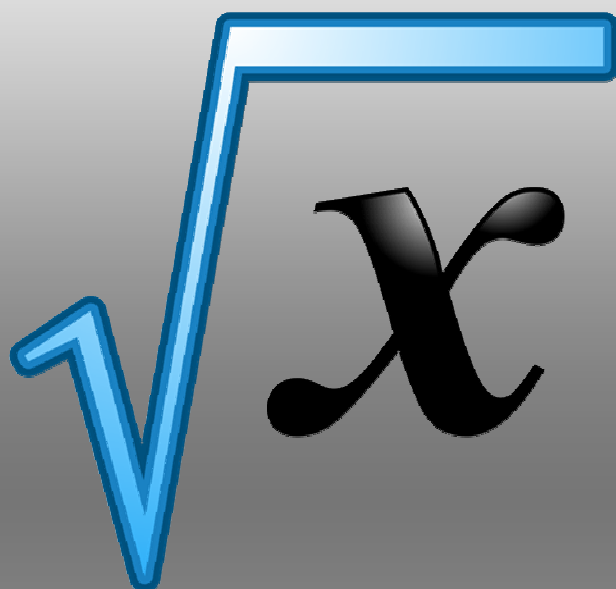


Phương trình chứa căn thức



PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

$$1) \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$2) \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$3) \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^{2n} \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$$

$$4) \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow g(x) = [f(x)]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$5) [f(x)]^{2n} = [g(x)]^{2n} \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$6) [f(x)]^{2n+1} = [g(x)]^{2n+1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chuyên đề 1:

Lũy thừa hai vế và dùng các công thức cơ bản

1. Nhận dạng: Khi phương trình có dạng:

- $\sqrt{A} = B$
- $\sqrt{A} = \sqrt{B}$
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = k$ (k là hằng số)
- $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$ (A, B, C là các hàm chứa x)
- Khi bình phương hai vế thì bậc cao triệt tiêu.
- Khi bình phương hai vế thì căn thức triệt tiêu.

2. Các bước giải

- Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- Bước 2: Đặt điều kiện để hai vế không âm rồi lũy thừa hai vế.
- Bước 3: Đưa về phương trình cơ bản; giải chọn nghiệm thỏa mãn điều kiện.

3. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = x - 4$

2. $\sqrt{2 - x^2} + 3x = \sqrt{5x^2 - 1}$

Giải

$$1. \sqrt{2x^2 - 4x + 5} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 2x^2 - 4x + 5 = (x - 4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

$$2. \sqrt{2 - x^2 + 3x} = \sqrt{5x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 + 3x = 5x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = -\frac{1}{2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 + \sqrt{x+1} = 1$$

$$2) \sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2+4}$$

Giải

$$1. x^2 + \sqrt{x+1} = 1$$

$$\text{Điều kiện: } 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 ; x = -1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = -1 \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

$$2. \sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2+4}$$

$$\text{Điều kiện: } x \geq -2$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 3x + 13 + 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} = 12 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 160x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x = 0 \\ x = 160 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{16-x} + \sqrt{x+9} = 7$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Giải

1. Điều kiện: $-9 \leq x \leq 16$

Phương trình $\Leftrightarrow 25 + 2\sqrt{(16-x)(x+9)} = 49$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$

2. Điều kiện: $x > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4x = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{1}{3}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x + \sqrt{x-11}} + \sqrt{x - \sqrt{x-11}} = 4$

2. $\sqrt{77-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$

Giải

1. $\sqrt{x + \sqrt{x-11}} + \sqrt{x - \sqrt{x-11}} = 4$

Điều kiện: $x \geq 11$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x + \sqrt{x-11}} = 4 - \sqrt{x - \sqrt{x-11}}$

$\Rightarrow x + \sqrt{x-11} = 16 - \sqrt{x-11} - 8\sqrt{x - \sqrt{x-11}} + x$

$\Rightarrow \sqrt{x-11} - 8 = -4\sqrt{x - \sqrt{x-11}}$

$\Rightarrow x - 11 + 64 - 16\sqrt{x-11} = 16(x - \sqrt{x-11})$

$\Rightarrow x = \frac{53}{15}$ (loại vì $x \geq 11$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. $\sqrt{77-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$

Điều kiện: $3-2x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow 7-x^2 + x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+5} = -4 - 2x \Rightarrow x^2(x+5) = (4+2x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Kiểm tra lại:

Với $x = -1$ thì phương trình được thỏa mãn.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4 \quad 2. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$$

Giải

$$1. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$$

$$\text{Điều kiện: } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Phương trình: } \Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$$

$$\Leftrightarrow (2-x^2)(x^2+8) = 9 \Leftrightarrow -x^4 - 6x^2 + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -7 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 1$

$$2. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$$

$$\text{Điều kiện: } \frac{2}{3} < x$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2+\sqrt{3x-2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x+2+\sqrt{3x-2} = 0 \text{ vô nghiệm } \forall x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$2. x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$$

Giải

$$1. \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \frac{x+3}{2} \quad (*)$$

+ Nếu $\sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì (*) trở thành:

$$2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4(x-1) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (nhận)}$$

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x = 5$.

+ Nếu $1 \leq x < 2$ thì (*) trở thành: $\frac{x+3}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 5$.

$$2. \quad x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 16} + x^2 + 16 = 40$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 16} = 24 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 + 16) = (24 - x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 64x^2 = 576 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Kiểm tra lại:

+ Với $x = 3$ phương trình thỏa mãn.

+ Với $x = -3$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 3$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$2. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

Giải

$$1. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + 34 - x + 3 + 3\sqrt[3]{x+34} \cdot \sqrt[3]{x-3} \left(\sqrt[3]{x+34} + \sqrt[3]{x-3} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+34} \cdot \sqrt[3]{x-3} = 12 \Leftrightarrow (x+34)(x-3) = 12^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -61 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Nếu $x = 30$ phương trình thỏa mãn.

+ Nếu $x = -61$ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 30 \vee x = -61$.

$$2. \quad \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} \right)^3 = x+1$$

$$\Leftrightarrow x-1 + 3x-1 + 3\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} \right) = x+1$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \cdot \sqrt[3]{x+1} = 3(1-x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+1) = (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[(3x-1)(x+1) + (x-1)^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (3x-1)(x+1) + (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kiểm lại:

+ Với $x = 1$ thì phương trình thỏa mãn.

+ Với $x = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Tóm lại: nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$2. \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$$

Giải

$$1. \quad \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} \right)^3 = x-1$$

$$\Leftrightarrow 4x+2 + 3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} \right) = x-1$$

$$\Leftrightarrow 4x+2 + 3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{3x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = -(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(3x+1) = -(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[(x-1)(3x+1)+(x+1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kiểm tra lại:

+ Với $x = 0$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $x = -1$ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm phương trình là: $x = -1$.

2. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$

$$\Leftrightarrow 2x-1 + 2x+1 + 3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{2x+1}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1}) = 10x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[3]{10x} = 2x \Rightarrow (2x-1)(2x+1) \cdot 10x = 8x^3$$

$$\Rightarrow x[5(2x-1)(2x+1) - 4x^2] = 0$$

$$\Rightarrow x(16x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Thử lại:

+ Thay ba x trên vào nghiệm của phương trình thì ta nhận được: $x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

Bài 9: Giải phương trình sau: $x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1}$ với $x \in \mathbb{R}$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1} \Leftrightarrow (x^3 + 8)^2 = 49(8x+1) \Leftrightarrow x^6 + 16x^3 - 392x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x + 5 = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm $\forall x \geq 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

Bài 10: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x^2-1} = m+x$

Giải

$$\sqrt{x^2-1} = m+x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x^2 - 1 = (m+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -1 - m^2 \end{cases} \quad (1)$$

+ Nếu $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \frac{-1 - m^2}{2m}$

Điều kiện: $x \geq -m \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$

- Nếu $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $\begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{-1 - m^2}{2m}$.

