TÀI LIỆU ÔN THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

KỸ THUẬT XỬ LÝ
PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

PHẦN I:	**PHƯƠNG PHÁP XÉT TỔNG VÀ HIỆU**
PHẦN II:	**DỰ ĐOÁN NHÂN TỬ TỪ NGHIỆM VÔ TỶ**
PHẦN III:	**HỆ SỐ BẤT ĐỊNH**
PHẦN IV:	**ĐẠO HÀM MỘT BIẾN**
PHẦN V:	**LƯỢNG GIÁC HÓA**
PHẦN VI:	**ĐẶT 2 ẨN PHỤ**
PHẦN VII:	**PHẦN VII: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ**

Biên soạn: ĐOÀN TRÍ DŨNG
Hot line: 0902920389
Facebook: https://www.facebook.com/toanthaydung

DON'T LET DREAMS JUST BE DREAMS

PHẦN I: PHƯƠNG PHÁP XÉT TỔNG VÀ HIỆU

Phương pháp xét tổng và hiệu sử dụng cho các phương trình vô tỷ hoặc một phương trình có trong một hệ phương trình ở dạng $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}=C$. Điều kiện sử dụng ở chỗ ta nhận thấy C là một nhân tử của $\left(A-B\right)$.

BÀI 1: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1$

Nhận thấy $A-B=\left(x^2+2x\right)-\left(2x+1\right)=x^2-1$ có một nhân tử là $C=x+1$

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=\frac{x^2+2x-2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

$$\to\begin{cases}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=x-1\\ \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}=x+1\end{cases}\to 2\sqrt{x^2+2x}=2x\to x=0$$

BÀI 2: $\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1$

Nhận thấy $A-B=\left(x^3+x^2+1\right)-\left(x^2+2\right)=x^3-1$ có một nhân tử là $C=x^2+x+1$

$$\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\frac{\left(x^3+x^2+1\right)-\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=x-1$$

$$\to\begin{cases}\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=x^2+x+1\\ \sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=x-1\end{cases}\to 2\sqrt{x^2+2}=\left(x^2+x+1\right)-\left(x-1\right)=x^2+2\to x=\pm\sqrt{2}$$

Thử lại nghiệm ta thấy chỉ có $x=\sqrt{2}$ thỏa mãn nên phương trình có một nghiệm duy nhất là $x=\sqrt{2}$

BÀI 3: $\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1$

Nhận thấy $A-B=\left(x+8\sqrt{x}\right)-\left(x+7\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{x}-1$ có một nhân tử là $C=\sqrt[4]{x}+1$

$$\sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\frac{\left(x+8\sqrt{x}\right)-\left(x+7\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+8\sqrt{x}}+\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}+1\\ \sqrt{x+8\sqrt{x}}-\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=\sqrt[4]{x}-1\end{cases}\to 2\sqrt{x+7\sqrt{x}+1}=2\to x+7\sqrt{x}=0\to x=0$$

BÀI 4: $\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{5y+3}-\sqrt{7x-2}=2x-1-4y\end{cases}$

Nhận thấy phương trình đầu có $A-B=\left(y-3x+4\right)-\left(y+5x+4\right)=-8x$ có liên quan đến giá trị 4

$$\sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=\frac{\left(y-3x+4\right)-\left(y+5x+4\right)}{\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}}=\frac{-8x}{4}=-2x$$

$$\to\begin{cases}\sqrt{y-3x+4}+\sqrt{y+5x+4}=4\\ \sqrt{y-3x+4}-\sqrt{y+5x+4}=-2x\end{cases}\to 2\sqrt{y-3x+4}=4-2x\to\sqrt{y-3x+4}=2-x\to y=x^2-x,x\le 2.$$

Thay vào phương trình thứ 2 ta được

$$\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$$

$$\rightarrow\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0(*)$$

$$\rightarrow\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$$

Vì $x\geq\frac{2}{7}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0\rightarrow 4x^2-7x+2=0\rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8},y=\frac{5\pm4\sqrt{17}}{32}$

Trong phần này có chi tiết trục căn thức ở bước $(*)$ sẽ được giải thích trong Phần II: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

BÀI 5: $\begin{cases}x-4\sqrt{x-1}+y-\frac{2\left(y^2+24\right)}{2y^2-1}=0\\ \sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}$

Phương trình thứ 2 có $A-B=(5x+y-5)-(1-x+y)=6(x-1)$ có liên quan đến giá trị 6

$$\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=\frac{(5x+y-5)-(1-x+y)}{\sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}}=\frac{6(x-1)}{6}=x-1$$

$$\rightarrow\begin{cases}\sqrt{5x+y-5}-\sqrt{1-x+y}=x-1\\ \sqrt{5x+y-5}+\sqrt{1-x+y}=6\end{cases}\rightarrow 2\sqrt{1-x+y}=7-x\rightarrow\begin{cases}x\leq7\\ 4y=(x-5)^2+20\rightarrow y\geq5\end{cases}$$

Để ý phương trình 1 có $x-4\sqrt{x-1}+y-\frac{2\left(y^2+24\right)}{2y^2-1}=0\rightarrow\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2+\frac{(y-5)\left(2y^2+2y+9\right)}{2y^2-1}\geq0\forall y\geq5$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất đó là $x=y=5$

BÀI 6: $\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0\end{cases}$

Nhận thấy phương trình đầu có $A-B=(2x+y)-(2x-y+4)=2(y-2)$ có liên quan đến giá trị 4

$$\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\frac{(2x+y)-(2x-y+4)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}}=\frac{2(y-2)}{4}=\frac{y-2}{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y+4}=4\\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y+4}=\frac{y-2}{2}\end{cases}\rightarrow 2\sqrt{2x+y}=\frac{y+6}{2}\rightarrow x=\frac{(y-2)^2}{32}+1\geq1$$

