A. ÉP TÍCH BẰNG ĐẶT ẨN PHỤ HOÀN TOÀN

I. Đặt vấn đề:

Phương pháp ép tích bằng đặt ẩn phụ hoàn toàn là phương pháp dùng để nhóm các biểu thức chứa căn thành dạng tích thông qua việc giản ước các căn thức bằng cách đặt ẩn phụ.

Trong mục này, chúng ta sẽ ưu tiên các phương pháp đặt ẩn phụ và biến đổi để rèn luyện tư duy ẩn phụ và biến đổi tương đương.

II. Các phương pháp cơ bản của đặt ẩn phụ hoàn toàn ép tích:

- Đặt một ẩn phụ kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt hai ẩn phụ kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt từ 3 ẩn phụ trở lên kết hợp nhóm nhân tử.
- Đặt một ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình.
- Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình: $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}$

Cách 1: Đặt một ẩn phụ và nâng lũy thừa:

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1, t\ge 0$.

Khi đó ta có: $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2\left(t^2+1\right)^2+t^2+2-7t^3=0$

$\Leftrightarrow 2t^4-7t^3+5t^2+4=0\Leftrightarrow\left(2t^2+t+1\right)\left(t-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x-1}^2+\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(2x-2+\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0\Leftrightarrow\left(2x-1+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$

Vì $2x-1+\sqrt{x-1}>0\forall x\ge 1$ do đó $\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

Cách 2: Đặt một ẩn phụ đưa về hệ kết nối hai phương trình:

Điều kiện: $x\ge 1$.

Xét phương trình $2x^2+x+1=7\left(x-1\right)\sqrt{x-1}$

Đặt $y=4\sqrt{x-1}-3$. Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 = \dfrac{7(x-1)(y+3)}{4} \\ (y+3)^2 = 16(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25 = 0 \\ y^2 - 16x + 6y + 25 = 0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình trong hệ ta có:

$$\begin{cases} 8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25 = 0 \\ y^2 - 16x + 6y + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(8x^2 - 7xy - 17x + 7y + 25\right) - \left(y^2 - 16x + 6y + 25\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x + y - 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \left(8x + 4\sqrt{x-1} - 3 - 1\right)\left(x - 4\sqrt{x-1} + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{x-1} - 2x + 1\right)\left(4\sqrt{x-1} - x - 3\right) = 0$$

Với $x \geq 1$ ta có $\sqrt{x-1} + 2x - 1 \geq 1 > 0$.

Do đó : $\left(-\sqrt{x-1} - 2x + 1\right)\left(4\sqrt{x-1} - x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} - x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 16(x-1) = (x+3)^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Bài 2: Giải phương trình: $x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x}$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{x} \geq 0$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^4 - t^2 - t - 2 - \sqrt{3 - t^2} = 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t - 1 - \sqrt{3 - t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t - 1 - \sqrt{3 - t^2}\right)\left(t - 1 + \sqrt{3 - t^2}\right) = 2t^2 - 2t - 2$$

Bài giải

Đặt một ẩn phụ và nhóm nhân tử:

Điều kiện: $0 \leq x \leq 3$. Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$.

Khi đó: $x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x} \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t - 2 - \sqrt{3 - t^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(t^4 - t^2 - 2t - 1\right) + \left(t - 1 - \sqrt{3 - t^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2 - t - 1\right)\left(t^2 + t + 1\right) + \left(t - 1 - \sqrt{3 - t^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2t^2 - 2t - 2\right)\left(t^2 + t + 1\right) + \left(t - 1 - \sqrt{3 - t^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^2+t+1\right)+\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left[\left(t-1+\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^2+t+1\right)+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3-1+\left(t^2+t+1\right)\sqrt{3-t^2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t-1-\sqrt{3-t^2}\right)\left(t^3+1+\left(t^2+t+1\right)\sqrt{3-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}\right)\left(x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}\right)=0$$

Vì $x\sqrt{x}+1+\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{3-x}>0\forall 0\le x\le 3$ do đó $\sqrt{x}-1-\sqrt{3-x}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x=4-x+2\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x-2=\sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left(x-2\right)^2=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình: $20x^2+14x+9-\left(14x+11\right)\sqrt{2x^2+1}=0$

Đặt một ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $y=\dfrac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20x^2+14x+9=\left(14x+11\right)\left(\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}\right) \\ \left(4y+1\right)^2=9\left(2x^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x^2-56xy+28x-44y+16=0 \\ 18x^2-16y^2-8y+8=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình cho nhau ta được:

$$24x^2-56xy+32y^2+28x-28y=0\Leftrightarrow 4\left(x-y\right)\left(6x-8y+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}\right)\left(6x-8\frac{3\sqrt{2x^2+1}-1}{4}+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{2x^2+1}-4x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+1}-2x-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \\ 2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $3\sqrt{2x^2+1}=4x+1 \Rightarrow 9\left(2x^2+1\right)=\left(4x+1\right)^2 \Rightarrow x=2$

Trường hợp 2: $2\sqrt{2x^2+1}=2x+3 \Rightarrow 4\left(2x^2+1\right)=\left(2x+3\right)^2 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$

Kết luận: Phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=2, x=\dfrac{3\pm\sqrt{14}}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$

Đặt hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình:

Điều kiện xác định: $x\in\left[1,+\infty\right)$.

Đặt $a=\sqrt{x-1}$ và $b=\sqrt{x+1}$ ta được:

Ta có: $2x+4+2\sqrt{x^2-1}-\left(2x-3\right)\sqrt{x-1}-\left(2x+3\right)\sqrt{x+1}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2=0 \\ 2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4=0 \end{cases}$$

Trừ hai vế của hai phương trình ta được:

$$\left(2a^3+2b^3-a^2-2ab-b^2-a+b-4\right)-\left(a^2-b^2+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-2a^2-\left(2b+1\right)a+\left(2b^3+b-6\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(b+a\right)\left(a-3b+4\right)\left(a-3b-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4\right)=0$$

Vì $x\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}>0 \\ 3\sqrt{x+1}+2-\sqrt{x-1}>\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}>0 \end{cases}$

Do đó $3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-4=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+4$

$$\Leftrightarrow 9\left(x+1\right)=\left(\sqrt{x-1}+4\right)^2 \Leftrightarrow 8x-6=8\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \left(8x-6\right)^2=64\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\sqrt{x-1}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$.

