Bùi Thế Việt

CHUYÊN ĐỀ CASIO

KỸ NĂNG GIẢI HÌNH HỌC PHẲNG OXY TRONG ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

A – Giới Thiệu :

Là một dạng bài toán yêu cầu tư duy hình học cao, Oxy trong kỳ thi THPT Quốc Gia thường được cho dưới dạng tọa độ và yêu cầu của đề bài là đi tìm một dữ kiện nào đó của hình học, có thể là tìm tọa độ điểm, phương trình đường thẳng, …

Tuy nhiên, những bài tập Oxy này có một sự liên kết không hề nhẹ với phần hình học phẳng lớp 8, lớp 9 qua các định lý, tính chất hình học. Nhiều bạn chưa biết đến những tính chất này chắc hẳn sẽ vô cùng hoang mang vì không biết hướng giải quyết. Và chắc chắn cũng sẽ có những bạn biết đến tính chất này nhưng không biết cách chứng minh thế nào.

Để giúp những bạn có tư duy hình học kém hoặc biết tính chất hình học nhưng chưa biết cách chứng minh, chuyên đề này sẽ gồm các phần như sau:

- Vecto, tích vô hướng và ứng dụng chứng minh tính chất hình học.
- Giải Oxy bằng tham số hóa
- Chuẩn hóa các đại lượng trong Oxy

Để phù hợp với kiến thức thi THPT Quốc Gia, chuyên đề này đa phần lấy bài tập từ đề thi thử các trường THPT trên toàn quốc năm 2016.

B – Nội Dung :

Phần 1 : Vecto, tích vô hướng và ứng dụng chứng minh tính chất hình học.

Vecto và tích vô hướng là các kiến thức cơ bản của THPT. Để ứng dụng nó vào việc chứng minh các tính chất hình học, chúng ta cần phải biết những công thức, định lý hay dùng sau :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$
- M là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$
- $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos BAC$
- $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$
- $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=0$

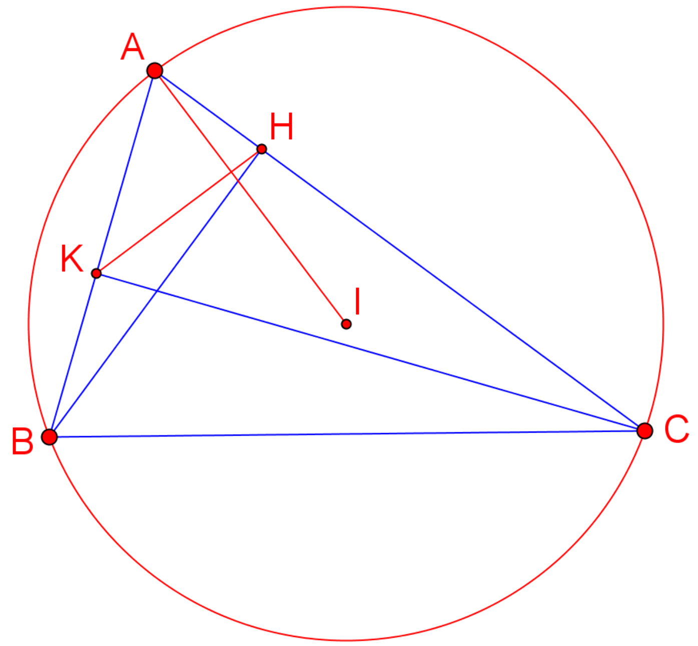
Vậy phương pháp chứng minh tính chất hình học của chúng ta là:

- Cố gắng đưa dữ kiện cần phải chứng minh dưới dạng vecto.
- Tách vecto thành tổng các vecto thành phần rồi sử dụng tích vô hướng hoặc các tính chất của vecto để giải quyết bài toán.

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I): $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Điểm $H(2;-5)$ và $K(-1;-1)$ lần lượt là chân các đường cao hạ từ đỉnh B và C đến các cạnh tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác biết A có hoành độ dương.

(THPT Chuyên Sơn La – Sơn La – lần 3 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Chứng minh AI vuông góc KH

Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng).

Ta có :

$$\overrightarrow{AI}\overrightarrow{KH}=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AH}\right)\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{KA}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\overrightarrow{AI}$$

$$=-AK\cdot AI\cdot\cos KAI+AH\cdot AI\cdot\cos HAI$$

$$=-AK\cdot AI\cdot\frac{AB}{2AI}+AH\cdot AI\cdot\frac{AC}{2AI}$$

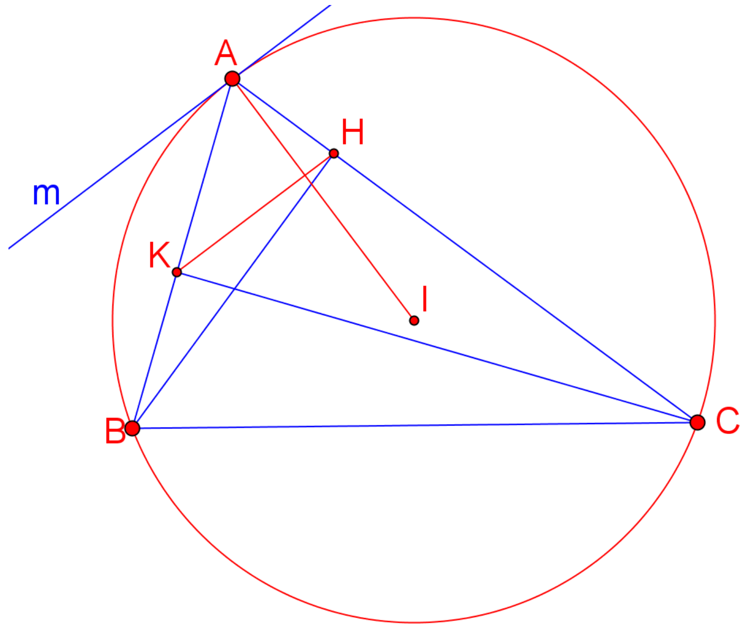
$$=-\frac{1}{2}\left(AK\cdot AB-AH\cdot AC\right)=0$$

Do $\Delta ABH\sim\Delta ACK\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AK}\Rightarrow AK\cdot AB=AH\cdot AC$

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).

Qua A, kẻ tia tiếp tuyến Am với (I), H không thuộc nửa mặt phẳng bờ AI chứa Am. Khi đó $AI\perp Am$.

Ta chỉ cần chứng minh $HK//Am$.



Thật vậy, $BAm = BCA = AKH$ do tứ giác $BCHK$ nội tiếp. Suy ra $HK // Am$. Điều phải chứng minh.