Mặt khác phương trình thứ 2 biến đổi thành:

$$x^3+4x^2+2y^2-4y(x+1)+3=0$$

$$\rightarrow x^3-1+\left(4x^2-4xy+y^2\right)+\left(y^2-4y+4\right)=0$$

$$\rightarrow\left(x^3-1\right)+(2x-y)^2+(y-2)^2=0$$

Vì $VT\geq0\forall x\geq1$ cho nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1,y=2$

BÀI 7: $\begin{cases} \sqrt{y+2x-1}+\sqrt{1-y}=y+2 \\ x\sqrt{x}=\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y} \end{cases}$

Nhận thấy phương trình đầu có $A-B=\left(y+2x-1\right)-\left(1-y\right)=2y+2x-2$ không liên quan đến $C=y+2$

Còn phương trình thứ 2 có $A-B=y(x-1)-\left(x^2-y\right)=x\left(y-x\right)$ có thể rút gọn với $C=x\sqrt{x}$

$$\sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\frac{y(x-1)-\left(x^2-y\right)}{\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}}=\frac{x\left(y-x\right)}{x\sqrt{x}}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}$$

$$\to \begin{cases} \sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y}=x\sqrt{x} \\ \sqrt{y(x-1)}-\sqrt{x^2-y}=\dfrac{y-x}{\sqrt{x}} \end{cases} \to 2\sqrt{y(x-1)}=\frac{y-x}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}=\frac{x^2-x+y}{\sqrt{x}}$$

$$\to 2\sqrt{y\left(x^2-x\right)}=\left(x^2-x\right)+y \to 4y\left(x^2-x\right)=\left(\left(x^2-x\right)+y\right)^2 \to \left(\left(x^2-x\right)-y\right)^2=0 \to y=x^2-x$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

Đến tình huống này ta dung kỹ thuật nhẩm nghiệm nhận ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$ (Hoặc sử dụng máy tính SHIFT SOLVE). Khi $x=1$ thì $\sqrt{x^2+x-1}=1$, $\sqrt{-x^2+x+1}=1$. Do đó ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá:

$$\begin{cases} 1.\sqrt{x^2+x-1}\le \dfrac{1+x^2+x-1}{2} \to \sqrt{x^2+x-1}\le \dfrac{x^2+x}{2} \\ 1.\sqrt{-x^2+x+1}\le \dfrac{1-x^2+x+1}{2} \to \sqrt{-x^2+x+1}\le \dfrac{-x^2+x+2}{2} \end{cases}$$

$$\to \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le \frac{\left(x^2+x\right)+\left(-x^2+x+2\right)}{2} \to \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le x+1$$

Vì $x+1\le x+1+\left(x-1\right)^2 \to x+1\le x^2-x+2 \to \sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le x^2-x+2$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $x=1, y=0$

BÀI 8: $\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x+1}-1$

Bài toán này nghiệm rất đẹp $\left(x=3, x=0\right)$ nhưng để giải ra nghiệm này bằng cách trục căn thức đơn thuần thì gần như sẽ không được nhiều điểm. Để giải quyết triệt để ta sử dụng kỹ thuật xét tổng hiệu:

$$\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x+1}-1$$

$$\to \frac{\left(x^2+16\right)-4\left(x^2-3x+4\right)}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}}=\frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\to \frac{-3x^2+12x}{\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}}=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

Như vậy nghiệm đầu tiên là $x=0$. Nếu $x\ne 0$ thì

$$\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=-3\left(x-4\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

Do đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x^2-3x+4}=-3(x-4)\left(\sqrt{x+1}+1\right) \\ \sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{x+1}-1 \end{cases} \to 2\sqrt{x^2+16}=(13-3x)\sqrt{x+1}+11-3x$$

$$x=3\to \begin{cases} \sqrt{x^2+16}=5 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \to 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)=(13-3x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+27-9x$$

$$\to 2\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)+(3x-13)\left(\sqrt{x+1}-2\right)+9(x-3)=0$$

$$\to \frac{2\left(x^2-9\right)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\frac{(3x-13)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+9(x-3)=0$$

$$\to (x-3)\left[\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+16}+5}+\frac{3x-13}{\sqrt{x+1}+2}+9\right]=0$$

Vì $x\geq -1\to x+3>0$. Ta xét $\frac{3x-13}{\sqrt{x+1}+2}+9=\frac{3x+5+9\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}>0\forall x\geq -1$

Vậy phương trình có 2 nghiệm duy nhất là $x=3\vee x=0$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

BÀI 1: $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ (1-x)(1+y)=2 \end{cases}$

BÀI 2: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y \\ \sqrt{x}+y\sqrt{5}=3 \end{cases}$

BÀI 3: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$

BÀI 4: $\begin{cases} \sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}=y+1 \\ \sqrt{\left(x^2+1\right)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}}=2y \end{cases}$

BÀI 5: $\sqrt{x^2-2}+2=x+\sqrt{2x-2}$

PHẦN II: DỰ ĐOÁN NHÂN TỬ TỪ NGHIỆM VÔ TỶ

Phương pháp này tận dụng nghiệm vô tỷ mà máy tính đã dò được để đoán trước nhân tử của phương trình, hệ phương trình. Để sử dụng kỹ thuật này, chúng ta cần phải nắm được tốt quy tắc dò nghiệm SHIFT SOLVE.

BÀI 1: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

Điều kiện: $x\ge\frac{2}{7}$. Sử dụng máy tính SHIFT SOLVE với $x=1$ ta được $x\approx 1,390388203$.