Bài 5: Giải bất phương trình: $x^3+3x^2+x+2\geq 2x^2\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+11}$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x+4}>1$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, bất phương trình có dạng:

$$t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-32t-18-\sqrt{2t^2+3}\ge 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)=2t^2-4t-2$$

Bài giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -4 \\ x^3+3x^2+x\ge -2>-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ \left(x+3\right)\left(x^2+1\right)>0 \end{cases} \Rightarrow x>-3$

Đặt $t=\sqrt{x+4}>1$, ta đưa bất phương trình trở thành:

$$\left(t^2-4\right)^3+3\left(t^2-4\right)^2+\left(t^2-4\right)+2\ge 2\left(t^2-4\right)^2t+\sqrt{2\left(t^2-4\right)+11}$$

$$\Leftrightarrow \left(t^6-12t^4+48t^2-64\right)+\left(3t^4-24t^2+48\right)+t^2-2\ge 2t^5-16t^3+32t+\sqrt{2t^2+3}$$

$$\Leftrightarrow t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-32t-18-\sqrt{2t^2+3}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^6-2t^5-9t^4+16t^3+25t^2-34t-17\right)+\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^4-8t^2+17\right)\left(t^2-2t-1\right)+\left(2x-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(t^4-8t^2+17\right)\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)+\left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2t-1-\sqrt{2t^2+3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(t^4-8t^2+17\right)\left(2t-1+\sqrt{2t^2+3}\right)+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x+4}-1-\sqrt{2x+11}\right)\left(\frac{\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)}{2}+1\right)\ge 0$$

Vì $\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)>\sqrt{x+4}-1=\frac{x+3}{2\left(\sqrt{x+4}+1\right)}>0\,\forall x>-3$

Do đó $\frac{\left(x^2+1\right)\left(2\sqrt{x+4}-1+\sqrt{2x+11}\right)}{2}+1>0\,\forall x>-3$.

Vậy $\begin{cases} 2\sqrt{x+4}>1+\sqrt{2x+11} \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(x+4\right)>12+2x+2\sqrt{2x+11} \\ x>-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>\sqrt{2x+11} \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-7>0 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1+2\sqrt{2}.$$

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $x\in\left[-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bài 6: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\ge x^2-8x+18$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-3}\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, bất phương trình có dạng:

$$t^4-2t^2-t+3-\sqrt{2-t^2}\le 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-4t+2$$

Bài giải

Điều kiện: $3\le x\le 5$. Đặt $t=\sqrt{x-3}\in\left[0;\sqrt{2}\right]$, ta biến đổi bất phương trình trở thành: $t+\sqrt{2-t^2}\ge\left(t^2+3\right)^2-8\left(t^2+3\right)+18\Leftrightarrow t^4-2t^2-t+3-\sqrt{2-t^2}\le 0$

$$\Leftrightarrow\left(t^4-2t^2+1\right)+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\le 0\Leftrightarrow\left(t-1\right)^2\left(t+1\right)^2+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+1\right)^2+\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-t-\sqrt{2-t^2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(2-t+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+1\right)^2+1\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}\right)\left[\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{2+2\sqrt{-x^2+8x-15}}\right)\left[\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{2+2\sqrt{-x^2+8x-15}}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{7-x}{2+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1\right]\le 0$$

Vì $\frac{1}{2}\left(\frac{7-x}{2+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2+1>0\,\forall 3\le x\le 5$.

Do đó: $\begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ 2 \le \sqrt{2 + 2\sqrt{-x^2 + 8x - 15}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ \sqrt{-x^2 + 8x - 15} \ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ -x^2 + 8x - 15 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ \left(x - 4\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x} + \sqrt{4 - x^2} = 2x^2 + 2x - 2$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{2 + x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$\left(t + 1\right)\sqrt{4 - t^2} = 2t^4 - 6t^2 - t + 2$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2 - t - \sqrt{2 - t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t - 1 + \sqrt{4 - t^2}\right) = 2t^2 - 2t - 3$$

Bài giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$. Đặt $t = \sqrt{2 + x} \Rightarrow 0 \le t \le 2$.

Ta có: $\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x} + \sqrt{4 - x^2} = 2x^2 + 2x - 2$

$\Leftrightarrow t + \sqrt{4 - t^2} + t\sqrt{4 - t^2} = 2\left(t^2 - 2\right)^2 + 2\left(t^2 - 2\right) - 2$

$\Leftrightarrow \left(t + 1\right)\sqrt{4 - t^2} = 2t^4 - 6t^2 - t + 2$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t + 1\right) + \left(2t^4 - 7t^2 - t + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t + 1\right) + \left(2t^4 - 7t^2 - t + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2t^2 - 2t - 3\right)\left(t^2 + t - 1\right) + \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t - 1 + \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t^2 + t - 1\right) + \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(\left(t - 1 + \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t^2 + t - 1\right) + t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(t^3 - t + 2 + \left(t^2 + t - 1\right)\sqrt{4 - t^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{4 - t^2}\right)\left(\left(t^3 - 2t\right) + \left(t^2 + t\right)\sqrt{4 - t^2} + \left(t + 2 - \sqrt{4 - t^2}\right)\right) = 0$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(2t(t+2)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\right)=0$$

Chú ý rằng: $2t(t+2)=\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)$. Do đó:

$$\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t+2+\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2-2+(t+1)\sqrt{4-t^2}\right)+2(t+2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-1-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2-\sqrt{4-t^2}\right)\left(t^2+4t+4+\left(2t^3+3t\right)\sqrt{4-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+x}-1-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}\right)A=0$$

Trong đó: $A=6+x+4\sqrt{2+x}+(2x+7)\sqrt{4-x^2}>0\forall x\in[-2;2]$. Vậy:

Trường hợp 1: $\sqrt{2+x}=1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow 2+x=3-x+2\sqrt{2-x}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 2\\ 4(2-x)=4x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{2}$$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\sqrt{2+x}+2-\sqrt{2-x}=0$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+\left(2-\sqrt{2-x}\right)\left(2+\sqrt{2-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)+x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2+x}\left(2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right)=0$$

Vì $2+\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}>0$ do đó $x=-2$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=-2, x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x-8}+1=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$, phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{7\left(\frac{t^2+1}{2}\right)-8}+1=(t-1)^2\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{7t^2-9}{2}}=t^2-2t\Leftrightarrow\frac{7t^2-9}{2}=\left(t^2-2t\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^6-12t^5+24t^4+16t^3-7t^2+9=0\Leftrightarrow(t-1)(t-3)\left(2t^2(t-1)^2+4t+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(2(2x-1)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+4\sqrt{2x-1}+3\right)=0$$

Vì $2\left(2x-1\right)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+4\sqrt{2x-1}+3>0, \forall x\geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow x=1 \vee x=5$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1 \vee x=5$.

Bài 9: Giải phương trình: $5x-6+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$5t^2-1+5t+t\sqrt{t^2+2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(3t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=\left(8t^2+6t-1\right)$$

Bài giải

Điều kiện: $x\geq 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành: $5t^2-1+5t+t\sqrt{t^2+2}=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+2}\right)t+\left(8t^2+6t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)t+\left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(3t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3t+1-\sqrt{t^2+1}\right)\left(2t+1+\sqrt{t^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1\right)=0$

Vì $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}+1>0$ do đó $3\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 9x-8+6\sqrt{x-1}=x+1 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1}=9-8x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1\leq x\leq \dfrac{9}{8} \\ 36\left(x-1\right)=\left(9-8x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{45-3\sqrt{17}}{32}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{45-3\sqrt{17}}{32}$.

