2-3x+1 \ge (2x+1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \le x \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le 0.$$

* Vậy tập nghiệm: [-4;0].

Bài tập tương tự : Giải BPT: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ (TS (A)_ 2005).

Đáp số: Tập nghiệm T=[2;10).

II. Kỹ thuật chia điều kiện.

1. Kỹ thuật:

Nếu **Bài** toán có điều kiện là $x \in D$ mà $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n$ ta có thể chia **Bài** toán theo n trường hợp của điều kiện:

+) Trường hợp 1: $x \in D_1$, giải bất phương trình ta tìm được tập nghiệm T_1.

+) Trường hợp 2: $x \in D_2$, giải bất phương trình tìm được tập nghiệm T_2.

……………………………………

+) Trường hợp n: $x \in D_n$, giải bất phương trình tìm được tập nghiệm T_n.

Tập nghiệm của bất phương trình là $T = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n$.

2. Yêu cầu:

Cần phải xác định giao, hợp trên các tập con của R thành thạo.

3. Ví dụ:

Bài 1: Giải BPT: $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x} < 2$

(1)

Giải:

* Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

* Với $0 < x \leq 4/3$ (i) ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ -3x^2 + x + 4 < (2x-2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 7x^2 - 9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{7} \quad \text{(ii)}$$

Kết hợp (i) và (ii) ta có tập nghiệm là $T_1 = \left(\dfrac{9}{7}; \dfrac{4}{3}\right]$.

* Với $-1 \leq x < 0$ thì (1) luôn đúng. Tập nghiệm trong trường hợp này là T_2 = [-1 ;0).

Vậy tập nghiệm của (1) là $T = T_1 \cup T_2 = \left(\dfrac{9}{7}; \dfrac{4}{3}\right] \cup [-1;0)$.

Bài tập :

Giải BPT : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

Đáp số : $x \geq 4$ hoặc x = 1.

III. Kỹ thuật khai căn.

1**) Đưa biểu thức ra ngoài căn thức :**

* $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A (A \geq 0) \\ -A (A < 0) \end{cases}$.

* $\sqrt{\dfrac{A^2 y}{E^2 x}} = \left|\dfrac{A}{E}\right| \sqrt{\dfrac{y}{x}} (E, x \neq 0)$.

* $\sqrt[2n]{A^{2n}} = |A|$ * $\sqrt[2n+1]{A^{2n+1}} = A$

2) Lưu ý :

Biến đổi các biểu thức trong căn thức thành hằng đẳng thức.

3) Ví dụ :

Giải BPT : $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \dfrac{3}{2}$ (1)

Giải :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right| > \frac{3}{2} (2) \end{cases}$$

* Với $\sqrt{x-1}-1 \ge 0 \Leftrightarrow x-1 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$ luôn thỏa mãn bpt (2).

Vậy trong trường hợp này tập ngiệm là T_1=[2 ;$+\infty$).

* Với $\sqrt{x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 2$ bpt (2) trở thành :

$$\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 > \frac{3}{2} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy tập nghiệm của (1) trong trường hợp này là T_2=[1 ;2).

KL : Tập nghiệm của (1) là T=$T_1 \cup T_2 = [1;+\infty)$.

* **Chú ý** : ***Bài*** *này ta có thể giải bằng phương pháp bình phương hai vế..*

IV. Kỹ thuật phân tích thành nhân tử đưa về bất phương trình tích.

1. Bất phương trình tích : Trên điều kiện của bpt ta có :

* $f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ * $f(x)g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Các trường hợp còn lại, các bạn tự suy luận.

2. Lưu ý :

Đây là kỹ thuật giải đòi hỏi có tư duy cao, kỹ năng phân tích thành nhân tử thành thạo, cần phải nhìn ra nhân tử chung nhanh.