Khi đó thay vào giá trị căn thức: $\begin{cases}\sqrt{5x^2-5x+3}\approx 2,390388203\approx x+1\\ \sqrt{7x-2}\approx 2,780776406\approx 2x\end{cases}$. Do đó $\sqrt{5x^2-5x+3}$ cần phải tạo thành nhóm biểu thức $\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)$ còn $-\sqrt{7x-2}$ cần phải tạo thành nhóm biểu thức $2x-\sqrt{7x-2}$.

$\sqrt{5x^2-5x+3}\approx 2,390388203\to\sqrt{5x^2-5x+3}=x+1$. Như vậy ta thấy rằng.

Viết lại phương trình ban đầu ta được: $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

$$\to\left(\sqrt{5x^2-5x+3}-(x+1)\right)+\left(2x-\sqrt{7x-2}\right)+4x^2-7x+2=0(*)$$

$$\to\left(4x^2-7x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1\right)=0$$

Vì $x\ge\frac{2}{7}\to\frac{1}{\sqrt{5x^2-5x+3}+x+1}+\frac{1}{2x+\sqrt{7x-2}}+1>0\to 4x^2-7x+2=0\to x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8},y=\frac{5\pm4\sqrt{17}}{32}$

BÀI 2: $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

Điều kiện: $x\ge\sqrt{2x+2}\ge 0$. Sử dụng SHIFT với $x=0$ ta được $x\approx 4,236067977$

Thay vào các căn thức của bài toán: $\begin{cases}\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=1\\ \sqrt{2(3x+1)}\approx 5,236067977\end{cases}$. Như vậy $\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}$ sẽ trừ đi 1 còn $\sqrt{2(3x+1)}$ sẽ trừ đi $(x+1)$. Viết lại phương trình:

$$x^2-3x-1+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-\sqrt{2(3x+1)}\to\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}-1\right)+\left(x+1-\sqrt{2(3x+1)}\right)+x^2-4x-1=0$$

$$\to\frac{x-\sqrt{2x+2}-1}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2+2x+1-2(3x+1)}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+x^2-4x-1=0$$

$$\to\frac{(x-1)-\sqrt{2x+2}}{\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)=0$$

$$\to\frac{x^2-2x+1-(2x+2)}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{x^2-4x-1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+\left(x^2-4x-1\right)=0$$

$$\rightarrow\left(x^2-4x-1\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)}+\frac{1}{x+1+\sqrt{2(3x+1)}}+1\right)=0$$

Vì $x\geq\sqrt{2x+2}\geq 0$ nên $x\geq\sqrt{2x+2}\geq\sqrt{2.0+2}\rightarrow x\geq\sqrt{2}>1\rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}+1\right)\left(x-1+\sqrt{2x+2}\right)>0\\ x+1+\sqrt{2(3x+1)}>0\end{cases}$

Vậy $x^2-4x-1=0, x\geq\sqrt{2}\rightarrow x=2+\sqrt{5}$.

BÀI 3: $x^3+4x^2+x+3=2x^2\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+13}$

SHIFT SOLVE với $x=0$ ta được $x\approx 0,828427124$. Thay vào các giá trị căn thức:

$\begin{cases}2\sqrt{x+5}\approx 4,828427125\approx x+4\\ \sqrt{2x+13}\approx 3,828427125\approx x+3\end{cases}$. Do đó ta viết lại phương trình ban đầu:

$$x^2\left(x+4-2\sqrt{x+5}\right)+\left(x+3-\sqrt{2x+13}\right)=0$$

$$\rightarrow\frac{x^2\left(x^2+8x+16-4(x+5)\right)}{x+4+2\sqrt{x+5}}+\frac{x^2+6x+9-2x-13}{x+3-\sqrt{2x+13}}=0$$

$$\rightarrow\left(x^2+4x-4\right)\left(\frac{x^2}{x+4+2\sqrt{x+5}}+\frac{1}{x+3+\sqrt{2x+13}}\right)=0$$

Đến đây ta sẽ chứng minh $x+4+2\sqrt{x+5}$ và $x+3+\sqrt{2x+13}$ đều dương. Để đánh giá được điều này ta phải xuất phát từ phương trình ban đầu và đánh giá điều kiện ngoài căn: $x^3+4x^2+x+3\geq 0$. Tuy nhiên phương trình bậc 3 này nghiệm rất xấu, và trong chương trình THPT thì không nên sử dụng phương pháp Cardano để giải bất phương trình này mà ta sẽ thêm bớt một vài hạng tử nhỏ để bất phương trình dễ giải hơn:

$$x^3+4x^2+x+3\geq 0\rightarrow x^3+4x^2+x+4>0\rightarrow(x+4)\left(x^2+1\right)>0\rightarrow x>-4.$$

Do đó: $\begin{cases}x+4+2\sqrt{x+5}>0\\ x+3+\sqrt{2x+13}>-4+3+\sqrt{2.(-4)+13}>0\end{cases}$. Vậy ta có $\begin{cases}x^2+4x-4=0\\ x>-4\end{cases}\rightarrow x=-2+2\sqrt{2}$

BÀI 4: $3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$

Phương trình này nếu giải bằng phương pháp đạo hàm sẽ đẹp hơn rất nhiều nhưng chúng ta sẽ thử phá căn 2 vế và sử dụng kỹ thuật hệ số bất định thông qua SHIFT SOLVE để thấy rằng bài toán có thể có những cách giải rất phổ thông. Lập phương hai vế ta được: $27x^6=x^3+4x+2$.