Áp dụng : Ta lần lượt tính được :

- Phương trình đường thẳng KH : $4x + 3y + 7 = 0$
- Phương trình đường thẳng AI : $3x - 4y - 11 = 0$
- Tọa độ điểm $A(5,1)$ (điểm $(-3,-5)$ bị loại)
- Phương trình đường thẳng AK : $x - 3y - 2 = 0$
- Tọa độ điểm $B(-4,-2)$
- Phương trình đường thẳng AH : $2x - y - 9 = 0$
- Tọa độ điểm $C(1,-7)$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Đáp số : $A(5,1)$, $B(-4,-2)$, $C(1,-7)$.

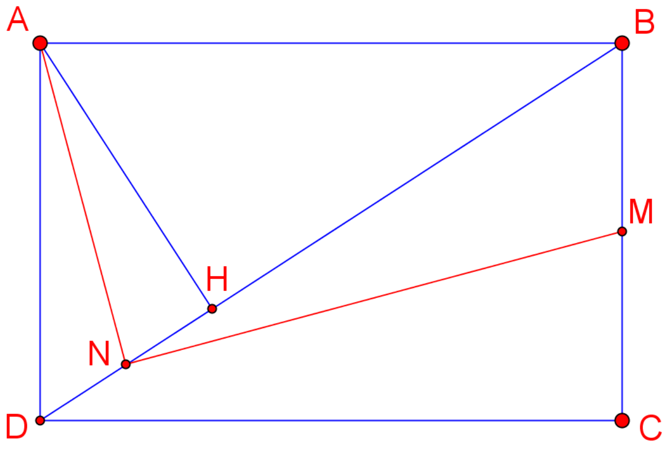
Nhận xét : Qua hai cách làm, chúng ta thấy rằng : Chứng minh bằng kiến thức hình học THCS trông gọn và đẹp hơn nhiều so với cách 1 sử dụng vecto và tích vô hướng. Tuy nhiên, không phải ai cũng nghĩ tới việc kẻ thêm đường kẻ phụ Am như trên. Cái đó phụ thuộc vào tư duy hình học và cả kinh nghiệm làm bài.

Cách giải bằng vecto và tích vô hướng tuy không tự nhiên bằng nhưng chắc chắn sau khi biến đổi, vấn đề của bài toán luôn được chứng minh mặc dù có thể lời giải không được đẹp cho lắm. Bạn đọc thử đến với ví dụ 2 :

Ví dụ 2 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm $H(-3,1)$ là hình chiếu vuông góc của A trên BD. Điểm $M\left(\frac{1}{2},2\right)$ là trung điểm cạnh BC, phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ADH là $d: 4x + y + 13 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

(THPT Đoàn Thượng – Hải Phòng – lần 3 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Gọi N là trung điểm DH. Chứng minh AN vuông góc NM.

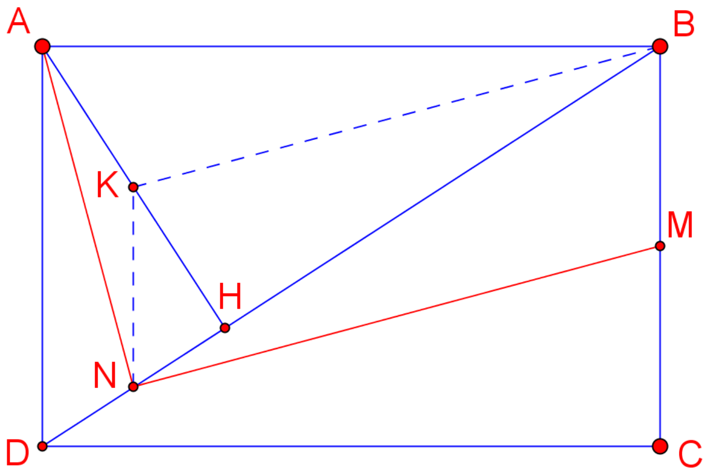
Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng).

Ta có :

$$\overrightarrow{AN}\overrightarrow{NM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AB}\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BN}\overrightarrow{BM}$$
$$= \overrightarrow{NB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}\right) = \overrightarrow{NB}\left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{BM}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\overrightarrow{AH} = 0$$

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).



Gọi K là trung điểm AH. Khi đó $\begin{cases} NK = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BM \\ NK//CD//BM \end{cases} \Rightarrow BMNK$ là hình bình hành.

Suy ra $BK//NM$. Vậy để chứng minh $AN \perp NM$, ta chỉ cần chứng minh $BK \perp AN$.

Do $\begin{cases} NK \perp AB \\ AK \perp NB \end{cases} \Rightarrow K$ là trực tâm ΔABN. Suy ra $BK \perp AN$. Điều phải chứng minh.

Áp dụng : Ta lần lượt tính được :

- Phương trình đường thẳng MN : $2x-8y+15=0$
- Phương trình đường thẳng BD : $y=1$
- Tọa độ điểm $D(-4,1)$
- Phương trình đường thẳng HA : $x=-3$
- Tọa độ điểm $A(-3,-1)$
- Phương trình đường thẳng AD : $2x+y+7=0$
- Phương trình đường thẳng AB : $x-2y+1=0$
- Tọa độ điểm $B(1,1)$
- Phương trình đường thẳng BC : $2x+y-3=0$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Đáp số : $2x+y-3=0$.

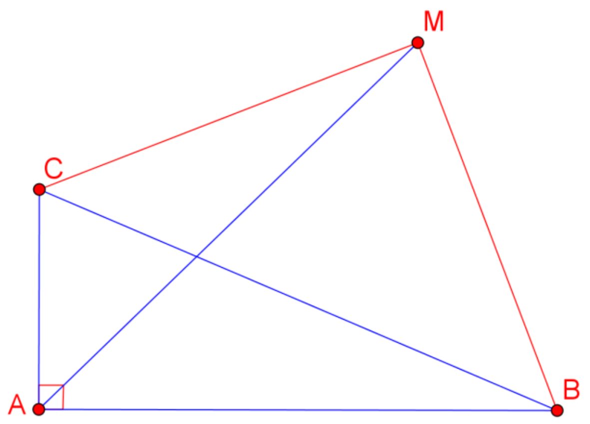
Nhận xét : Tại sao trong cách 1, chúng ta lại tách thành $\overrightarrow{AN}\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}\right)$.

