ĐOÀN TRÍ DŨNG
(THÁM TỬ CASIO - CASIO MAN)

KÍNH LÚP TABLE

TẬP 1: ĐÁNH GIÁ HÀM ĐƠN ĐIỆU

Tài liệu tham khảo cho các em học sinh

Tài liệu tham khảo cho các thầy cô giáo

Tài liệu ôn thi Trung học phổ thông Quốc gia

TỦ SÁCH CASIO
GROUP VIDEO BÀI GIẢNG CASIO MEN
HTTPS://WWW.FACEBOOK.COM/GROUPS/CASIOMEN/

TƯ DUY CASIO TRONG PT – BPT – HPT VÔ TỶ
KÍNH LÚP TABLE VÀ PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG GIẢI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

TẬP 1: ĐÁNH GIÁ HÀM ĐƠN ĐIỆU

I. Nguyên lý cơ bản

- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa một nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x)=a$ có tối đa $n+1$ nghiệm (Trong đó a là hằng số cho trước và n là số điểm gián đoạn của đồ thị hàm số).
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\ge b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a>b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)\ge f(b)\Leftrightarrow a\le b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu giảm và liên tục trên tập xác định D thì $f(a)>f(b)\Leftrightarrow a<b$ với a,b nằm trong tập xác định của hàm số.
- Việc dự đoán hình dáng của đồ thị hàm số có thể được phân tích bằng chức năng TABLE trong máy tính CASIO.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ và $k(x)=f(x)+g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D.
- Nếu $f(x),g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên D còn $k(x)=f(x)+g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.
- Nếu $f(x)$ đồng biến, dương và $g(x)$ nghịch biến, dương trên cùng một tập xác định D thì $h(x)=f(x).g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D.

II. Bài tập vận dụng

Bài 1: Giải phương trình: $x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}=3$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f\left(X\right)=X^3+X^2+X+3\sqrt[4]{X+1}-3$$

- START = -1
- END = 3
- STEP = 0.5

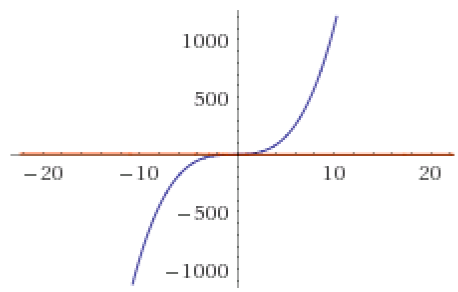
Ta có bảng giá trị như hình bên. Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số đồng biến trên $\left[-1;+\infty\right)$. Do đó đây chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

X	$F\left(X\right)$
-1	-4
-0.5	-0.852
0	0
0.5	1.195
1	3.5676
1.5	7.8973
2	14.498
2.5	25.478
3	40.242

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x\ge -1$.

Nhận xét: $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Do đó xét $f\left(x\right)=x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}-3$ trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Ta có: $f\left(x\right)=3x^2+2x+1+\dfrac{3}{4\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}>0\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$.

Do đó hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến và liên tục trên $\left(-1;+\infty\right)$.

Vậy $f\left(x\right)$ có tối đa một nghiệm. Mà $x=0$ là một nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f\left(X\right)=\sqrt{5X^3-1}+\sqrt[3]{2X-1}+X-4$$

- START = 0.5
- END = 4.5
- STEP = 0.5

X	$F\left(X\right)$
0.5	ERROR
1	0
1.5	2.7442
2	5.6872

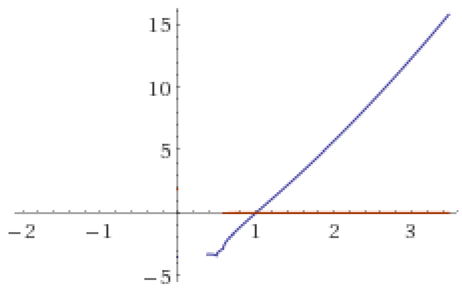
Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=1$ và hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

2.5	8.8694
3	12.285
3.5	15.924
4	19.773
4.5	23.821

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Ta có: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4=0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4$ trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$ có:

$$f'(x)=\frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}+1>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right).$$

Do đó $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f\left(X\right)=3\left(\sqrt{2X^2+1}-1\right)-X\left(1+3X+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

- START = −2
- END = 2
- STEP = 0.5

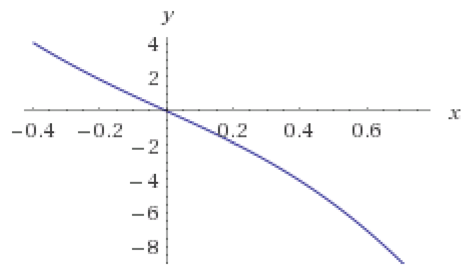
Từ bảng giá trị này ta thấy phương trình có nghiệm $x=0$ và hàm số nghịch biến.