Sử dụng SHIFT SOLVE liên tục với các giá trị khác nhau ta thu được chỉ có duy nhất 2 nghiệm đó là: $x_1\approx -0,434258545$ (Sử dụng tiếp SHIFT RCL A để gán vào biến A) và $x_2\approx 0,767591879$ (Sử dụng tiếp SHIFT RCL B để gán vào biến B). Khi đó ta sử dụng định lý Viet đảo: $\begin{cases}x_1+x_2=A+B=\dfrac{1}{3}\\ x_1x_2=AB=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Như vậy ta sẽ nhận ra nhân tử nếu có sẽ là $x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=0$ hay $3x^2-x-1=0$. Thực hiện phép chia đa thức ta thu được:

$27x^6-\left(x^3+4x+2\right)=\left(3x^2-x-1\right)\left(9x^4+3x^3+4x^2+2x+2\right)=0$

Vì $9x^4+3x^3+4x^2+2x+2=6x^4+3x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)+1>0$ nên $3x^2-x-1=0\to x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

BÀI 5: $15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$

SHIFT SOLVE ta được $x\approx 0,767591879\to\sqrt{x^2+x+1}\approx 1,535183758\approx 2x$. Nhân tử là $\sqrt{x^2+x+1}-2x$.

$15x^2-x-2\sqrt{x^2+x+1}-5=0\to 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+15x^2-5x-5=0$

$\to\dfrac{2\left(3x^2-x-1\right)}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}+5\left(3x^2-x-1\right)=0\to\left(3x^2-x-1\right)\left(\dfrac{2}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}+5\right)=0$

Xét $\dfrac{2}{2x+\sqrt{x^2+x+1}}+5=0\to 10x+5\sqrt{x^2+x+1}+2=0$ (Phương trình bậc 2).

Kết hợp $3x^2-x-1=0$ và $15x^2-x-5>0$ ta được $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

BÀI 6: $x^3+x^2=\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}+1$

SHIFL SOLVE ta được $x\approx 1,618033989\to\sqrt{x+1}\approx 1,618033989\approx x$. Do đó có nhân tử $x-\sqrt{x+1}$.

$x^3+x^2-1-\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}=0\to\left(x^2+1\right)\left(x-\sqrt{x+1}\right)+x^2-x-1=0$

$\to\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-x-1\right)}{x+\sqrt{x+1}}+\left(x^2-x-1\right)=0\to\left(x^2-x-1\right)\left(\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{x+1}}+1\right)=0$

Xét $\dfrac{x^2+1}{x+\sqrt{x+1}}+1=0\to x^2+x+1+\sqrt{x+1}=0$ (Vô nghiệm). Vậy $x^2-x-1=0\to x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^3+x^2>1>\dfrac{3}{8}\to 8x^3+8x^2-3>0\to\left(2x-1\right)\left(4x^2+6x+3\right)>0$. $4x^2+6x+3>0\forall x\to x>\dfrac{1}{2}\to x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1: $x^2-3x-2=\left(x-1\right)\sqrt{2x+1}$

BÀI 2: $x^2-x-2=\sqrt{3-x}+\sqrt{x}$

BÀI 3: $x^3+3x^2+x+2=2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

BÀI 4: $x^2+x-1=\left(x+2\right)\sqrt{x^2-2x+2}$

BÀI 5: $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

BÀI 6: $x^2-6x-2=\sqrt{x+8}$

BÀI 7: $x^3=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+2}$

PHẦN III: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Mục đích của phương pháp hệ số bất định là tạo ra các thêm bớt giả định sao cho có nhân tử chung rồi đồng nhất hệ số để tìm ra các giả định đó. Hệ số bất định có bản chất là phân tích nhân tử và có tác dụng mạnh trong các bài toán có nhiều hơn 1 nghiệm.

BÀI 1: $\sqrt{x^4-x^2+4}+\sqrt{x^4+20x^2+4}=7x$

Điều kiện: $x\ge 0$. Ta nhận thấy cần phải khai triển $7x=ax+bx$ với a,b là hai số giả định nào đó sao cho khi chuyển sang bên trái, nhân liên hợp ta sẽ tìm được hai nhân tử chung. Do đó ta sẽ triển khai triển giả định:

$$\sqrt{x^4-x^2+4}-ax+\sqrt{x^4+20x^2+4}-bx=0\rightarrow\frac{x^4-\left(a^2+1\right)x^2+4}{\sqrt{x^4-x^2+4}+ax}+\frac{x^4+\left(20-b^2\right)x^2+4}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+bx}=0$$

Mục đích của ta là hai tử số có cùng nhân tử chung do đó ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{1}=\dfrac{-\left(a^2+1\right)}{20-b^2}=\dfrac{4}{4}\\ a+b=7\end{cases}\rightarrow a=2,b=5$

Như vậy ta khai triển lại bài toán như sau: $\sqrt{x^4-x^2+4}-2x+\sqrt{x^4+20x^2+4}-5x=0$

$$\rightarrow\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{x^4-5x^2+4}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}=0\rightarrow\left(x^4-5x^2+4\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+4}+2x}+\frac{1}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+5x}\right]=0$$

Vì $x\ge 0$ nên phương trình có 2 nghiệm duy nhất là $x=1\vee x=2$.

BÀI 2: $x^2+6x+1=\left(2x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}$

Điều kiện: $\left(x^2+6x+1\right)\left(2x+1\right)>0$. Do phương trình tương đương với $\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}=\sqrt{x^2+2x+3}$ nên ta sẽ đi tìm một nhóm $\left(ax+b\right)$ giả định sao cho phương trình $\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}-\left(ax+b\right)=\sqrt{x^2+2x+3}-\left(ax+b\right)$ có vế trái sau khi quy đồng và vế phải sau khi trục căn thức có các nhân tử giống nhau.