Kết luận:

+ Nếu $\begin{cases} 0 \leq m < 1 \\ m < -1 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{-1 - m^2}{2m}$.

Bài 11: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{a+x} = a - \sqrt{a-x}$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a+x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a$

$$\Leftrightarrow a+x+a-x+2\sqrt{a^2-x^2} = a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2} = a^2-2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a \geq 0 \\ 4(a^2-x^2) = (a^2-2a)^2 = a^4+4a^2-4a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{4}(-a^4+4a^3) \end{cases} +$$

Nếu $a = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0$.

$$+ \text{ Nếu } a \neq 0 \text{ thì (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a^3(4-a) \geq 0 \\ x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a^3-a^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a \leq 4 \\ x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2} \end{cases}$$

Vậy:

+ Nếu $a = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $\begin{cases} a \geq 2 \\ a > 4 \text{ thì (1) vô nghiệm.} \\ a \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $2 \leq a \leq 4$ thì (1) có nghiệm $x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{4a - a^2}$

Bài 12: Giải và biện luận phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2}$$

Giải

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2} \quad (1)$$

+ Nếu $a = 0$ thì (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi $a \neq 0$ thì:

- Nếu $x = \pm a$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu $x \neq \pm a$ thì (1) tương đương với:

$$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} + m\sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}} = m+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - m \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+a}{x-a} = 1 \\ \frac{x+a}{x-a} = m^3 \end{cases} \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow x+a = m^3(x-a) \Leftrightarrow (1-m^3)x = -am^3 - a \quad (*)$$

- Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$

Vậy:

+ Nếu $a = 0$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $a = 1$ và $a \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 1$ và $a \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$.

Bài 13: Giải và biện luận phương trình: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$

Giải

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = a \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = a$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 = a. \text{ Vì } \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\text{Do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} \geq 0 \right)$$

Do đó:

+ Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq \frac{1}{4}$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = \sqrt{a}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{a} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4} - \sqrt{a} \Leftrightarrow x = a - \sqrt{a}$$

Tóm lại: + Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq \frac{1}{4}$ thì (1) có nghiệm $x = a - \sqrt{a}$

Bài 14: Giải và biện luận phương trình: $2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)}$

Giải

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{x(a+x)} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} a+x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \\ x(a+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ x(a+x) \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ điều kiện (2) $\Rightarrow a \geq 0$

a. Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành: $2\sqrt{x} - \sqrt{-x} = \sqrt{-x} + \sqrt{x^2}$
phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Nếu $a > 0$ thì từ (3) $\Rightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq 0 \end{cases}$

- Nếu $x = -a$ thì (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ nhưng vì $a > 0$ nên $x \neq -a$.

- Khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ thì $2\sqrt{a+x} > \sqrt{a-x}$ nên phương trình (2) tương đương với

$$(2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})^2 = a-x + \sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+x) + (a-x) - 4\sqrt{a^2 - x^2} = a-x + \sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+x} (4\sqrt{a+x} - 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}) = 0 \left(\text{do } \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ nên } a+x > a-x \right)$$

$$\Leftrightarrow 16(x+a+a-x) - 32\sqrt{a^2 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 32\sqrt{a^2 - x^2} = -x + 32a$$

$$\Leftrightarrow 32^2(a^2 - x^2) = x^2 + 32^2 a^2 - 64a \cdot x$$

(vì $a > 0$ nên $32a - x > a - x > 0$)

$$\Leftrightarrow 32^2 \cdot x^2 + x^2 - 64ax = 0 \Leftrightarrow x(1025x - 64a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$$

Vậy: + Nếu $a < 0$ thì (2) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (2) có nghiệm $x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$

* Cách biện luận khác:

Phương trình (1)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \geq 0 \\ 4(a+x) + (a-x) - 4\sqrt{(a+x)(a-x)} = a-x + \sqrt{x(a+x)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+x) \geq a-x \geq 0 \\ 4(a+x) - 4\sqrt{(a+x)(a-x)} - \sqrt{x(a+x)} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \sqrt{x+a} [4\sqrt{x+a} - 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \begin{cases} x = -a \\ 4\sqrt{x+a} - 4\sqrt{a-x} = \sqrt{x} \quad (*) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nếu $x = -a$ là nghiệm của (1) thì nó phải thỏa mãn:

$$-0,6a \leq -a \leq a \Leftrightarrow a = 0$$

$$\begin{aligned} + \text{Phương trình } (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} \geq \sqrt{a-x} \\ 16(a+x) + 16(a-x) - 32\sqrt{(a+x)(a-x)} = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+x \geq a-x \geq 0 \\ 32\sqrt{a^2 - x^2} = 32a - x \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

+ Nếu $a < 0$ thì (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

$$\begin{aligned} + \text{Nếu } 0 \leq a &\text{ thì hệ trên } \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 32^2(a^2 - x^2) = 32^2 a^2 - 64ax + x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 1025x^2 - 64ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025} \end{aligned}$$

+ Nếu $a < 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$

Bài 15: Cho phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + m} = x - 1$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 8x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 6x + m - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow 6 \leq m < 10$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $6 \leq m < 10$.

Bài 16: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2 - 4mx + 3m} = x - m$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2x^2 - 4mx + 3m = (x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ f(x) = x^2 - 2mx + 3m - m^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (1) có đúng một nghiệm thì (2) có đúng một nghiệm $x \geq m$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:

Phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < m < x_2$

$$\Leftrightarrow f(m) < 0 \Leftrightarrow 3m - 2m^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2:

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm kép } x_0 > m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 = m > m \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Trường hợp 3:

Phương trình (2) có một nghiệm $x_1 = m$. Kiểm tra nghiệm x_2 : (2) có một

$$\text{nghiệm } x_1 = m \Leftrightarrow 3m - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

• Với $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 0$ (nhận) $\Rightarrow m = 0$ thỏa đề bài.

• Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ thỏa đề bài.}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$

Chuyên đề 2: Đưa về tích

1. Các cách đưa về tích

Cách 1: Đặt nhân tử chung khi phương trình có sẵn một biểu thức $(x - x_0)$

Cách 2: Dùng lượng liên hiệp.

2. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sqrt{x^2} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2(x + 1) \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

- Nếu $x = 0$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x \geq 2$ (a) thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{x \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x-1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 4(x^2 - x - 2) = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{8} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

2. Điều kiện $\begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$

- Nếu $x = -1$ thì (2) luôn đúng.
- Nếu $x \geq 1$ (a) thì:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2\sqrt{(x+1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3x+5 + 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = 4(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 4x - 6} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4(2x^2 + 4x - 6) = x^2 - 2x + 1 \text{ (vì } x \geq 1 \text{ nên } x - 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 18x - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{25}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \pm 1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

$$1. \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{x^2 - x} \quad (1)$$

$$2. \sqrt{2x^2 - 6x + 4} - \sqrt{x^2 - 1} = 2(x - 1) \quad (2)$$

Giải

$$1. \text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Cách 1:

- Nếu $x = 1$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x > 1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{x(x-1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x} \quad (3)$$

$$\text{Vì } x > 1 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x+2} > \sqrt{x} \\ \sqrt{x+1} > \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} > 2\sqrt{x}$$

