CHUYÊN ĐỀ
ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Như các bạn đã biết trong chương trình Toán THPT thì phương trình và hệ phương trình vô tỷ luôn là một chủ đề kinh điển, bởi thế nên nó luôn xuất hiện trong các kì thi lớn như thi Đại học và các kì thi học sinh giỏi lớn nhỏ. Trong đó phương pháp dùng ẩn phụ để giải toán luôn là một công cụ mạnh và hữu ích. Hôm nay bài viết này sẽ trình bày một số phương pháp đặt ẩn phụ để giải quyết các bài toán.

Nội dung: Đặt biểu thức chứa căn bằng biểu thức mới mà ta gọi là ẩn phụ, chuyển về phương trình theo ẩn mới. Giải phương trình ẩn phụ rồi thay vào biểu thức tìm nghiệm ban đầu.

Phương pháp: Gồm có các bước sau:
Bước 1: Chọn cách đặt ẩn phụ, tìm điều kiện xác định của ẩn phụ. Để làm tốt bước này phải có sự quan sát, nhận xét mối quan hệ của các biểu thức có mặt trong phương trình rồi đưa ra biểu thức thích hợp để đặt ẩn phụ.
Bước 2: Chuyển phương trình ban đầu về phương trình theo ẩn phụ, thường là nhưng phương trình đã biết cách giải, tìm được nghiệm cần chú ý đến điều kiện của ẩn phụ.
Bước 3: Giải phương trình với ẩn phụ vừa tìm được và kết luận nghiệm.

Thành viên tham gia chuyên đề:
1-Trần Trí Quốc 11TL8 THPT Nguyễn Huệ, Phú Yên
2-Hồ Đức Khánh 10CT THPT Chuyên Quảng Bình.
3-Đoàn Thế Hòa 10A7 THPT Long Khánh, Đồng Nai
4-Thầy Mai Ngọc Thi THPT Hùng Vương, Bình Phước.
5-Thầy Nguyễn Anh Tuấn THPT Lê Quảng Chí, Hà Tĩnh.

Đầu tiên ta cùng giải các ví dụ cơ bản sau:
Có lẽ nhiều bạn đã quen với bài tập dạng loại này nên mình chỉ muốn nhắc lại 1 tý

I-Đặt ẩn phụ đưa về phương trình theo ẩn phụ:

Dạng 1

Pt có dạng $ax^2+bx+c=\sqrt{px^2+qx+r}$ trong đó $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}$

Cách giải : Đặt $t=\sqrt{px^2+qx+r}, t\geq 0$

Tôi sẽ đưa ra vài ví dụ để các bạn ôn lại vì đây là phần khá dễ

Giải các phương trình sau
1/(ĐH Ngoại Thương-2000) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$
2/(ĐH Ngoại ngữ 1998) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$
3/(ĐH Cần Thơ 1999) $\sqrt{(x+1)(2-x)}=1+2x-2x^2$
4/ $4x^2+10x+9=5\sqrt{2x^2+5x+3}$
5/ $18x^2-18x+5=3\sqrt{9x^2-9x+2}$
6/ $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$
Dạng tiếp theo cũng rất quen thuộc

Dạng 2

PT có dạng $P(x)+Q(x)+(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)})\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}+\alpha=0$ (α là số thực)

Cách giải Đặt $t=\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\Rightarrow t^2=P(x)+Q(x)\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$

Bài 1: Giải phương trình $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Giải

ĐK $0\le x\le 1$, Ta đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ thì $\sqrt{x-x^2}=\frac{t^2-1}{2}$, phương trình trở thành bậc 2 với ẩn là t
$\Leftrightarrow 1+\frac{t^2-1}{3}=t\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow t=1;t=2$
TH1 $t=2\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=2$ (VN)
TH2 $t=1\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow x=0;x=1\square$

Giải các phương trình sau

1/(HVKTQS-1999) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$
2/ $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$
3/$\sqrt{4x+3}+\sqrt{2x+1}=6x+\sqrt{8x^2+10x+3}-16$
4/(CĐSPHN-2001) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2$

Thế là đã xong các ví dụ cơ bản rồi bây giờ ta xét đến các ví dụ mà cần sự biến đổi khéo léo một chút và có sự quan sát đánh giá mới có thể đưa về dạng cơ bản để đặt ẩn phụ được.

II-Đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích

Xuất phát từ 1 số hằng đẳng thức cơ bản khi đặt ẩn phụ:
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$
$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

Chú ý: Khi đặt ẩn phụ xong ta cố gắng đưa về những dạng cơ bản như sau
$u+v=1+uv\Leftrightarrow(u-1)(v-1)=0$
$au+bv=ab+vu\Leftrightarrow(u-b)(v-a)=0$
Phương trình đẳng cấp bậc hai $ax^2+bxy+cy^2=0\Leftrightarrow at^2+bt+c=0$ với $t=\frac{x}{y}$

Lại lấy **Bài 1** ở trên 1 lần nữa

Giải

Giải phương trình $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

Nhận xét: Ta thấy $(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2=1$(**), mà từ phương trình đầu ta rút được một căn thức qua căn thức còn lại

Giải

$\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{3\sqrt{1-x}-3}{2\sqrt{1-x}-3}$. Do đó nếu đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{3t-3}{2t-3}$
Thay vào (**) ta biến đổi thành $t(t-1)(2t^2-4t+3)=0\Leftrightarrow t=0;t=1$ hay $x=0;x=1$ là nghiệm của phương trình.$\square$

Ta xét ví dụ sau

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải

Ta thấy $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$
Đặt $u=\sqrt[3]{x+1}; v=\sqrt[3]{x+2}$
PT$\Leftrightarrow u+v=1+uv$
$\Leftrightarrow (u-1)(v-1)=0$
Giải tiếp ta được $x=0; x=-1\square$

Ta xét ví dụ sau, khá giống bài ở trên nhưng khó hơn.

Bài 3: Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2})=1$

Nhận xét: Cách làm bài này cũng khá giống nhưng phải để ý thật kĩ bên VP vì ta tách VP thành biểu thức "liên quan" đến biểu thức ẩn phụ.

Giải

Lời giải: Phương trình đã cho tương đương với
$(x+1)-(x+2)+\sqrt[3]{x^2+3x+2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2})=0$

Ta đặt $\sqrt[3]{x+1}=a; b=-\sqrt[3]{x+2}$, khi đó phương trình tương đương
$a^3+b^3-ab(a+b)=0$
$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0$
$\Leftrightarrow a=\pm b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\pm\sqrt[3]{x+2}$
$\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$
Thử lại thấy $x=-\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{3}{2}\square$

Ví dụ tương tự

Bài 4: Giải phương trình $(x+2)(\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1})+\sqrt{2x^2+5x+3}-1=0$

Giải

ĐK $\begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2} \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x\ge -1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2x+3}=a \\ \sqrt{x+1}=b \\ a;b\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=a^2-b^2 \\ \sqrt{2x^2+5x+3} \\ 1=a^2-2b^2 \end{cases}$

Nên PT $\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-2b)+ab=a^2-2b^2$
$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-2b)+b(a+b)-(a^2-b^2)=0$. Vì $a+b>0$ nên ta chia 2 vế cho $a+b$
$\Leftrightarrow (a-b)(a-2b)-(a-2b)=0 \Leftrightarrow (a-2b)(a-b-1)=0$
• Với $a=b+1 \Rightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x+1}+1$ (VN)
• Với $a=2b \Rightarrow \sqrt{2x+3}=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ (TMĐK)
Vậy phương trình có nghiệm $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Bài tập đề nghị
Giải các phương trình sau
$1/(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$
$2/(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(1-\sqrt{x^2-x-2})=3$
$3/\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1-x}=1+(1-x)\sqrt{x}$
$4/\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4$

Bài 5: Giải phương trình $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$

Giải

Thoạt nhìn ta đưa ra đánh giá rất dễ thấy $2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}=4$
Nên ta đặt $\sqrt{2+\sqrt{x}}=a;\sqrt{2-\sqrt{x}}=b$
Ta có $ab=\sqrt{4-x};a^2+b^2=4$
Ta viết lại phương trình như sau:
$\dfrac{a^2}{\sqrt{2}+a}+\dfrac{b^2}{\sqrt{2}-b}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow a^2\sqrt{2}-a^2b+b^2\sqrt{2}+ab^2=\sqrt{2}(2-b\sqrt{2}+a\sqrt{2}-ab)$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}(a^2+b^2+ab-2)-ab(a-b)=2(a-b)$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}(ab+2)=(a-b)(ab+2)$. Để ý $a^2+b^2=4$
Vì $ab+2\neq 0$ nên $a-b=\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab=2\Rightarrow ab=1\Rightarrow \sqrt{4-x}=1$
Nên $x=3$
Vậy phương trình có nghiệm $S=3\square$.

Bài 6: Giải phương trình $(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}$

Nhận xét: Dễ thấy rằng $(2x-3)(5-2x)=16x-4x^2-15$, nhưng còn các nhị thức ở ngoài căn ta không thể biểu diễn hết theo 1 ẩn phụ được, ta đặt 2 ẩn phụ và cố đưa về phương trình tích.

Giải

Lời giải: ĐK $\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$
Đặt $u=\sqrt{2x-3}\Rightarrow u^2=2x-3;2u^2+3=4x-3$
$v=\sqrt{5-2x}\Rightarrow v^2=5-2x;2v^2+3=13-4x$
$\Rightarrow u^2+v^2=2;uv=\sqrt{16x-4x^2-15}(1)$
$\Rightarrow PT\Leftrightarrow (2v^2+3)u+(2u^2+3)v=2+8uv=u^2+v^2+8uv$
$\Leftrightarrow 2uv(u+v)+3(u+v)=(u+v)^2+6uv$
$\Leftrightarrow (u+v-3)(2uv-u-v)=0$
$TH_1: u+v=3$
$\Leftrightarrow \sqrt{16x-4x^2-15}=\dfrac{7}{2}$(VN)
$TH_2: u+v=2uv$
$\Leftrightarrow \sqrt{16x-4x^2-15}=1$
$\Rightarrow x=2$ (Thỏa ĐK)
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2\square$

Bài 7: Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+1}=1$ (*)

Giải

Đặt $\sqrt{x+1}=t; t\geq 0$
PT(*) $\Leftrightarrow (t^2-1)^2+t=1 \Leftrightarrow t(t-1)(t^2+t-1)=0$
TH1 Với $t=0$ thì $x=-1$.
TH2 Với $t=1$ thì $x=0$.
TH3 Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\square$

Ta tự làm khó với kiểu bài trên lên một tý nhé, nâng bậc lũy thừa, ta xét ví dụ sau

Bài 8: Giải phương trình $x^4+\sqrt{x^2+3}=3$

Giải

Để đơn giản hóa, ta đặt $x^2=a, a\geq 0$
PT $\Leftrightarrow a^2+\sqrt{a+3}=3$, ta sẽ tách để đưa về phương trình tích như sau:
$\Leftrightarrow a^2-(a+3)+(a+\sqrt{a+3})=0$
$\Leftrightarrow (a+\sqrt{a+3})(a-\sqrt{a+3}+1)=0$

Vì $a\geq 0 \Rightarrow a+\sqrt{a+3}>0$ (VN)
Ta có $a+1=\sqrt{a+3}$
$\Leftrightarrow a^2+a-2=0$
$\Rightarrow a=1 (a\geq 0)$ nên $x=\pm 1\square$

Bài 9: Giải phương trình $(x^2+2)^2+4(x+1)^3+\sqrt{x^2+2x+5}=(2x-1)^2+2$
(Đề thi chọn đội tuyển 10 THPT chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên)

Nhận xét: Bài này có lũy thừa bậc cao nhất là 4, và có cả căn bậc 2 nên ta sẽ cố nhóm các biểu thức lũy thừa giống trong căn để có thể đặt ẩn phụ.