Vì vậy ta sẽ khai triển giả định như sau:

$$\frac{x^2+6x+1}{2x+1}-\left(ax+b\right)=\sqrt{x^2+2x+3}-\left(ax+b\right)$$

$$\rightarrow\frac{\left(1-2a\right)x^2+\left(6-a-2b\right)x+\left(1-b\right)}{2x+1}=\frac{\left(1-a^2\right)x^2+\left(2-2ab\right)x+\left(3-b^2\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+ax+b}$$

Do ta cần 2 tử số có nhân tử giống nhau nên ta có $\dfrac{1-2a}{1-a^2}=\dfrac{6-a-2b}{2-2ab}=\dfrac{1-b}{3-b^2}\rightarrow a=0,b=2$.

Khi đó ta khai triển lại bài toán như sau:

$$\frac{x^2+6x+1}{2x+1}-2=\sqrt{x^2+2x+3}-2\rightarrow\frac{x^2+2x-1}{2x+1}=\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+1}\rightarrow\begin{cases}x^2+2x-1=0\\ \sqrt{x^2+2x+3}=2x+1\end{cases}$$

BÀI 3: $2x^2(x-1)+x=(x-1)\sqrt{2x(x^2-x+2)}+6$

Điều kiện: $x\ge 0$. Viết lai bài toán dưới dạng: $\frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1}=\sqrt{2x^3-2x^2+4x}$. nên ta sẽ đi tìm một nhóm $(ax+b)$ giả định sao cho phương trình $\frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1}-(ax+b)=\sqrt{2x^3-2x^2+4x}-(ax+b)(*)$ có vế trái sau khi quy đồng và vế phải sau khi trục căn thức có các nhân tử giống nhau. Ta khai triển giả định như sau:

$$(*)\to\frac{2x^3-(a+2)x^2+(a+1-b)x+b-6}{x-1}=\frac{2x^3-(a^2+2)x^2+(4-2ab)x-b^2}{\sqrt{2x^3-2x^2+4x}+(ax+b)}$$

Do ta cần 2 tử số có nhân tử giống nhau nên ta có: $\frac{2}{2}=\frac{a+2}{a^2+2}=\frac{a+1-b}{4-2ab}=\frac{b-6}{-b^2}\to a=1,b=2$

Khi đó khai triển lại bài toán với $a=1,b=2$ ta được: $\frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1}-(x+2)=\sqrt{2x^3-2x^2+4x}-(x+2)$

$$\to\frac{2x^3-3x^2-4}{x-1}=\frac{2x^3-3x^2-4}{\sqrt{2x^3-2x^2+4x}+x+2}\to\left[\begin{array}{l}2x^3-3x^2-4=0\\ \sqrt{2x^3-2x^2+4x}+3=0(VN)\end{array}\right.$$

BÀI 4: $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}+x^2-x=0$

SHIFT SOLVE $\to x=1\vee x=2$. Để làm xuất hiện nhân tử này, ta cần khai triển giả định bài toán thành:

$$\left[\sqrt{2x^2-x+3}-(mx+n)\right]+\left[(px+q)-\sqrt{21x-17}\right]+x^2-x+(m-p)x+(n-q)=0$$

Xét $\sqrt{2x^2-x+3}=(mx+n)$ ta có: $\begin{cases}x=1\to m+n=2\\ x=2\to 2m+n=3\end{cases}\to m=n=1$

Xét $(px+q)=\sqrt{21x-17}$ ta có: $\begin{cases}x=1\to p+q=2\\ x=2\to 2p+q=5\end{cases}\to\begin{cases}p=3\\ q=-1\end{cases}$

Vậy ta khai triển lại bài toán như sau: $\left[\sqrt{2x^2-x+3}-(x+1)\right]+\left[(3x-1)-\sqrt{21x-17}\right]+x^2-3x+2=0$

$$\to(x^2-3x+2)\left[\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{9}{3x-1+\sqrt{21x-17}}+1\right]=0$$. Vì $x\ge\frac{17}{21}\to\begin{cases}x+1>0\\ 3x-1\ge\frac{3.17}{21}-1>0\end{cases}$

Do đó phương trình có 2 nghiệm duy nhất đó là $x=1\vee x=2$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1: $x^2(x+6)=(5x-1)\sqrt{x^3+3}+2x-3$

BÀI 2: $(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1$

BÀI 3: $x^2-3x-4=\sqrt{x-1}(x^2-4x-2)$

BÀI 4: $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=2x$

BÀI 5: $x^3-5x^2+4x-5=(1-2x)\sqrt[3]{6x^2-2x+7}$

PHẦN IV: ĐẠO HÀM MỘT BIẾN

- Kỹ thuật 1: Coi x là ẩn, y là tham số, tính đạo hàm $f_x'(x,y)$ và chứng minh hàm số đơn điệu và liên tục theo x.
- Kỹ thuật 2: Phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm nếu $f(x)$ đơn điệu và liên tục theo x.
- Kỹ thuật 3: $f(x)=f(y)\to x=y$ nếu $f(x)$ đơn điệu và liên tục theo x.

BÀI 1: $\begin{cases}\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}=y+1\\ \sqrt{(x^2+1)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}}=2y\end{cases}$

Nếu $x=-2y^2$ thì phương trình đầu trở thành $\sqrt{1-y^2}=y+1\to\left[\begin{array}{l}y=0\to x=0\\ y=-1\to x=-2\end{array}\right.$. Thay các cặp nghiệm trên vào phương trình 2 ta thấy không thỏa mãn.