Thực chất thì dù tách thành cái gì, sau một hồi biến đổi, kiểu gì chúng ta cũng sẽ làm triệt tiêu được các vecto thành phần. Ví dụ như cách biến đổi sau đây :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AN}\overrightarrow{NM} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\right)\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AH}\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \frac{\overrightarrow{AD}}{4}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}\right)\\
&= \frac{\overrightarrow{AD}}{4}\left(2\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{AN}\right)=\frac{\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AB}}{2}=0
\end{aligned}$$

Vậy tại sao tách $\overrightarrow{AN}\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}\right)$ lại nhanh như vậy ?

Chúng ta có một mẹo như sau :



Nếu $AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 0$ mà ta muốn lấy tích vô hướng của $\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}$, ta cố gắng biến đổi về $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$. Mẹo sau rất hay dùng :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} &= \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

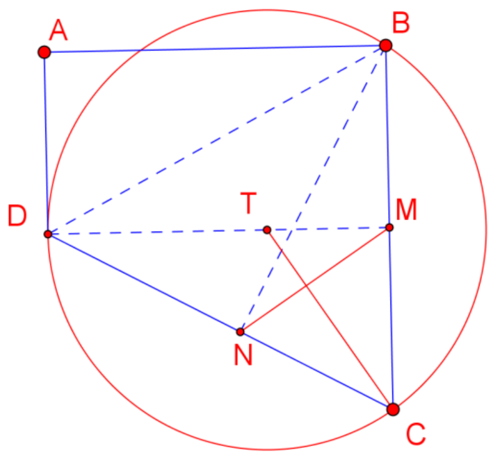
Tiếp theo ta có 2 hướng giải :

- Biến đổi $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XY}$ và sau đó chứng minh $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{XY}=0$
- Dùng công thức $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$ hoặc $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos BAC$ để tính giá trị $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\overrightarrow{AB}$ rồi cố gắng biến đổi $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\overrightarrow{AB}=0$

Ví dụ 3 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và B, $BC = 2AD$, tam giác BCD nội tiếp đường tròn (T) : $(x-4)^2+(y-1)^2=25$, điểm N là hình chiếu vuông góc của B trên CD, M là trung điểm BC, đường thẳng MN có phương trình $3x-4y-17=0$, BC đi qua điểm $E(7,0)$. Tìm tọa độ của A, B, C, D biết C có tung độ âm, D có hoành độ âm.

(Lê Tiến Dũng)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Chứng minh CT vuông góc MN

Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng). Chứng minh $\overrightarrow{CT}\overrightarrow{MN}=0$

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS). Qua C kẻ tiếp tuyến Cx và chứng minh $Cx//MN$.

Bài toán này có ý tưởng rất giống Ví dụ 1 ở trên. Bạn đọc có thể xem lại hoặc tự mình thử sức chứng minh CT vuông góc MN.

Áp dụng : Ta lần lượt tính được :

- Phương trình đường thẳng CT : $4x+3y-19=0$
- Tọa độ điểm $C(7,-3)$ (điểm $(1,5)$ loại)
- Phương trình đường thẳng BC : $x=7$

- Tọa độ điểm $B(7,5)$
- Phương trình đường thẳng DT : $y=1$
- Tọa độ điểm $D(-1,1)$ (điểm $(9,1)$ loại)
- Phương trình đường thẳng DA : $x=-1$
- Phương trình đường thẳng BA : $y=5$
- Tọa độ điểm $A(-1,5)$

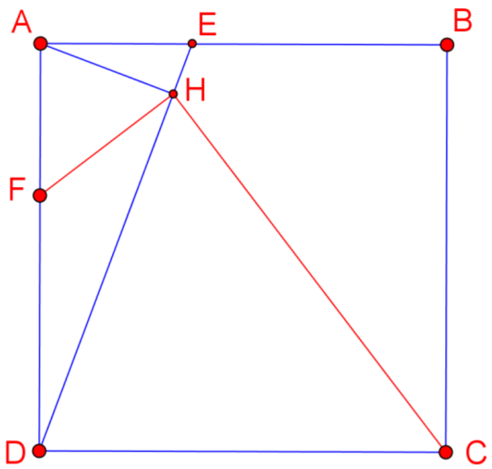
Đáp số : $A(-1,5)$, $B(7,5)$, $C(7,-3)$, $D(-1,1)$.

Nhận xét : Bài toán này do bạn Lê Tiến Dũng hỏi trên Group. Bạn ấy biết rằng $CT \perp MN$ nhưng không thể chứng minh nó được. Có lẽ nhiều bạn khác cũng vậy, biết được tính chất hình học nhưng không biết cách chứng minh do nó quá lắt léo bởi nhiều dữ kiện gây rối mắt hoặc phải kẻ thêm đường thẳng phụ, điểm phụ, … Do đó, vecto và tích vô hướng là một lựa chọn sáng suốt cho nhiều trường hợp chứng minh vuông góc. Nhưng không phải phương pháp này không phải kẻ thêm điểm phụ hoặc đường thẳng phụ. Bạn đọc có thể xem ví dụ sau :

Ví dụ 4 : Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho AE = AF. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Biết $H\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $F\left(\frac{8}{3};-2\right)$, C thuộc đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$, D thuộc đường thẳng d': $x - 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

(THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh – lần 2 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Chứng minh FH vuông góc HC

Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng).

Ta có :

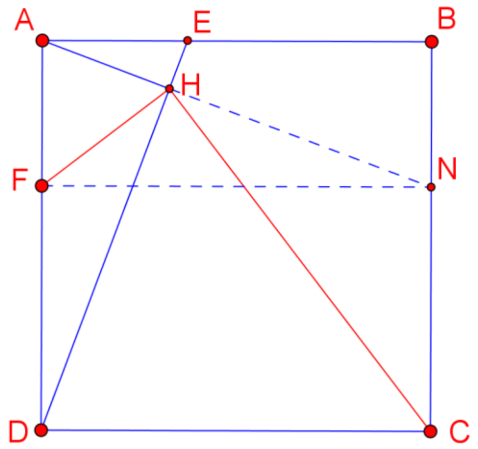
$$\overrightarrow{HF}\overrightarrow{HC} = \left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}\right)\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}\right)$$
$$= \overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)$$

Nếu đến đây, chúng ta cố gắng rút gọn $\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}$ thành một vecto nào đó tương tự như $\overrightarrow{AH}$ thì có vẻ hơi khó vì chúng ta còn dữ kiện $AE=AF$ chưa dùng tới. Còn nếu chúng ta "trâu bò" ngồi chứng minh $\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)=0$ bằng công thức $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$ thì cũng được thôi, nhưng có lẽ biến đổi sẽ rất dài.