Bài 10: Giải phương trình: $4x+3+2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1+x}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$4t^2-4t-1+2t\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-2t-1$$

Bài giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$, phương trình trở thành:

$4t^2-4t-1+2t\sqrt{2-t^2}=0 \Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(2t^2-2t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2t\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)+\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1-\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3t-1-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t-1+\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1\right)=0$

Trường hợp 1: $3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-1=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}+1$

$\Leftrightarrow 9x+9=2-x+2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow 10x+7=2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{10}\le x\le 1 \\ \left(10x+7\right)^2=4\left(1-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=-1$ (Phương trình vô nghiệm).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3\sqrt{19}-36}{50}$.

Bài 11: Giải phương trình: $5x-15-6\sqrt{1+x}+12\sqrt{1-x}+15\sqrt{1-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$5t^2-20-6t+\left(15t+12\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{2-t^2}\right)=5t^2-8$$

Bài giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$, phương trình trở thành:

$5t^2-20-6t+\left(15t+12\right)\sqrt{2-t^2}=0$

$\Leftrightarrow 10t^2-40-12t+\left(15t+12\right)2\sqrt{2-t^2}=0$

$\Leftrightarrow -\left(15t+12\right)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+25t^2-40=0$

$\Leftrightarrow -\left(15t+12\right)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+5\left(5t^2-8\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(15t+12\right)\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)+5\left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(5t+10\sqrt{2-t^2}-15t-12\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t-2\sqrt{2-t^2}\right)\left(5\sqrt{2-t^2}-5t-6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6\right)=0$

Trường hợp 1: $\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{5}$.

Trường hợp 2: $5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}-6=0\Leftrightarrow 5\sqrt{1-x}=5\sqrt{1+x}+6$

$\Leftrightarrow 25-25x=61+25x+60\sqrt{1+x}\Leftrightarrow -\left(36+50x\right)=60\sqrt{1+x}$

$\Leftrightarrow -\left(18+25x\right)=30\sqrt{1+x}\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le -\dfrac{18}{25}\\ \left(18+25x\right)^2=900\left(1+x\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{24}{25}$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{3}{5}$ và $x=-\dfrac{24}{25}$.

Bài 12: Giải phương trình: $\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}-\left(x^2+1\right)\sqrt{x-1}-x^2+2=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$\left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-t^5-t^4-2t^3-2t^2-2t+1=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)\left(\sqrt{t^2+2}+t+1\right)=1-2t$$

Bài giải

Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành:

$\left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-\left(t^4+2t^2+2\right)t-t^4-2t^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left(t^4+2t^2\right)\sqrt{t^2+2}-t^5-t^4-2t^3-2t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow \left(t^4+2t^2\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)+\left(1-2t\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t^4+2t^2\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)+\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)\left(\sqrt{t^2+2}+t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(t^4+2t^2+t+1+\sqrt{t^2+2}\right)\left(\sqrt{t^2+2}-t-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$

Vì $x^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}>0$ do đó $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{x-1}+1$

$\Leftrightarrow x+1=x+2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{5}{4}$.

Bài 12: Giải phương trình:

$$3x+3-2\sqrt{2x^2+5x+2}+2\left(\sqrt{x+2}\right)^3-\left(x+5\right)\sqrt{2x+1}=0$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x+2}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$2t^3+3t^2-3-\left(t^2+2t+3\right)\sqrt{2t^2-3}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t+1+\sqrt{2t^2-3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{2t^2-3}+2t+1\right)\left(2t+1-\sqrt{2t^2-3}\right)=2t^2+4t+4$$

Bài giải

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{x+2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2t^3 + 3t^2 - 3 - \left(t^2 + 2t + 3\right)\sqrt{2t^2 - 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^3 + 8t^2 + 8t - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t\left(2t^2 + 4t + 4\right) - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(2t + 1 - \sqrt{2t^2 - 3}\right) - \left(t^2 + 2t + 3\right)\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(2t\left(2t + 1 - \sqrt{2t^2 - 3}\right) - t^2 - 2t - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(3t^2 - 3 - 2t\sqrt{2t^2 - 3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right)\left(\left(2t^2 - 3\right) - 2t\sqrt{2t^2 - 3} + t^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2t^2 - 3} - t\right)^2\left(\sqrt{2t^2 - 3} + 2t + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+2} + 1\right) = 0$$

Vì $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+2} + 1 > 0$ do đó $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 13: Giải phương trình: $3x^2 - 3x - 9 - 2\left(x^2 - 2\right)\sqrt{x+3} + \left(x^2 + 4\right)\sqrt{x} = 0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^5 + 3t^4 - 3t^2 + 4t - 9 - 2\left(t^4 - 2\right)\sqrt{t^2 + 3} = 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left(t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right) = -3t^2 + 6t - 3$$

Bài giải

Điều kiện: $x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t^5+3t^4-3t^2+4t-9-2\left(t^4-2\right)\sqrt{t^2+3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(-3t^2+6t-3\right)+\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t+3+2\sqrt{t^2+3}\right)+\left(t^4-2\right)\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t+3-2\sqrt{t^2+3}\right)\left(t^4+t+1+2\sqrt{t^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1\right)=0$$

Vì $\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1>0$ do đó $\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3=0\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=2\sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow x+9+6\sqrt{x}=4x+12\Leftrightarrow 3x-6\sqrt{x}+3=0\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 14: Giải phương trình:

$$3x^2+2x+1-\left(x^2+x-2\right)\sqrt{x+2}-\left(x^2+x+1\right)\sqrt{3-x}-\sqrt{6+x-x^2}=0$$

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 3$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$-t^5+3t^4+3t^3-10t^2-9-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\sqrt{5-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\left(t-3\right)-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\sqrt{5-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow-\left(t^4-3t^2+t+3\right)\left(\sqrt{5-t^2}+t-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+x^2+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=0$$

Vì $\sqrt{x+2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ do đó:

$$3-\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=0\Leftrightarrow 3=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 9=5+2\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}\Leftrightarrow 2=\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x=-1,x=2.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=-1,x=2$.

Bài 15: Giải phương trình:

$$2x^2-2-x^2\sqrt{x+1}+2x\sqrt{x^2-1}-\left(x^2+x\right)\sqrt{x-1}=0$$

Điều kiện xác định: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, phương trình trở thành:

$$2\left(t^2+1\right)^2-2-\left(t^2+1\right)^2\sqrt{t^2+2}+2t\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+2}-\left(\left(t^2+1\right)^2+\left(t^2+1\right)\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+4t^2-\left(t^4+2t^2+1\right)\sqrt{t^2+2}+\left(2t^3+2t\right)\sqrt{t^2+2}-\left(t^4+3t^2+2\right)t=0$$

$$\Leftrightarrow -t^5+2t^4-3t^3+4t^2-2t-\left(t^4-2t^3+2t^2-2t+1\right)\sqrt{t^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow -t\left(t^2+2\right)\left(t^2-t+1\right)-\left(t^4-2t^3+2t^2-2t+1\right)\sqrt{t^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{t^2+2}\left(\sqrt{t^2+2}\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)t+\left(t^2+1\right)\left(t-1\right)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}\left(\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x-1}+x\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\right)=0$$

Phương trình vô nghiệm với mọi $x\ge 1$.