Giải

$\Leftrightarrow x^4+4x^2+4+4(x^3+3x^2+3x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}=4x^2-4x+3$
$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+8(x^2+2x)+\sqrt{x^2+2x+5}+5=0$ (Công đoạn nhóm lại thế này cũng rất quan trọng)

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+5}, t\geq 2 \Rightarrow t^2-5=x^2+2x$
Ta viết lại PT đã cho tương tương với $(t^2-5)^2+8(t^2-5)+t+5=0$
$\Leftrightarrow t^4-2t^2+t-10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2+2t+5)=0$
Vì $t\geq 2$ nên $t^3+2t^2+2t+5>0$
Ta có $t=2$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+2x+5}=2$
Vậy $x=-1\square$

Bài 10: Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$

Giải

Đặt:$t=\sqrt{x-1}$, với $x\geq 1,\ t\geq 0 \Rightarrow t^2=x-1$
Phương trình đã cho viết lại:$\sqrt{(x-1)^2+4}=2-\sqrt{x-1}$
Trở thành:$\sqrt{t^4+4}=2-t (t\leq 2)$
$\Leftrightarrow t^4-t^2+4t=0$

Vì $t \in [0;2]$ nên $t^3 - t + 4 > 0$
Vậy $t = 0 \Rightarrow x = 1\square$

Bài 11: Giải phương trình $(4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0$

Giải

Điều kiện $y \le \dfrac{5}{2}$.
Đặt $a = 2x$ và $b = \sqrt{5-2y}$ $(b \ge 0)$ ta có phương trình viết lại thành
$\dfrac{a^3+a}{2} + \dfrac{-(b^3+b)}{2} = 0 \Leftrightarrow a = b$
Hay $2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow x = \dfrac{5-4y^2}{2}$. Vậy $x = \dfrac{5-4y^2}{2}$ là nghiệm của phương trình.
Nhận xét. Một lời giải thật đẹp phải không ! Chắc các bạn sẽ thắc mắc rằng làm sao mà ta lại có thể đặt được ẩn phụ như trên.
Trước tiên ta sẽ đặt $\sqrt{5-2y} = b \Rightarrow y - 3 = \dfrac{5-b^2}{2} - 3 = \dfrac{-(b^2+1)}{2}$
$\Rightarrow (y-3)\sqrt{5-2y} = \dfrac{-(b^2+1)\,b}{2}$
Bây giờ ta muốn $(4x^2+1)\,x = \dfrac{a\,(a^3+1)}{2}$
$\Rightarrow (4x^2+1)\,.2x = a^3 + a$
$\Rightarrow 8x^3 + 2x = a^3 + a \Rightarrow a = 2x$
Từ đó ta có được cách đặt ẩn phụ như ở lời giải $\square$

Bài 12: Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x+2}{2}} - 1 = \sqrt[3]{3(x-3)^2} + \sqrt[3]{9(x-3)}$

Giải

Điều kiện $x \ge -2$ Đặt $t = \sqrt[3]{9\,(x-3)}$ thì ta có $x = \dfrac{t^3+27}{9}$
$\sqrt{\dfrac{x+2}{2}} = \sqrt{\dfrac{t^3+45}{18}}$; $\sqrt[3]{3(x-3)^2} = \dfrac{t^2}{3}$.
Phương trình đã cho trở thành
$\sqrt{\dfrac{t^3+45}{18}} - 1 = \dfrac{t^2}{3} + t$
$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{t^3+45}{2}} = t^2 + 3t + 3$ (1)
Ta có $t^2 + 3t + 3 = \left(t + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên phương trình (1) tương đương với
$\dfrac{t^3+45}{2} = (t^2+3t+3)^2$
$\Leftrightarrow 2t^4 + 11t^3 + 30t^2 + 36t - 27 = 0$
$(2t-1)(t+3)(t^2+3t+9) = 0$
$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}; t = -3$

- Với $t = \dfrac{1}{2}$ thì $x = \dfrac{t^3+27}{9} = \dfrac{217}{72}$

• Với $t = -3$ thì $x = \dfrac{t^3 + 27}{9} = 0$
Các nghiệm trên thỏa mãn điều kiện của bài toán. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{217}{72}$ $\square$.

Bài 13: Giải phương trình $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}} + 3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}} = 8$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $5\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} + 3\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^4}} = 8$
$\Leftrightarrow 5\sqrt[15]{x^6} + 3\sqrt[15]{x^4} = 8$
Đặt:$y = \sqrt[15]{x^2}$ với $y \geq 0$ ta có:
$5y^3 + 3y^2 - 8 = 0$
$\Leftrightarrow (y-1)(5y^2 + 8y + 8) = 0$
$\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$
Do đó ta có: $\sqrt[15]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Vậy: tập nghiệm của phương trình đã cho là:$S = \{-1;\ 1\}$ $\square$.

Bài 14: Giải phương trình $\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{6}{x} = 0$

Giải

ĐK $x \neq 0$. Ta có phương trình đã cho tương đương với
$\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{6}{\sqrt[5]{x^5}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^9} - 7\sqrt[5]{x^3} + 6 = 0(*)$
Đặt:$y = \sqrt[5]{x^3}$, $y \neq 0$, phương trình (*) trở thành:
$y^3 - 7y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \\ y = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{x^3} = 1 \\ \sqrt[5]{x^3} = 2 \\ \sqrt[5]{x^3} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2\sqrt[3]{4} \\ x = -3\sqrt[3]{9} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{1; 2\sqrt[3]{4}; -3\sqrt[3]{9}\right\}$ $\square$

Bài 15: Giải phương trình $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

Giải

ĐK $\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$
Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta có:
$(4x-1) + (4x^2-1) + 2\sqrt{(4x-1)(4x^2-1)} = 1$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4x-1)(4x^2-1)} = 3 - 4x^2 - 4x = 4 - (2x+1)^2$
Đặt $y = 2x + 1 \Rightarrow 4x - 1 = 2y - 3,\ \ 4x^2 - 1 = y^2 - 2y$
Phương trình trở thành
$2\sqrt{(2y-3)(y-2)} = 4 - y^2$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - y^2 \geq 0 \\ 4(2y-3)(y-2)y = (4-y^2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ 4(2y-3)y=(y+2)^2(y-2) \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y^3-6y^2+8y-8=0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow y=2$$

Hàm số $G(y)=y^3-6y^2+8y-8$ lấy giá trị âm trên toàn miền $[-2;2]$

Do đó ta có $2x+1=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\square$

Bài 16: Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (D-2006)

Giải

Đặt $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}$

PT $\Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1)=0$

* Với $t=1 \Rightarrow x=1$

*Với $t=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x=2-\sqrt{2}\square$

Bài 17: Giải phương trình $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

ĐK $x \le \dfrac{3-\sqrt{11}}{2}; x \ge \dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$

Đặt $t=\sqrt{4x+5} \Rightarrow x=\dfrac{t^2-5}{4}$

PT$\Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0 \Leftrightarrow (t^2+2t-7)(t^2-2t-11)=0$

Đối chiếu điều kiện ta tìm được nghiệm của phương trình $x=1-\sqrt{2}; x=2+\sqrt{3}\square$

Nhận xét: Đối với những bài có dạng $\sqrt{ax+b}+cx^2+dx+e=0$ thì cách giải là đặt $\sqrt{ax+b}=t$, sau đó đưa về phương trình bậc 4, dùng đồng nhất thức để phân tích nhân tử. Nhưng có 1 số bài không giải được bằng cách đó, ta sẽ nhắc lại vấn đề này ở phần sau.

Bài 18: Giải phương trình $(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$

Đối với những bài mà khi phân tích thành các nhị thức hoặc tam thức ta thường nhẩm được nghiệm hữu tỷ khá đẹp, vậy còn đối với những nghiệm vô tỷ?

Ta xét bài toán sau:

Bài 19: Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}x+2=0$

Nhận xét: Ta thấy trong căn có $\sqrt{x-1}$, nên ta sẽ cố gắng thêm bớt và tách sẽ được một phương trình theo ẩn mới

Giải

Đặt $\sqrt{x-1}=t, t\geq 0$
Ta biến đổi phương trình như sau : $[(x-1)-1]\sqrt{x-1}-\sqrt{2}[(x-1)-\sqrt{2}]-\sqrt{2}=0$
$\Leftrightarrow t^3-\sqrt{2}t^2-t+2-\sqrt{2}=0$
Phương trình này ta bấm máy không có nghiệm hữu tỷ, nhưng bạn nào tinh ý một tý sẽ thấy $t=0.4142......?$
Nhìn vào số này khá quen nhỉ, nó chính là $\sqrt{2}-1$

Áp dụng sơ đồ Horner, ta phân tích được như sau :$(t+1-\sqrt{2})(t^2-t-\sqrt{2})=0$
*TH1 Với $t=\sqrt{2}-1\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{2}-1\Rightarrow x=4-2\sqrt{2}$

*TH2 $t^2-t-\sqrt{2}=0$, và chỉ nhận $t>0$
Ta có $t=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow x=\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right)^2+1\square$

III- Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc hai, bậc ba.

Bài 20: Giải phương trình $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ (Đề nghị Olympic 30/4/2007)
Đối với bài toán này đầu tiên ta phân tích nhân tử trong căn $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ rồi cố ý biến đổi vế trái thành tổng hoặc hiệu của hai thừa số trong căn.

Giải

Ta biến đổi như sau $2(x^2+2)=2(x^2-x+1)+2(x+1)$
Ta đặt $\sqrt{x^2-x+1}=a;\sqrt{x+1}=b$
PT $\Leftrightarrow 2a^2+2b^2=5ab$
Đến đây giải ra được 2 nghiệm $t=\dfrac{1}{2};t=2$ với $t=(\dfrac{a}{b})$
Vậy $x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}\square$

Sau đây là một số bài tập tương tự
Giải PT
$1/2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$
$2/2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$
$3/10\sqrt{x^3+8}=3(x^2-x+6)$
$4/10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2)$

Ngoài ra các bạn vẫn có thể sáng tạo thêm các PT bằng các đẳng thức tôi đã nêu ở trên sẽ rất thú vị đấy, để có một phương trình đẹp ta phải chọn hệ số a,b,c sao cho PT $at^2+bt+c=0$ có "nghiệm đẹp" là được, bạn hãy thử xem.

Ví dụ bài này chẳng hạn $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$
Cùng thử sức với bài toán sau nhé, bài này khó hơn so với các ví dụ tôi đã nêu ở trên

Bài 21: Giải phương trình $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ (HSG Quãng Ngãi 2012)

Giải

ĐK $x\geq 5$, chuyển vế bình phương ta có :
$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$

Đến đây lại gặp 1 vấn đề nữa đó là ta không thể tìm được hai số α,β sao cho
$\alpha(x^2-x-20)+\beta(x+1)=2x^2-5x+2$ nên ta không thể đặt $a=\sqrt{x^2-x-20};b=\sqrt{x+1}$ như

các ví dụ trên được.