Nhìn thấy $\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)=HD^2+\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)$, nếu chúng ta vẽ hình chữ nhật CDFN thì $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DN}$, do đó công việc của chúng ta vô cùng đơn giản, chỉ còn lại là :

$$\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DN}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HD}\overrightarrow{HN}=0$$

Vậy N là thằng nào mà nguy hiểm tới mức $\overrightarrow{HD}\overrightarrow{HN}=0$? Điều này chỉ đúng khi $\overrightarrow{HN}$ và $\overrightarrow{HA}$ cùng phương hay H,A,N thẳng hàng. Liệu nó có đúng không ?



Ta có : $AE=AF=BN\Rightarrow\Delta ADE=\Delta BAN\Rightarrow ADE=BAN$ mà $ADE=EAH\Rightarrow\overline{A,H,N}$.
Điều phải chứng minh.
Trong cách này, chúng ta tư duy có vẻ dài nhưng ý tưởng khá mạch lạc. Để tóm gọn lại, chúng ta chỉ cần trình bày như sau :

Gọi AH cắt BC tại N. Khi đó $ADE=BAN\Rightarrow\Delta ADE=\Delta BAN\Rightarrow BN=AE=AF$.
Từ đó $DF=CN\Rightarrow CDFN$ là hình chữ nhật. Vậy :

$$\overrightarrow{HF}\overrightarrow{HC}=\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}\right)\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DN}\right)=\overrightarrow{HD}\overrightarrow{HN}=0$$

Điều phải chứng minh.
Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).

Gọi AH cắt BC tại N. Khi đó $ADE=BAN\Rightarrow\Delta ADE=\Delta BAN\Rightarrow BN=AE=AF$.
Từ đó $DF=CN\Rightarrow CDFN$ là hình chữ nhật. Vậy :

$$DHC=DNC=DFC\Rightarrow CDFH \text{ nội tiếp }\Rightarrow FDC=FHC=90^{\circ}$$

Điều phải chứng minh.
Áp dụng : Ta lần lượt tính được :

- Phương trình đường thẳng HF : $6x-17y-50=0$
- Phương trình đường thẳng HC : $17x+6y+10=0$
- Tọa độ điểm $C\left(-2,4\right)$
- Đường tròn ngoại tiếp CDFH : $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\dfrac{130}{9}$

- Tọa độ điểm $D(4,2)$ (loại điểm $\left(-\frac{16}{5},-\frac{2}{5}\right)$ vì cùng nửa mặt phẳng bờ HF với C)
- Tọa độ điểm $N\left(-\frac{10}{3},0\right)$
- Phương trình đường thẳng HA : $3x+4y+10=0$
- Phương trình đường thẳng DA : $3x-y-10=0$
- Tọa độ điểm $A(2,-4)$
- Tọa độ điểm $B(-4,-2)$

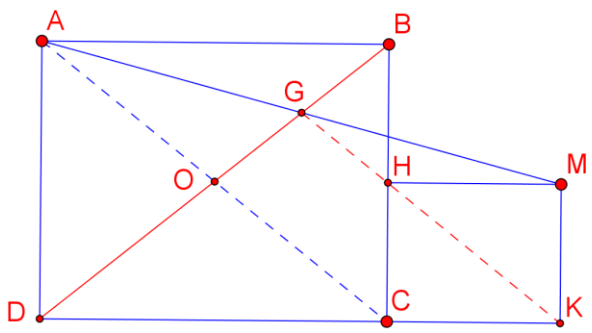
Đáp số : $A(2,-4)$, $B(-4,-2)$, $C(-2,4)$, $D(4,2)$.

Nhận xét : Với phương pháp sử dụng vecto và tích vô hướng, chúng ta có thể giải quyết những bài toán yêu cầu chứng minh vuông góc một cách ổn định rồi chứ ? Vậy còn những bài toán yêu cầu chứng minh thẳng hàng thì sao ? Bạn đọc hãy đến với ví dụ sau :

Ví dụ 5 : Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng BD : $2x-3y+4=0$. Điểm G thuộc cạnh BD sao cho $BD=4BG$. Gọi M là điểm đối xứng của A qua G. Gọi H,K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC và CD. Biết $H(10,6)$, $K(13,4)$ và đỉnh B có tọa độ là các số tự nhiên chẵn. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

(Linh Quang Bùi)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Chứng minh G, H, K thẳng hàng.

Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng)

G, H, K thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{GH}=t\overrightarrow{HK}$. Tuy nhiên, để khống chế K, ta cần phải xem xét các điều kiện của nó. Gọi O là giao điểm 2 đường chéo.

Vì $\begin{cases} MK\perp CD \\ AD\perp CD \\ GA=GM \end{cases} \Rightarrow MK+AD=2d_{G/CD}=\frac{3}{2}BC \Rightarrow MK=\frac{BC}{2} \Rightarrow$ H là trung điểm BC. Vậy thì :

$$\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AO} \text{ và } \overrightarrow{GH}=\frac{\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AO}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{HK}=2\overrightarrow{GH}$$

Điều phải chứng minh.

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).

Gọi O là giao điểm 2 đường chéo.

Vì $\begin{cases} MK \perp CD \\ AD \perp CD \\ GA = GM \end{cases} \Rightarrow MK + AD = 2d_{G/CD} = \dfrac{3}{2}BC \Rightarrow MK = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ H là trung điểm BC.

Do G là trung điểm AM và BO nên ABMO là hình bình hành. Suy ra $HK // BM // AB$.

Lại có $GH // OC$ nên $GH // HK$ suy ra G, H, K thẳng hàng.

Áp dụng : Ta lần lượt tính được :

- Phương trình đường thẳng HK : $2x + 3y - 38 = 0$
- Tọa độ điểm $G\left(\dfrac{17}{2}, 7\right)$
- Gọi $B\left(b, \dfrac{2b+4}{3}\right) \Rightarrow D(34 - 3b, 24 - 2b)$
- Do $\overrightarrow{BH}\overrightarrow{DK} = 0 \Rightarrow B(10,8)$ (loại điểm $B(7,6)$)
- Khi đó $C(10,4)$ và $A(4,8)$

Kết luận : $A(4,8)$, $B(10,8)$, $C(10,4)$, $D(4,4)$.