3. Ví dụ :

Giải BPT : $\sqrt{x-1}\left(3x^2-x+1\right)-3x^3-1\geq 0$ (1)

Giải :

Điều kiện : $x\geq 1(*)$

(1) $x-1+3x^2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-x\sqrt{x-1}-3x^3-x\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+3x^2+1\right)-x\left(\sqrt{x-1}+3x^2+1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-x\right)\left(\sqrt{x-1}+3x^2+1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-x\geq 0$ (do $\sqrt{x-1}+3x^2+1>0$ khi $x\geq 1$).

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq x \Leftrightarrow x-1\geq x^2 \Leftrightarrow x^2-x+1\leq 0$ (vô nghiệm).

Vậy BPT đã cho vô nghiệm.

V. Kỹ thuật nhân chia liên hợp :

1. Biểu thức nhân chia liên hợp:

* $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}\mp\sqrt{B}}\,(A\neq B)$.

* $\dfrac{1}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{\sqrt{A}\mp\sqrt{B}}{A-B}\,(A\neq B)$.

2. Lưu ý:

+) Nên nhẩm với một số nghiệm nguyên đơn giản.

+) Chú ý tới các biểu thức nhân chia liên hợp.

3. Ví dụ:

Giải BPT : $\sqrt{x^2+15}<3x-2+\sqrt{x^2+8}$
(1)

Giải:

* Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}<3x-2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+15-x^2-8}{\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2+8}}<3x-2 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2-8}}<3x-2 \text{ (2).}$$

Từ (2) ta có $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$.

* Mặt khác:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+15}-4<3x-3+\sqrt{x^2+8}-3$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}<3(x-1)+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}-3-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right)<0 \quad (3)$$

* Lại có : Vì $x>\frac{2}{3}$ nên $\sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}-3<0.$$

Vậy (3) $\Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

KL : BPT (1) có tập nghiệm là T=$(1;+\infty)$.

* Chú ý : *Trong **Bài** toán này, việc thêm bớt, nhóm các số hạng với nhau để xuất hiện nhân tử chung xuất phát từ việc nhẩm được khi x=1 thì hai vế của BPT bằng nhau.*

*Thường dùng cách giải tương tự cho **Bài** toán :* $\sqrt{x^2+a^2}<cx-d+\sqrt{x^2+b^2}$.

Bài tập tương tự : Giải BPT : $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8\le 0$

(Dựa vào ĐH_B_2010).

VI. Một số Bài tập tự luyện : Giải các BPT sau :

1, $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\ge \frac{x+3}{2}$.

2, $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}<1-x$.

3, $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}>\sqrt{2}$.

4, $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}\le\sqrt{3+x}$.

5, $(4x-1)\sqrt{x^2+1}>2x^2+2x+1$.

6, $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$ (ĐH_D_2002)

7, $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

8, $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}}>\frac{1}{2x-1}$.

9, $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

10, $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2-2x+15}\le\sqrt{4x^2-18x+18}$.

11, $\dfrac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2} < x+21$.

12, $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

13, $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} \geq \dfrac{2}{x}$

14, $\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x\left(x^2-x+1\right)} \leq \sqrt{\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x}}$.

B. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ .

I. Một số yêu cầu :

- *Dạng này học sinh cần nhớ cách đặt ẩn. Từ đó mở rộng cho* ***Bài*** *toán tương tự.*

- *Chú ý tới các điều kiện của ẩn.*

II. Một số dạng toán và các Bài toán làm mẫu.

1. Đặt ẩn phụ đưa về bpt đơn giản hơn :

Bài 1 :Giải BPT : $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}>3$ (1)

Giải :

* Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x-1 \end{array}\right.$ (*)

* Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}(t>0)$. BPT (1) trở thành : $\dfrac{1}{t^2}-2t>3 \Leftrightarrow 2t^3+3t^2-1<0(t>0)$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(2t^2+t-1\right)<0 \Leftrightarrow 0<t<\dfrac{1}{2}$.

Vậy $0<\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}<x<-1$.

Bài 2 : Giải BPT : $5\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)<2x+\dfrac{1}{2x}+4$ (2)

Giải :

* Điều kiện : x>0.

* Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow t \geq \sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức Côsi)

$\Rightarrow t^2 = x+\frac{1}{4x}+1 \Leftrightarrow 2x+\frac{1}{2x}=2t^2-2$.

* BPT (2) trở thành : $5t<2t^2-2+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>2 \\ t<\frac{1}{2} \end{array}\right.$ kết hợp với $t \geq \sqrt{2}$ ta được $t>2$.

* Khi đó $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}>\frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 0<\sqrt{x}<\frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{3}{2}+\sqrt{2} \\ 0<x<\frac{3}{2}-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

KL :

* Chú ý : ***Bài*** *toán có thể mở rộng cho dạng* : $a\left[f(x)+f^{-1}(x)\right]+b\left[f^2(x)+f^{-2}(x)\right]+c<0$.

2. Đặt ẩn phụ đưa về bất phương trình lượng giác :

Giải BPT : $\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}+\sqrt{x^5} \leq 1$ (1).

Giải :

* Điều kiện : $x \in [0;1]$.

* Đặt $x=\cos t$ với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. BPT (1) trở thành : $\sin^5 t+\sqrt{\cos^5 t} \leq 1$.

Do $\sin^5 t \leq \sin^2 t$ và nên $\sin^5 t+\sqrt{\cos^5 t} \leq \sin^2 t+\cos^2 t=1$ với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

* Do đó BPT đã cho có nghiệm là $x \in [0;1]$.

3. Bài tập tự luyện: Giải các BPT:

1) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}<3.$ 2) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$.

3) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}<x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right).$ 4) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

5) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2<2$. 6) $\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\geq x$.

7) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\leq 2$. 8) $x+\sqrt{1-x^2}<x\sqrt{1-x^2}$

9) $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}<3x+1$ 10) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)>30$

11) $1+\sqrt{1-x^2}>2x^2$ 12) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]\geq\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$

13) $\left(x+3\sqrt{x}+2\right)\left(x+9\sqrt{x}+18\right)\leq 168x$ 14) $4\sqrt{x^3-1}<4x^2+7x+1$

15) $\frac{1}{1-x^2}+1>\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$ 16) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}<\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

17) $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}\geq\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 18) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

C. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ.

* *Nhớ được cách xét tính đơn điệu của một hàm số, lập bảng biến thiên…*

* *Nhớ các bất đẳng thức.*

* *Thường áp dụng cho các* ***Bài*** *toán đặc thù, phức tạp không có thuật toán cụ thể nhưng hay có trong các kì thi đại học các năm gần đây.*

I. Kỹ thuật sử dụng BĐT để đánh giá hai vế:

1) Bất đẳng thức thông dụng:

* Bất đẳng thức Côsi:

Với $a_1\geq 0,a_2\geq 0,...,a_n\geq 0$ ta có $\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

* Bất đẳng thức Bunhiacopski :

Với mọi $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ ta luôn có :

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

Dấu « = » xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

2) Ví dụ :

Bài 1 : Giải BPT : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le 2 - \frac{x^2}{4}$ (1)

Giải :

* Điều kiện : $\begin{cases} 1+x \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ (*)

* Khi đó (1) $\Leftrightarrow 1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2} \le 4 - x^2 + \frac{x^4}{16}$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + 1\right) + \frac{x^4}{16} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2} - 1\right)^2 + \frac{x^4}{16} \ge 0$$

Điều này luôn đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy nghiệm của BPT là $x \in [-1;1]$.

Bài 2 : Giải BPT : $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}} \ge 1$ (2)

(ĐH_A_2010)

Giải:

* Điều kiện: $x \ge 0$ (*).

* Ta có: $\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2 + 1} > 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} < 0$.

Vậy (2) $\Leftrightarrow x - \sqrt{x} \le 1 - \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)} \le 1 - x + \sqrt{x}$ (3).