Nếu $x=-y^2-1$ thì phương trình đầu trở thành $\sqrt{y^2-1}=y+1\to y=-1\to x=-2$. Thay cặp nghiệm trên vào phương trình 2 ta thấy cũng không thỏa mãn. Vậy $x\neq -2y^2, x\neq -y^2-1$. Khi đó ta xét hàm số:

$f(x)=\sqrt{x+2y^2}+\sqrt{x+y^2+1}-y-1\to f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2y^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+y^2+1}}>0$. Do đó hàm số đơn điệu và liên tục với mọi x thuộc tập xác định. Mà $f(-y^2)=0\to x=-y^2$. Thay vào phương trình 2 ta được:

$$(x^2+1)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}-4y^2=0$$

$$\to (x^2+4x+1)+2(x+1)\sqrt{x^2+1}=0\to (x^2+1)+2x\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+1}+4x=0$$
$$\to\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)\sqrt{x^2+1}+2\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)=0\to\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)=0$$

Do $\sqrt{x^2+1}+2>0\forall x\to\sqrt{x^2+1}=-2x\to\begin{cases}x^2+1=4x^2\\ x\le 0\end{cases}\to x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\to y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

CHÚ Ý: Để tìm ra nhân tử $x=-y^2$ ta có thể làm như sau:

Đặt $y=100\to\sqrt{x+20000}+\sqrt{x+10001}=101\to x=-10000=-y^2$

BÀI 2: $x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}\right)=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$

Điều kiện: x > 0. Ta viết lại phương trình thành: $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$\to\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x+3}{2}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\to\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)^2+1}=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

Xét hàm $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}\to f'(t)=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0$ do đó $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)\to\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\frac{1}{x}\to x=1$

BÀI 3: $\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\\ \sqrt{2y^2+1}-y=2-x\end{cases}$

Xét hàm số $f\left(y\right)=2y^3+y+2x\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x}$ với y là ẩn, x là tham số. Ta có hàm $f\left(y\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'\left(y\right)=6y^2+1>0$ nên $f\left(y\right)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta có $f\left(\sqrt{1-x}\right)=2\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x}=0$ do đó phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $y=\sqrt{1-x}$. Thay vào phương trình 2 ta được:

$$\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=2-x\to\frac{3-2x-1+x}{\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}}=2-x\to\left[\begin{array}{l}x=2\\ \sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}=1\end{array}\right.$$

Để tìm ra nhân tử $y=\sqrt{1-x}$, ta xử lý như sau:

Đặt $x=\frac{99}{100}\to 2y^3+y+\frac{198}{100}\sqrt{1-\frac{99}{100}}-3\sqrt{1-\frac{99}{100}}=0\to y=\frac{1}{10}=\sqrt{1-\frac{99}{100}}=\sqrt{1-x}$

BÀI 4: $\begin{cases}x^2\left(1+y^2\right)+y^2\left(1+x^2\right)=4\sqrt{xy}\\ x^2y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}=x^2y-x\end{cases}$

Từ phương trình 2 ta có được $x-\sqrt{1+x^2}=x^2y\left(1-\sqrt{1+y^2}\right)$. Do $\begin{cases}x-\sqrt{1+x^2}<x-\left|x\right|\le 0\\ 1-\sqrt{1+y^2}\le 0\end{cases}\to y>0$. Mà x và y cùng dấu nên ta suy ra $x>0,y>0$. Khi đó phương trình 2 viết lại thành: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=y-y\sqrt{1+y^2}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t-t\sqrt{1+t^2},t\in\left(0;+\infty\right)\to f'\left(t\right)=1-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}-\sqrt{1+t^2}<0$. Do đó $f\left(t\right)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Vì vậy ta có $f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow\frac{1}{x}=y$. Thay vào phương trình đầu ta được $x=1$.

BÀI 5: $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}$

Để ý thấy phương trình thứ 2 là một phần khuyết của phương trình đầu. Nếu ta kết hợp hai phương trình đó thì có thể xây dựng hàm đặc trưng. Vì vậy ta biến đổi phương trình 2 trở thành $x^2-3x+1=y^2-3y$ và cộng vào 2 vế của phương trình đầu ta được:

$$x^2-2x+1+\sqrt{x^2-2x+5}=y^2+\sqrt{y^2+4}\to\left(x-1\right)^2+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$

Xét hàm đặc trưng $f\left(t\right)=t+\sqrt{t+4},t\in\left(0;+\infty\right)\to f'\left(t\right)=1+\frac{1}{2\sqrt{t+4}}>0$. Do đó $f\left(\left(x-1\right)^2\right)=f\left(y^2\right)$ khi và chỉ khi $\left(x-1\right)^2=y^2\to\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ y=1-x\end{array}\right.$.

PHẦN V: LƯỢNG GIÁC HÓA

BÀI 1: $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$

$x=\cos t\left(t\in[0;\pi]\right)\to\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}=2\cos^2 t-1+2\cos t\sin t\to\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}=\cos 2t+\sin 2t\to\sin\frac{t}{2}=\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

BÀI 2: $4x^3-12x^2+9x-1=\sqrt{2x-x^2}$

Phương trình $\to 4(x-1)^3-3(x-1)=\sqrt{1-(x-1)^2}$. Đặt $x-1=\cos t\left(t\in[0;\pi]\right)$

$\to 4\cos^3 t-3\cos t=\sin t\to\cos 3t=\sin t$

BÀI 3: $\sqrt{1-x^2}\left(16x^4-12x^2+1\right)=4x^3-3x$

$x=\cos t\left(t\in[0;\pi]\right)\to\sin t\left(16\cos^4 t-12\cos^2 t+1\right)=4\cos^3 t-3\cos t$

$\to\sin t\left[4\left(2\cos^2 t-1\right)^2+2\left(2\cos^2 t-1\right)-1\right]=\cos 3t$

$\to\sin t\left[4\cos^2 2t-2+2\cos 2t+1\right]=\cos 3t$

$\to\sin t\left[2\cos 4t+2\cos 2t+1\right]=\cos 3t$

$\to\sin t\left[4\cos 3t\cos t+1\right]=\cos 3t$

$\to 2\cos 3t\sin 2t+\sin t=\cos 3t$

$\to\sin 5t-\sin t+\sin t=\cos 3t$

BÀI 4: $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

$x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{0;-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