$\Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

- Nếu $x \leq -2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(+2)} + \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{x(x-1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-x-2)} + \sqrt{(1-x)(-x-1)} = 2\sqrt{(1-x)(-x)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-1} = 2\sqrt{-x} \quad (4)$$

$$\text{Vì } x \leq -2 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{-x-2} < \sqrt{-x} \\ \sqrt{-x-1} < \sqrt{-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-1} < 2\sqrt{-x}$$

$\Rightarrow (4)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Cách 2:

Bình phương hai vế. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + x^2 - 1 + 2\sqrt{(x^2 + x - 2)(x^2 - 1)} = 4(x^2 - x) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 + 2\sqrt{(x-1)^2(x+2)(x+1)} = 4x^2 - 4x \\ \Leftrightarrow 2|x-1|\sqrt{(x+2)(x+1)} = 2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+3) \geq 0 \\ 4(x-1)^2(x+2)(x+1) = (x-1)^2(2x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x = 1 \\ 4(x^2 + 3x + 2) - (2x+3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$2. \text{ Điều kiện } \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

- Nếu $x = 1$ thì (2) nghiệm đúng.
- Nếu $x \geq 2$ thì:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2\sqrt{(x-1)(x-1)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = \sqrt{4x-4} + \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\sqrt{4x-4} + \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-4} \forall x \geq 2$

- Nếu $x \leq -1$ thì:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)} - \sqrt{(x-1)(x+1)} = 2(x+1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4-2x)} - \sqrt{(1-x)(-1-x)} = -2(1-x) = -2\sqrt{(1-x)(1-x)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4-2x} - \sqrt{-1-x} = -2\sqrt{1-x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4-2x} + 2\sqrt{1-x} = \sqrt{-1-x} \quad (3) \end{aligned}$$

- Với $\forall x \leq -1$ thì $1-x > -1-x \Rightarrow 2\sqrt{1-x} > \sqrt{-1-x}$
 $\Rightarrow \sqrt{4-2x} + 2\sqrt{1-x} > \sqrt{-1-x} \Rightarrow (3) \text{ vô nghiệm.}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x = 1$.

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = \frac{4x-1}{3}$

Giải

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ (a)

Cách 1:

Nhân hai vế của (1) cho $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x}$ ta được:

$$(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x})(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x}) = \frac{1}{3}(4x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow 4x-1 = \frac{1}{3}(4x-1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \text{ (nhận)} \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 2+5x-3x^2 = x^2-6x+9 \text{ vì (a) nên } 3-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{1}{4}; x = 1; x = \frac{7}{4}$

Cách 2:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{3x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{2-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3x+1 \\ v^2 = 2-x \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4x-1$$

$$\text{Khi đó: (1)} \Leftrightarrow u-v = \frac{1}{3}(u^2 - v^2) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u+v = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } u = v \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \text{ Với } u+v = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(2-x)} = 3-x \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là : $x = \frac{1}{4}; x = 1; x = \frac{7}{4}$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4-x \quad (1)$$

$$2. \frac{2x}{\sqrt{3x+1}-1} = x+1 \quad (2)$$

Giải

Các nhận xét quan trọng:

1. Nhân lượng liên hiệp khi phương trình có dạng:

$$\text{Dạng 1: } \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = kx+h$$

Dạng 2: $\frac{ax+b}{\sqrt{cx+d} \pm \alpha} = kx+h$

Dạng 3: $\frac{ax^2+b}{\sqrt{cx^2+d} \pm \alpha} = kx+h$

2. Khi nhân với một biểu thức luôn khác 0 thì ta nhân tự nhiên mà không xét thêm điều kiện gì.
3. Nếu biểu thức đó không biết dấu thì ta phải xét trường hợp biểu thức đó bằng 0 có nghiệm thỏa mãn phương trình hay không? Khi biểu thức đó khác 0 thì ta nhân vào hai vế hay vào tử số và mẫu số.
4. Đối với dạng 1 thì ta nên dùng cách 2 để lời giải đơn giản hơn.
5. Đối với dạng 2, dạng 3 ngoài cách giải trên còn có thể đặt t bằng biểu thức căn.

1. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+3} > 0 \\ v = \sqrt{2x-1} \geq 0 \end{cases}$; điều kiện: $\frac{1}{2} \leq x < 4$ (a)

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = x+3 \\ v^2 = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4 - x$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow u+v = u^2 - v^2$

$$\Leftrightarrow u+v = (u+v)(u-v) \Leftrightarrow u-v=1$$

$$\Leftrightarrow u=1+v \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 2x + 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x-1) = (3-x)^2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 13 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \quad x=1 \text{ thỏa (a).}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$.

Chú ý:

Nếu ta nhân lượng liên hiệp vào hai vế thì phải để ý:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} > 0 \forall x > \frac{1}{2}$$

2. Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \neq 0$

(2) $\Leftrightarrow \frac{2x(\sqrt{3x+1}+1)}{3x} = x+1$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3x+1}+1) = 3x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1} = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 4(3x+1) = (3x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = -\frac{1}{3}$

Chú ý: Bài này ta có thể đặt $t = \sqrt{3x+1}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. x - 4 = \frac{x^2}{(\sqrt{1+x} + 1)^2} \quad (1)$$

$$2. 2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1) = x \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $x \geq 4$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad & \Leftrightarrow x - 4 = \frac{x^2(\sqrt{1+x} - 1)^2}{[(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} - 1)]^2} \\ & \Leftrightarrow x - 4 = (\sqrt{1+x} - 1)^2 = 2 + x - 2\sqrt{1+x} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là: $x = 8$

2. Điều kiện: $x \geq -1$

Nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+x} + 1$ ta được:

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1) = x(\sqrt{1+x} + 1) \\ & \Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x} = x(\sqrt{1+x} + 1) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{1+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là: $x = 0$

Chuyên đề 3: Đặt ẩn phụ toàn phần

1. Các dạng phương trình chuẩn

$$\text{Dạng 1: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha\sqrt{(a+bx)(c-bx)} = d$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t .
- Bước 4: Bình phương t ; tính tích $\sqrt{(a+bx)(c-bx)}$ theo t .
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t .

$$\text{Dạng 2: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha(a+bx)\sqrt{\frac{c-bx}{a+bx}} = d$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đưa biểu thức $a+bx$ vào trong căn được dạng 1.

$$\text{Dạng 3: } \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm 2\sqrt{Ax^2+Bx+D} = Kx+h$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t .
- Bước 4: Bình phương t ; tính các hàm còn lại theo t .
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t .

$$\text{Dạng 4: } ax \pm \sqrt{b-a^2x^2} \pm \alpha x \sqrt{b-a^2x^2} + c = 0$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = ax \pm \sqrt{b-a^2x^2}$
- Giải như các bước trên ở dạng 3.

$$\text{Dạng 5: } x + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Qui đồng bỏ mẫu, đưa về dạng 4.

$$\text{Dạng 6: } \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$$

Cách giải:

- Qui đồng và bỏ mẫu đưa về dạng 4.

$$\text{Dạng 7: } (ax+b)(cx+d) \pm \alpha\sqrt{Ax^2+Bx+D} = K$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt $t = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$

$$\text{Dạng 8: } \sqrt{a+bx} + \sqrt{c-bx} = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Bình phương hai vế được dạng 7.