Phần 2 : Giải Oxy bằng tham số hóa

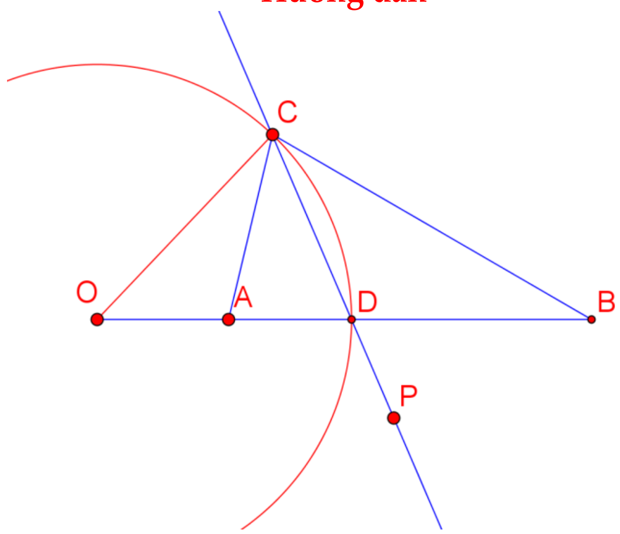
Phương pháp này có lẽ nhiều bạn biết tới bởi sự "trâu bò" của nó : Đặt tham số những dữ kiện chưa biết và từ điều kiện của đề bài, đưa tham số về HPT và giải quyết chúng. Phương pháp này không được hay và tự nhiên cho lắm, nhưng với cách làm này, chúng ta chẳng cần biết các tính chất của hình học mà vẫn có thể giải quyết bài toán được. Quan trọng nhất của phương pháp này là cách chọn ẩn, phân tích bài toán và biến đổi hợp lý.

Lợi ích của phương pháp này rất rõ ràng : Giải quyết được tổng quát bài toán. Bạn đọc thử so sánh 2 cách làm sau :

Ví dụ 1 : Cho tam giác ABC có $A(2,2)$, $B(5,-1)$. C nằm trên đường tròn (S): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$. Phân giác trong góc C đi qua $P(3,7)$. Tìm toạ độ điểm C.

(Nắng Lạnh)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Điều đặc biệt ở đây là O, A, B thẳng hàng với O là tâm đường tròn.
Ta sẽ chứng minh CP đi qua một điểm cố định.

Chứng minh : Gọi (S) cắt đoạn AB tại D. Ta sẽ chứng minh CD là phân giác góc ACB.
Thật vậy, do $OA=\sqrt{2}, OB=4\sqrt{2}, R=2\sqrt{2}$ nên

$$ACD=BCD \Leftrightarrow OCD-ACD=ODC-BCD \Leftrightarrow OCA=OBC$$
$$\Leftrightarrow \Delta OCA \sim \Delta OBC \Leftrightarrow OC^2=OA\cdot OB \Leftrightarrow OA\cdot OB=R^2 \text{ (luôn đúng)}$$

Áp dụng :

- Tọa độ điểm $D(3,1)$
- Phương trình đường thẳng CP : $x=3$
- Tọa độ điểm $C(3,5)$

Đáp số : $C(3,5)$

Nhận xét : Bài toán này trùng hợp một cách đáng sợ. Người ra đề cố tình để O, A, B thẳng hàng và $OA\cdot OB=R^2$. Vậy nếu thay đổi dữ kiện bài toán không thỏa mãn 2 điều kiện kia, liệu chúng ta có giải quyết được bài toán ? Hãy xem cách giải bằng tham số hóa sau cho bài toán tổng quát :

Ví dụ 2 : Cho tam giác ABC có $A(2,2)$, $B(5,-1)$. C nằm trên đường tròn (S): $x^2+y^2-8x-6y+20=0$. Phân giác trong góc C đi qua $P(3,7)$. Tìm toạ độ điểm C.

(Bùi Thế Việt – Mở rộng)

Hướng dẫn

Ý tưởng : Đề bài hỏi C, ta sẽ đặt tọa độ điểm $C(m,n)$. Mối liên hệ đầu tiên của m và n là $m^2+n^2-8m-6n+20=0$. Vì có 2 ẩn m, n nên ta chỉ cần tìm thêm một mối liên hệ nữa giữa m và n từ điều kiện đề bài.

Vì CP là đường phân giác nên chúng ta sẽ sử dụng $ACP=PCB$ để tìm mối liên hệ giữa m và n.

Lời giải :

Gọi $C(m,n)\Rightarrow m^2+n^2-8m-6n+20=0$. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(m-2;n-2)\\ \overrightarrow{BC}=(m-5;n+1)\\ \overrightarrow{PC}=(m-3;n-7)\end{cases}$.

Vì $ACP=PCB \Rightarrow \left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PC}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{PC}\right)\right| \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\overrightarrow{PC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left((m-2)(m-3)+(n-2)(n-7)\right)^2}{(m-2)^2+(n-2)^2}=\frac{\left((m-5)(m-3)+(n+1)(n-7)\right)^2}{(m-5)^2+(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(m^2+n^2-5m-9n+20\right)^2}{m^2+n^2-4m-4n+8}=\frac{\left(m^2+n^2-8m-6n+8\right)^2}{m^2+n^2-10m+2n+26}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(m-n)^2}{4m+2n-12}=-\frac{72}{m-4n-3} \Leftrightarrow -\frac{9(mn-4m-3n+10)}{2m+n-6}=-\frac{72}{m-4n-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(m-3)(4n^2-mn+4m-13n+6)}{(2m+n-6)(m-4n-3)}=0$$

Nếu $m=3$ thì do $m^2+n^2-8m-6n+20=0 \Rightarrow n=5$ (loại $n=1$ vì khi đó C thuộc AB)

Nếu $4n^2-mn+4m-13n+6=0$ thì :

$$2(4n^2-mn+4m-13n+6)+(m^2+n^2-8m-6n+20)=(m-n)^2+8(n-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow m=n=2$$

Loại vì khi đó C trùng A.

Đáp số : $C(3,5)$.

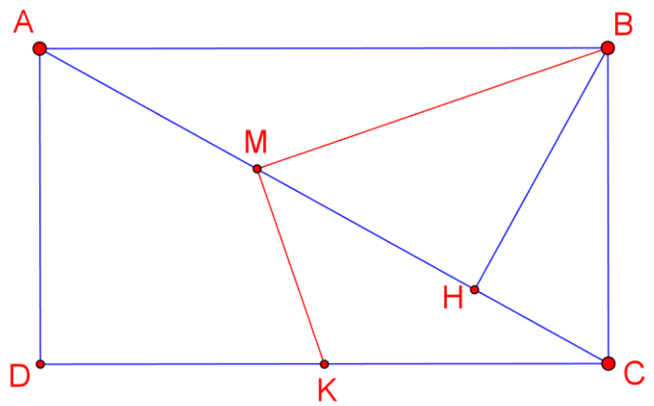
Nhận xét : Bài toán này tổng quát hơn nên lời giải trên cũng tổng quát hơn trường hợp đặc biệt của bài toán gốc. Tuy nhiên, cách xử lý dữ liệu hợp lý giúp giải quyết bài toán nhanh gọn hơn. Một bài toán nhỏ cho bạn đọc là : Thử giải quyết Ví dụ 1 bằng cách làm trên. Sẽ rất thú vị đó.