$\to\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t},\frac{2x}{x^2+1}=\sin 2t,\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\sin 2t\cos 2t$

$\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}\to\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin 2t}=\frac{2}{\sin 4t}$

$\to\frac{2\sin t+1}{\sin 2t}=\frac{2}{\sin 4t}\to\frac{2\cos 2t\left(2\sin t+1\right)}{\sin 4t}=\frac{2}{\sin 4t}$

$\to\cos 2t\left(2\sin t+1\right)=1\to\left(1-2\sin^2 t\right)\left(2\sin t+1\right)=1\to\sin t=\frac{1}{2}$

PHẦN VI: ĐẶT 2 ẨN PHỤ

- Kỹ thuật 1: Đặt 2 ẩn phụ để đưa về hệ phương trình cơ bản.
- Kỹ thuật 2: Đặt 2 ẩn phụ để phân tích đa thức thành nhân tử.

BÀI 1: $\begin{cases} (x+3y-1)\sqrt{x-y}+2x\sqrt{2y-1}=8 \\ x+5+2\sqrt{x-y}=9y \end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{x-y}\ge 0, b=\sqrt{2y-1}\ge 0 \to x=\dfrac{2a^2+b^2+1}{2}, y=\dfrac{b^2+1}{2}$. Thay vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} \left(a^2+2b^2+1\right)a+\left(b^2+2a^2+1\right)b=8 \\ a^2+2a+1=4b^2 \end{cases} \to a=b=1 \to x=2, y=1$$

BÀI 2: $\begin{cases} (y-1)\sqrt{x-y}+(x-y-1)\sqrt{y}=x-2 \\ x\sqrt{y^2+8}=y\sqrt{x^2-8}+8 \end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{x-y}\ge 0, b=\sqrt{y}\ge 0 \to x=a^2+b^2, y=b^2$. Vì phương trình 2 khá lớn nên ta tập trung vào phương trình đầu để phân tích nhân tử: $\left(b^2-1\right)a+\left(a^2-1\right)b=a^2+b^2-2 \to (a-1)(b-1)(a+b+2)=0$ (1)

Đến đây là ta có thể sử dụng phương pháp thế được rồi. Tuy nhiên nếu để ý kỹ thì phương trình 2 có thể xử lý được một cách độc lập: $x\sqrt{y^2+8}-8=y\sqrt{x^2-8} \to x^2\left(y^2+8\right)-16x\sqrt{y^2+8}+64=y^2\left(x^2-8\right)$

$$\to 8x^2-16x\sqrt{y^2+8}+8\left(y^2+8\right)=0 \to \left(x-\sqrt{y^2+8}\right)^2=0 \to x=\sqrt{y^2+8}\ (2).$$

Kết hợp (1) và (2) $\to \left[\begin{array}{l} a=1, x=\sqrt{y^2+8} \to x=\dfrac{9}{2}, y=\dfrac{7}{2} \\ b=1, x=\sqrt{y^2+8} \to x=3, y=1 \end{array}\right.$

BÀI 3: $\begin{cases} x+y+\sqrt{2y-1}+\sqrt{x-y}=5 \\ y^2+2=xy+y \end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{x-y}\ge 0, b=\sqrt{2y-1}\ge 0 \to a^2+b^2=x+y-1$. Thay vào phương trình đầu: $a^2+b^2+a+b=4$

Vì phương trình này không phân tích được thành nhân tử nên ta phải tìm cách biến đổi phương trình 2. Để ý ta thấy rằng $a^2b^2=(x-y)(2y-1)=-x+y+2\left(xy-y^2\right)$ trong đó có $xy-y^2=2-y$ xuất hiện trong phương trình 2. Do đó: $a^2b^2=-x+y+2(2-y)=-x-y+4 \to a^2b^2+x+y-1=3 \to a^2b^2+a^2+b^2=3$.

Vậy ta có hệ đối xứng loại 1: $a^2+b^2+a+b=4, a^2b^2+a^2+b^2=3 \to a=b=1 \to x=2, y=1$.

BÀI 4: $\sqrt{1+x}+x\sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{1-x^2}$

Để ý thấy $(1-x)(1+x)=1-x^2$ nên ta sẽ đặt ẩn phụ dựa trên yếu tố này. Đặt $a=\sqrt[4]{1+x}\ge 0, b=\sqrt[4]{1-x}\ge 0$. Khi đó ta có: $2x=a^4-b^4$. Nhân 2 ở cả 2 vế của phương trình ta được:

$$2a^2+\left(a^4-b^4\right)b=2ab \to (a-b)\left(2a+b(a+b)\left(a^2+b^2\right)\right)=0 \to a=b \to x=0$$

PHẦN VII: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

- Kỹ thuật 1: Đưa phương trình, hệ phương trình về dạng $A^2+B^2\le 0$
- Kỹ thuật 2: Sử dụng Cauchy với những bài có căn bậc lớn.
- Kỹ thuật 3: Sử dụng Bunyakovsky: $\left|ax+by\right|\le\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$. Dấu bằng: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$
- Kỹ thuật 4: Sử dụng Minkowski: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{\left(a+x\right)^2+\left(b+y\right)^2}$. Dấu bằng: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$
- Kỹ thuật 5: Sử dụng Schwartz: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$. Dấu bằng: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$
- Kỹ thuật 6: Sử dụng bất đẳng thức Jensen dành cho hàm lồi, hàm lõm:

  $\begin{cases} f''(x)\ge 0\to f(a)+f(b)\ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ f''(x)\le 0\to f(a)+f(b)\le 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{cases}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