2. Phương trình chứa một biểu thức liên hiệp: $f(x).g(x) = 1$

Cách giải: Đặt $t = f(x)$ thì $g(x) = \frac{1}{t}$

3. Phương trình chứa một biểu thức $f(x)$ giống nhau

Cách giải: Đặt $t = f(x)$

4. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} + \sqrt{(2+x)(6-x)} = 8 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - (1+x)\sqrt{\frac{8-x}{1+x}} = 3 \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-2 \leq x \leq 6$

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = \frac{t^2 - 8}{2}$$

$$(1) \text{ trở thành: } t + \frac{t^2 - 8}{2} = 8 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -6(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} = 4 \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = 4 \Leftrightarrow (2+x)(6-x) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2(\text{nhận})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

2. Điều kiện: $-1 < x \leq 8$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)} \Rightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$$

Phương trình (3) trở thành:

$$t - \frac{t^2 - 9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{loại}) \\ t = 3(\text{nhận}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(\text{loại}) \\ x = 8(\text{nhận}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 8$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1. x + \sqrt{2 - x^2} + x\sqrt{2 - x^2} = 3 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = \sqrt{5 + 4x - x^2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (a)

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow t^2 = 2 + 2x\sqrt{2 - x^2}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2 - x^2} = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t + \frac{t^2 - 2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ với } t = 2 &\Leftrightarrow x + \sqrt{2 - x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = 2 - x \\ &\Leftrightarrow 2 - x^2 = (2 - x)^2 \text{ (do (a) nên } 2 - x > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ với } t = -4 \Leftrightarrow x + \sqrt{2 - x^2} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = -x - 4.$$

Phương trình này có nghiệm $\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ vì $-x - 4 < 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 1$.

$$2. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 5 + 4x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ (a)}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4x - x^2} = 5 + 4x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 - 2\sqrt{4x - x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{4x - x^2} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{3x + 1} + \sqrt{2 - x} + 2\sqrt{2 + 5x - 3x^2} = 9 - 2x \quad (1)$$

$$2. \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ (a)

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} > 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 2x + 2\sqrt{(3x+1)(2-x)} + 3$$

$$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = t^2 - 3$$

$$\text{Khi đó: (1) trở thành: } t + t^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ với } t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2} = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 2+5x-3x^2 = (3-x)^2 \text{ (vì (a) nên } 3-x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = \frac{7}{4}$.

$$2. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{2x}\sqrt{1-x^2} = 0 \text{ (3)}$$

$$\text{Đặt: } t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{1-x^2} = t^2 - 1$$

$$(3) \text{ trở thành: } t - \sqrt{2}(t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ với } t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} - x \Leftrightarrow 1-x^2 = (\sqrt{2}-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (nhận)}$$

$$\bullet \text{ với } t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x^2 = \frac{1}{2} + x^2 + \sqrt{2}x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ thỏa mãn (a)}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1. 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48$$

$$2. \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = 4 - 2x$$

Giải

$$1. 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48$$

Điều kiện: $x \geq 5$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} \quad (t > 0) \Rightarrow t^2 = 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 + 2t - 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8 \text{ (loại)} \\ t = 6 \end{cases}$$

$$+ \text{ với } t = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 5x} = 41 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq \frac{41}{2} \\ x = \frac{41^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$

$$2. \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = 4 - 2x$$

Điều kiện: $x \geq 4$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x - 4 = \frac{x^2 (\sqrt{1 + x} - 1)^2}{\left[(\sqrt{1 + x} + 1)(\sqrt{1 + x} - 1)\right]^2}$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = (\sqrt{1 + x} - 1)^2 = 2 + x - 2\sqrt{1 + x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 8$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x$$

$$2. 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$$

Giải

$$1. \sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x \quad (1)$$

Điều kiện: $0 \leq x \leq \frac{35}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} + 2x = 35$$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+7}; t > 0$

$$t^2 = 2x + 7 + 2\sqrt{x^2+7x} \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2+7x} = t^2 - 7$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t + t^2 - 7 = 35 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 (\text{loại}) \\ t = 6 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{29}{2} \\ 4(x^2 + 7x) = 4x^2 - 116x + 29^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{29}{2} \\ x = \frac{29^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\frac{29}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \left(\frac{29}{12}\right)^2$

$$2. \quad 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \quad (1)$$

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; t > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2} \Rightarrow \sqrt{x-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } 1 + \frac{3}{4}(t^2 - 1) = t \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x-x^2} = -\frac{8}{18} \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3 \quad (1)$$

$$2. \sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19} \quad (2)$$

Giải

$$1. \text{ Đặt: } t = x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow t \geq \frac{3}{4}$$

Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3$

$$\Leftrightarrow 2t + 3 + 2\sqrt{t^2 + 3t} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3t} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 + 3t = (3 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

+ Với $t = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 2$.

2. Đặt $t = x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \Rightarrow t \geq \frac{7}{4}$

(2) trở thành: $\sqrt{t+5} + \sqrt{t} = \sqrt{3t+13}$

$$\Leftrightarrow 2t + 5 + 2\sqrt{t(t+5)} = 3t + 13$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t(t+5)} = t + 8 \Leftrightarrow 4t(t+5) = (t+8)^2$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{16}{3} \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases}$$

- Khi $t = 4$ $x^2 + x + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1. $1 - \sqrt{x + \sqrt{x+1}} + 1 = \sqrt{x+1}$

2. $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = x$

Giải

1. $1 - \sqrt{x + \sqrt{x+1}} + 1 = \sqrt{x+1} \quad (1)$

Điều kiện: $x \geq -1$

Đặt: $t = \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x+1$

Khi đó: (1) trở thành: $1 - \sqrt{t^2 + t} = t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t} = 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + t = (1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

+ Với $t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{9}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{8}{9}$.

2. Điều kiện: $x \geq 4$. Đặt: $t = \sqrt{x-4} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x-4 \Rightarrow x = t^2 + 4$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 4 + 4t} = t^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t+2)^2} = t^2 + 4 \Leftrightarrow |t-2| + t+2 = t^2 + 4 \quad (2)$$

+ Nếu $t-2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$ thì (2) $\Leftrightarrow 2t = t^2 + 4$

Phương trình này vô nghiệm.

+ Nếu $0 \leq t < 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow t = 0$

Với $t = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 4$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

$$1. x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$$

$$2. x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x$$

Giải

$$1. x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0 \quad (1)$$

Đặt: $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}; t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases} \text{ với } t = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2 \vee x = \frac{7}{2}$

$$2. x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 9x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1 - \sqrt{73}}{18} \\ x \geq \frac{-1 + \sqrt{73}}{18} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{9x^2 + x - 2}{9} - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} - \frac{91}{36} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{9x^2 + x - 2}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 9x^2 + x - 2$$

Phương trình (2) trở thành:

$$\frac{t^2}{9} - 5t - \frac{91}{36} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 180t - 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ t = \frac{91}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{91}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{91}{2}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + x - 2 = \frac{91^2}{4} \Leftrightarrow 36x^2 + 4x - 8289 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{298408}}{36} \text{ thỏa mãn (*)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{-2 \pm \sqrt{298408}}{36}$$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

$$1. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4}$$

$$2. \sqrt{(1+x)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2$$

Giải

$$1. \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2 - \frac{x^2}{4} \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}; t \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = t^2 - \frac{1}{4}t^4$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{4} \left(t^2 - \frac{t^4}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow t = 2 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{16} \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0$.

$$2. \sqrt{(1+x)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2 \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{2+x-x^2} = (2+x-x^2) - 3 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2+x-x^2}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2+x-x^2$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } t = 2t^2 - 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{loại}) \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2+x-x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1}{2}$.