X	$F\left(X\right)$
−2	44
−1.5	26.928
−1	14.052
−0.5	5.3232
0	0
0.5	−5.474
1	−15.66
1.5	−32.35
2	−56

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Nghịch biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: Ta có: $\sqrt{2x^2+1}-1=\dfrac{2x^2+1-1}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}\ge 0$

Do đó: $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\ge 0$.

Để đánh giá sát sao điều kiện của phương trình, ta sử dụng TABLE để khảo sát nhóm biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$.

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=1+3X+8\sqrt{2X^2+1}$$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy rõ ràng rằng biểu thức $1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$ luôn nhận giá trị dương. Vậy để dễ dàng tìm điều kiện của x hơn, ta sẽ chứng minh:

$$1+3x+8\sqrt{2x^2+1}>0$$

X	$F(X)$
−2	19
−1.5	15.261
−1	11.856
−0.5	9.2979
0	9
0.5	12.297
1	17.856
1.5	24.261
2	31

Ta có: $8\sqrt{2x^2+1}+3x>8\sqrt{x^2}+3x=8|x|+3x\ge 3|x|+3x\ge 0$

Do đó $x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\ge 0\Rightarrow x\ge 0$

Ta có: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3=0$

Xét hàm số $f(x)=3x^2+x+8x\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{2x^2+1}+3$ trên $[0;+\infty)$ ta có:

$$f'(x)=6x+1+8\left(\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}}\right)-\frac{6x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=6x+1+\frac{32x^2-6x+8}{\sqrt{2x^2+1}}>0\,\forall x\ge 0$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt[3]{(X-1)^2}-2\sqrt[3]{X-1}$$
$$-(X-5)\sqrt{X-8}-3X+31$$

- START = 8
- END = 12
- STEP = 0.5

X	$F(X)$
8	6.8334
8.5	2.9418
9	0
9.5	– 2.928
10	– 5.904
10.5	– 8.946
11	– 12.05
11.5	– 15.24
12	– 18.5

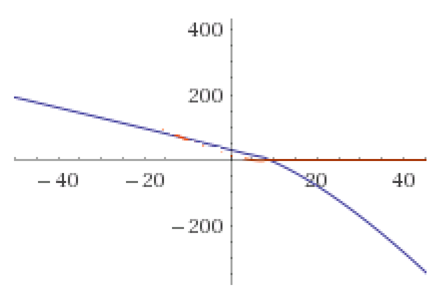
Từ bảng giá trị này ta thấy nhìn thấy phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x=9$ đồng thời hàm số nghịch biến, do đó đây chính là nghiệm duy nhất.

Tuy nhiên vấn đề là bài toán có chứa rất nhiều căn thức và khác loại với nhau. Chính vì vậy ta có thể đặt một ẩn phụ để giảm thiểu số căn thức một cách tối đa. Do đó ta định hướng đặt $t=\sqrt[3]{x-1}$.

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Nghịch biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x\ge 8$. Đặt $t=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow x=t^3+1\ge 8\Rightarrow t\ge\sqrt[3]{7}$.

Khi đó ta có: $\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0$

$\Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0$

Nhận xét: $t=\sqrt[3]{7}$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét hàm số $f(t)=3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}$ trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$ ta có:

$$f'(t)=\underbrace{(9t^2-2t+2)}_{>0,\ \forall t}+3t^2\sqrt[3]{t^3-7}+\frac{t^2(t^3-4)}{\sqrt[3]{(t^3-7)^2}}>0,\ \forall t\in\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right).$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\left(\sqrt[3]{7};+\infty\right)$.

Do đó phương trình $f\left(t\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $f(2)=0\Rightarrow t=2\Leftrightarrow x=9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=9$.

Bài 5: Giải phương trình: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6$

(Trích đề thi Học sinh giỏi tỉnh Thái Bình năm 2010)

Điều kiện: $x\ge 1$.

Do $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên chỉ xét $x\in(1;+\infty)$.

Ta có: $\left(x-1\right)\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}\right)=x+6\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=\dfrac{x+6}{x-1}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f\left(X\right)=2\sqrt{X-1}+3\sqrt[3]{X+6}-\frac{X+6}{X-1}$$

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0.5

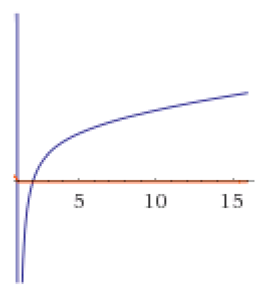
Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=2$.