Kết luận: Phương trình vô nghiệm.

Bài 16: Giải phương trình: $x+3+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^2+t+2-\left(3t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)=2t^2-2$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t^2+2+t-\sqrt{2-t^2}-3t\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+t+2-\left(3t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t+1\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(3t+1\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)-\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(\left(3t+1\right)-\left(t+\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+1-\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1\right)=0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Trường hợp 2: $2\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+1=0\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}+1=\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow 4x+5+4\sqrt{1+x}=1-x\Leftrightarrow 4\sqrt{1+x}=-4-5x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le -\dfrac{4}{5}\\ 16\left(x+1\right)=\left(4+5x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le -\dfrac{4}{5}\\ 16\left(x+1\right)=25x^2+40x+16\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{24}{25}.$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=-\dfrac{24}{25}$.

Bài 17: Giải phương trình: $3x-10+3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{2+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$3t^2+3t-16+\left(4t-6\right)\sqrt{4-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)=5t^2-16$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=\sqrt{2+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$3\left(t^2-2\right)-10+3t-6\sqrt{4-t^2}+4t\sqrt{4-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2+3t-16+\left(4t-6\right)\sqrt{4-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(2t-3\right)\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)+5t^2-16=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(2t-3\right)\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)+\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-2\sqrt{4-t^2}\right)\left(\left(t+2\sqrt{4-t^2}\right)-\left(2t-3\right)\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left(t - 2\sqrt{4 - t^2}\right)\left(2\sqrt{4 - t^2} - t + 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2 + x} - 2\sqrt{2 - x}\right)\left(2\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x} + 3\right) = 0$

Trường hợp 1: $\sqrt{2 + x} - 2\sqrt{2 - x} = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 4(2 - x) \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{5}$.

Trường hợp 2: $2\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2 - x} + 3 = \sqrt{2 + x}$

$\Leftrightarrow 8 - 4x + 9 + 12\sqrt{2 - x} = 2 + x \Leftrightarrow 12\sqrt{2 - x} = -15 + 5x$

$\Leftrightarrow 5(3 - x) + 12\sqrt{2 - x} = 0$ (Phương trình vô nghiệm $\forall -2 \le x \le 2$).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{6}{5}$.

Bài 18: Giải phương trình: $3x^2 - 3x - 9 - 2(x^2 - 2)\sqrt{x + 3} + (x^2 + 4)\sqrt{x} = 0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t = \sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^5 + 3t^4 - 3t^2 + 4t - 9 - 2(t^4 - 2)\sqrt{t^2 + 3} = 0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left(t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right) = -3t^2 + 6t - 3$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x \ge 0$.

Đặt $t = \sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$3t^4 - 3t^2 - 9 - 2(t^4 - 2)\sqrt{t^2 + 3} + (t^4 + 4)t = 0$

$\Leftrightarrow t^5 + 3t^4 - 3t^2 + 4t - 9 - 2(t^4 - 2)\sqrt{t^2 + 3} = 0$

$\Leftrightarrow (t^4 - 2)\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right) - 3t^2 + 6t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (t^4 - 2)\left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right) + \left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left(t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left((t^4 - 2) + \left(t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(t + 3 - 2\sqrt{t^2 + 3}\right)\left(t^4 + t + 1 + 2\sqrt{t^2 + 3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 2\sqrt{x + 3} + 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{x + 3} + x^2 + 1\right) = 0$

Vì $\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+x^2+1>0,\forall x\ge 0$. Do đó:

$\sqrt{x}-2\sqrt{x+3}+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x+6\sqrt{x}+9=4x+12$

$\Leftrightarrow 3x-6\sqrt{x}+3=0 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 19: Giải phương trình:

$$x^2-2x-3+(2x+3)\sqrt{1-x^2}+(x-3)\sqrt{1+x}+(2x+3)\sqrt{1-x}=0$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{1+x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+t\right)\sqrt{2-t^2}+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)=5t^2-2$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(t^2-1\right)^2-2\left(t^2-1\right)-3+\left(2\left(t^2-1\right)+3\right)t\sqrt{2-t^2}+\left(\left(t^2-1\right)-3\right)t$$
$$+\left(2\left(t^2-1\right)+3\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4-2t^2+1-2t^2+2-3+\left(2t^2-2+3\right)t\sqrt{2-t^2}+t^3-4t$$
$$+\left(2t^2-2+3\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+t\right)\sqrt{2-t^2}+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^4+t^3-4t^2-4t+\left(2t^3+2t^2+t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow t^3(t+1)-4t(t+1)+\left(2t^2(t+1)+t+1\right)\sqrt{2-t^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^3-4t+\left(2t^2+1\right)\sqrt{2-t^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(5t^3-2t-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(t\left(5t^2-2\right)-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(t\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2+1\right)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t\left(2t+\sqrt{2-t^2}\right)-\left(2t^2+1\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(2t-\sqrt{2-t^2}\right)\left(t\sqrt{2-t^2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(2-2t\sqrt{2-t^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(t^2-2t\sqrt{2-t^2}+\left(2-t^2\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(t+1)\left(\sqrt{2-t^2}-2t\right)\left(t-\sqrt{2-t^2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2=0$

Chú ý rằng $\sqrt{1+x}+1>0,\forall -1\le x\le 1$. Do đó ta có 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x}\Leftrightarrow 1-x=4+4x\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$.

Trường hợp 2: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0, x=-\dfrac{3}{5}$.

Bài 20: Giải phương trình: $x\sqrt{x^3-3x}+\sqrt{x^2-3}-x-3-\sqrt{x}=0$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{x}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$\left(t^3+1\right)\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(\sqrt{t^4-3}+t\right)=t^4-t^2-3$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\ge\sqrt{3}$.

Đặt $t=\sqrt{x}$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2\sqrt{t^6-3t^2}+\sqrt{t^4-3}-t^2-3-t=0$

$\Leftrightarrow t^3\sqrt{t^4-3}+\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\sqrt{t^4-3}-t^2-t-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+t^4-t^2-3=0$

$\Leftrightarrow \left(t^3+1\right)\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)+\left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(\sqrt{t^4-3}+t\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t^4-3}-t\right)\left(t^3+t+1+\sqrt{t^4-3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}\right)\left(\left(x+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1\right)=0$.

Chú ý rằng: $\left(x+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-3}+1>0, \forall x\geq\sqrt{3}$.

Do đó: $\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3=0 \\ x\geq\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 21: Giải phương trình:

$$x^2-9x+8+\sqrt{6x^2-x-1}=\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x-1}-\left(x^2+2\right)\sqrt{3x+1}$$

Phân tích

Ẩn phụ cần đặt: $t=\sqrt{2x-1}$

Sau khi tiến hành đặt ẩn phụ, phương trình có dạng:

$$4t^5-2t^4+8t^3+32t^2-4t-30-\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\sqrt{6t^2+10}=0$$

Nhân tử liên hợp cần tìm: $\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)$

Để đưa ra được nhân tử trên cần chú ý liên hợp ngược:

$$\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)=10t^2-16t-6$$

Bài giải

Điều kiện xác định: $x\geq\dfrac{1}{2}$.