Bài 10: Giải các phương trình sau:

$$1. (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$$

$$2. (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 120x$$

Giải

$$1. (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6) = 168x$$

$$\Leftrightarrow (x + 5\sqrt{x} + 6)(x + 7\sqrt{x} + 6) = 168x$$

$$\Leftrightarrow (x + 6\sqrt{x} - \sqrt{x} + 6)(x + 6\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6) = 168x$$

$$\Leftrightarrow (x + 6\sqrt{x} + 6)^2 = 169x = (13\sqrt{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6\sqrt{x} + 6 = 13\sqrt{x} \\ x + 6\sqrt{x} + 6 = -13\sqrt{x} \end{cases} \text{ (phương trình này vô nghiệm vì } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x - 7\sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 36 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 36$.

$$2. (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 120x \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 6) = 120x$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 6)][(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)] = 120x$$

$$\Leftrightarrow (x + 7\sqrt{x} + 6)(x + 5\sqrt{x} + 6) = 120x \quad (2)$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên:

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 7 \right) \left(\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + 5 \right) = 120$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}}; t \geq 2\sqrt{6}$$

Phương trình trên trở thành:

$$(t+7)(t+5) - 120 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 85 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -17 \text{ (loại)} \\ t = 5 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 5 \Leftrightarrow t = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 5 \Leftrightarrow x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 4 \vee x = 9$

Bài 11: Giải các phương trình sau:

$$1. x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$$

$$2. 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

Giải

$$1. x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2x+3}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1}{4}(t^2 - 3)^2 + 2(t^2 - 3) + 5 = 2t$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 - 8t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 + 3t + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^3 + t^2 + 3t + 5 = 0 \text{ phương trình này vô nghiệm } \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$.

$$2. 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } \sqrt{1-x} = 1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow 1-x = 1 + 4x^4 + 4x^2(1-x^2) - 4x^2 + 8x^3\sqrt{1-x^2} - 4x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow x(1 + 8x^2\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^2\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{1-x^2} + 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt{1-x^2}$; $t \geq 0$; suy ra $x^2 = 1-t^2$

Phương trình (2) trở thành: $8(1-t^2)t - 4t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 - 4t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{2} = 0 \text{ vô nghiệm vì } t \geq 0 \\ 4t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ (vì } t \geq 0) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Thử lại các nghiệm của phương trình ta được nghiệm thích hợp là:

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Bài 12: Giải các phương trình:

$$1. \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2$$

$$2. 2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0$$

Giải

$$1. \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2. \text{ Đặt kiện: } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{3x^2+4x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2x-1 \\ b^2 = 3x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{a^2 + b^2}{3}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}} = -a + b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a \geq 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{3} = (b - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } b \geq a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+1} \geq \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Phương trình (1): } a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 - 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 - 3\sqrt{5})x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm kép: } x_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 + 3\sqrt{5})x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$2. \quad 2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0 \quad (1)$$

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình nên (1) tương đương với:

$$2\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}} + 3 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \text{ thì } \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{t}$$

$$\text{Khi đó: (2) trở thành: } 2t + 3 + \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = -1$$

$$\Leftrightarrow 1+x = x-1 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 8(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{7}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = -\frac{9}{7}$$

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^5 = 123$$

Giải

Vì $(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 1$ nên

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} - x$ thì $\sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{t}$

Do đó phương trình đã cho tương đương: $t^5 + \frac{1}{t^5} = 123 \Leftrightarrow t^{10} - 123t^5 + 1 = 0$

Đặt: $y = t^5$ thì $y^2 - 123y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{123 \pm 55\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^5 = \frac{123 - 55\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^5 \\ t^5 = \frac{123 + 55\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ x^2 + 1 = x^2 + (3 - \sqrt{5})x + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ + Với}$$

$$t = \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x + \frac{\sqrt{5} + 3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 14: Giải phương trình sau:

$$\frac{2002x^4 + x^4\sqrt{x^2 + 2002} + x^2}{2001} = 2002$$

Giải

Thay 2002 bởi a : $a > 0$

Ta giải phương trình: $\frac{ax^4 + x^4\sqrt{x^2 + a} + x^2}{a - 1} = a$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ax^4 + x^4\sqrt{x^2+a} + x^2 = a^2 - a \\
&\Leftrightarrow x^4(a + \sqrt{x^2+a}) + (\sqrt{x^2+a})^2 - a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^4(a + \sqrt{x^2+a}) + (\sqrt{x^2+a} - a)(\sqrt{x^2+a} + a) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+a} + a)(x^4 + \sqrt{x^2+a} - a) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^4 + \sqrt{x^2+a} - a = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2)^2 - (\sqrt{x^2+a})^2 + x^2 + \sqrt{x^2+a} = a \\
&\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{x^2+a})(x^2 + \sqrt{x^2+a}) + x^2 + \sqrt{x^2+a} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{x^2+a})(x^2 - \sqrt{x^2+a} + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x^2+a} + 1 = 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+a} > 1$ suy ra $t^2 = x^2 + a$

Thì: (2) $\Leftrightarrow t^2 - t + 1 - a = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 - \sqrt{4a-3}}{2} < 1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4a-3} - 1)$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{4a-3} - 1)}$$

Với $a = 2002$ ta được nghiệm của phương trình cho là: $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{8005} - 1)}$

Bài 15: Giải phương trình sau: $\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4$

Giải

Điều kiện: $x < 2$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{\frac{6}{2-x}} > 0 \Rightarrow t^2 = \frac{6}{2-x} \Rightarrow 3-x = \frac{6}{t^2} + 1 = \frac{6+t^2}{t^2}$$

Do đó: (1) trở thành:

$$t + t\sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = \frac{4-t}{t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 4 \\ 10t^2 = (6+t^2)(4-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ 0 < t < 4 \\ t^3 - 6t^2 - 48 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét phương trình (2):

Đặt: $f(t) = t^3 - 6t^2 - 48$ với $0 < t < 4$

$$f'(t) = 3t^2 - 12t \quad ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	4
f'(t)		-
f(t)	-48	-80

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) = 0$ luôn vô nghiệm $\forall t \in (0, 4)$

$$\Rightarrow \text{phương trình chỉ có nghiệm } t = 2 \Leftrightarrow \frac{6}{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

Bài 16: Giải phương trình sau: $1 + x - 2x^2 = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{2x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$.

Nếu $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$ thì (1) thỏa mãn.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} \quad &\Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{(2x-1)(2x+1)} - \sqrt{2x+1} \\ &\Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1} - 1) \end{aligned}$$

Đặt: $t = \sqrt{2x+1}$; điều kiện: $t \geq \sqrt{2}$ (vì $x \geq \frac{1}{2}$)

$$\text{Ta được: } (1-x)t^2 = t(\sqrt{2x-1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{1-x} \quad (\text{vì } t \geq \sqrt{2}) \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -\frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{(\sqrt{2x-1} - 1)(\sqrt{2x-1} + 1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + 1)} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \frac{-2}{\sqrt{2x-1} + 1}$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải âm, vế trái dương.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$

Chuyên đề 3: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$

Giải

$$x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } t^2 - (x + 3)t + 3x = 0$$

$$\Delta = (x + 3)^2 - 12x = (x - 3)^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = x \end{cases}$$

+ Với $t = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2$ phương trình này vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } t = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình này là: $x = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$

Giải

$$(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{x^2 + 1}; t \geq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow (4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) + 2x - 1$$

$$\Rightarrow (4x - 1) = 2t^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2t^2 + (1 - 4x)t + 2x - 1 = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta = (1 - 4x)^2 - 8(2x - 1) = (4x - 3)^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2} (\text{loại}); t = 2x - 1$$

+ Với $t = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{4}{3}$

Bài 3: Giải phương trình sau: $(3 - x)\sqrt{\frac{3 - x}{x - 1}} + (x - 1)\sqrt{\frac{x - 1}{3 - x}} = 2$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Đặt: $t = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$ thì $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(3-x)t + (x-1)\frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (3-x)t^2 - 2t + x - 1 = 0$$

Ta có: $\Delta = (x-2)^2 \Rightarrow t = 1; t = \frac{x-1}{3-x}$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+ Với $t = \frac{x-1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-1} = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$