X	$F\left(X\right)$
1	ERROR
1.5	-7.713
2	0
2.5	2.9053
3	4.5686
3.5	5.716
4	6.594
4.5	7.3109
5	7.9219

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Xét hàm số $f\left(x\right)=2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}-\dfrac{x+6}{x-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x+6}}+\frac{7}{\left(x-1\right)^2}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến và liên tục trên $(1;+\infty)$.

Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mà $x=2$ là một nghiệm của phương trình. Do đó đây là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=2$.

Bài 6: Giải phương trình: $2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{x^2+3}+1$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f\left(X\right)=2\sqrt[3]{X}+X-\sqrt{X^2+3}-1$$

- START = -2
- END = 2
- STEP = 0.5

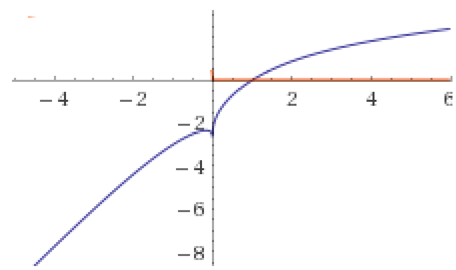
Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

X	$F\left(X\right)$
-2	-8.165
-1.5	-7.08
-1	-6
-0.5	-4.89
0	-2.732
0.5	-0.715
1	0
1.5	0.4981
2	0.874

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $2\sqrt[3]{x}+x=\sqrt{x^2+3}+1>0\Rightarrow\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\right)>0\Leftrightarrow x>0$

Xét hàm số $f\left(x\right)=2\sqrt[3]{x}+x-\sqrt{x^2+3}-1$ với $x>0$. Ta có:

$$f\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}>0\forall x>0.$$

Do đó $f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên tập xác định. Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ có tối đa 1 nghiệm.

Mặt khác $f\left(1\right)=0$ do đó $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chú ý: Việc thực hiện phép quy đồng: $1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{\sqrt{x^2+3}}$ để chứng minh hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến không phải là một công việc được thực hiện một cách ngẫu nhiên dựa trên cảm tính. Nếu học sinh đã làm nhiều dạng bài tập trên thì việc phát hiện được cách quy đồng là không khó khăn. Tuy nhiên nếu muốn đưa ra cách thức tổng quát, ta cũng có thể làm như sau:

Xét $F(X)=\dfrac{X}{\sqrt{X^2+3}}$ với:

- START: -2 (Vì $x>2$).
- END: 2
- STEP: 0,5.

Dựa vào bảng giá trị, ta thấy:

$$Max\frac{X}{\sqrt{X^2+3}}<1$$

Do đó nếu sử dụng phép quy đồng đã nêu trên, ta chắc chắn chứng minh được $f(x)$ đồng biến.

X	$F(X)$
-2	-0.755
-1.5	-0.654
-1	-0.5
-0.5	-0.277
0	0
0.5	0.2773
1	0.5
1.5	0.6546
2	0.7559

Ghi nhớ:

- Nếu tìm được $MinG(x)=a$ ta sẽ có $G(x)-a>0$.
- Nếu tìm được $MaxG(x)=a$ ta sẽ có $a-G(x)>0$.

Bài 7: Giải phương trình: $x(x-1)^2=\left(\sqrt{x+4}+1\right)(x+4)$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$F(X)=X(X-1)^2-\left(\sqrt{X+4}+1\right)(X+4)$

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0.5

Từ bảng giá trị này ta thấy hàm số đồng biến và phương trình có nghiệm duy nhất nằm trong khoảng $(3.5;4)$.

SHIFT CALC với $x=3.8$ ta thu được nghiệm $x\approx 3.791287847$.