Đặt ẩn phụ $t=\sqrt{2x-1}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-9\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+8+t\sqrt{3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+1}=$$

$$\left(2\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-1\right)t-\left(\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2+2\right)\sqrt{3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(t^2+1\right)^2-36\left(t^2+1\right)+64+4t\sqrt{6\left(t^2+1\right)+4}$$
$$=4t\left(\left(t^2+1\right)^2-2\right)-\left(\left(t^2+1\right)^2+8\right)\sqrt{6\left(t^2+1\right)+4}$$
$$\Leftrightarrow 2t^4+4t^2+2-36t^2-36+64+4t\sqrt{6t^2+10}=$$
$$4t\left(t^4+2t^2-1\right)-\left(t^4+2t^2+9\right)\sqrt{6t^2+10}$$
$$\Leftrightarrow 4t^5-2t^4+8t^3+32t^2-4t-30-\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\sqrt{6t^2+10}=0$$
$$\Leftrightarrow 20t^2-32t-12+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(10t^2-16t-6\right)+\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)+$$
$$\left(t^4+2t^2+4t+9\right)\left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\left(4t-2+\sqrt{6t^2+10}\right)+t^4+2t^2+4t+9\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4t-2-\sqrt{6t^2+10}\right)\left(2\sqrt{6t^2+10}+t^4+2t^2+12t+5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{3x+1}-2\right)\left(4\sqrt{3x+1}+12\sqrt{2x-1}+4x^2+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1\right)\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1\right)=0$$

Vì $3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+x^2+1>0, \forall x\geq \frac{1}{2}$.

Do đó: $2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}+1$

$$\Leftrightarrow 4\left(2x-1\right)=3x+1+1+2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 8x-4=3x+2+2\sqrt{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow 5x-6=2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(5x-6\right)^2=4\left(3x+1\right)\\ x\geq \frac{6}{5}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{36+4\sqrt{31}}{25}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{36+4\sqrt{31}}{25}$.

B. ÉP TÍCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN.

I. Đặt vấn đề:

Đây là một dạng phương pháp giải quyết các phương trình có dạng $A\sqrt{B}=C$ bằng cách nhóm về nhân tử mà không cần quan tâm đến nghiệm của phương trình. Các bươc làm như sau:

__Bước 1__: đặt $t=\sqrt{B}$ điều kiện $t\geq 0$.

Xét phương trình tổng quát có dạng $\alpha t^2 - At + C - \alpha B = 0$.

__Bước 2__:

- Đối với phương trình vô tỷ một biến x: Gán cho $x=100$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.
- Đối với phương trình vô tỷ hai biến x,y: Gán cho $x=100, y=\frac{1}{100}$ khi đó ta được phương trình bậc hai với ẩn là t và tham số là α.

__Bước 3 :__

- Tính Δ và tìm α sao cho $\sqrt{\Delta}=f\left(\alpha\right)$ là số hữu tỷ và $\alpha\neq 0$
- Khi tìm $\sqrt{\Delta}=f\left(\alpha\right)$ chúng ta sử dụng TABLE với Start = -9; End = 9; Step = 1 tìm giá trị $\alpha\neq 0$ thỏa mãn điều kiện trên.
- Ta tìm được α và tính được $\sqrt{\Delta}$.

Trong phần này, chúng ta sẽ chỉ đề cập đến việc đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình, kỹ năng đặt ẩn phụ không hoàn toàn giải hệ phương trình sẽ được đề cập sau.

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải phương trình sau: $\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$ (1)

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^3+x-1}=t$ với $t\geq 0 \Rightarrow t^2=x^3+x-1$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α vậy phương trình đã cho có dạng như sau :

$\alpha t^2-\left(x^2+1\right)t+2x^2+2x+3-\alpha\left(x^3+x-1\right)=0$ (2) .

Gán giá trị cho $x=100$ khi đó phương trình (2)

$\Leftrightarrow \alpha t^2 + 101t + 223 - 1009\alpha = 0$.

Tới đây ta tiến hành giải Δ với tham số α và với ẩn là t .

$\Delta = (101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(101)^2 - 4\alpha(223 - 1009\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE để tìm $\alpha \neq 0$ và α nguyên sao cho $f(\alpha) = \sqrt{\Delta}$ có giá trị hữu tỷ:

Xét công cụ TABLE (mode 7) cho:

$F(X) = \sqrt{(101)^2 - 4X(223 - 1009X)}$

Với các giá trị:

- START = -9.
- END = 9.
- STEP = 1.

Khi đó ta tìm giá trị X sao cho F(X) nhận giá trị hữu tỷ và đồng thời X là giá trị khác 0.

Dựa vào bảng giá trị TABLE như trên, ta nhận thấy với X = -1 thì:

$F(X) = 123 = 100 + 20 + 3 = x^2 + 2x + 3$

Vậy nếu lựa chọn $\alpha = 1$ thì:

$$\sqrt{\Delta} = x^2 + 2x + 3$$

X	F(X)
-9	587.4904…
-8	525.0152…
-7	462.8271…
-6	401.0598…
-5	339.9426…
-4	279.9017…
-3	221.8129…
-2	167.7170…
-1	123
0	101
1	115.5205…
2	156.7194…
3	209.4015…
4	266.8501…
5	326.5593…
6	387.4854…
7	449.1336…
8	511.2426…
9	573.6627…

Do đó, nếu ta lựa chọn: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ f(\alpha) = 123 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 123 = x^2 + 2x + 3$.

Vậy với cách đặt ẩn phụ là t và $\alpha = -1$ ta được phương trình có

$\sqrt{\Delta} = 123 = 100 + 20 + 3 = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \Delta = (x^2 + 2x + 3)^2$.

Vậy khi đó phương trình đã cho có dạng như sau:

$-t^2 - (x^2 + 1)t + (2x^2 + 2x + 3) + (x^3 + x - 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow -t^2-\left(x^2+1\right)t+\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=0.$$

$$\Rightarrow \Delta=\left(x^2+1\right)^2-4\left(x^3+2x^2+3x+2\right)=\left(x^2+2x+3\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+3\right).$$

Khi đó, bằng công thức nghiệm của phương trình bậc 2, ta thu được hai nghiệm sau :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x^2+1+x^2+2x+3}{-2}=-\dfrac{\left(x^2+x+2\right)}{2} \\ t=\dfrac{x^2+1-x^2-2x-3}{-2}=x+1 \end{array}\right.$$

Đến đây phương trình sẽ được viết dưới dạng nhân tử như sau :

$$\left(t+\frac{x^2}{2}\right)(t-x-1)=0 \Leftrightarrow \left(2t+x^2+x+2\right)(t-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$$

Bài giải

Điều kiên xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+x-1}=2x^2+2x+3$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+2+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}\right)\left(x+1-\sqrt{x^3+x-1}\right)=0$$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}+2\sqrt{x^3+x-1}>0\forall x\in\mathbb{R}$ do đó:

$$\sqrt{x^3+x-1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2=(x+1)^2 \\ x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^3+x-1\right)=x^2+2x+1 \\ x+1\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-x^2-x-2=0 \\ x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)\left(x^2+x+1\right)=0 \\ x+1\ge 0\end{cases} \Rightarrow x=2$$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Bài 2: Giải phương trình sau : $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

Phân tích

Trong bài toán này ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ không hòan toàn .