Nhưng lại thấy $x^2-x-20=(x-5)(x+4)$
PT $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$
Ta thử lại lần nữa và tìm được α,β thỏa mãn, ta biến đổi lại PT như sau
$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$
Đặt $a=\sqrt{x^2-4x-5}; b=\sqrt{x+4}$
PT $\Leftrightarrow 2a^2+3b^2=5ab$
Từ đó ta được $a=b; a=\dfrac{3}{2}b$
Với $a=b\Rightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}(x\geq 5)$
Với $a=\dfrac{3}{2}b\Rightarrow x=8; x=-\dfrac{7}{4}$
Đối chiếu với điều kiện ta nhận $x=8; x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$ là nghiệm của phương trình.$\square$

BÀI TẬP
Giải các phương trình sau:
1/ $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0$ ĐS: $x=\dfrac{23\pm\sqrt{341}}{2}$

2/ $3\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x-3}-\sqrt{11x^2+25x+2}=0$ ĐS: $x=\dfrac{21\pm\sqrt{161}}{2}$

3/ $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$ ĐS: $S=\left\{\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}; 3+2\sqrt{7}\right\}$

Bài 22: Giải phương trình $3x^2-2x-2=\dfrac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3+3x^2+4x+2}$

Nhận xét:Bài này hơi khác một chút so với những bài ở trên đó là biểu thức trong căn không có dạng hằng đẳng thức, vì vậy ta xem như một phương trình hữu tỷ và nhẩm nghiệm.
ĐK $3x^2-2x-2\geq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}; x\geq\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$
Để ý: $x^3+3x^2+4x+2=(x+1)^3+(x+1)=(x+1)(x^2+2x+2)$

Giải

Ta viết lại PT như sau $3(x^2+2x+2)-8(x+1)=\dfrac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}$
Đến đây dễ rồi, ta đặt $a=\sqrt{x^2+2x+2}; b=\sqrt{x+1}$ nên PT viết lại như sau
$3a^2-8b^2=\dfrac{6}{\sqrt{30}}ab$
Đáp số : $x=-\dfrac{2}{3}$$\square$

Bài 23: Giải phương trình $(x^2-6x+11)\sqrt{x^2-x+1}=2(x^2-4x+7)\sqrt{x-2}$

Giải

Lời giải: ĐK $x\geq 2$
Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=a; \sqrt{x-2}=b$ với $a,b\geq 0$
Ta biểu diễn các biểu thức ngoài căn theo a và b như sau
$x^2-6x+11=\alpha(\sqrt{x^2-x+1})^2+\beta(\sqrt{x-2})^2$

$x^2 - 4x + 7 = \alpha(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 + \beta(\sqrt{x - 2})^2$
Sử dụng đồng nhất thức ta giải được
$x^2 - 6x + 11 = a^2 - 5b^2$ và $x^2 - 4x + 7 = a^2 - 3b^2$

Phương trình đã cho tương đương với
$(a^2 - 5b)a = 2(a^2 - 3b^2)b$
$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 6b^3 = 0$
$\Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$ với $t = \dfrac{a}{b} \Rightarrow t \geq 0$
$\Leftrightarrow (t - 1)(t - 3)(t + 2) = 0$
TH_1 Với $t = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x - 2}$ (VN)
TH_2 Với $t = 3 \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 3\sqrt{x - 2}$
$\Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{6}$ (Thỏa mãn ĐK)
TH_3 Với $t = -2 \leq 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $S = \left\{5 + \sqrt{6}; 5 - \sqrt{6}\right\}$ □

Nhận xét: Cái khó ở dạng bài này là ta phải biến đổi biểu thức trong căn sao cho phù hợp với bên ngoài để tìm được α, β thích hợp, các bạn cũng có thể tự sáng tạo các PT kiểu này bằng cách làm ngược lại là từ PT bậc 2 nghiệm đẹp rồi chọn các tam thức và nhị thức thích hợp sẽ có được một bài toán hay.

IV-Ẩn phụ không triệt để
Đối với nhiều PT vô tỷ, khi không biểu diễn hoàn toàn được theo ẩn phụ thì có một cách là xem biến mới là ẩn, biến cũ là tham số.Dạng toán này gọi là ẩn phụ không hoàn toàn.

***Nội dung phương pháp**
Đưa phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai với ẩn là ẩn phụ hay là ẩn của phương trình đã cho.
Đưa phương trình về dạng sau $\sqrt{f(x)}Q(x) = f(x) + P(x)x$ khi đó:
Đặt $\sqrt{f(x)} = t; t \geq 0$. Phương trình viết lại thành $t^2 - t.Q(x) + P(x) = 0$
Đến đây chúng ta giải t theo x. Cuối cùng là giải quyết phương trình $\sqrt{f(x)} = t$ sau khi đã đơn giản hóa và kết luận.

Ta xét ví dụ sau để hiểu rõ hơn.

Bài 24: Giải phương trình $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$ (ĐHQG-2001)

Nhận xét: Ta thấy trong căn có $x^2 + 1$, ta đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Ta sẽ không rút x theo t mà coi x là tham số. Thật vậy
PT $\Leftrightarrow t^2 - (x + 3)t + 3x = 0$
Ta có $\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2$
$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = x - 3 \Rightarrow t = 3; t = x + 3$
TH1 $t = x + 3$ (VN)
TH2 $t = 3 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$□

Bài 25: Giải phương trình $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2 + 2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2 + 2}$

Giải

Phương trình tương đương với

$x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x=1+2\sqrt{x^2+2}$
$\Leftrightarrow x^2+3x-1-(x+2)\sqrt{x^2+2}=0$
Đặt $t=\sqrt{x^2+2}; (t\geq\sqrt{2})$, phương trình viết lại thành
$t^2-(x+2)t+3x-3=0$ có $\Delta=(x-4)^2$
Nên phương trình có 2 nghiệm là

• $t=x-1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\-2x-1=0\end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

• $t=4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2}=4\Leftrightarrow x^2=14\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{14}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\sqrt{14}$ và $x=-\sqrt{14}\square$

Bài 26: Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3}{2}x-3$

Giải

Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}; (t\geq 0)$
Phương trình viết lại thành $2t^2-(3x+1)t+x^2+\dfrac{3}{2}x-1=0$
$\Delta=(x-3)^2$ suy ra phương trình có hai nghiệm là

• $t=2x-1\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-1}=2x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

• $t=x+2\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-1}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\x^2-4x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1; x=5$

Vậy $S=\{-1;5;1\}\ \square$

Nhận xét: Thông thường sau khi đặt ẩn phụ thì ta viết phương trình đã cho lại thành $t^2-(3x+1)t+3x^2+\dfrac{3}{2}x-2$;nhưng bài toán này lại có sự khác biệt là ta sẽ viết phương trình này lại thành $2t^2-(3x+1)t+x^2+\dfrac{3}{2}x-1$. Chúng ta quan tâm tới liệu hệ số trước t^2 có "đẹp" tức ta mong muốn Δ phải là bình phương của một số hoặc một biểu thức, vì điều này sẽ quyết định tới lời giải sẽ ngắn gọn hay phức tạp. Để có thể điều chỉnh được hệ số trước t^2 sao cho Δ đẹp các bạn có thể làm như sau $mt^2-(3x+1)t+(5-2m)x^2+\dfrac{3}{2}x+m-3=0$ có.

$\Delta=(3x+1)^2-4m\left[(5-2m)x^2+\dfrac{3}{2}x+m-3\right]=(8m^2-20m+9)x^2+(6-6m)x+(-4m^2+12m+1)$
Ta xét tiếp Δ của Δ bằng cách giải phương trình sau

$2\sqrt{(8m^2-20m+9)(-4m^2+12m+1)}=6-6m\Leftrightarrow m=2$
Đó chính là hệ số mà ta cần tìm.

Bài 27: Giải phương trình $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Giải

Phương trình tương đương với $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$
$\Leftrightarrow 3x^2+x+3+(8x-3)\sqrt{2x^2+1}=0$

Đặt $\sqrt{2x^2+1} = t\ \ (t \geq 1)$, phương trình viết lại thành
$3t^2 + (8x-2)\,t - 3x^2 - x = 0$ có $\Delta = (10x-3)^2$
Nên phương trình có hai nghiệm
• $t = x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+1 = \dfrac{x^2}{9} \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.
• $t = 1-3x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = 1 = 3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{3} \\ 7x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0\square$.

Bài 28: Giải phương trình $3x^3 - 13x^2 + 30x - 4 = \sqrt{(6x+2)(3x-1)^3}$

Giải

ĐK $x \geq \dfrac{4}{3}; x \leq -\dfrac{1}{3}$
Ta biến đổi như sau $3x^3 - 13x^2 + 30x - 4 = (x^2-3x+2)(3x-4) + 2(6x+2)$
Nếu $x \leq -\dfrac{1}{3}$ VT<0<VP (VN)
Nếu $x \geq \dfrac{4}{3}$ chia 2 vế cho $3x-4$ vì $x = \dfrac{4}{3}$ không là nghiệm của phương trình.
$2\dfrac{6x+2}{3x-4} - (3x-4)\sqrt{\dfrac{6x+2}{3x-4}} + x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2t^2 - (3x-4)t + x^2 - 3x + 2 = 0$ với $t = \sqrt{\dfrac{6x+2}{3x-4}} > 0$
$\Delta = x^2$ nên $t = x-1$ hoặc $2t = x-2$
• Với $t = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{6x+2}{3x-4}} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{6x+2}{3x-4} = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$
• Với $t = \dfrac{x-2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{6x+2}{3x-4}} = \dfrac{x-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^3 - 16x^2 + 4x - 24 = 0(*) \end{cases}$
Giải phương trình (*) ta có nghiệm gần đúng $x \approx 5,36278$, các bạn có thể sử dụng phương pháp Cardano để tính chính xác nhưng nó quá dài và phức tạp nên ta không đề cập.
Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 3 \vee x \approx 5,36278\square$

Bài tập Giải các PT sau:
$1/6x^2 - 10x + 5 - (4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5} = 0$
$2/(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$ (ĐH Dược-1999)
$3/2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$ (ĐH Dược 1997)
$4/(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$
$5/2(1-x)\sqrt{x^2+x+1} = x^2 - 3x - 1$
$6/(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2 + 1$ (Chú ý thêm bớt để có Δ chính phương).
$7/(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3 + 2x + 1$

Bài 29: Giải phương trình $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Bài này thoạt nhìn thì chả có dáng điệu giống một phương trình đưa về ẩn phụ không hoàn toàn. Nhưng nó chính là một phương pháp giải quyết rất hay cho bài toán này.

Giải

Lời giải: ĐK $|x|\le 2$
Bình phương 2 vế ta có :
$4(2x+4)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16$
$\Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$

Đến đây bạn nào tinh ý, sẽ quan sát được cả 2 vế có dạng hằng đẳng thức, và cố đưa về $a^2=b^2$
Thật vậy thêm 16 vào 2 vế ta được $(2\sqrt{2(4-x^2)}+4)^2=(x+4)^2$, đến đây thì rất dễ dàng rồi nhỉ, nhưng mục đích của ta là đưa về ẩn phụ không hoàn toàn.
Ta viết lại PT $8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$, đặt $t=\sqrt{2(4-x^2)}$
$\Rightarrow 4t^2+16t-x^2-8x=0$

Giải phương trình trên theo ẩn t ta được $t_1=\dfrac{x}{2};t_2=\dfrac{-x}{2}-4$
Vì ĐK $|x|\le 2$ nên t_2 không thỏa điều kiện.
Với $t=\dfrac{x}{2}$ thì $\sqrt{2(4-x^2)}=\dfrac{x}{2}$
$\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (Thỏa mãn ĐK) $\square$

Bài 30: Giải phương trình $(3x+2)\sqrt{2x-3}=2x^2+3x-6$

Giải

Lời giải: Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$
Đặt $t=\sqrt{2x-3};t\ge 0\Rightarrow t^2+3=2x$
Ta sẽ thêm bớt theo ẩn phụ để đưa về phương trình theo t và x là tham số.
PT $\Leftrightarrow t^2-(3x+2)t+2x^2+x-3=0$
Ta có $\Delta=9x^2+12x+4-4(2x^2+x-3)=(x+4)^2$
Nên ta giải được $t=2x+3$ hoặc $t=x-1$
TH_1 Với $t=2x+3\Rightarrow\sqrt{2x-3}=2x+3$ (VN)
TH_2 Với $t=x-1\Rightarrow\sqrt{2x-3}=x-1(x\ge 1)$
$\Rightarrow x=2$ (Thõa ĐK)
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2\square$

Bài 31: Giải phương trình $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Nhận xét: Mới đầu khi gặp bài toán này tôi thấy nó khá dễ bởi thấy sự xuất hiện của $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{1-x}$, nên tôi đặt ẩn phụ để đưa vệ hệ phương trình nhưng khi nhìn kĩ lại thì $3x$ không thể biểu diễn hoàn toàn theo ẩn phụ được $\Rightarrow$ bế tắc.