Ví dụ 3 : Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật ABCD, biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d_1: 2x-y+2=0$ đỉnh C thuộc đường thẳng $d_2: x-y-5=0$. Gọi H là hình chiếu của B lên AC. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết điểm $M\left(\frac{9}{5},\frac{2}{5}\right)$, $K(9,2)$ lần lượt là trung điểm của AH, CD và C có tung độ dương.

(THPT Trần Hưng Đạo – TP. Hồ Chí Minh – lần 6 – 2016)

(THPT Đào Duy Từ – Quảng Bình – lần 2 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Nếu sử dụng vecto hoặc hình học cổ điển thì chúng ta sẽ đi chứng minh MB vuông góc với MK. Bây giờ coi như chúng ta chưa biết tính chất trên, chúng ta thử tham số hóa bài toán này xem sao :

Lời giải : Gọi $B(b,2b+2)$ và $C(c,c-5)$. Khi đó :

Đầu tiên, ta có :

$$\overrightarrow{KC}\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (c-9)(c-b)+(c-5-2)(c-5-2b-2)=0 \Leftrightarrow 2c^2-3bc+23b-23c+49=0$$

Ta lại có : $\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HB})\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{KC}\overrightarrow{MC}$

$$\Rightarrow \left(b-\frac{9}{5}\right)\left(c-\frac{9}{5}\right)+\left(2b+\frac{8}{5}\right)\left(c-\frac{27}{5}\right)=(c-9)\left(c-\frac{9}{5}\right)+(c-7)\left(c-\frac{27}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 10c^2-15bc+63b-115c+297=0$$

Kết hợp lại ta có : $\begin{cases}10c^2-15bc+63b-115c+297=0\\2c^2-3bc+23b-23c+49=0\end{cases}$. Khi đó :

$$10c^2-15bc+63b-115c+297-5\left(2c^2-3bc+23b-23c+49\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 52b-52=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow c^2-13c+36=0\Rightarrow c=9$$

Vậy $B(1,4)$ và $C(9,4)$ suy ra $D(9,0)$ và $A(1,0)$.

Đáp số : $A(1,0)$, $B(1,4)$, $C(9,4)$, $D(9,0)$.

Nhận xét : Bạn đọc có thể so sánh với 2 cách làm của phần 1 : Tích vô hướng và kiến thức hình học THCS.

Ý tưởng : MB vuông góc với MK.

Chứng minh :

Cách 1 : (Sử dụng Vecto và tích vô hướng).

Ta có :

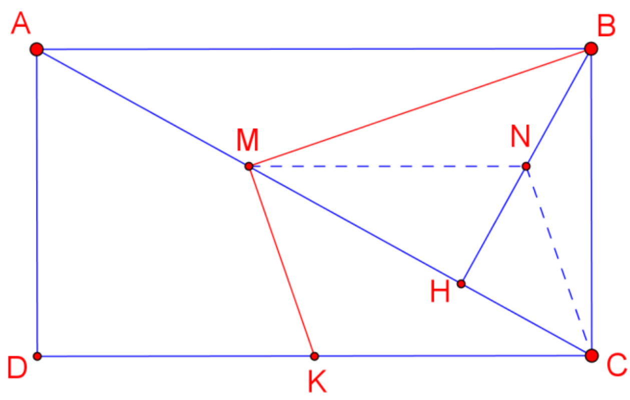
$$\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MK}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CK}\right)=\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CK}\right)$$

$$=\overrightarrow{MC}\left(\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HC}}{2}+\overrightarrow{CB}+\frac{\overrightarrow{BA}}{2}\right)=\overrightarrow{MC}\left(\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HC}}{2}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\overrightarrow{MC}\left(\frac{\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{BC}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\overrightarrow{HB}=0$$

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).

Gọi N là trung điểm BH. Khi đó :



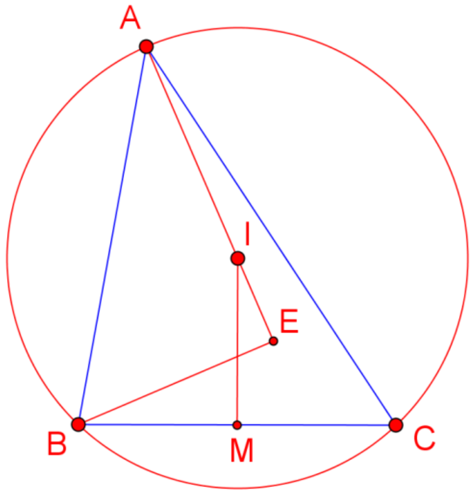
Ta có $\begin{cases}MN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=CK\\MN//AB//CD//CK\end{cases}\Rightarrow MNCK$ là hình bình hành. Suy ra $NC//MK$

Lại có $\begin{cases}NM\perp BC\\NB\perp MC\end{cases}\Rightarrow CN\perp BM\Rightarrow MK\perp BM$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 4 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm $M(0,-2)$ là trung điểm cạnh BC và điểm $E(-1,-4)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AI. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng AC có phương trình $x+y-4=0$.

(THPT Xuân Trường – Nam Định – lần 2 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Nguy hiểm nhất của bài toán này chính là điểm I. Thật khó để khống chế điểm I trong bài toán này nếu chưa biết được tính chất của bài toán. Thay vì đó, chúng ta thử đặt tổng quát điểm I xem sao.

Lời giải : Gọi $C(c,4-c)\Rightarrow B(-c,c-8)$ và $A(a,4-a)$. Khi đó :

Vì $\overrightarrow{EA}\overrightarrow{EB}=0\Rightarrow(a+1)(-c+1)+(4-a+4)(c-8+4)=0\Leftrightarrow 2ac-5a-7c+31=0$.

Gọi $I(m,n)$. Vì $I\in AE:(a-8)x+(a+1)y+5a-4=0\Rightarrow(a-8)m+(a+1)n+5a-4=0$.