Mặt khác: Theo BĐT bunhiacopski ta có:

$$\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}=\sqrt{(1+1)\left[(1-x)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2\right]}\ge 1-x+\sqrt{x}\quad (4)$$

* Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}1-x=\sqrt{x}\\ 1-x+\sqrt{x}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)^2=x\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

KL:

III. Kỹ thuật sử dụng tích vô hướng của hai vectơ.

1. Định nghĩa: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

a) Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

+) Trong hệ tọa độ Oxy, nếu $\vec{u}=(x;y),\vec{v}=(x';y')$ thì $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'$.

+) Trong hệ tọa độ Oxyz, nếu $\vec{u}=(x;y;z),\vec{v}=(x';y';z')$ thì $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$.

b) $\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

c) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

2) Ví dụ: Ta quay lại **Bài** thi ĐH_A_2010:

Giải BPT : $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\ge 1$ (1) (ĐH_A_2010)

Giải:

* Điều kiện: $x\ge 0.$

* Do $\sqrt{2(x^2-x+1)}=\sqrt{(2x^2-2x+1}>1$ nên bất phương trình (1) tương đương với

$$x-\sqrt{x}\le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2-x+1}\le(1-x)+\sqrt{x}\qquad (2)$$

Trong mặt phẳng tọa độ lấy $\vec{a}=(1-x;\sqrt{x})$, $\vec{b}=(1;1)$. Khi đó:

$$\vec{a}.\vec{b}=1-x+\sqrt{x};\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}.$$

Vậy (2) trở thành $|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}.\vec{b}$. Điều này xảy ra khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng tức là tồn tại k>0 sao cho

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=k \\ \sqrt{x}=k \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét: Ta có thể xây dựng được một lớp các ***Bài*** *toán tương tự trên bằng cách lấy các vectơ thích hợp.*

IV. Kỹ thuật sử dụng khảo sát hàm số để đánh giá.

1. Thuật toán:

Để giải bất phương trình $f(x) > g(x); f(x) < g(x); f(x) \ge g(x); f(x) \le g(x)$ *ta khảo sát hoặc căn cứ vào tính chất của các hàm số y = f(x) và y = g(x), đưa ra bảng biến thiên và từ bảng biến thiên đưa ra kết luận.*

2. Lưu ý: Nếu m là tham số thì y = h(m) là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

3. Ví dụ:

Bài 1: Tìm a để BPT sau có nghiệm:
$x^3+3x^2-1 \le a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$ (1)

Giải:

* Điều kiện: $x \ge 1$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(x^3+3x^2-1\right) \le a$ (1').

* Đặt $f(x) = \left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$. Ta có:

$$f'(x) = \left(3x^2+6x\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) + \left(x^3+3x^2-1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) > 0 \forall x > 1$$

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$.

* Bảng biến thiên:

x	1		$+\infty$
f(x)	3	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy bpt (1) có nghiệm khi $a \geq 3$.

Bài 2: Tìm m để BPT $2x^2 - 2mx + 1 \geq 3\sqrt{2x^3 + x}$ (1) nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2mx \leq 2x^2 + 1 - 3\sqrt{2x^3 + x} \Leftrightarrow 2m \leq 2x + \frac{1}{x} - 3\sqrt{2x + \frac{1}{x}} (x > 0)$ (1')

* Đặt $t = 2x + \frac{1}{x}$. Do $x > 0$ nên theo BĐT Côsi ta có $t \geq 2\sqrt{2x.\frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$.

(*Có thể sử dụng bảng biến thiên để tìm điều kiện của t)*

Khi đó (1') trở thành :

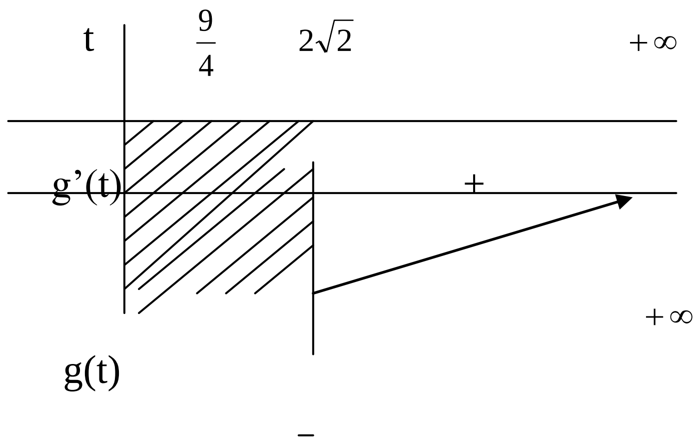
$$m \leq \frac{1}{2}\left(t - 3\sqrt{t}\right)(t \geq 2\sqrt{2}) \quad (2).$$

(1) nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t \geq 2\sqrt{2}$.

* Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{2} - \frac{3\sqrt{t}}{2}$ có $g'(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t} - 3}{4\sqrt{t}}$.

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{4}.$$

* Ta có bảng biến thiên :



$\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy (2) nghiệm đúng với mọi $t \geq 2\sqrt{2}$ khi $m \leq \sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$.

V. Kỹ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số trên miền xác định.

1. Thuật toán :

Giả sử hàm số y = f(x) đơn điệu trên D, u(x) và v(x) có miền giá trị là tập con của D.

Khi đó ta có : $f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x).$

$f(u(x)) < f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$ *hoặc* $u(x) > v(x)$

(Tương tự cho các dấu $\leq, \geq, >$*)*

2. Ví dụ :

$$\boxed{\text{Giải BPT : } (x+3)\sqrt{x+1}+(x-3)\sqrt{1-x}+2x \leq 0 \quad (1)}$$

Giải :

* Điều kiện : $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ (*)

* Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1}+(x+1)+2\sqrt{x+1} \leq (1-x)\sqrt{1-x}+(1-x)+2\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^3+\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\sqrt{x+1}\le\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\left(\sqrt{1-x}\right)^2+2\sqrt{1-x}\ \ (2)$$

* Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+2t$ với $t\ge 0$:

Có $f'(t)=3t^2+2t+2>0\forall t\ge 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$.

* Mặt khác : (2) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1})\le f(\sqrt{1-x})\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\le\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow x+1\le 1-x\Leftrightarrow x\le 0$ kết hợp với điều kiện (*) ta được : $-1\le x\le 0$.

KL :

VI. Kỹ thuật sử dụng tính đối xứng của hai nghiệm.

Tìm m để BPT sau có nghiệm duy nhất :
$-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}+2\sqrt[4]{x(1-x)}\ge m+m^2$ (1)

Giải :

* Điều kiện : $0\le x\le 1$ (*)

* Nhận xét : Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì (1-x_0) cũng là nghiệm của (1). Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=1-x_0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Thay $x_0=\frac{1}{2}$ vào (1) ta được $-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+2m\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}+2\sqrt[4]{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}\ge m+m^2\Leftrightarrow m^2\le 0\Leftrightarrow m=0$.

* Với m=0 thì (1) trở thành :

$$-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+2\sqrt[4]{x(1-x)}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}=0\Leftrightarrow x=1-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ (thỏa mãn (*))}.$$

Vậy bất phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi m=0.

VII. Một số Bài tập tự luyện :

Bài 1 : Giải các BPT :

1, $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\ge 4-\left(x+\frac{1}{x}\right)$.   2, $\dfrac{x-9\sqrt{x}}{2-\sqrt{100x^2-40x+40}}\ge 1$

3, $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\le 12$ 4, $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\ge\sqrt{3x^2+4x+1}$

5, $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le 2\sqrt{x^2+1}$ 6, $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-10x+50}\ge 5$

7, $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}>x^2-6x+11$ 8, $(3-x)\sqrt{x-1}+\sqrt{5-2x}\le\sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$

Bài 2 : Tìm m để BPT sau vô nghiệm : $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)\ge\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.

(ĐH_B_2004)

Bài 3: Tìm a để BPT sau có nghiệm : $\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{4x^2-2x+1}<2a$.

Bài 4 : Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm :

$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}\le m$

Bài 5: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}\le 2\sqrt[4]{x^2-1}$.

Bài 6: Tìm m để BPT sau nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$: $m+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}\le\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$