Đặt $\sqrt{6x^2-6x+25}=t$ với $t\ge 0$ khi đó ta đi tìm $\alpha\ne 0$ theo phương trình tổng quát đã cho có dạng như sau.

$\alpha t^2+(x+1)t-(23x-13)-\alpha(6x^2-6x+25)=0$. (2)

Ta gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình (2)đã cho có dạng.

$\alpha t^2+101t-2287-59425\alpha=0 \Rightarrow \Delta=(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(101)^2+4\alpha(2287+59425\alpha)}$.

Sử dụng chức năng TABLE trong Casio tìm $\alpha\ne 0$ và có giá trị nguyên Với Start = -9 , End = 9, Step = 1 ta có :

$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=507\end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=507=500+7=5x+7 \Rightarrow \Delta=(5x+7)^2$

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$t^2+(x+1)t-(23x-13)-(6x^2-6x+25)=0$.

$\Leftrightarrow t^2+(x+1)t-(6x^2+17x+12)=0$.

Tới đây chúng ta đi giải phương trình trên theo ẩn t

$\Rightarrow \Delta=(x+1)^2+4(6x^2+17x+12)=25x^2+70x+49=(5x+7)^2$

Nghiệm của phương trình là:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-(x+1)+(5x+7)}{2}=2x+3\\ t=\dfrac{-(x+1)-(5x+7)}{2}=-(3x+4)\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có : $(x+1)\sqrt{6x^2-6x+25}=23x-13$

$\Leftrightarrow \left(2x+3-\sqrt{6x^2-6x+25}\right)\left(3x+4+\sqrt{6x^2-6x+25}\right)=0$

Trường hợp 1 : $-(3x+4)=\sqrt{6x^2-6x+25} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3} \\ (3x+4)^2 = 6x^2-6x+25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{3} \\ 3x^2+30x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-5$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2 : $\sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3$

$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-6x+25}=2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{6x^2-6x+25}\right)^2=(2x+3)^2 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+12x+9=6x^2-6x+25 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-18x+16=0 \\ x \ge -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=8 \end{array}\right.$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình đã cho là : $x \in \left\{1;8;-5-2\sqrt{7}\right\}$.

Bài 3: Giải phương trình : $(x^2-1)\sqrt{2x^2-x+15}=x^3+2x^2+6x-9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+15}=t$ với $t\ge 0$ khi đó ta đi tìm α theo phương trình tổng quát đã cho như sau :

$\alpha t^2+(x^2-1)t-(x^3+2x^2+6x-9)-\alpha(2x^2-x+15)=0$. (2)

Gán giá trị cho $x=100$ khi đó phương trình (2) có dạng :

$\alpha t^2+9999t-1020591-19915\alpha=0$.

Núc này ta coi ẩn là t và α tham số, tính Δ cho phương trình trên

$\Delta=(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$,

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(9999)^2+4\alpha(1020591+19915\alpha)}$

Dùng chưc năng TABLE trong Casio tìm $\alpha\ne 0$ và là số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 ta có :

$$\begin{cases}\alpha=1\\ f(\alpha)=10205\end{cases}\Rightarrow \sqrt{\Delta}=10205=10000+200+5=x^2+2x+5$$

Phương trình đã cho có dạng :

$t^2+\left(x^2-1\right)t-\left(x^3+4x^2+5x+6\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2-1\right)+4\left(x^3+4x^2+5x+6\right)=\left(x^2+2x+5\right)^2\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+5\right)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-1\right)+\left(x^2+2x+5\right)}{2}=x+3\\ t=\dfrac{-\left(x^2-1\right)-\left(x^2+2x+5\right)}{2}=-x^2-x-2\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\left(x^2-1\right)\sqrt{2x^2-x+15}=x^3+2x^2+6x-9$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+15}\right)\left(x^2+x+2+\sqrt{2x^2-x+15}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+15}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}+\sqrt{2x^2-x+15}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}+\sqrt{2x^2-x+15}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x+3=\sqrt{2x^2-x+15}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+3\right)^2=\left(\sqrt{2x^2-x+15}\right)^2\\ x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x+9=2x^2-x+15\\ x\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=6\end{array}\right.$$

Kết Luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $x\in\left\{1;6\right\}$.

Bài 4: Giải phương trình : $\left(x^2+8\right)\sqrt{2x^2-12x+14}=x^3-4x^2+14x-29$.

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-12x+14}=t$, $t\ge 0\Rightarrow t^2=2x^2-12x+14$ khi đó theo phương trình tổng quát ta đi tìm α và phương trình đã cho có dạng .

$\alpha t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-4x^2+14x-29\right)-\alpha\left(2x^2-12x+14\right)=0$. (2)

Gán $x=100$ cho phương trình (2) ta có

$$\alpha t^2+10008t-961371-18814\alpha=0$$

Tới đây ta coi t là ẩn của phương trình và α là tham số tính

$$\Delta=\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)}.$$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(10008\right)^2+4\alpha\left(961371+18814\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio ta tim α sao cho $\alpha\neq0$ và là một số nguyên. Với Start = -9, End = 9, Step = 1 ta thu được

$$\begin{cases}\alpha=1\\ f\left(\alpha\right)=10202\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=10202=10000+200+2=\left(x^2+2x+2\right)$$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-4x^2+14x-29\right)-\left(2x^2-12x+14\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+\left(x^2+8\right)t-\left(x^3-2x^2+2x-15\right)=0.$$

$$\Delta=\left(x^2+8\right)^2+4\left(x^3-2x^2+2x-15\right)=x^4+4x^3+8x^2+8x+4=\left(x^2+2x+2\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+2x+2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-\left(x^2+8\right)+\left(x^2+2x+2\right)}{2}=x-3\\ t=\dfrac{-\left(x^2+8\right)-\left(x^2+2x+2\right)}{2}=-x^2-x-5\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2+8\right)\sqrt{2x^2-12x+14}=x^3-4x^2+14x-29$

$$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(x^2+x+5+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-3-\sqrt{2x^2-12x+14}\right)\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}\right)=0$$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{4}+\sqrt{2x^2-12x+14}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-3=\sqrt{2x^2-12x+14}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ (x-3)^2=2x^2-12x+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=4$.

Bài 5: Giải phương trình : $(x^2+2x+7)\sqrt{2x^2-12x+11}=x^3-x^2+11x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-12x+11}=t$, $t\ge 0$, $t^2=2x^2-12x+11$ theo phương trình tổng quát ta đi tìm α có dạng như sau:

$\alpha t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2+11x-21)-\alpha(2x^2-12x+11)=0$.

Gán giá trị cho x = 100 vào phương trình trên

$\Leftrightarrow \alpha t^2+10207t-991079-18811\alpha=0$.