X	$F(X)$
1	-16.18
1.5	-18.02
2	-18.69
2.5	-17.44
3	-13.52
3.5	-6.164
4	5.3725
4.5	21.843
5	44

Thay nghiệm $x\approx 3.791287847$ vào căn thức ta được:

$$\sqrt{x+4}\approx 2.791287847\approx x-1.$$

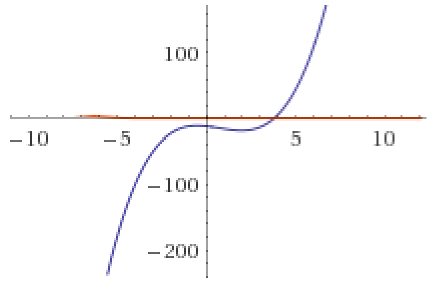
Do đó nhân tử cần xác định là $x-1-\sqrt{x+4}$ và phương trình có một nghiệm duy nhất đó là $x-1=\sqrt{x+4}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Do trong $(2;+\infty)$ hàm số có dấu hiệu của tính đồng biến nên nếu chỉ ra được điều kiện $x>2$ ta có khả năng chứng minh được hàm số đơn điệu và hàm số cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên $(2;+\infty)$.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $x(x-1)^2=(\sqrt{x+4}+1)(x+4)\Leftrightarrow x^3-2x^2=(x+4)\sqrt{x+4}+4$

$\Rightarrow(x-2)x^2=(x+4)\sqrt{x+4}+4>0\Rightarrow x>2$

Xét hàm số sau: $f(x)=x^3-2x^2-4-(x+4)\sqrt{x+4}$ với $x\in(2;+\infty)$.

Ta có: $f'(x)=3x^2-4x-\dfrac{3}{2}\sqrt{x+4}$. Để chứng minh $f'(x)>0$ hay hàm số $f(x)$ đồng biến không phải là một điều đơn giản.

Vì vậy để chắc chắn định hướng của bài toán ta sử dụng công cụ TABLE để khảo sát hàm $f'(x)=3x^2-4x-\dfrac{3}{2}\sqrt{x+4}$:

Xét $F(X)=3X^2-4X-\dfrac{3}{2}\sqrt{X+4}$ với:

- START: 2 (Vì $x>2$).
- END: 6.
- STEP: 0,5.

Dựa vào bảng giá trị, ta thấy:

- Hàm số $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng trên $(2;+\infty)$ mặc dù hàm số không hề đơn điệu trên tập xác định.
- $f'(x)>0$ khi $x>2$

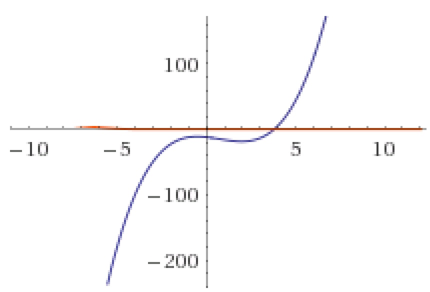
Vậy ta sẽ tiến hành xét $f''(x)$.

X	$F(X)$
2	0,3257
2,5	4,9257
3	11,031
3,5	18,642
4	27,757
4,5	38,376
5	50,5
5,5	64,126
6	79,257

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên $(2;+\infty)$.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Xét $f''(x)=6x-4-\dfrac{3}{4\sqrt{x+4}}\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+4x-\dfrac{3}{4\sqrt{x+4}}$

$$\Leftrightarrow f''(x)=2(x-2)+\frac{16x\sqrt{x+4}-3}{4\sqrt{x+4}}=2(x-2)+\frac{256x^3+1024x^2-9}{4\sqrt{x+4}\left(16x\sqrt{x+4}+3\right)}$$

Vì $x>2$ nên $256x^3>9\Rightarrow 256x^3+1024x^2-9>0$ do đó $f''(x)>0\forall x>2$.

Khi đó $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$.

Do vậy $f'(x)>f'(2)=4-\frac{3\sqrt{6}}{2}>0$. Vậy $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục trên $(2;+\infty)$. Mặt khác ta có $f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)=0$ cho nên $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{2x^2+18}$

(Trích đề thi thử Đại học Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2013)

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$$f(X)=\sqrt{X+1}-2\sqrt{4-X}-\frac{5(X-3)}{2X^2+18}$$

- START = -1
- END = 4
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

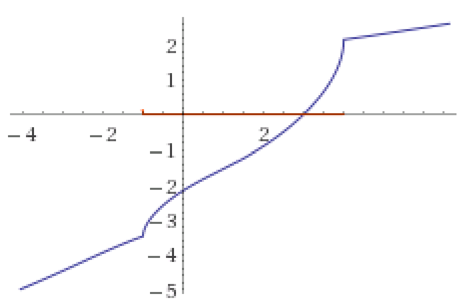
Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu tăng.

X	$F(X)$
-1	-3.472
-0.5	-2.589
0	-2.166
0.5	-1.841
1	-1.549
1.5	-1.247
2	-0.904
2.5	-0.496
3	0
3.5	0.6482
4	2.136

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $-1\le x\le 4$.