Vì $IM\perp BC\Rightarrow mc-(c-6)(n+2)=0$

Vì $IA=IB\Rightarrow(m-a)^2+(n+a-4)^2=(m+c)^2+(n-c+8)^2$

$$\Leftrightarrow(a+c)m+(12-a-c)n-a^2+c^2+4a-8c+24=0$$

Tóm lại, ta có HPT 4 ẩn 4 phương trình sau :

$$\begin{cases}2ac-5a-7c+31=0\\(a-8)m+(a+1)n+5a-4=0\\mc-(c-6)(n+2)=0\\(a+c)m+(12-a-c)n-a^2+c^2+4a-8c+24=0\end{cases}$$

Lần lượt ta có :

$$a=\frac{7c-31}{2c-5};m=\frac{(c-6)(c-7)}{3(2-c)};n=\frac{(c+3)(c-4)}{3(2-c)}$$. Thế vào PT cuối ta được :

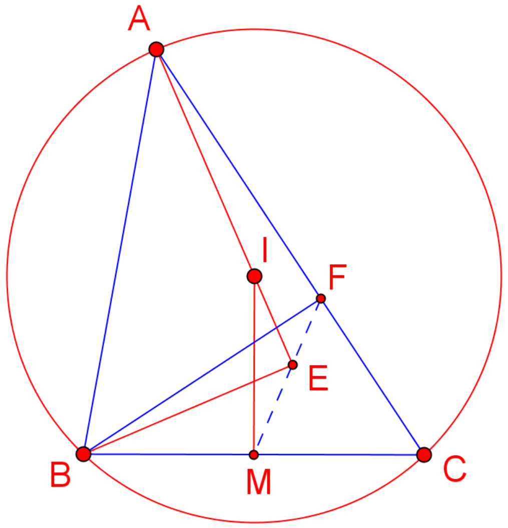
$$\frac{(c-4)(2c^2-12c+31)(2c^2-10c+17)}{(2c-5)^2(c-2)}=0\Leftrightarrow c=4$$

Đáp số : $A(-1,5)$, $B(-4,-4)$, $C(4,0)$.

Nhận xét : Qua cách làm trên, bạn đọc có thể nhận thấy sự "trâu bò" của phương pháp này rồi chứ ? Chắc chắn sẽ nhiều bạn tò mò xem lời giải gốc của bài toán này như nào. Bạn đọc cùng xem cách làm sau :

Cách 2 : (Sử dụng kiến thức hình học THCS).

Kẻ BF vuông góc với AC (F thuộc AC). Khi đó, ta sẽ chứng minh M, E, F thẳng hàng.



Tứ giác BMEI và BEFA nội tiếp. Vậy ta được :

$$BEM = BIM = \frac{1}{2}BIC = BAC = 180^{o} - BEF \Rightarrow BEM + BEF = 180^{o} \Rightarrow \overline{M,E,F}$$

Áp dụng :

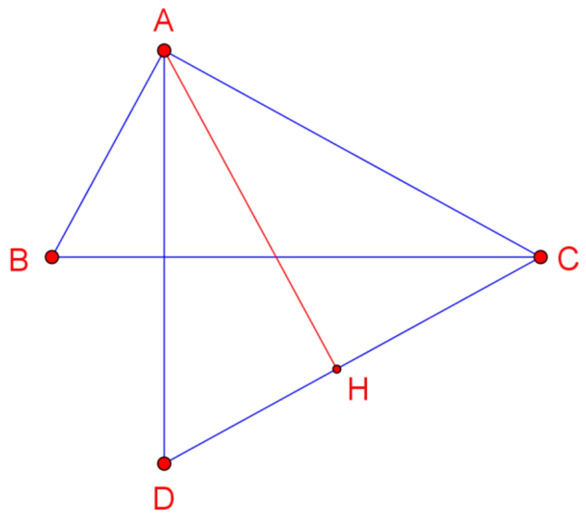
- Phương trình đường thẳng ME : $2x - y - 2 = 0$
- Tọa độ điểm $F(2,2)$
- Phương trình đường tròn tâm M bán kính MF : $x^2 + (y+2)^2 = 20$
- Tọa độ điểm $C(4,0)$
- Phương trình đường thẳng BF : $x - y = 0$
- Tọa độ điểm $B(-4,-4)$
- Phương trình đường thẳng BE : $y + 4 = 0$
- Phương trình đường thẳng AE : $x + 1 = 0$
- Tọa độ điểm $A(-1,5)$

Nhận xét : Chúng ta cũng có thể chứng minh M, E, F thẳng hàng bằng vecto.

Ví dụ 5 : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Đường thẳng đi qua A vuông góc với CD có phương trình $4x - 3y + 20 = 0$. Biết rằng phương trình đường thẳng AD: $x - 2y + 10 = 0$, điểm B nằm trên đường thẳng $x + y - 5 = 0$. Tìm toạ độ các điểm B, C.

(THPT Đa Phúc – Hà Nội – lần 3 – 2016)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Chúng ta tiếp tục tham số hóa những điểm chưa biết.

Lời giải : Đặt $B(b,5-b)$, $C(m,n)$, $D(2d-10,d)$

Gọi AH là đường thẳng qua A vuông góc với CD, H là chân đường cao. Khi đó ta tìm được tọa độ điểm $A(-2,4)$. Suy ra $K\left(d-6,\frac{d}{2}+2\right)$ là trung điểm AD.

Ta có các điều kiện sau :

- $\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow (m+2)(b+2)+(n-4)(5-b-4)=0 \Leftrightarrow mb+2m-nb+n+6b=0$
- B, C thuộc BC : $2x+y-\frac{5}{2}d+10=0$
- C thuộc CD : $3x+4y-10d+30=0$

Từ đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} mb+2m-nb+n+6b=0 \\ 2b+5-b-\frac{5}{2}d+10=0 \\ 2m+n-\frac{5}{2}d+10=0 \\ 3m+4n-10d+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mb+2m-nb+n+6b=0 \\ d=\frac{2b}{5}+6 \\ m=-2 \\ n=b+9 \end{cases}$$

Thế vào PT đầu ta được $5b-b(b+9)+5=0 \Leftrightarrow (b+5)(b-1)=0$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Đáp số : $B(1,4)$, $C(-2,10)$ hoặc $B(-5,10)$, $C(-2,4)$

Nhận xét : Qua một số bài toán trên, bạn đọc có thể hình dung được phương pháp giải tổng quát một bài Oxy nào đó từ dữ kiện của đề bài mà không cần quan tâm đến tính chất hình học đặc trưng. Có thể phương pháp này rất mất thời gian để xử lý các biểu thức nhưng ít ra là nó sẽ dẫn đường đến lời giải của bài toán.

Tuy vậy, có một số dạng bài mà chúng ta không cần thiết phải đặt hết các ẩn số mà chỉ quan tâm đến tỉ lệ của bài toán. Chương sau sẽ giúp bạn đọc hiểu rõ hơn :

Phần 3 : Chuẩn hóa các đại lượng trong Oxy.