Giải

Ta giải bài này như sau: đặt $\sqrt{1-x}=t$

PT $\Leftrightarrow 3t^2-(2+\sqrt{1-x})t+4(\sqrt{x+1}-1)=0$
Ta tính $\Delta=(2+\sqrt{1-x})^2-48(\sqrt{x+1}-1)$, ta thấy Δ không có dạng chính phương, mấu chốt bài toán này nằm ở chỗ $3x$.
Ta sẽ tìm α và β sao cho:
$3x+1=\alpha(\sqrt{1-x})^2+\beta(\sqrt{1+x})^2$, sử dụng đồng nhất hệ số ta dễ dàng tìm được $\alpha=-1;\beta=2$
PT $\Leftrightarrow t^2-(2+\sqrt{x+1})t-2(x+1)+4\sqrt{x+1}=0$
Ta có $\Delta=9x+13-12\sqrt{x+1}=9(x+1)-12\sqrt{x+1}+4=(3\sqrt{x+1}-2)^2$
Phần tiếp theo xin dành cho bạn đọc.$\square$
Bài toán này không dễ một chút nào đối với những ai không nắm kĩ cách giải cũng như biến đổi, vấn đề ở đây là phải tinh ý tách $3x$ thành hai dạng có biểu thức như trong căn, đến đấy bài toán mới thực sự được giải quyết.

Bài 32: Giải phương trình $2(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$

Giải

Lời giải: Điều kiện $-1\leq x\leq 1$
Đặt $a=\sqrt{1+x^2};b=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 3x^2+1=2(1+x^2)-(1-x^2)=2a^2-b^2$
Khi đó phương trình trở thành
$2(2a-b)-ab=2a^2-b^2\Leftrightarrow 2a^2+a(b-4)+2b-b^2=0$
Ta có $\Delta_a=(b-4)^2-8(2b-b^2)=(3b-4)^2$
Nên ta suy ra $a=\dfrac{b}{2}$ hoặc $a=2-b$
TH_1 Với $a=\dfrac{b}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1-x^2}$ (VN)
TH_2 Với $a=2-b\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2-\sqrt{1-x^2}$
$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}=2\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^4}=4$
$\Rightarrow x=0$
Vậy $S=\{0\}$ $\square$

Sử dụng hệ số bất định

Bài 33: Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ (Học sinh giỏi quốc gia -1995, bảng A)
Bài này có cách giải rất hay và gọn bằng Bất đẳng thức Cauchy, một cách giải bằng ẩn phụ cũng rất sáng tạo.
Lời giải: Ta cần tìm a,b,c sao cho:
$2x^2-11x+21=a(4x-4)^2+b(4x-4)+c$
$\Leftrightarrow 2x^2-11x+21=16ax^2+(4b-32a)x+(16a-4b+c)$
Đồng nhất hệ số ta thu được $a=\dfrac{1}{8};b=-\dfrac{7}{4};c=12$
Ta viết lại PT như sau:
$\dfrac{1}{8}(4x-4)^2-\dfrac{7}{4}(4x-4)+12-\sqrt[3]{4x-4}=0$
Đặt $u=\sqrt[3]{4x-4}$, khi đó PT trở thành
$u^6-14u^3-24u+96=0\Leftrightarrow(u-2)^2(u^4+4y^3+18u+24)=0$
Dễ thấy $u^4+4y^3+18u+24=0$ (VN) vì:
*Nếu $u\leq 0$ thì $u^6-14u^3-24u+96>0$
*Nếu $u>0$ thì $u^4+4y^3+18u+24>0$
Vậy $u=2\Rightarrow x=3$$\square$

Bài 34: Giải phương trình $2\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+3\sqrt{1-x^2}=3-x$

ĐK $-1\le x\le 1$
Ta tìm $\alpha;\beta$ sao cho $-x+3=\alpha(\sqrt{1-x})^2+\beta(\sqrt{x+1})^2$
$\Leftrightarrow -x+3=(\beta-\alpha)x+\alpha+\beta$
Giải ra ta được $\alpha=2;\beta=1$
Ta viết lại phương trình thành $1+x+2(1-x)-2\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}-3\sqrt{1-x^2}=0$
Đặt $u=\sqrt{1+x};v=\sqrt{1-x}$ và $u,v\le 0$, phương trình trở thành
$u^2+2v^2-2v+u-3uv=0$
$\Leftrightarrow u^2+(1-3v)u+2v^2-2v=0$
$\Delta=(1-3v)^2-4(2v^2-2v)=(v+1)^2$
Nên $u=2v$ hoặc $u=v-1$
• $u=2v\Rightarrow\sqrt{x+1}=2\sqrt{1-x}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$
• $u=v-1\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le-\dfrac{1}{2}\\4x^2=3\end{cases}$
Nên phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{5}{3};x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ □

Tuy nhiên phương pháp dùng hệ số bất định này chỉ giải quyết được một số lớp bài vì trong phương trình vô tỷ dạng bài này cũng không nhiều, ta cùng xét 2 ví dụ thoạt đầu nhìn thì cũng tương tự nhưng không thể giải quyết bằng cách như trên được, phần này của dạng đưa về phương trình tích nhưng tôi muốn đưa ra ở đây để giúp ta linh hoạt khi giải toán chứ không phải cái máy nhé.

Bài 35: Giải phương trình $4\sqrt{1-x}=x+6-3\sqrt{1-x^2}+5\sqrt{1+x}$

Ta sẽ làm cách như trên nhé, biểu diễn $x+6=\alpha(\sqrt{1-x})^2+\beta(\sqrt{x+1})^2$
Giải ra ta được $\alpha=\dfrac{1}{2};\beta=\dfrac{7}{2}$, thay vào PT đầu nhưng ta không nhận được Δ chính phương.

Lời giải: Đặt $a=\sqrt{1+x}$ và $b=\sqrt{1-x}$
PT $\Leftrightarrow 2x+2+1-x+5\sqrt{1+x}-3\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1-x}+3=0$
$\Leftrightarrow\Rightarrow 2a^2+b^2-3ab+5a-4b+3=0$
Bây giờ ta sẽ cố ý nhóm sao cho đặt được nhân tử chung, thường là nhóm về dạng $a=b$
$\Leftrightarrow(a-b)(2a-b)+3(a-b)+(2a-b)+3=0$
$\Leftrightarrow(a-b+1)(2a-b+3)=0$

TH1 $a+1=b$
$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+1=\sqrt{1-x}$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=-(2x+1);x\le-\dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
TH2 $2a+3=b$ (PTVN)

Ví dụ tương tự sau xin dành cho bạn đọc

Bài 36: Giải phương trình $4+2\sqrt{1-x}=-3x+5\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}$

Đáp số: Phương trình có 3 nghiệm $S = \left\{0; \dfrac{24}{25}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ □

Đặt ẩn phụ đưa vệ hệ phương trình.

Ta sẽ tiếp tục với 1 phương pháp làm đó là đặt ẩn phụ đưa về hệ, chủ đề này khá "dài hơi" vì nhiều bài toán sẽ được giải quyết rất gọn bằng phương pháp này

Dạng 1. Phương trình có dạng $x^n + a = b\sqrt[n]{bx - a}$

Cách giải: Đặt $y = \sqrt[n]{bx - a}$ khi đó ta có hệ đối xứng loại II

$$\begin{cases} x^n - by + a = 0 \\ y^n - bx + a = 0 \end{cases}$$

Ta xét bài toán sau

Bài 37: Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$ (ĐH Dược-1996)

Giải

Đặt $y = \sqrt[3]{2x - 1} \Rightarrow y^3 = 2x - 1$

Ta có hệ PT sau $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại II, trừ vế theo vế ta có:

$x^3 - y^3 = 2(y - x)$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 2) = 0$

$x = y \Rightarrow \sqrt[3]{2x - 1} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$ $(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$

Vậy $x = 1; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ta có $x^2 + y^2 + xy + 2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 2 > 0, \forall x, y$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm □.

Phương trình có dạng:

$\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[m]{b + f(x)} = c$

Cách giải: Đặt $u = \sqrt[n]{a - f(x)}; v = \sqrt[m]{b + f(x)}$

Ta có hệ sau $\begin{cases} u + v = c \\ u^n + v^m = a + b \end{cases}$

Bài 38: Giải phương trình $\sqrt[4]{x + 8} + \sqrt[4]{x - 7} = 3$

Giải

Đặt $u = \sqrt[4]{x + 8} \geq 0 \Leftrightarrow u^4 = x + 8 \Rightarrow x = u^4 - 8$

$v = \sqrt[4]{x - 7} \geq 0 \Rightarrow v^4 = x - 7 \Rightarrow x = v^4 + 7$

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 3 \\ u,\ v \geq 0 \\ u^4 - v^4 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) = 15 \\ u, v \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) = 15 \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 0 \leq u \leq 3 \\ (u - v)(u^2 + v^2) = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ (2u-3)\left[u^2+(3-u)^2\right]=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ (2u-3)(2u^2-6u+9)=5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ 4u^3-18u^2+36u-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 3 \\ u=2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x+8}=2 \\ \sqrt[4]{x-7}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8=16 \\ x-7=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8\square$.

Bài tập Giải phương trình
1/ $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=14$
2/ $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$
3/ $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+1}=3$
4/ $\sqrt[4]{18-x}+\sqrt[4]{x-1}=3$
5/ $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$

Bài 39: Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}=8$ (A-2009)

Giải

Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2}; v=\sqrt{6-5x}\geq 0$
$\Rightarrow \begin{cases} u^3=3x-2 \\ v^2=6-5x \end{cases}$
$\Rightarrow 5u^3+3v^2=5(3x-2)+3(6-5x)=8(1)$
Mặt khác ta lại có $2u+3v-8=0(2)$
Từ (1) và (2) ta có hệ sau:
$\begin{cases} 5u^3+3v^2=8 \\ 2u+3v=8 \end{cases}$

$$\Rightarrow 5u^3+3\left(\frac{8-2u}{3}\right)^2=8$$

$\Leftrightarrow 15u^3+4u^2-32u+40=0$
Phương trình có nghiệm duy nhất $u=-2$
Nên $\sqrt[3]{3x-2}=-2 \Rightarrow x=-2\square$

Bài 40: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$ (Olympic 30/4/2011

Nhận xét: Bài toán này nhìn vào có vẻ khá phức tạp nhưng để ý $(\sqrt{1+x})^2+(\sqrt{1-x})^2=2$.

Giải

Lời giải: ĐK $-1\leq x\leq 1$
Đặt $\sqrt{1+x}=a; \sqrt{1-x}=b$ với $a,b\geq 0$
$\Rightarrow a^2+b^2=2$ (*)
Ta có hệ sau
$\begin{cases} a^2+b^2=2(1) \\ \sqrt{1+ab}(a^3-b^3)=2+ab \end{cases}(2)$

Ta có $1+ab=\frac{1}{2}(2+2ab)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+2ab)$ do (*)
$\Rightarrow \sqrt{1+ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$ vì $a,b\geq 0$

Vậy từ PT(2) ta có

$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)(a-b)(a^2+b^2+ab) = 2+ab$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2-b^2) = 1$

Kết hợp với (1) ta có hệ sau $\begin{cases} a^2-b^2=\sqrt{2} \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$

Cộng vế ta có $2a^2 = 2+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow a^2 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1+x = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\square$

Nhận xét: Ở bài toán này ý tưởng của ta là thay hệ số bằng ẩn từ phương trình thứ nhất của hệ có thể giải quyết bài toán được dễ dàng hơn. Sau đây là một ví dụ nhỏ tương tự.

Bài 40b: Giải phương trình $\sqrt{x+1}+x+3 = \sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$

Giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1}\geq 0 \\ v=\sqrt{1-x}\geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} u^2+u+2=v+3uv \\ u^2+v^2=2 \end{cases}$

Thay $2=u^2+v^2$ vào phương trình đầu ta có $2u^2+u+v^2=v+3uv \Leftrightarrow 2u^2+(1-3v)u+v^2-v=0$
Ta có $\Delta=(v+1)^2$. Đến đây các bạn có thể giải quyết dễ dàng $\square$.