BÀI 1: $4x^3+4x^2-5x+9=4\sqrt[4]{16x+8}$

SHIFT SOLVE ta tìm được nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$ và xuất hiện căn bậc 4 nên ta nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy để giải quyết bài toán gọn nhẹ hơn. Tuy nhiên để Cauchy thì các đẳng thức phải bằng nhau. Ta thấy rằng $16x+8=8\left(2x+1\right)$ trong đó $2x+1=2$ nên ta sẽ tách:

$\sqrt[4]{16x+8}=\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2x+1}\le\frac{2+2+2+2x+1}{4}=\frac{2x+7}{4}$. Như vậy ta có $4x^3+4x^2-5x+9\le 2x+7$. Do đó:

$\to 4x^3+4x^2-7x+2\le 0\to\left(x+2\right)\left(2x-1\right)^2\le 0$. Vì $x\ge-\frac{1}{2}\to x+2>0\to\left(2x-1\right)^2\le 0\to x=\frac{1}{2}$.

BÀI 2: $\sqrt{4x-1}+\sqrt[4]{8x-3}=4x^4-3x^2+5x$

SHIFL SOLVE ta tìm được nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$ và xuất hiện căn bậc 4 nên ta nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Ta thấy với $x=\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{4x-1}=1,\sqrt[4]{8x-3}=1$ nên ta lần lượt sử dụng Cauchy bậc 2 và Cauchy bậc 4 ta có: $1.\sqrt{4x-1}\le\frac{1+4x-1}{2}\to\sqrt{4x-1}\le 2x, 1.1.1.\sqrt[4]{8x-3}\le\frac{1+1+1+8x-3}{4}\to\sqrt[4]{8x-3}\le 2x$

Vậy $4x^4-3x^2+5x\le 4x\to 4x^4-3x^2+x\le 0\to x\left(x+1\right)\left(2x-1\right)^2\le 0\to x=\frac{1}{2}$ do $x\ge\frac{3}{8}$.

BÀI 3: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2\left(x^2+x+1\right)$

SHIFL SOLVE ta tìm được nghiệm duy nhất $x=-1$. Khi đó $\sqrt{3x^3+2x^2+2}=\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1$ mà ta thấy có 2 biểu thức lập phương đối nhau trong 2 căn, nếu 2 căn đó bình phương thì sẽ triệt tiêu được nên ta nghĩ đến sử dụng Bunyakovsky:

$1.\sqrt{3x^3+2x^2+2}+1.\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(3x^3+2x^2+2\right)+\left(-3x^3+x^2+2x-1\right)\right]}$

Do đó ta có $2\left(x^2+x+1\right)\le\sqrt{2\left(3x^2+2x+1\right)}$. Bình phương 2 vế $\to\left(x+1\right)^2\left(2x^2+1\right)\le 0\to x=-1$

BÀI 4: $\begin{cases} y^2+\left(4x-1\right)^2=\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

Sử dụng phép thế $y=\dfrac{40x^2+x}{\sqrt{14x-1}}$ vào phương trình đầu và sử dụng SHIFT SOLVE ta được $x=\dfrac{1}{8}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý rằng $4x=\dfrac{1}{2}, 8x+1=2$ nên ta có:

$$\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)}=\sqrt[3]{\left(8x\right)\frac{8x+1}{2}.1}\le\frac{8x+\frac{8x+1}{2}+1}{3}\to\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)}\le\frac{8x+1}{2}$$

Và $\sqrt{14x-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=y\to y\sqrt{14x-1}\le\dfrac{y^2+14x-1}{2}$. Do đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y^2+\left(4x-1\right)^2\le\dfrac{8x+1}{2}\left(1\right) \\ 40x^2+x\le\dfrac{y^2+14-x}{2}\left(2\right) \end{cases}$$ Lấy $\left(1\right)+2.\left(2\right)\to y^2+\left(4x-1\right)^2+2\left(40x^2+x\right)\le\dfrac{8x+1}{2}+y^2+14x-1$

$$\to 96x^2-24x+\frac{3}{2}\le 0\to 96\left(x-\frac{1}{8}\right)^2\le 0\to x=\frac{1}{8}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

BÀI 5: $\begin{cases} x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \\ 6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0 \end{cases}$

Sử dụng phép thế $y=6x-11+\sqrt{10-4x-2x^2}$ vào phương trình đầu và SHIFT SOLVE ta được $x=1; y=-3$.

Khi đó $\sqrt{-y^2-4y-2}=1, \sqrt{10-4x-2x^2}=2$. Vì vậy ta điều chỉnh các số cho hợp lý và áp dụng Cauchy:

$$\begin{cases} x^2+2x-2=1.\sqrt{-y^2-4y-2}\le\dfrac{1-y^2-4y-2}{2} \\ -6x+y+11=\dfrac{2.\sqrt{10-4x-2x^2}}{2}\le\dfrac{4+10-4x-2x^2}{4} \end{cases}\to\begin{cases} x^2+2x-2\le\dfrac{-y^2-4y-1}{2} \\ -6x+y+11\le\dfrac{7-2x-x^2}{2} \end{cases}$$ Do đó ta có:

$\begin{cases} 2x^2+4x+y^2+4y-3\le 0 \\ x^2-10x+2y+15\le 0 \end{cases}$. Cộng hai vế của hai phương trình ta được:

$$3x^2-6x+y^2+6y+12\le 0\to 3\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2\le 0\to x=1, y=-3$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

BÀI 1: $\begin{cases} \left(x-1\right)^2+y^2=\sqrt[3]{x\left(2x+1\right)} \\ 3x^2-x+\dfrac{1}{2}=y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$

BÀI 2: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-1} \end{cases}$