Tóm lại: Phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $2(1-x)\sqrt{2x^2+2x-1} = x^2 - x + 1$ (1)

Giải

Đặt: $t = \sqrt{2x^2+2x-1} \geq 0 \Rightarrow 2x^2+2x-1 = t^2$
 $\Rightarrow 2x^2 = t^2 + 1 - 2x$

(1) trở thành: $4(1-x)t = t^2 + 1 - 2x - 2x + 2$
 $\Leftrightarrow t^2 - 4(1-x)t - 4x + 3 = 0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta = 4(1-x)^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

$\Rightarrow$ (2) có hai nghiệm: $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 - 4x \end{cases}$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1 = 1$
 $\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

• Với $t = 3 - 4x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1} = 3 - 4x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4x \geq 0 \\ 2x^2 + 2x - 1 = (3 - 4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 - \sqrt{29}}{14}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $\begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{13 - \sqrt{29}}{14} \end{cases}$

Chuyên đề 4: Đặt hai ẩn đưa về phương trình tích hoặc tổng các đại lượng không âm

Bài 1: Giải phương trình: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Giải

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3 + 8 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = x + 2 \\ b = x^2 - 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = x^2 - 3x + 2$$

Do đó (2) trở thành: $2(b - a) = 3\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ 4(b - a)^2 = 9ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \quad (*) \\ 4a^2 + 4b^2 - 17ab = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3)

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 17a + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{4} \\ a = 4b \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta được: $a = \frac{b}{4} \Leftrightarrow 4a = b$

$$\Leftrightarrow 4(x + 2) = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{13} \\ x = 3 + \sqrt{13} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 3 \pm \sqrt{13}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Giải

$$\sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = x - 3 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x - 1 \\ b^2 = (x - 3)^2 \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$a + b = \sqrt{2b^2 + 2a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ (a - b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \geq 0 \\ a = b \end{cases}$$

Khi $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1}$

Giải

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt: $a = \sqrt{x-1} \geq 0$; $b = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} > 0$

$$\Rightarrow a \cdot b = \sqrt{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \sqrt{x^4 - 1}$$

Phương trình (1) trở thành: $a + b = 1 + ab$

$$\Leftrightarrow a(1-b) - (1-b) = 0 \Leftrightarrow (1-b)(a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

+ Với $a = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+ Với $b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x-1 \\ b^2 = 3x^2 + 4x + 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = \frac{a^2 + b^2}{3}$$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}} = -a + b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a \geq 0 \\ \frac{a^2 + b^2}{3} = (b - a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq a \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } b \geq a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 4x + 1} \geq \sqrt{2x - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Phương trình (1): } a^2 - 3ba + b^2 = 0$$

$$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

$$- \text{ Với } a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(7 - 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 - 3\sqrt{5})x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm kép: } x_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$- \text{ Với } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} (3x^2 + 4x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3(7 + 3\sqrt{5})x^2 + 4(6 + 3\sqrt{5})x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{Phương trình này có nghiệm kép: } x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)(5x + 9)} = \sqrt{(x + 4)(x - 5)} + 5\sqrt{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(5x + 9) = (x + 4)(x - 5) + 25(x + 1) + 10\sqrt{(x + 1)(x + 4)(x - 5)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x + 4)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \\ b = \sqrt{x + 4} \end{cases} \text{ thì (2) trở thành:}$$

$$+ 2a^2 + 3b^2 = 5ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = \frac{3b}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x + 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}; x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} (\text{loại})$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{3}{2}b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow x = 8; x = -\frac{7}{4} (\text{loại})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \vee x = 8$.

Bài 6: Giải phương trình sau: $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2 + 2)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2) \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2-x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x+1 \\ b^2 = x^2-x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 5ab = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{2}; a = 2b$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ thỏa } (*)$$

$$+ \text{ Với } a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$$

phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$.

Bài 7: Giải phương trình sau: $10\sqrt{x^3+8} = 3(x^2-x+6)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$

$$(1) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} = 3(x^2-x+6)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{x+2} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2-2x+4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x+2 \\ b^2 = x^2-2x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 - x + 6$$

Phương trình (1) trở thành:

$$10ab = 3(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{3} \vee a = 3b$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{b}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-2x+4} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3\sqrt{x^2-2x+4} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 19x + 34 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$$

Bài 8: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = -\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 7x+1 \\ b^3 = -(x^2-x-8) \\ c^3 = x^2-8x-1 \end{cases}$$

$$(1) \text{ trở thành: } a + b + c = 2 \Rightarrow (a + b + c)^3 = 8 \quad (2)$$

$$\text{Lại có: } a^3 + b^3 + c^3 = 8 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) } \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)^2 c + 3c^2(a + b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c \\ + 6abc + 3c^2a + 3c^2b$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow a = -b ; b = -c ; c = -a$$

$$+ \text{ Nếu } a = -b \Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \Leftrightarrow 7x+1 = x^2-x-8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } b = -c \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \Leftrightarrow x = 1$$

$$+ \text{ Nếu } c = -a \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-8x-1} = -\sqrt[3]{7x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 1 = -7x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Thay các giá trị $x \in \{-1, 0, 1, 9\}$ vào phương trình đều thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \{-1, 0, 1, 9\}$.

Bài 9: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3 + \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{2-x} \\ b = \sqrt[3]{7+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 2-x \\ b^3 = 7+x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 9$$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ (a+b)^3 - 3ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 2 \\ \sqrt[3]{7+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt[3]{7+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -6; x = 1$.

Bài 10: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} - \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} = 3 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} \\ b = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} \\ c = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = x^2 - 7x + 8 \\ b^3 = x^2 - 6x + 7 \\ c^3 = 2x^2 - 13x - 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 27 \quad (2)$$

Phương trình (1) trở thành:

$$a + b + c = 3 \Leftrightarrow (a + b + c)^3 = 27 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow (a + b + c) = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } a = -b \text{ thì } \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8} = -\sqrt[3]{x^2 - 6x + 7}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = 5$$

$$+ \text{ Với } b = -c \text{ thì } \sqrt[3]{x^2 - 6x + 7} = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 19 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$$+ \text{ Với } c = -a \text{ thì } \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12} = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{29}$$

Thay các nghiệm trên vào (1) ta thấy đều thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{3}{2}; x = 5; x = \frac{7 \pm 5\sqrt{5}}{2}; x = 3 \pm \sqrt{29}$$

Chuyên đề 5: Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

1. Cách giải

Dạng 1: Phương trình có dạng: $x^4 + b = a\sqrt[n]{ax \pm b}$ ($n \in \mathbb{Z}^+; n \geq 2$)

- Đặt: $t = \sqrt[n]{ax \pm b}$
- Đưa về hệ đối xứng.

Dạng 2: $\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = c; \quad m, n \in \mathbb{Z}^+; \begin{cases} m \geq 2 \\ n \geq 2 \end{cases}$

$$\bullet \text{ Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[n]{a - f(x)} \\ v = \sqrt[n]{b + f(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^n = a - f(x) \\ v^n = b + f(x) \end{cases} \Rightarrow u^n + v^n = a + b$$

$$\bullet \text{ Kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ: } \begin{cases} u + v = c \\ u^n + v^n = a + b \end{cases}$$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau: $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq -5$

Đặt: $t = \sqrt{x+5}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x+5$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \text{hệ} \begin{cases} x^2 + t = 5 & (2) \\ t^2 - x = 5 & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (3) ta được:

$$x^2 - t^2 + t + x = 0 \Leftrightarrow (t+x)(1+x-t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t+x=0 \\ t-x=1 \end{cases}$$

+ Với $t+x=0 \Rightarrow t=-x$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Vì $t \geq 0$ nên $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ nên nghiệm x_2 bị loại.