Bài 41: Giải phương trình $(x+5)\sqrt{x+1}+1 = \sqrt[3]{3x+4}$

Giải

Lời giải: ĐK $x\geq -1$
Đặt $a=\sqrt{x+1}; b=\sqrt[3]{3x+4}$
$\Rightarrow x=a^2-1$ và $3a^2+1=b^3$

Thay vào phương trình ta có hệ sau
$\begin{cases} (a^2+4)a+1=b \\ 3a^2+1=b^3 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có $a^3+3a^2+4a+2=b^3+b$
Đến đây quan sát kĩ một chút, ta biến đổi như sau
$\Leftrightarrow (a+1)^3+(a+1)=b^3+b$
Xét hàm số đặc trưng $f(t)=t^3+t$
Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$, vậy hàm số đồng biến.
$\Rightarrow f(a+1)=f(b)$

Nên $\sqrt{x+1}+1=\sqrt[3]{3x+4}$
Đặt $u=\sqrt{x+1}; v=\sqrt[3]{3x+4}$
Ta có hệ sau

$\begin{cases} u+1=v \\ v^3-3u^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=v-1 \\ v^3-3u^2=1 \end{cases}$

Sử dụng phép thế ta có $v^3-3(v-1)^2=1$
$\Leftrightarrow v^3-3v^2+6v-4=0$
$\Leftrightarrow (v-1)(v^2-v+4)=0$
Phương trình có nghiệm duy nhất $v=1$
$\Rightarrow \sqrt[3]{3x+4}=1 \Rightarrow x=-1$
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1\square$

Phương trình dạng $\sqrt{ax+b}=cx^2+dx+e$

Ta đã gặp các dạng bài toán như $\sqrt{ax+b}=cx+d$ và một số ví dụ đã nêu ở trên bằng cách bình phương bậc 4 và đồng nhất hệ số để tìm được nghiệm, nhưng đối với những bài toán không dùng được phương pháp đó thì sao? Chúng ta cùng làm rõ vấn đề.

Xét ví dụ sau

Bài 42: Giải phương trình $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

Lời giải: ĐK $x \geq -\dfrac{5}{4}$
Ta biến đổi phương trình như sau
$4x^2-12x-2=2\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow (2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11$
.Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình sau:
$\begin{cases} (2x-3)^2=4y+5 \\ (2y-3)^2=4x+5 \end{cases}$
$\Rightarrow (x-y)(x+y-1)=0$

Với $x=y \Rightarrow 2x-3=\sqrt{4x+5} \Rightarrow x=2+\sqrt{3}$.
Với $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{2}\square$

Nhận xét: Chắc các bạn đang ngạc nhiên vì không biết tại sao ta có thể đặt như vậy, đó không phải là đoán mò đâu. Phương pháp này rất hữu dụng với ai đã học qua đạo hàm là có thể dễ dạng đặt được.
Bài toán có dạng như sau

Dạng 1: $\sqrt{ax+b}=cx^2+dx+e, (a\neq 0, c\neq 0, a\neq \frac{1}{c})$

Xét $f(x)=cx^2+dx+e \Rightarrow f'(x)=2cx+d$
Giải PT $f'(x)=0$, khi đó bằng phép đặt $\sqrt{ax+b}=2cy+d$, ta sẽ đưa được về hệ đối xứng loại II trừ một số trường hợp đặc biệt.
Có thể thấy rõ ràng qua ví dụ trên, ta xét ví dụ tiếp theo

Bài 43: Giải phương trình $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

Làm nháp: Xét $f(x)=x^2-4x-3 \Rightarrow f'(x)=2x-4$
Giải $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

Giải

Lời giải: ĐK $x \leq 2\sqrt{7}; x \geq 2+\sqrt{7}$
Đặt $\sqrt{x+5}=y-2 \Rightarrow (y-2)^2=x+5$

Ta biến đổi phương trình đầu lại $\sqrt{x+5} = (x-2)^2 - 7$
Thay $y-2$ vào PT đầu ta thu được hệ sau
$\begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (y-2)^2 = x+5 \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(x+y-3) = 0$
$TH_1 : x = y \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = x-2; x \geq 2$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(5+\sqrt{29}) \\ x = \frac{1}{2}(5-\sqrt{29}) \end{array} \right.$
$TH_2 : 1 - x = \sqrt{x+5}; x \leq 1$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array} \right.$
Đối chiếu với điều kiện ta nhận $x = -1; x = \dfrac{1}{2}(5+\sqrt{29})$
Vậy PT đã cho có nghiệm $S = \left\{ -1; \dfrac{1}{2}(5+\sqrt{29}) \right\}$

Bài 44: Giải phương trình $x^2 + 5 + \sqrt{3x+1} = 13x$

Nhận xét. Làm tương tự ta viết lại phương trình như sau
$\sqrt{3x+1} = -4x^2 + 13x - 5$ và đặt $f(x) = -4x^2 + 13x - 5$
Ta có $f'(x) = -8x + 13$ nếu ta giải ra và đặt bằng phương pháp tương tự như trên sẽ không thu được hệ đối xứng loại II.

Giải

Lời giải. ĐK $x \geq -\dfrac{1}{3}$
Đặt $\sqrt{3x+1} = -(2y-3); y \leq \dfrac{3}{2}$
Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} (2x-3)^2 = 2y + x + 1 \\ (2y-3)^2 = 3x + 1 \end{cases}$
Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(2x+2y-5) = 0$
• Với $x = y \Rightarrow x = \dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$
• Với $2x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{11+\sqrt{73}}{8}$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \dfrac{15-\sqrt{97}}{8}; \dfrac{11+\sqrt{73}}{8} \right\}$ □
Ngoài cách này, các bạn vẫn có thể đặt $\sqrt{3x+1} = t$, rồi biến đổi phương trình thành $4x^2 - 10x - t^2 + t + 6 = 0$ có $\Delta = (2t-1)^2$
Nhận xét. Ta thấy cách giải bài toán này khác so với ví dụ trên vì đưa về hệ "gần đối xứng" loại II nhưng vẫn giải được một cách dễ dàng. Dạng toán này có dạng như sau:
$\sqrt{\mathbf{ax+b}} = \mathbf{r(ux+v)^2 + dx + e}$ và thỏa mãn $\begin{cases} u = ar + d \\ v = br + e \end{cases}$
Cách giải. Đặt $uy + v = \sqrt{ax+b}$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} uy + v = r(ux+v)^2 + dx + e \\ ax + b = (uy+v)^2 \end{cases}$
Ta viết lại phương trình trên như sau $\sqrt{3x+1} + (2x-3)^2 - x - 4 = 0$. Dễ dàng ta kiểm tra được các hệ số đều thỏa mãn, nhưng khi đặt $\sqrt{3x+1} = 2y-3$ thì ta thu được hệ phương trình không dễ dàng để giải một chút nào. Ta chuyển vế và đổi dấu sẽ đưa về hệ gần đối xứng giải được như bài

toán trên. Chắc các bạn đang thắc mắc là khi nào thì dùng đạo hàm khi nào thì dùng cách tôi vừa nêu. Thật sự là kết hợp cả 2 cách đấy. Đạo hàm áp dụng được khi hệ số $d = 0$, các bạn có thể dễ dàng kiểm tra, còn nếu không được thì dùng cách thêm bớt như trên.

Bài tập: Giải các phương trình sau
$1/\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$
$2/\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20$
$3/\sqrt{x-1} + x^2 - x - 3 = 0$
$4/x^2 - x - 2004\sqrt{1+16032x} = 2004$ (HSG Bắc Giang 2003-2004)
$5/\sqrt{9x-5} = 3x^2 + 2x + 3$
$6/x^2 = \sqrt{2-x} + 2$

Dạng 2: $\sqrt{ax+b} = \frac{1}{a}x^2 + cx + d (a \neq 0)$ và thỏa mãn $b + ad = \frac{a^2c}{2}\left(1 + \frac{c}{2}\right)$

Cách giải: Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{a}x^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{a}x + c = 0 <=> x = -\frac{ac}{2}$ ta đưa vệ hệ đối xứng quen thuộc.

Ví dụ: Giải phương trình $3x^2 + x - \frac{29}{6} = \sqrt{\frac{12x+61}{36}}$

Làm nháp:$f(x) = 3x^2 + x - \frac{29}{6} \Rightarrow f'(x) = 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

Giải

Đặt $\sqrt{\frac{12x+61}{36}} = y + \frac{1}{6}, y \geq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{12x+61}{36} = y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}$
$\Leftrightarrow 12x + 61 = 36y^2 + 12y + 1 \Leftrightarrow 3y^2 + y = x + 5$
Mặt khác từ phương trình đầu ta có $3x^2 + x - \frac{29}{6} = y + \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3x^2 + x = y + 5$
Nên ta có hệ sau $\begin{cases} 3x^2 + x = y + 5 \\ 3y^2 + y = x + 5 \end{cases}$
Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(3x+3y+2) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee y = -\frac{3x+2}{3}$
• Với $x = y \Rightarrow 3y^2 = 5 \Rightarrow x = y = \sqrt{\frac{5}{3}}; y \geq -\frac{1}{6}$
• Với $y = -\frac{3x+2}{3} \Rightarrow 3x^2 + x = \frac{3x+2}{3} + 5 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 13 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{126}}{9}$
Từ đây tìm được y và kết luận nghiệm □

Dạng 3: $\sqrt[3]{ax+b} = cx^3 + dx^2 + ex + m, (a \neq 0, c \neq 0, a = \frac{1}{c})$

Cách giải: Xét hàm số $cx^3 + dx^2 + ex + m$, ta giải phương trình đạo hàm cấp hai bằng không. $f''(x) = 6cx + 2d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{3c}$.
Sau đó bằng phép đặt $\sqrt[3]{ax+b} = y + \frac{d}{3c}$ ta đưa được về hệ đối xứng.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt[3]{3x - \frac{63}{8}} = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$

Làm nháp: Ta có $f''(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{3x - \dfrac{63}{8}} = y - \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3x - \dfrac{63}{8} = y^3 - \dfrac{9}{2}y^2 + \dfrac{27}{4}y - \dfrac{27}{8} \Leftrightarrow 12x - 18 = 4y^3 - 18y^2 + 27y$
Mặt khác từ phương trình đầu ta có được $12y - 18 = 4x^3 - 18x^2 + 27x$, ta có hệ sau
$\begin{cases} 12x - 18 = 4y^3 - 18y^2 + 27y \\ 12y - 18 = 4x^3 - 18x^2 + 27x \end{cases}$
Giải hệ này không còn khó khăn$\square$.

$\boxed{\text{Dạng 4: } \sqrt[3]{ax+b} = cx^3 + dx^2 + ex + m, (a \neq 0, c \neq 0, a \neq \frac{1}{c})}$

Cách giải: Cũng tương tự như trên : Xét hàm số $f(x) = cx^3 + dx^2 + ex + m$, giải phương trình $f''(x) = 0 \Rightarrow 6cx + 2d = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{d}{3c}$.
Khi đó cũng bằng cách đặt $\sqrt[3]{ax+b} = 3cy + d$, ta đưa về hệ đối xứng.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$ (THTT T6/2001)
Làm nháp: Ta có $f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Giải

Đặt $\sqrt[3]{81x - 8} = 3y - 2 \Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \dfrac{4}{3}y$, biến đổi tương tự như trên ta có hệ
$\begin{cases} 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \\ 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \dfrac{13}{3} = 0$
Vì $(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \dfrac{13}{3} = \dfrac{1}{2}(x + y)^2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^2 + \dfrac{1}{2}(y - 2)^2 + \dfrac{1}{3} > 0$
Nên $x = y$ thay vào phương trình ta giải tiếp tục$\square$.
Nhận xét: Tuy dạng bài này vẫn giải được cách dùng hàm số, nhưng đây cũng là một cách rất hữu hiệu để giải quyết dạng toán này. Ta cùng đến với một số bài toán tương tự xuất hiện trong các kì thi.
Giải các phương trình sau:
$1/x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x + 5} = 1 - 3x$ (Đề nghị Olympic 30/4/2009)
$2/x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x - 9}$ (Olympic 30/4/2011)
$3/8x^3 - 4x - 1 = \sqrt[3]{6x + 1}$

Bài 45: Giải phương trình $\sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} + \sqrt[4]{x} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$
Đặt $\begin{cases} \sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} = u \\ \sqrt[4]{x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ 0 \leq v \leq \sqrt[4]{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$
Như vậy ta có hệ $\begin{cases} u + v = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ u^2 + v^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - v \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2} - v}\right)^2 + v^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai ta có: $(v^2+1)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+v\right)^2 \Leftrightarrow v^2 - v + 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0$

$\Leftrightarrow v = \dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}-3}}{2}$ (Thỏa ĐK). Nên $x = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}-3}}{2}\right)^4$ $\square$