$\Delta=(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}$.

Xét hàm số $f(\alpha)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{(10207)^2+4\alpha(991079+18811\alpha)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha=1 \\ f(\alpha)=10403 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=10403=10000+400+3=\left|x^2+4x+3\right|.$$

Khi đó phương trình đã cho:

$\Leftrightarrow t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2+11x-21)-(2x^2-12x+11)=0$.

$\Leftrightarrow t^2+(x^2+2x+7)t-(x^3-x^2-x-10)=0$. (2)

$\Delta=(x^2+2x+7)^2+4(x^3-x^2-x-10)=(x^2+4x+3)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\left|x^2+4x+3\right|$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-(x^2+2x+7)+(x^2+4x+3)}{2}=x-2 \\ t=\dfrac{-(x^2+2x+7)-(x^2+4x+3)}{2}=-(x^2+3x+5) \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2+2x+7\right)\sqrt{2x^2-12x+11} = x^3 - x^2 + 11x - 21$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+3x+5+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}\right)\left(x-2-\sqrt{2x^2-12x+11}\right)=0$$

Vì $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}+\sqrt{2x^2-12x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $x-2=\sqrt{2x^2-12x+11}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ \left(x-2\right)^2 = 2x^2-12x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-8x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=7$$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x=7$.

Bài 6 : Giải phương trình $\left(x^2-x+10\right)\sqrt{10x^2-47x+53}=3x^3-11x^2+42x-74$

Phân tích

Đặt $\sqrt{10x^2-47x+53}=t$, $t\ge 0, t^2=10x^2-47x+53$. Núc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2+\left(x^2-x+10\right)t-\left(3x^3-11x^2+42x-74\right)-\alpha\left(10x^2-47x+53\right)=0$. (2)

ta gán giá trị của $x=100$ vào phương trình (2)

$\alpha t^2+9910t-2894126-95353\alpha=0$

$\Delta=\left(9910\right)^2+4\alpha\left(2894126+95353\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9910\right)^2+4\alpha\left(2894126+95353\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9910\right)^2+4\alpha\left(2894126+95353\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases}\alpha=1\\ f\left(\alpha\right)=10496\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\Delta}=f\left(\alpha\right)=10496=10000+400+90+6=\left|x^2+5x-4\right|$$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow t^2 + \left(x^2 - x + 10\right)t - \left(3x^3 - 4x^2 - 5x - 21\right) = 0$.

$\Delta = \left(x^2 - x + 10\right)^2 + 4\left(3x^3 - 4x^2 - 5x - 21\right) = \left(x^2 + 5x - 4\right)^2$.

Nghiệm của phương trình $\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\left(x^2 - x + 10\right) + \left(x^2 + 5x - 4\right)}{2} = 3x - 7 \\ t = \dfrac{-\left(x^2 - x + 10\right) - \left(x^2 + 5x - 4\right)}{2} = -x^2 - 2x - 7 \end{array}\right.$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2 - x + 10\right)\sqrt{10x^2 - 47x + 53} = 3x^3 - 11x^2 + 42x - 74$

$\Leftrightarrow \left(3x - 7 - \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right)\left(x^2 + 2x + 7 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(3x - 7 - \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right)\left(\left(x + 1\right)^2 + 6 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53}\right) = 0$

Vì $\left(x + 1\right)^2 + 6 + \sqrt{10x^2 - 47x + 53} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $3x - 7 = \sqrt{10x^2 - 47x + 53}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 7 \ge 0 \\ \left(3x - 7\right)^2 = 10x^2 - 47x + 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{7}{3} \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

Kết luận *:* Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 7: Giải phương trình $x^2 + 2x - 1 + \left(x - 1\right)\sqrt{x + 2} = 0$.

Phân tích :

Đặt $\sqrt{x + 2} = t$, $t \ge 0$ khi đó $t^2 = x + 2$ Núc này ta đi tìm α theo phương trình tổng quát $\alpha t^2 + \left(x - 1\right)t + \left(x^2 + 2x - 1\right) - \alpha\left(x + 2\right) = 0$. (2)

Gán $x = 100$ cho phương trình (2) ta có $\alpha t^2 + 99t + \left(10199 - 102\alpha\right) = 0$

$\Delta = \left(101\right)^2 - 4\alpha\left(10199 - 102\alpha\right) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(99\right)^2 - 4\alpha\left(10199 - 102\alpha\right)}$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(99\right)^2 - 4\alpha\left(10199 - 102\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \neq 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kết quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ f(\alpha) = 305 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{\Delta} = 305 = 300 + 5 = |3x + 5|$$

Khi đó phương trình đã cho có dạng

$$-2t^2 + (x-1)t + (x^2 + 2x - 1) + 2(x+2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + (x-1)t + (x^2 + 4x + 3) = 0.$$

$$\Delta = (x-1)^2 + 8(x^2 + 4x + 3) = 9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-(x-1) + (3x+5)}{-4} = -\dfrac{(2x+3)}{2} \\ t = \dfrac{-(x-1) - (3x+5)}{-4} = x + 1 \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $x \geq -2$.

Ta có: $x^2 + 2x - 1 + (x-1)\sqrt{x+2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2x + 3 + 2\sqrt{x+2}\right)\left(x + 1 - \sqrt{x+2}\right) = 0$$

Trường hợp 1: $x + 1 = \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 2: $2x + 3 = -2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -\dfrac{3}{2} \\ (2x+3)^2 = 4(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Kết luận : Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8 : Giải phương trình $(x^2 - 5x)\sqrt{5x^2 - 3x + 6} = 2x^3 - 12x^2 + 16x - 15$

Phân tích

Đặt $\sqrt{5x^2-3x+6}=t$, $t\ge 0$, $t^2=5x^2-3x+6$ núc này ta đi tìm hệ số α theo phương trình tổng quát .

$\alpha t^2+\left(x^2-5x\right)t-\left(2x^3-12x^2+16x-15\right)-\alpha\left(5x^2-3x+6\right)=0$.

Gán cho giá trị của $x=100$ khi đó phương trình tổng quát đã cho

$\alpha t^2+9500t-1881585-49706\alpha=0$.

$\Delta=\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)}$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9500\right)^2+4\alpha\left(1881585+49706\alpha\right)}$

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=3\\ f\left(\alpha\right)=10706\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=10706=10000+700+6=\left|x^2+7x+6\right|$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2+\left(x^2-5x\right)t-\left(2x^3+3x^2+7x+3\right)=0$.