+ Với $t = x+1$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 + x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Vì $t \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ nên nghiệm x_3 bị loại.

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow t^3 = 2x-1$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t & (2) \\ t^3 + 1 = 2x & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (3) ta được $x^3 - t^3 = 2(t-x)$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) + 2(x-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ x^2 + xt + t^2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Phương trình (4) có $\Delta_1 = t^2 - 4(t^2 + 2) = -8 - 3t^2 < 0$;

do đó (4) vô nghiệm.

- Với $x=t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$

Giải

Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} \\ b = \sqrt{\frac{1}{2} - x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \frac{1}{2} + x \\ b^2 = \frac{1}{2} - x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 = 1$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^2 = 1 \\ b = 1 - a \end{cases} \Rightarrow a^3 + (1 - a)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0; a = 1; a = -2$$

$$+ \text{ Với } a = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \frac{1}{2}; x = -\frac{17}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{18 + x^2} = 5$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2 - 1} \\ b = \sqrt[3]{18 + x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = x^2 - 1 \\ b^3 = 18 + x^2 \end{cases} \Rightarrow b^3 - a^3 = 19$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b^3 - a^3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ b^3 - (5 - b)^3 = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^3 - 15b^2 + 75b - 144 = 0 \Leftrightarrow (b - 3)(2b^2 - 9b + 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 2b^2 - 9b + 48 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } b = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{18 + x^2} = 3 \Rightarrow x = \pm 3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \pm 3$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2}$

Giải

Điều kiện: $2 \leq x \leq 6$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[4]{x-2} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{6-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = x-2 \\ b^4 = 6-x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 4$$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b^2 - 8ab = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \vee ab = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} ab = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} ab = 4 \\ a + b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$x^2 - \sqrt{2}x + 4 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2 \vee x = 6$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$1. x + \sqrt{2-x^2} + x\sqrt{2-x^2} = 3$$

$$2. \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = x; |a| \leq \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 \\ b^2 = 2-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b + ab = 3 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + ab = 3 \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 - ab \\ ab = 1 \\ ab = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 - ab \\ ab = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \\ a + b = -4 \\ ab = 7 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Suy ra $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2. Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{1-x^2} \geq 0 \\ b = \sqrt[3]{1-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1-x^2 \\ b^3 = 1-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^3$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 = b^3 \\ a + 2b = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^3 \\ a = 3 - 2b \end{cases} \Rightarrow b^3 - (3 - 2b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^3 - 4b^2 + 12b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b - 1)(b^2 - 3b + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \text{ vì } b^2 - 3b + 9 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ &\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 7: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$

(1)

Giải

Điều kiện: $-313 \leq x \leq 313$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[4]{313+x} \geq 0 \\ b = \sqrt[4]{313-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 313+x \\ b^4 = 313-x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 626$$

Phương trình (1) trở thành hệ:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ a + b = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ b = 6 - a \end{cases} \\ &\Rightarrow a^4 + (6 - a)^4 = 626 \Leftrightarrow a^4 + (a - 6)^4 = 626 \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt: $t = a - 3 \geq -3$ thì (2) trở thành:

$$\begin{aligned} (t+3)^4 + (t-3)^4 = 626 &\Leftrightarrow 2t^4 + 108t^2 - 464 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -58 < 0 \text{ (loại)} \\ t^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \Rightarrow b = 1 \\ a = 1 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

$$- \text{ Với } \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 5 \\ \sqrt[4]{313-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 312$$

$$- \text{ Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 1 \\ \sqrt[4]{313-x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -312$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 312$.

Bài 8: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4}$

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt[3]{\sin^2 x}; 0 \leq a \leq 1 \\ b = \sqrt[3]{\cos^2 x}; 0 \leq b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \sin^2 x \\ b^3 = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 1$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 1 \\ a + b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = 1 \\ a + b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt[3]{4} \\ ab = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - \sqrt[3]{4}X + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} (m \in \mathbb{Z}).$$

Bài 9: Giải phương trình sau: $9 + \sqrt{9 + \sqrt{x}} = x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt: } a = 9 + \sqrt{x} \Rightarrow a > 9$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } \begin{cases} 9 + \sqrt{a} = x \quad (1) \\ 9 + \sqrt{x} = a \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} = x - a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} + (\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{a} + \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{x} \text{ thế vào (1) ta được:}$$

$$9 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(38 + 2\sqrt{37}) \text{ hay } x = \frac{1}{2}(19 + \sqrt{37})$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } x = \frac{1}{2}(19 + \sqrt{37})$$

Bài 10: Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 - x + 2}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \geq \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 - 3x - 2} \geq 0 \\ c = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} > 0 \\ d = \sqrt{x^2 - x + 2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x^2 - 1 \\ b^2 = x^2 - 3x - 2 \\ c^2 = 2x^2 + 2x + 3 \\ d^2 = x^2 - x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x^2 + 3x + 1 \\ c^2 - d^2 = x^2 + 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = c + d \\ a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ (a + b)(a - b) = (c + d)(c - d) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ a - b = c - d \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 \\ b^2 = d^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 = 2x^2 + 2x + 3 \\ x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Nghiem $x = -2$ thỏa mãn điều kiện (*).Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2$.

$$\text{Bài 11: Giải phương trình sau: } \sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } 3y = \sqrt[3]{81x - 8} + 2 \Rightarrow \sqrt[3]{81x - 8} = 3y - 2$$

$$\Rightarrow 81x - 8 = (3y - 2)^3 = 27y^3 - 2 \cdot 27y^2 + 36y - 8$$

$$\Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y$$

$$\text{Từ đó (1) chuyển về hệ: } \begin{cases} 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x & (2) \\ 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) - (3) ta được:

$$3(y-x) = x^3 - y^3 + 2(y^2 - x^2) + \frac{4}{3}(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Phương trình (4) $\Leftrightarrow x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y + \frac{13}{3} = 0$

$$\Delta_y = (y-2)^2 - 4 \left(y^2 - 2y + \frac{13}{3} \right) = -3y^2 + 4y - \frac{40}{3}$$

Lại có: $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$

$\Rightarrow \Delta_y < 0 \quad \forall y \Rightarrow$ phương trình (4) vô nghiệm.

+ Với $x = y$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \mp \sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0; x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 12: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6$

Giải

$$\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^3 + 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9} + 3 = (x-3)^3 + 9$$

Đặt: $a = \sqrt[3]{x-9} + 3 \Rightarrow x-9 = (a-3)^3 \Leftrightarrow (a-3)^3 + 9 = x$

Phương trình đã cho trở thành hệ:
$$\begin{cases} x = (a-3)^3 + 9 \\ a = (x-3)^3 + 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow x - a = (a-3)^3 - (x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow x - a = (a-x) \left[(a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) \right]$$

$$\Leftrightarrow (a-x) \left[(a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ (a-3)^2 + (x-a)^2 + (a-3)(x-a) + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt: $\begin{cases} u = a-3 \\ v = x-3 \end{cases}$ thì (2) $\Leftrightarrow u^2 + vu + v^2 + 1 = 0$

$$\Delta = v^2 - 4(v^2 + 1) = -3v^2 - 4 < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình này vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

+ Với $a = x$ thế vào (1) ta được:

$$(x-3)^3 - x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 8x + 18 = 0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$.

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{\sqrt{3x+10}} + \frac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Giải

Điều kiện: $x > -2$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{3x+10} > 0 \\ b = \sqrt{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3x+10 \\ 3b^2 = 3x+6 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 3b^2 = 4$$

Phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{1}{a} + \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a = 6 + b \end{cases} \Rightarrow (6+b)^2 - 3b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - 12b - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 8 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} = 14 \\ \sqrt{x+2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 62$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 62$.