Bài 46: Giải phương trình $\sqrt{1-x^2} = \left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \dfrac{2}{3} - \sqrt{x}$ với $u \geq 0, v \leq \dfrac{2}{3}$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1-x^2 = 1-u^4 \\ \left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2 = v^2 \end{cases}$$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ \sqrt{1-u^4} = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ u^4+v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ (u^2+v^2)^2 - 2u^2.v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ \left[(u+v)^2 - 2u.v\right]^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{4}{9} - 2u.v\right)^2 - 2u^2.v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{2}{3} \\ 2u^2.v^2 - \dfrac{16}{9}u.v - \dfrac{65}{81} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{3} \\ u.v = \dfrac{8-\sqrt{194}}{18} \end{cases} \\ \begin{cases} u+v = \dfrac{2}{5} \\ u.v = \dfrac{8+\sqrt{194}}{18} \end{cases} \end{array}\right.$$

Nên u, v là nghiệm của phương trình

$$\left[\begin{array}{l} y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{8-\sqrt{194}}{18} = 0(a) \\ y^2 - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{8+\sqrt{194}}{18} = 0(b) \end{array}\right.$$

Chỉ có (a) là có nghiệm nên

$$y = \frac{1}{6}\left(2 \pm \sqrt{2(2\sqrt{194}-6)}\right)$$

Do đó

$$\begin{cases} u_1 = y_1 \\ v_1 = y_2 \end{cases} \vee \begin{cases} u_2 = y_2 \\ v_2 = y_1 \end{cases}$$

Vì $u \geq 0$ nên ta chọn $u = \dfrac{1}{6}\left(2 + \sqrt{2(2\sqrt{194}-6)}\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{6}\left(2 + \sqrt{2(2\sqrt{194}-6)}\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{9}\left(-2 + \sqrt{2(\sqrt{194}-6)} + \sqrt{\frac{97}{2}}\right) \square$$

Nhận xét: Bài này thực sự là khó, phức tạp không chỉ đòi hỏi sự sáng tạo linh hoạt trong cách đặt ẩn phụ mà khi ta giải các phương trình bậc 2 máy tính không bấm ra số được mà đòi hỏi ta phải vững kĩ năng tính toán chứ không phải lúc nào cũng dựa vào máy tính.

Bài 47: Giải phương trình $4x^2 - 11x + 10 = (x-1)\sqrt{2x^2 - 6x + 2}$

Nhận xét: Bài này khi đọc đề ta nghĩ ngay đến cách giải bằng ẩn phụ không hoàn toàn bằng cách đặt $\sqrt{2x^2 - 6x + 2}$, rồi thêm bớt VT nhưng ta không nhận được Δ chính phương, ta giải bài này bằng cách đưa về hệ phương trình ẩn phụ không hoàn toàn.

Giải

PT $\Leftrightarrow (2x-3)^2 + x + 1 = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3) - x - 1}$
Đặt $u = 2x - 3;\ v = \sqrt{(x-1)(2x-3) - x - 1}$
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + x + 1 = (x-1)v \\ v^2 + x + 1 = (x-1)u \end{cases}$
Trừ vế theo vế ta có $u^2 - v^2 = (x-1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+x-1) = 0$
• $u = v \Rightarrow u^2 + x + 1 = (x-1)u \Leftrightarrow (2x-3)^2 + x + 1 = (x-1)(2x-3)$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 7 = 0$ phương trình vô nghiệm.
• $u + v + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 + \sqrt{2x^2 - 6x + 2} + x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 2} = 4 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{4}{3} \\ 7x^2 - 18x + 14 = 0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.□
Nhận xét: Cách giải của bài toán này phát triển lên từ 1 cách làm đã nêu ở trên
$f^n(x) + b = a\sqrt[n]{af(x) - b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$
Ta dự đoán $f(x) = (2x+c)^2$. Đến đây ta đồng nhất hệ số để tìm c
$4x^2 + 4cx + c^2 + (-11-4c)x + 10 - c^2 = (x-1)\sqrt{(x-1)(2x+c) - (-11-4c)x - 10 + c^2}$
$b = (11-4c)x + 10 - c^2$. Đối chiếu với bài toán đồng nhất hệ số suy ra $x = -3$

Ta xét tiếp ví dụ sau, độ khó nhỉnh hơn 1 chút

Giải phương trình $3x^3 - 6x^2 - 3x - 17 = 3\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)}$

Nhận xét: Cũng giống như bài toán trên nhìn vào biểu thức ta có thể dự đoán $f(x) = (3x+c) \vee f(x)x + c$. Ở đây ta chọn $f(x) = 3x + c$

PT $\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 - 27x + 153 = 27\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)}$
Tuy nhiên đến đây nếu ta áp dụng cách cân bằng hệ số thì có lẽ phức tạp. Ta hãy chú ý đến nếu chúng ta tìm ra biểu thức $f(x)$ phù hợp thì biểu thức b cần tìm sẽ có bậc cao nhất là 2. Và đặc biệt hơn khi ta áp dụng $af(x) - b$ cho biểu thức trong căn thì hệ số bậc 2 trong biểu thức b giữ nguyên chỉ thay đổi bậc nhất và hạng tử tự do. Vì $af(x) = a(3x+c)$ chỉ cho các hạng tử bậc nhất $3ax$ và hệ số tự do ac . Ta thấy $27x^2$ sẽ chắc chắn có trong biểu thức b. Vậy biểu thức bậc 2 trong $f(x) = -81x^2$. Mặt khác khi khai triển $f(x)$ thì hệ số của hạng tử bậc 2 là $27x^2c$, vậy $c = -3$. Hay ta dự đoán $f(x) = 3x - 3$
Ta phân tích kiểm tra
$(3x-3)^3 + (27x^2 - 108x - 126) = 27\sqrt[3]{9(-3x^2 + 12x + 5)} = 27\sqrt[3]{27(3x-3) - (27x^2 - 108x - 126)}$

Ta đặt $u = 3x - 3; v = \sqrt[3]{27(3x-3) - (27x^2 - 108x - 126)}$

Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} u^3+(27x^2-108x-126)=27v \\ v^3+(27x^2-108x-126)=27u \end{cases}$

Phần tiếp theo xin dành cho bạn đọc.□

Cũng bằng cách tương tự như trên bạn đọc cũng có thể giải quyết bài toán tương tự như sau

Bài tập: Giải phương trình

1/ $x^3-x^2-10x-2=\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$

2/$7x^2-13x+8=2x^2\sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

3/$8x^2-13x+7=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2-2}$

Phương pháp lượng giác hóa.

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ có thể

Đặt $x=|a|\sin t$ với $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$hoặc$x=|a|\cos t$ với $0\le t\le\pi$

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ có thể

Đặt $x=\dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

Hoặc $x=\dfrac{|a|}{\cos t}$ với $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{a^2+x^2}$ có thể: Đặt:$x=|a|\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Hoặc $x=|a|\cot t$ với $t\in(0;\pi)$.

• Nếu bài toán chứa $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ có thể: đặt$x=a\cos 2t$.

• Nếu bài toán chứa$\sqrt{(x-a)(b-x)}$ có thể đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$.

Lợi thế của phương pháp này là đưa phương trình ban đầu về một phương trình lượng giác cơ bản đã biết cách giải như phương trình đẳng cấp, đối xứng ... Và điều kiện nhận hoặc loại nghiệm cũng dễ dàng hơn rất nhiều. Vì lượng giác là hàm tuần hoàn nên ta chú ý đặt điều kiện các biểu thức lượng giác sao cho khi khai căn không có dấu trị tuyệt đối, có nghĩa là luôn dương.

Bài 48: Giải phương trình $x^3+\sqrt{(1-x^2)^3}=x\sqrt{2(1-x^2)}$

ĐK $-1\le x\le 1$

Từ điều kiện của bài toán ta đặt ẩn phụ $x=\cos t$, khi đó $\sqrt{1-x^2}=|\sin\varphi|$

Chỉ cần chọn φ mà $0\le\varphi\le\pi$ khi đó $-1\le cos\varphi=x\le 1$ và $\sin\varphi\ge 0$ và $|\sin\varphi|=\sin\varphi$

PT đã cho biến đổi được về dạng :

$\cos^3\varphi+\sin^3\varphi=\sqrt{2}cos\varphi sin\varphi$

$\Leftrightarrow(cos\varphi+sin\varphi)(1-cos\varphi sin\varphi)=\sqrt{2}cos\varphi sin\varphi$

Đặt $u=cos\varphi+sin\varphi=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Do $0\le x\le\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}\le\varphi+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 1$, ta được $-\dfrac{1}{2}\le u\le\sqrt{2}$

Phương trình đại số với ẩn u có dạng :

$u\left(1-\dfrac{u^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{2}$

$\Leftrightarrow u^3+\sqrt{2}u^2-3u-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow\left(u-\sqrt{2}\right)\left(u^2+2\sqrt{2}u+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\sqrt{2} \\ u=-\sqrt{2}+1 \\ u=-\sqrt{2}-1<-\sqrt{2} \end{array}\right.$

• TH1 :
$u=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}+k2\pi$, k $\in$ Z

• TH2 :
$u=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$ và $\cos\varphi\sin\varphi=\frac{u^2-1}{2}=1-\sqrt{2}$

Khi đó $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ là nghiệm của phương trình

$X^2-\left(1-\sqrt{2}\right)X+1-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow X=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}$

Do $\sin\varphi \geq 0$ cho nên $\cos\varphi=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}$

Vậy pt có nghiệm : $x=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}}{2}$, x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ □

Bài 49: Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$

Giải

ĐK $x \in [-1;1]$
Đặt $x=\cos t, t \in [0;\pi]$
Phương trình tương đương $2\cos^2 t+\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}+2\sin t\cos t=1$
$\Leftrightarrow \cos 2t+\sin 2t=-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$
$\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{t}{2}$
$\Leftrightarrow \cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 2t-\frac{\pi}{4}=-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2}+\frac{k4\pi}{3} \\ t=-\frac{\pi}{10}+\frac{k4\pi}{5} \end{array}\right.$
Dựa vào điều kiện nghiệm của phương trình ta nhận 2 nghiệm là
$x=\cos\frac{\pi}{2}; x=\cos\frac{7\pi}{10}$
Vậy $S=\left\{\cos\frac{7\pi}{10};0\right\}$ □

Bài 50: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x(1+2\sqrt{1-x^2})$

Giải

Điều kiện:$1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$
Đặt $x=\sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Khi đó phương trình có dạng:$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1+\cos t}=\sin t\left(1+2\cos t\right)$
$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=\sin t+\sin\,2t\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$
$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right)=0$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0\\ \sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}\\ t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right.$$
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{1}{2};1\right\}$ □

Bài 51: Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{(x^2+1)^2}{2x(1-x^2)}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\neq 0\end{cases}$
Đặt $x=\tan t; t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4};0\right\}$
Khi đó $x^2+1=\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t}$
$\sin\,2t=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow\frac{x^2+1}{2x}=\frac{1}{\sin\,2t}$
$cos\,2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-x^2}{x^2+1}\Rightarrow\sin\,2t.\cos\,2t=\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$
$\Leftrightarrow\sin\,4t=\frac{4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin\,4t}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$
Khi đó phương trình được biến đổi về dạng
$\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin\,2t}=\frac{2}{\sin\,4t}\Leftrightarrow 4\sin t.\cos\,2t+2\cos\,2t=2$
$\Leftrightarrow 2\sin t.\cos\,2t=1-\cos\,2t\Leftrightarrow 2\sin t.\cos\,2t=2\sin^2 t\Leftrightarrow\left(\cos\,2t-\sin t\right)\sin t=0$
$\Leftrightarrow\left(1-2\sin^2 t-\sin t\right)\sin t=0\Leftrightarrow\left(\sin t+1\right)\left(2\sin t-1\right)\sin t=0$
$\Leftrightarrow\sin t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}.}$
Vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là:$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$□.