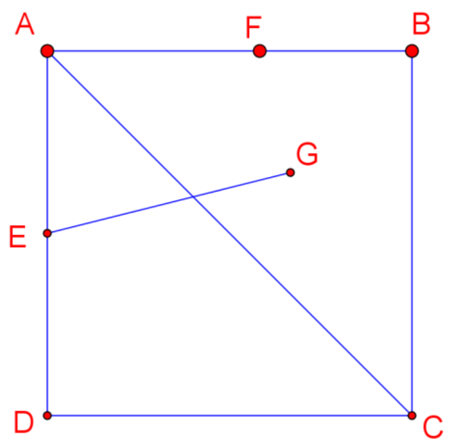
Với những bài toán liên quan đến tỉ lệ độ dài đoạn thẳng, chuẩn hóa giúp chúng ta xác định tỉ lệ để giải quyết bài toán. Tất nhiên là chúng ta không được trình bày rằng

ta chuẩn hóa cạnh này bằng 1, cạnh kia bằng 2, … mà chỉ tự ngầm hiểu : tỉ lệ không đổi nên ta đặt cạnh bằng bao nhiêu cũng được.
Tốt hơn hết, đối với một số bạn mới bắt đầu thì chúng ta cứ đặt cạnh bằng a và cố gắng xét tỉ lệ để triệt tiêu a đi. Bài toán sau là một ví dụ minh họa :

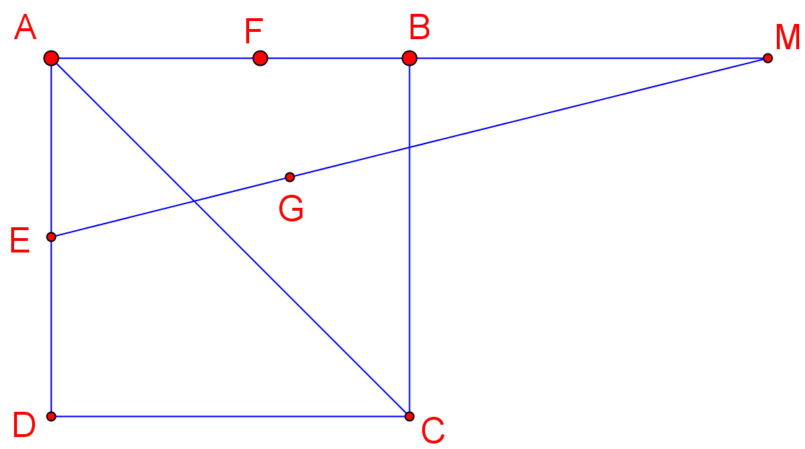
Ví dụ 1 : Cho hình vuông ABCD. $F\left(-\frac{13}{6};\frac{3}{2}\right)$ thuộc cạnh AB và $7BF=5FA$, E là trung điểm AD, G là trọng tâm ABC, EG: $11x-7y+6=0$, $y_B<0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD.

(Bồ Tùng Linh)

Hướng dẫn



Ý tưởng : Đề bài cho mỗi EG và F mà lại đi hỏi B. Vậy thì đặt tổng quát $B(m,n)$. Ta chỉ cần tìm hai phương trình chứa hai ẩn m và n là xong.
Đầu tiên, nhận thấy rằng khi zoom in hay zoom out, hình vẫn kiểu kiểu như thế, do đó tỉ lệ giữa 2 độ dài bất kỳ luôn không đổi. Vậy thì nếu EG cắt BF tại M nào đó thì tỉ lệ $\frac{MB}{MF}$ là một hằng số nào đó mà ta có thể tính được.



Vậy thì ta sẽ tìm được tọa độ điểm M theo m và n. Lại có M thuộc EG nên sẽ có một mối liên hệ giữa m và n ở đây.

Tiếp theo, ta cần tìm một dữ kiện nữa. Không gì khác, đó là tỉ lệ khoảng cách từ F và B xuống EG. Tỉ lệ này cũng không đổi, mà $d_{F/EG}$ có thể tính được nên ta tính được cụ thể $d_{B/EG}$. Đây chính là mối liên hệ thứ hai giữa m và n. Bài toán được giải quyết.

Lời giải : Gọi $B(m,n)$ và $EG \cap AB = M$. Đặt $AB = a > 0$. Ta có $BF = \frac{5a}{12}$.

Lại có $\frac{MG}{ME} = \frac{d_{G/AB}}{d_{E/AB}} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA}{d_{G/AD}} = 3 \Rightarrow MA = 3d_{G/AD} = 3 \cdot \frac{2}{3}a = 2a$.

Tóm lại $\frac{MB}{MF} = \frac{a}{a + \frac{5a}{12}} = \frac{12}{17} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{12}{17}\overrightarrow{MF} \Rightarrow M\left(\frac{26+17m}{5}, \frac{-18+17n}{5}\right)$

Lại có $M \in EG \Rightarrow 11m - 7n + 26 = 0$.

Tiếp tục, do B là trung điểm AM nên :

$$d_{B/EG} = \frac{1}{2}d_{A/EG} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AE^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{4}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{17}}$$

Suy ra $d_{B/EG} = \frac{12}{5\sqrt{17}}\sqrt{\left(m + \frac{13}{6}\right)^2 + \left(n - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{12}{17}d_{F/EG} = 2\sqrt{\frac{10}{17}}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{12}{5\sqrt{17}}\sqrt{\left(m + \frac{13}{6}\right)^2 + \left(n - \frac{3}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{10}{17}} \\ 11m - 7n + 26 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -\frac{13}{51} \end{array}\right. \Rightarrow B(-3;-1)$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Đáp số : $A(-1;5), B(-3;-1), C(3;-3), D(5;3)$

Nhận xét : Vậy là với những bài hình vuông mà khi zoom in hoặc zoom out, các hình đồng dạng với nhau thì sử dụng tỉ lệ sẽ rất hợp lý.

Thật khó để giải bài toán trên theo hướng làm khác vì đề bài cho dữ kiện khá khó chịu.

Do những bài kiểu này khá khó và mất thời gian nên có khá ít đề thi thử cho bài tập về dạng này.

Ví dụ 2 : Cho hình vuông ABCD. M thuộc cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. N thuộc cạnh AD sao cho $3AN = ND$. Qua B kẻ đường vuông góc với MN cắt CD tại F. Biết phương trình đường thẳng NF là $4x + 8y - 3 = 0$, $A(-3,1)$. Tìm tọa độ điểm B, C, D.

(Bùi Thế Việt – Mở rộng)

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

C – Kết Luận :

Chuyên đề này tuy chưa hoàn chỉnh lắm nhưng hy vọng nó giúp ích được cho một số bạn chuẩn bị ôn thi THPT Quốc Gia.

Bùi Thế Việt