$\Delta=\left(x^2-5x\right)^2+12\left(2x^3+3x^2+7x+3\right)=\left(x^2+7x+6\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=x^2+7x+6$

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-5x\right)+\left(x^2+7x+6\right)}{2}=6x+3\\ t\quad\dfrac{-\left(x^2-5x\right)-\left(x^2+7x+6\right)}{2}\qquad x^2==x\quad 6\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$\left(x^2-5x\right)\sqrt{5x^2-3x+6}=2x^3-12x^2+16x-15$

$\Leftrightarrow\left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(x^2+x+6+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(6x+3-\sqrt{5x^2-3x+6}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}\right)=0$

Vì $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}+\sqrt{5x^2-3x+6}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $6x+3=\sqrt{5x^2-3x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ (6x+3)^2 = 5x^2-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-39+\sqrt{1149}}{62}$

Kết luận : Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{-39+\sqrt{1149}}{62}$

Bài 9 Giải phương trình $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3} = x^3+2x^2-x+9$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2+8x-3}=t$, $t \ge 0$, $t^2 = 2x^2+8x-3$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát .

$$\alpha t^2 + \left(x^2+x+1\right)t - \left(x^3+2x^2-x+9\right) - \alpha\left(2x^2+8x-3\right) = 0 \text{ .(3)}$$

Gán $x=10$ vào phương trình (3) $\Leftrightarrow \alpha t^2 + 111t - \left(1199-277\alpha\right) = 0$

$$\Delta = (111)^2 + 4\alpha\left(1199+277\alpha\right) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2+4\alpha\left(1199+277\alpha\right)} \text{ .}$$

Xét hàm số $f\left(\alpha\right) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(111)^2+4\alpha\left(1199+277\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha \ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ f\left(\alpha\right) = 135 \end{cases} \Rightarrow f\left(\alpha\right) = \sqrt{\Delta} = 135 = 100+30+5 = \left(x^2+3x+5\right)$$

Kkhi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + \left(x^2+x+1\right)t - \left(x^3+4x^2+7x+6\right) = 0$$

$$\Delta = \left(x^2+x+1\right)^2 + 4\left(x^3+4x^2+7x+6\right) = \left(x^2+3x+5\right)^2 \text{ .}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \left|x^2+3x+5\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+3x+5\right)}{2} = x+2 \\ t = \dfrac{-\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2+3x+5\right)}{2} = -x^2-2x-3 \end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \left(-\infty; \dfrac{-4-\sqrt{22}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-4+\sqrt{22}}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{2x^2+8x-3}=x^3+2x^2-x+9$

$$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(x^2+2x+3+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2-\sqrt{2x^2+8x-3}\right)\left(\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}\right)=0$$

Vì $\left(x+1\right)^2+1+\sqrt{2x^2+8x-3}>0\,\forall x\in\left(-\infty;\frac{-4-\sqrt{22}}{2}\right]\cup\left[\frac{-4+\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$

Do đó $x+2=\sqrt{2x^2+8x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ \left(x+2\right)^2=2x^2+8x-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{11}\\ x=-2-\sqrt{11}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{11}\ \text{(Thỏa mãn điều kiện)}$$

Kết luận *:* Vậy nghiệm của phương trình là $x=-2+\sqrt{11}$

Bài 10: Giải phương trình $\left(x^2-5\right)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

Phân tích

Đặt $\sqrt{2x^2-x+11}=t$, $t\ge 0$, $t^2=2x^2-x+11$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2+\left(x^2-5\right)t-\left(x^3+16x-21\right)-\alpha\left(2x^2-x+11\right)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\alpha t^2+9995t-1001579-19911\alpha=0$.

$\Delta=\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(9995\right)^2+4\alpha\left(1001579+19911\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$\begin{cases}\alpha=3\\ f\left(\alpha\right)=10613\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=10613=10000+600+13=\left(x^2+6x+13\right)$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t^2+\left(x^2-5\right)t-\left(x^3+6x^2+13x+12\right)=0$.

$$\Delta=\left(x^2-5\right)^2+12\left(x^3+6x^2+13x+12\right)=\left(x^2+6x+13\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+6x+13\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left(x^2+6x+13\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-5\right)+\left(x^2+6x+13\right)}{6}=x+3 \\ t=\dfrac{-\left(x^2-5\right)-\left(x^2+6x+13\right)}{6}=\dfrac{-2x^2-6x-8}{6}\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2-5\right)\sqrt{2x^2-x+11}=x^3+16x-21$

$$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2x^2+6x+8+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+3-\sqrt{2x^2-x+11}\right)\left(2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}\right)=0$$

Vì $2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}+\sqrt{2x^2-x+11}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $x+3=\sqrt{2x^2-x+11}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\ge 0\\ \left(x+3\right)^2=2x^2-x+11\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}\\ x=\dfrac{7-\sqrt{37}}{2}\end{array}\right.$

Kết luận : nghiệm của phương trình $x=\left\{\dfrac{7-\sqrt{37}}{2};\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài 11: Giải phương trình sau:

$$15x^3+x^2-3x+2-\left(15x^2+x-5\right)\sqrt{x^2+x+1}=0$$

Phân tích

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=t$, $t\ge 0$, $t^2=x^2+x+1$ tới đây ta đi tim hệ số α theo phương trình tổng quát.

$\alpha t^2-\left(15x^2+x-5\right)t+15x^3+x^2-3x+2-\alpha\left(x^2+x+1\right)=0$.

Gán giá trị cho $x=100$ vào phương trình tổng quát

$\alpha t^2-150095t+15009702-10101\alpha=0$.

$\Delta=\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)}$.

Xét hàm số $f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(150095\right)^2-4\alpha\left(15009702-10101\alpha\right)}$.

Dùng chức năng TABLE trong Casio để tìm α sao cho $\alpha\ne 0$ và là một số nguyên với Start = - 9, End = 9, Step = 1 thu được kêt quả như sau.

$$\begin{cases}\alpha=2\\ f\left(\alpha\right)=149695\end{cases}\Rightarrow f\left(\alpha\right)=\sqrt{\Delta}=149695=140000+9600+95$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=140000+10000-400+100-5=150000-300-5=\left|15x^2-3x-5\right|$$

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2t^2-\left(15x^2+x-5\right)t+15x^3-x^2-5x=0$.

$$\Delta=\left(15x^2+x-5\right)^2-8\left(15x^3-x^2-5x\right)=\left(15x^2-3x-5\right)^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\left|15x^2-3x-5\right|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{15x^2+x-5+\left(15x^2-3x-5\right)}{4}=\dfrac{15x^2-x-5}{2}\\ t=\dfrac{15x^2+x-5-\left(15x^2-3x-5\right)}{4}=x\end{array}\right.$$

Bài giải

Điều kiện xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $15x^3+x^2-3x+2-\left(15x^2+x-5\right)\sqrt{x^2+x+1}=0$

$$\Leftrightarrow\left(15x^2-x-5-2\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0\ (*)$$

Tiếp tục sử dụng kỹ thuật tách nhân tử bằng đặt ẩn phụ không hoàn toàn ta được:

$$(*)\Leftrightarrow 2\left(2x-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=0$$

Trường hợp 1: $2x-\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Trường hợp 2: $10x+2+5\sqrt{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+x+1}=-10x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25\left(x^2+x+1\right)=\left(10x+2\right)^2 \\ 10x+2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75x^2+15x-21=0 \\ 10x+2 \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$ (Thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 3: $x=\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2=x^2+x+1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết luận *:* Nghiệm của phương trình $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \vee x=\dfrac{-1-\sqrt{29}}{10}$.