Bài 52: Giải phương trình $5+3\sqrt{1-x^2}=8x^6+8(1-x^2)^3$

Giải

Điều kiện $x\in[-1;1]$
Đặt $x=\sin t;-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$
Phương trình đã cho tương đương với $5+3\sqrt{1-x^2}=8\left(x^6+(1-x^2)^3\right)$
$\Leftrightarrow 5+3\cos t=8(\sin^6 t+\cos^6 t)$ Để ý $\sin^6 t+\cos^6 t=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4t$

$\Leftrightarrow \cos 4t = \cos t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{k2\pi}{3} \\ t = \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện của t, ta giải được $x = 0 \vee x = \pm\sin\dfrac{2\pi}{5}\square$

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1: Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x+1} = 2$

Giải

Đặt $a = \sqrt[3]{7x+1}; b = \sqrt[3]{8+x-x^2}; c = \sqrt[3]{x^2-8x+1}$

Ta có hệ sau $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^3=8 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases} \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

• $a=-b \Rightarrow x=-1 \vee x=9$

• $b=-c \Rightarrow x=1$

• $c=-a \Rightarrow x=0 \vee x=1$

Vậy phương trình có nghiệm $S=\{-1;1;0;9\}\square$

Bài tập tương ứng $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$

Bài 2: Giải phương trình $\dfrac{15}{2}(30x^2-4x) = 2004(\sqrt{30060x+1}+1)$

Giải

PT $\Leftrightarrow (30x^2-4x) = 4008(\sqrt{30060x+1}+1)$

Đặt $y = \dfrac{\sqrt{30060x+1}+1}{15} \Rightarrow 15y-1 = \sqrt{30060x+1}$

$\Leftrightarrow 15y^2+2y = 2004x$

Mặt khác từ phương trình đầu ta có $30x^2-4x = 4008y \Leftrightarrow 15x^2-2x = 2004y$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 15x^2-2x=2004y \\ 15y^2+2y=2004x \end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có $(x-y)(15(x+y)+2002)=0$

• Với $x=y \Rightarrow 15x-1=\sqrt{30060x+1}$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{2006}{15}$

Với $x=0$ thì phương trình đầu vô nghiệm.

• Với $15(x+y)+2002=0$. Ta có $30060x+1 \geq 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{30060x+1}+1}{15} \geq \dfrac{1}{15}$

Nên $x+y \geq \dfrac{-1}{30060} + \dfrac{1}{15} > 0$

Vậy $15(x+y)+2002=0$ vô nghiệm$\square$.

Bài 3: Giải phương trình $4\sqrt{1-x} = x+3+3\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Giải

Đặt $x = \cos t; t \in [0;\pi]$
PT$\Leftrightarrow 4\sqrt{1+\cos t} = \cos t + 3 + 3\sqrt{1-\cos t} + \sin t$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = \cos t + 3 + 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$
$\Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cos\frac{t}{2} = 4 - 2\sin^2\frac{t}{2} + 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$
$\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2}\left(2\sqrt{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + 2\sin^2\frac{t}{2} - 3\sqrt{2}\sin\frac{t}{2} - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos\frac{t}{2}\left(2\sqrt{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{t}{2} - 2\sqrt{2}\right)\left(2\sin\frac{t}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$
$\left(\sin\frac{t}{2} - 2\sqrt{2}\right)\left(2\sin\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$
• Với $\sin\frac{t}{2} = 2\sqrt{2}$ (PTVN)
• Với $2\sin\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2} + \sqrt{2} = 0$
$\Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{6} \\ t = \frac{17}{6}\pi(l) \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện của t, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$□

Bài 4: Giải phương trình $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2+21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$
(Trích bài viết của anh Lê Phúc Lữ)

Giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+21} > 0$
$\Leftrightarrow (x^2+21) - (x^3-3x+1)\sqrt{x^2+21} - (x^4 - 2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow t^2 - (x^3-3x+1)t - (x^4-2x^2+x) = 0$
$\Delta = (x^3-3x+1)^2 + 4.(x^4-2x^2+x) = x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x^3 - x + 1)^2$
Suy ra phương trình có 2 nghiệm là:

$$\Rightarrow t = \frac{x^3 - 3x + 1) \pm (x^3 - x + 1)}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -x(1) \\ t = x^3 - 2x + 1(2) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+21} = -x \\ x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 21 = x^2 \\ x < 0 \end{array}\right.$ Phương trình này vô nghiệm.
(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+21} = x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+21} - 5 = x^3 - 2x - 4$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+21}+5} = (x-2)(x^2+2x+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} = x^2 + 2x + 2(3) \end{array}\right.$$

Xét (3) $VT \le |VT| < \left|\frac{x+2}{5}\right| < x^2 + 2x + 2 = VP$ Suy ra (3) vô nghiệm.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$□

Bài 5: Giải phương trình $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ (THTT T5/354)

Giải

Ta thấy $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=x^2(x+1)^2+(1-x)^2>0\forall x$. Nên ta suy ra được điều kiện xác định là $0<x<1$
PT $\Leftrightarrow (x(x+1))^2+(x-x)^2=(x^2+1)\sqrt{x(x+1)(1-x)}$ (2)
Đặt $u=x(x+1); v=1-x$ (với u,v>0) thì $u+v=x^2+1$. Ta có thể viết (2) dưới dạng
$u^2+v^2=(u+v)\sqrt{uv}\Leftrightarrow(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2(u+v+\sqrt{uv})=0$
$\Leftrightarrow u=v$ (Vì $u+v+\sqrt{uv}>0$)
Với $u=v\Rightarrow x(x+1)=1-x\Leftrightarrow x^2+2x-1=0$ PT có 2 nghiệm $x=-1\pm\sqrt{2}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $x=-1+\sqrt{2}$ thõa mãn.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1+\sqrt{2}\square$.

Bài 6: Giải phương trình $10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

Giải

Đặt $u=6x+1; v=\sqrt{x^2+3}$
Mà ta biểu diễn VT theo ẩn phụ được như sau $10x^2+3x+1=\dfrac{1}{4}(6x+1)^2+(x^2+3)-\dfrac{9}{4}$
Vậy ta viết lại phương trình $\dfrac{1}{4}u^2+v^2-\dfrac{9}{4}=uv\Leftrightarrow(u-2v)^2=9\Leftrightarrow u-2v=\pm9$
• Với $u-2v=3\Rightarrow 1+6x-\sqrt{x^2+3}=3\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt{x^3+3}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1\geq0\\x^2+3=(3x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$
• Với $u-2v=-3\Rightarrow 3x+2=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2\geq0\\(3x+2)^2=x^2+3\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}-3}{4}$
Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=1\vee x=\dfrac{\sqrt{7}-3}{4}\square$

PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 1 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2}\,(x-y)\,(1+4xy)=\sqrt{3} & (1)\\ x^2+y^2=1 & (2)\end{cases}$$

Giải

Đặt :

$$\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases}$$

Khi đó, phương trình (2) thỏa mãn với mọi α.

Phương trình (1) tương đương với phương trình

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+2\sin 2\alpha)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin(\alpha-45^0).2\left(\frac{1}{2}+\sin 2\alpha\right)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&4\sin(\alpha-45^0)(\sin 2\alpha+\sin 30^0)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&8\sin(\alpha-45^0).\sin(\alpha+15^0)\cos(\alpha-15^0)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&4\cos(\alpha-15^0)[\cos 60^0-\cos(2\alpha-30^0)]=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&2\cos(\alpha-15^0)-4\cos(\alpha-15^0).\cos(2\alpha-30^0)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&-2\cos(3\alpha-45^0)=\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}\alpha=65^0+k120^0\\ \alpha=-35^0+l120^0\end{array}\right.\ (k,l\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có sáu nghiệm như sau: $\begin{cases}x_1=\sin 65^0\\ y_1=\cos 65^0\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=\sin 185^0\\ y_2=\cos 185^0\end{cases}$

$\begin{cases}x_3=\sin 305^0\\ y_3=\cos 305^0\end{cases}$

$\begin{cases}x_4=\sin 85^0\\ y_4=\cos 85^0\end{cases}$

$\begin{cases}x_5=-\sin 35^0\\ y_5=\cos 35^0\end{cases}$

$\begin{cases}x_6=\sin 205^0\\ y_6=\cos 205^0\end{cases}$ □

<u>Bài 2</u> Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+x^2+y^2=8\\ xy(x+1)(y+1)=12\end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ trở thành

$$\begin{cases}x(x+1)+y(y+1)=8\\ x(x+1).y(y+1)=12\end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases}u=x(x+1)\\ v=y(y+1)\end{cases}$$

Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=8=\\ u.v=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2\\ v=6\end{cases}\\ \begin{cases}u=6\\ v=2\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Trường hợp 1</u>

$$\begin{cases}u=2\\ v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0\\ y^2+y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(1;2),\ (1;-3)\\ (-2;2),\ (-2;-3)\end{array}\right.$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2;1),\ (-3;1) \\ (2;-2),\ (-3;-2) \end{array} \right. \quad \square$$

Bài 3 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$$

Giải

Biến đổi hệ đã cho ta thu được

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy(x+y) = 3 \\ x^3 + y^3 + xy(x+y) = 15 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} u = x^3 + y^3 \\ v = xy(x+y) \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 15 \\ u - v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 6 \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy(x+y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. \quad \square$$

Bài 4 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x + y + \dfrac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $2x - y \neq 0$
Đặt

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2x - y \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 - 5uv + 6v^2 = 0 \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{u}{v} = 3 \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{u}{v} = 2 \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v = \\ 2v^2 - 3v + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

Trường hợp 1

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Đáp số: $\boxed{(x;y) = \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{1}{4}\right)}$ $\square$

Bài 5 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \dfrac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x + \dfrac{1}{y} \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Biến đổi hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + x + y - 3 = 5 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} \\ v = \sqrt{x + y - 3} \end{cases} \text{ với} \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 3 = \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \end{array} \right. \text{ thỏa mãn } (**)$$

Trường hợp 1

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ x + y - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right. \text{ thỏa mãn } (*)$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ x + y - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 - \sqrt{10} \\ y = 3 + \sqrt{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 + \sqrt{10} \\ y = 3 - \sqrt{10} \end{cases} \end{array} \right. \text{ thỏa mãn } (*)$$

Đáp số: $(x;y) = (3;1), (5;-1), (4 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10}), (4 + \sqrt{10}; 3 - \sqrt{10})$ $\square$

Bài 6 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $xy > 0$
Đặt: $u = \log_3(xy) \Leftrightarrow xy = 3^u$
Khi đó, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 3(x+y) = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ (x+y)^2 - 3(x+y) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 3 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 + \sqrt{6} \\ y = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \\ y = 3 + \sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số: $\boxed{(x;y) = (3+\sqrt{6}; 3-\sqrt{6}),\ (3-\sqrt{6}; 3+\sqrt{6})}$ □

Bài 7 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 2 \Rightarrow xy = -2 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$; $P = xy(S^2 \geq 4P) \Rightarrow S^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = S^2 - 2P$
Vậy

$$\begin{cases} S^2 - 2P + S = 4 \\ S^2 - P + S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -2 \\ \left[\begin{array}{l} S = 0 \\ S = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Trường hợp 1

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số: $\boxed{(x;y)=(\sqrt{2};-\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2};\sqrt{2}),\ (1;-2),\ (-2;1)}$

<u>Bài 8</u> Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=4y-1 \\ x+y=\dfrac{y}{x^2+1}+2 \end{cases}$$

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4= \\ x+y=\dfrac{y}{x^2+1}+2 \end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}$, $v=x+y$. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} u+v=4 \\ v=\dfrac{1}{u}+2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta thu được $u=1$, $v=3$.