Nhận xét: $x=-1, x=4$ không phải nghiệm của phương trình do đó ta có điều kiện $x\in(-1;4)$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}-\frac{5(x-3)}{2x^2+18}$ với $x\in\left(-1;4\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}$

Đến đây, để chứng minh chắc chắn hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến ta cần sử dụng chức năng TABLE để kiểm tra từng nhóm hàm số:

$F\left(X\right)=\frac{1}{2\sqrt{X+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-X}}$

X	$F\left(X\right)$
-1	ERROR
-0.5	1.1785
0	1
0.5	0.9427
1	0.9309
1.5	0.9486
2	0.9957
2.5	1.0837
3	1.25
3.5	ERROR

$G\left(X\right)=\frac{10\left(X^2-6X-9\right)}{\left(2X^2+18\right)^2}$

X	$G\left(X\right)$
-1	-0.05
-0.5	-0.168
0	-0.277
0.5	-0.343
1	-0.35
1.5	-0.311
2	-0.251
2.5	-0.19
3	-0.138
3.5	-0.098

Ta nhận thấy rằng $Min\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)>\frac{1}{2}, Min\frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>-\frac{1}{2}$

Do đó ta đánh giá: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}>\frac{1}{2}(*), \frac{10\left(x^2-6x-9\right)}{\left(2x^2+18\right)^2}>-\frac{1}{2}(**)$

Chứng minh đánh giá (*):

Cách 1: Sử dụng khảo sát hàm số:

Xét $g\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}\Rightarrow g'\left(x\right)=-\frac{1}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3}+\frac{1}{2\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$

$$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}-\sqrt{4-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{4}-1\right)x+5+\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}\sqrt{4-x}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{\left(\left(\sqrt[3]{4}+1\right)x-3\right)\left(\left(\sqrt[3]{4}-1\right)x+5+\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}\sqrt{4-x}\right)}{4\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}x+1}+\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$$

Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{4}}$. Lập bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)\ge g\left(\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{4}}\right)>\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng đánh giá bất đẳng thức AM – GM:

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}$

Cũng theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}\le 1+x+4-x=5$

Do đó: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét: Đánh giá bằng bất đẳng thức rất ngắn và đơn giản, tuy nhiên với những học sinh yếu bất đẳng thức vẫn có thể giải quyết được bằng phương pháp đánh giá tính đơn điệu của hàm số và lập bảng biến thiên.

Chứng minh đánh giá (**):

Xét $\dfrac{1}{2}+\dfrac{10(x^2-6x-9)}{(2x^2+18)^2}=\dfrac{2x^4+46x^2-60x+72}{(2x^2+18)^2}=\dfrac{2x^4+46\left(x-\dfrac{15}{23}\right)^2+\dfrac{1206}{23}}{(2x^2+18)^2}>0$

Vậy $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\dfrac{10(x^2-6x-9)}{(2x^2+18)^2}>0$.

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $x\in(-1;4)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $f(3)=0$ do vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

Sử dụng công cụ Mode 7 (Table) với:

$f(X)=\sqrt{X^2+15}-3X+2-\sqrt{X^2+8}$

- START = – 1
- END = 3.5
- STEP = 0.5

Nghiệm: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

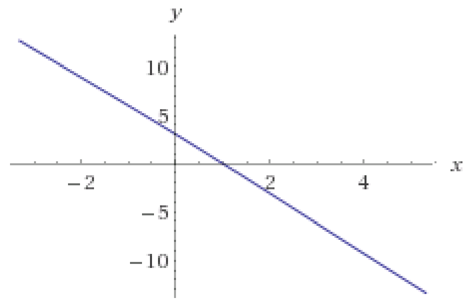
Tính đơn điệu: Hàm số đơn điệu giảm.

X	$F(X)$
– 1	6
– 0.5	4.5328
0	3.0445
0.5	1.5328
1	0
1.5	– 1.548
2	– 3.105
2.5	– 4.665
3	– 6.224
3.5	– 7.775

HÌNH DÁNG HÀM SỐ

Thông qua các giá trị của TABLE, ta thấy hình dáng của hàm số có dạng như hình vẽ bên:

- Đồng biến trên tập xác định.
- Hàm số liên tục.
- Cắt trục hoành tại duy nhất 1 điểm.



Điều kiện: $\sqrt{x^2+15} = 3x-2+\sqrt{x^2+8} < 3x-2+\sqrt{x^2+15} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x-2+\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x^2+15}$ với $x \in \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x) = 3+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \Rightarrow f'(x) = 3+x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = 3+x\left(\frac{\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = 3+\frac{7x}{\left(\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2+8}\right)\sqrt{x^2+15}\sqrt{x^2+8}} > 0 \forall x \in \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.