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$

Đáp số: $\boxed{(x;y)=(1;2),\ (-2;5)}$ □

<u>Bài 9</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y}=4 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $xy\neq 0$

Đặt $a=x^2+y^2-1$, $b=\dfrac{x}{y}$ với $ab\neq 0$

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1 \\ a-2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Trường hợp 1</u>

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Trường hợp 2</u>

$$\begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số: $\boxed{(x;y) = (1;-1),\ (-1;1),\ (3;1),\ (-3;-1)}$ □

Bài 10 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy $(0;0)$ là một nghiệm của hệ.
Xét $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình đàu cho x, hai vế của phương trình thứ hai cho x^2, ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{x} + y = 3 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{x^2} + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{y}{x}\right) + y = 3 \\ \left(x + \dfrac{y}{x}\right)^2 + y = 5 \end{cases}$$

Đặt $z = x + \dfrac{y}{x}$, ta thu được hệ

$$\begin{cases} z + y = 3 \\ z^2 + y = 5 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta có: $z = 2$, $y = 1$ hoặc $z = -1$, $y = 4$.
Giải trường hợp đầu được $x = y = 1$, trường hợp thứ hai vô nghiệm.
Đáp số: $\boxed{(x;y) = (0;0),\ (1;1)}$ □

Bài 11 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x\sqrt{3x + y} + \sqrt{5x + 4y} = 5 \\ 12\sqrt{5x + 4y} + x - 2y = 35 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $3x + y \geq 0$, $5x + 4y \geq 0$.
Đặt $u = \sqrt{3x + 4y}$; $v = \sqrt{5x + 4y}$. Suy ra $x - 2y = 2(3x + y) - (5x + 4y) = 2u^2 - v^2$.
Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ 12v + 2u^2 - v^2 - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ 2(5 - v)^2 - v^2 + 12v - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ v^2 - 8v + 15 = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1

$$\begin{cases} v = 3 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 2

$$\begin{cases} v = 5 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 25 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{25}{7} \\ y = \dfrac{75}{7} \end{cases}$$

Đáp số $\boxed{(x;y) = (1;1),\ \left(-\dfrac{25}{7}; \dfrac{75}{7}\right)}$ □

Bài 12 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} (x^2-1)(y-2)+4(x^2-1)+4(y-2)=5 \\ (x^2-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases}$$

Đặt $u=x^2-1$, $v=y-2$
Hệ trở thành

$$\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ uv+4(u+v)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=10 \\ uv+4(u+v)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=-10 \\ uv=45 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=2 \\ uv=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1

$$\begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases}$$

Khi đó, có hai nghiệm của hệ là: $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-2;1)$
Trường hợp 2

$$\begin{cases} u=-1 \\ v=3 \end{cases}$$

Khi đó, hệ có nghiệm là: $(x;y)=(0;5)$.
Đáp số: $\boxed{(x;y)=(2;1),\ (-2;1),\ (0;5)}$ □

Bài 13 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}-y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)=-8 \\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$ với $t \geq 0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} t-y\,(1+2t)=-8 \\ y^2+yt+t^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y-2ty=-8 & (1) \\ (t-y)^2+3ty=12 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $2(t-y)^2+3\,(t-y)=0 \Leftrightarrow t-y=0\ t-y=-\dfrac{3}{2}$

Với $t=y$, ta có: $t=y=2$. Khi đó: $\sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm là $\left(\dfrac{5}{2};2\right)$.

Với $y=t+\dfrac{3}{2}$, có $4t^2+6t-13=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}$ ($do\,t \geq 0$). Khi đó:

$$t=\frac{-3+\sqrt{61}}{4} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3+\sqrt{61}}{4} \\ x=\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16} \end{cases}$$

Đáp số: $\boxed{(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};2\right),\left(\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16};\dfrac{3+\sqrt{61}}{4}\right)}$ □

Bài 14 Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\dfrac{3}{2} \\ y+2\,(x-2)\,\sqrt{x+2}=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$, $y \geq -2$
Đặt $u = \sqrt{x+2}$, $v = \sqrt{y+2}$ với u, $v \geq 0$ $(*)$
Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 - v = \dfrac{7}{2} (1) \\ v^2 + 2\left(u^2 - 4\right)u = \dfrac{1}{4} (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), thu được:

$$\left(u^2 - \frac{7}{2}\right)^2 + 2u^3 - 8u = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow u^4 + 2u^3 - 7u^2 - 8u + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (u-1)(u-2)\left(u^2 + 5u + 6\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow u = 1 \vee u = 2$$

Với $u = 1$ thay vào (1) có $v = -\dfrac{5}{2}$, không thỏa $(*)$.

Vơi $u = 2$ thay vào (1) có $v = \dfrac{1}{2}$, thỏa $(*)$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(2; \dfrac{7}{4}\right)$ $\square$.

<u>Bài 15</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

Giải

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$.
Xét $y \neq 0$. Đặt $t = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow x = ty$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} y^2(2t^2 - t + 1) = y(3-t) & (1) \\ y^2(t^2 + t - 3) = y(t-2) & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) được:

$$3t^3 - 7t^2 - 3t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{7}{3} \end{array}\right.$$

Hệ đã cho có nghiệm $\boxed{(x; y) = (0; 0),\ (1; 1),\ (-1; 1),\ \left(\dfrac{7}{43}; \dfrac{3}{43}\right)}$ $\square$

<u>Bài 16</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + x + xy = 5y \\ 1 + x^2y^2 = 5y^2 \end{cases}$$

Giải

Với $y = 0$, hệ vô nghiệm.
Với $y \neq 0$, hệ có dạng

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 5 \\ x^2 + \dfrac{1}{y^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + x.\dfrac{1}{y} = 5 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - 2x\dfrac{1}{y} = 5 \end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{1}{y}=u$ và $x.\dfrac{1}{y}=v$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^2-2v=5 \\ u+v=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-5 \\ v=10 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với

$$\begin{cases} u=-5 \\ v=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ x.\dfrac{1}{y}=10 \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm}$$

Với

$$\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=3 \\ x.\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số: $\boxed{(x;y)=(2;1),\ \left(1;\dfrac{1}{2}\right)}$ □

<u>Câu 17:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y\,(y+x)=4y \quad (1) \\ (x^2+1)\,(y+x-2)=y \quad (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải

+) Do $y=0$ không là nghiệm của hệ nên: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+y+x=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}\,(y+x-2)=1 \end{cases}$

+) Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{x^2+1}{y} \\ v=x+y \end{cases}$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u\,(v-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ (4-v)\,(v-2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(1;2)\,,\ (-2;5)$ □

<u>Câu 18:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2 \quad (1) \\ \sqrt{x-y^2}+x=3 \quad (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải

+) $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-y^2}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x^2+y^2-7x+9=0 \end{cases}$

+) $(1) \Leftrightarrow 2-\sqrt{(xy^2+y^2+1)\,(xy^2-y^2+1)}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(xy^2+y^2+1)\,(xy^2-y^2+1)}=2\left[1-\left(3-\sqrt{2}\right)y^2+xy^2\right] \quad (*)$

+) Đặt $\begin{cases} u = xy^2 + 1 \\ v = y^2 \end{cases}$. Phương trình (*) trở thành:

$$\sqrt{(u+v)(u-v)} = 2\left[u - \left(3 - \sqrt{2}\right)v\right]$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - \left(3-\sqrt{2}\right)v \geq 0 \\ u^2 - v^2 = 4\left[u - \left(3-\sqrt{2}\right)v\right]^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - \left(3-\sqrt{2}\right)v \geq 0 \\ 3u^2 - 8\left(3-\sqrt{2}\right)uv + \left(45 - 24\sqrt{2}\right)v^2 = 0\,(**) \end{cases} \quad (II)$$

• Ta thấy $v = 0$ không là nghiệm của hê (II) nên:

$$(**) \Leftrightarrow 3\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 8\left(3-\sqrt{2}\right)\frac{u}{v} + \left(45-24\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v} = 3 \\ \frac{u}{v} = 5 - \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{xy^2+1}{y^2} = 3 \\ \frac{xy^2+1}{y^2} = 5 - \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \dfrac{xy^2+1}{y^2} = 3$ (Do $u \geq \left(3-\sqrt{2}\right)v$)

$\Rightarrow xy^2 + 1 = 3y^2 \Leftrightarrow (x-3)\,y^2 + 1 = 0 \ \ (***)$

• Từ (1) ta có: $y^2 = -x^2 + 7x - 9$ thay vào (***) ta được:

$$(x-3)\left(-x^2+7x-9\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 10x^2 - 30x + 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 + \sqrt{2}\text{(loại)} \\ x = 4 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

• Với $x = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

• Với $x = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow y^2 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x;y) = \left\{(2;1)\,;(2;-1)\,;\left(4-\sqrt{2};\sqrt{1+\sqrt{2}}\right);\left(4-\sqrt{2};-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\right\} \square$$

Câu 19: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy + 4\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \ (1) \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \qquad (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải

+) Điều kiện: $x + y \neq 0$

$$+)\ (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \dfrac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x + y + \dfrac{1}{x+y}\right)^2 + (x-y)^2 = 13 \\ x + y + \dfrac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases}$$

+) Đặt $a = x + y + \dfrac{1}{x+y}$ $(|a| \geq 2)\,; b = x - y$ ta được hệ: $\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 13 \ (3) \\ a + b = 3 \qquad (4) \end{cases}$

• Từ (4) ta có: $b = 3 - a$ thay vào (3):

$$3a^2 + (3-a)^2 = 13 \Leftrightarrow 4a^2 - 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = \frac{1}{2}\text{ (loại)} \end{array}\right.$$

• Với $a = 2 \Rightarrow b = 1$ từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

+) Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(1;0)\square$

Câu 20: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) & (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải

+) $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x^2+y^2)=1 \\ 4x^2+3x+3xy+y=\dfrac{57}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)=\dfrac{10}{25} \\ 2x^2-2y^2+3x+3xy+y=\dfrac{47}{25} \end{cases}$

+) Ta có: $2x^2-2y^2+3x+3xy+y=\dfrac{47}{25} \Leftrightarrow (2x-y)(x+2y)+(2x-y)+(x+2y)=\dfrac{47}{25}$

+) Đặt $2x-y=a, 2x+y=b$ ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ab+a+b=\dfrac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=1 \\ 2ab+2(a+b)=\dfrac{94}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ab=(a+b)^2-1 \\ (a+b+1)^2=\dfrac{144}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=\dfrac{7}{5} \\ ab=\dfrac{12}{25} \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} a+b=-\dfrac{17}{25} \\ ab=\dfrac{132}{25} \end{cases} \quad (**) \end{array} \right.$$

+) Ta thấy hệ (**) vô nghiệm, còn hệ (*) có hai nghiệm là: $(a;b)=\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right),\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$

Tương ứng ta có: $(x;y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{5}\right)$

+) Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{5}\right)$ $\square$

Nhận xét: Bài này xuất phát từ hệ đối xứng $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy+x+y=\frac{47}{25} \end{cases}$. Sau khi thay x,y tương ứng bởi $2x-y, 2x+y$ thì bài toán trở nên phức tạp đòi hỏi người giải phải có những biến đổi khéo léo để được kết quả như trên.

Câu 21: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-2x=y^4-y \ (1) \\ (x^2-y^2)^3=3 \quad (2) \end{cases} \quad (I)$

Giải

+) Đặt $x+y=a, x-y=b, 3=c^3 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+b}{2} \\ y=\dfrac{a-b}{2} \end{cases}$

+) Từ (2) ta có: $(ab)^3=c^3 \Leftrightarrow ab=c$

+) Ta có: $x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=ab\left[\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\right]=\dfrac{ab}{2}(a^2+b^2)$

+) Mặt khác: $2x-y=a+b-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+3b}{2}=\dfrac{a+c^3b}{2}$

+) Khi đó (1) trở thành: $\dfrac{ab}{2}(a^2+b^2)=\dfrac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2+b^2)=a+c^3b$

+) Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} c\left(a^2+b^2\right)=a+c^3b \\ ab=c \end{cases} \quad (II)$

$\Rightarrow c\left(a^2+\dfrac{c^2}{a^2}\right)=a+\dfrac{c^4}{a} \Leftrightarrow ca^4+c^3=a^3+ac^4 \Leftrightarrow (ca-1)\left(a^3-c^3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{c} \\ a=c \end{array}\right.$

Suy ra hệ (II) có hai nghiệm là: $(a;b)=(c;1)\,,\left(\dfrac{1}{c};c^2\right)$

- Với $\begin{cases} a=c \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c+1}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$
- Với $\begin{cases} a=\dfrac{1}{c} \\ b=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}+c^2\right)=\dfrac{1+c^3}{2c}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}-c^2\right)=\dfrac{1-c^3}{2c}=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$

+) Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right),\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}};-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ $\square$