Bài 14: Giải phương trình sau: $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} = x^2 + \frac{25}{12}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } 12 - \frac{12}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 - \frac{12}{x^2} \\ b^2 = x^2 + \frac{12}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 12 + x^2$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a + b = x^2 + \frac{25}{12} \Leftrightarrow a + b = x^2 + 12 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a + b = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $|x| \geq 1 \Rightarrow x^2 + \frac{12}{x^2} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 1$

$\Rightarrow b > 1$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 15: Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{8-x}}{\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{8-x}} = 9 - x$ (1)

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{10-x} \\ b = \sqrt[3]{8-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 10-x \\ b^3 = 8-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 18 - 2x \\ a^3 - b^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}(a^3 + b^3) = 9 - x$$

Và $a^3 - b^3 = 2$

Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{1}{2}(a^3 + b^3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ 2(a+b) = (a-b)(a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \vee \quad \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a-b)(a^2 - ab + b^2) = 2 \end{cases} \quad (II)$$

• Hệ (I) $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{10-x} = 1 \\ \sqrt[3]{8-x} = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ \sqrt[3]{8-x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

• Hệ (II): $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a-b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a^2 - ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 2 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^3 = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x \in \{8; 9; 10\}$

Bài 16: Giải phương trình sau: $(8 \cos^3 x + 1)^3 = 162 \cos x - 27$ (1)

Giải

Đặt: $a = 2 \cos x; -2 \leq a \leq 2$

Phương trình (1) trở thành: $(a^3 + 1)^3 = 81a - 27$

Lại đặt: $a^3 + 1 = 3b$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} 27b^3 = 81a - 27 \\ 3b = a^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 3a - 1 \\ a^3 = 3b - 1 \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow b^3 - a^3 = 3(a - b) \Leftrightarrow (b - a)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 + ab + b^2 + 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có: $\Delta = b^2 - 4(b^2 + 3) = -3b^2 - 12 < 0$

nên (3) vô nghiệm.

+ Với $a = b$ thế vào (2) ta được: $a^3 - 3a + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = -1 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 17: Giải phương trình sau: $4x^2 + \sqrt{2x+1} + 5 = 12x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

Đặt: $\sqrt{2x+1} = ay + b \Rightarrow 2x+1 = (ay+b)^2 = a^2y^2 + 2aby + b^2$

• Tìm a, b để hệ sau có dạng đối xứng loại 2.

$$\begin{cases} 4x^2 + ay + b + 5 = 12x \\ 2x+1 = a^2y^2 + 2aby + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + ay + b + 5 = 0 \\ a^2y^2 + 2aby + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên là hệ đối xứng loại (2)

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = -\frac{2ab}{12} = -\frac{2}{a} = \frac{b^2-1}{b+5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Như vậy ta được: $\sqrt{2x+1} = -2y + 3$

Điều kiện: $-2y + 3 > 1 \Rightarrow y < 1$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 4x^2 - 12x - 2y + 8 = 0 \\ 4y^2 + 12y - 2x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - y + 4 = 0 \quad (1) \\ 2y^2 - 6y - x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - y^2) - 6(x - y) + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[2(x + y) - 5] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

+ Với $x = y$ thế vào (1) ta được:

$$2x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{7 + \sqrt{17}}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \quad (\text{vì } y = x < 1)$$

+ Với $x + y = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - x$ ta được: $2x^2 - 6x - \frac{5}{2} + x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - \sqrt{13}}{4} \text{ (loại do } y < 1) \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:
$$\begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

Bài 18: Giải phương trình sau:

$$x^3 + (3 - a^2)a = 3\sqrt[3]{3x + (x^2 - 3)a} \quad (1)$$

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{3x + (x^2 - 3)a} \Rightarrow t^3 = 3x + (x^2 - 3)a$

Phương trình (1) trở thành:
$$\begin{cases} x^3 + (3 - a^2)a = 3t \\ t^3 = 3x + (a^2 - 3)a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3t = (a^2 - 3)a \quad (2) \\ t^3 - 3x = (a^2 - 3)a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + tx + t^2 + 3 = 0 (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có $\Delta = t^2 - 4(t^2 + 3) = -3t^2 - 12 < 0$ nên (*) luôn vô nghiệm.

+ Với $x = t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 3x = (a^2 - 3)a \Leftrightarrow x^3 - 3x - a^3 + 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (3) có: $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 3) = 12 - 3a^2$

1. Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 12 - 3a^2 < 0 \Leftrightarrow |a| > 2$ thì (3) vô nghiệm nên (1) có nghiệm duy nhất $x = a$.

2. Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ thì (3) có nghiệm kép: $x_0 = -\frac{a}{2} = \pm 1$ nên (1) có

nghiệm: $\begin{cases} x = 2 \vee x = -1 \text{ nếu } a = 2 \\ x = -2 \vee x = 1 \text{ nếu } a = -2 \end{cases}$

3. Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ thì:

a. Nếu (3) có nghiệm $x = a$.

Từ (3) $\Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

+ Nếu $a = 1$ thì (3) trở thành: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

+ Nếu $a = -1$ thì (3) trở thành: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

b. Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (3) có hai nghiệm phân biệt khác a .

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$$

Tóm lại:

+ Nếu $|a| > 2$ thì (1) có nghiệm $x = a$

+ Nếu $\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = 2 \vee x = -1$

+ Nếu $\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$ thì (1) có nghiệm $x = -2 \vee x = 1$

+ Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (1) có ba nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x = a \\ x = \frac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2} \end{cases}$$

Chuyên đề 6: Phương pháp lượng giác hóa

1. Các đặc trưng

a. Khi ẩn $x \in [-a, a]$ với $a > 0$ thì đặt
$$\begin{cases} x = a \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ x = a \cos t \left(0 \leq t \leq \pi \right) \end{cases}$$

b. Khi ẩn $0 \leq x \leq a$ thì đặt
$$\begin{cases} x = a \sin^2 t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ x = a \cos^2 t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

c. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ với $t \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ hoặc đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus \{0\}$

d. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì đặt $x = a \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1 - x^2}{3}} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt: $x = \cos t; 0 \leq t \leq \pi \Rightarrow \sin t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - \cos^2 t}} \left[\sqrt{(1 + \cos t)^3} - \sqrt{(1 - \cos t)^3} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 + \sin t} \sqrt{2} \left(\cos^3 \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) = \frac{2 + \sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sin t)(\sqrt{6} \cos t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \quad (1) \quad \text{với } 0 < a < 1$$

Giải

Với $0 < a < 1$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = 1 + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x$$

Chia hai vế của phương trình trên cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ ta được:

$$1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x \quad (2)$$

Vì $0 < a < 1$ nên đặt: $a = \tan \frac{\varphi}{2}$ thì $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Do đó (2) trở thành: } 1 = (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x \quad (3)$$

$$+ \text{ Nếu } x < 2 \text{ thì: } \begin{cases} (\sin \varphi)^x > \sin^2 \varphi \\ (\cos \varphi)^x > \cos^2 \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x > \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ nên (3) vô nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } x > 2 \text{ thì } \begin{cases} (\sin \varphi)^x < \sin^2 \varphi \\ (\cos \varphi)^x < \cos^2 \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow (\sin \varphi)^x + (\cos \varphi)^x < 1 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình (3) chỉ có thể có nghiệm $x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 3: Giải phương trình sau:

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\cos^3 t + \sqrt{(1 - \cos^2 t)^3} = \cos t \sqrt{2(1 - \cos^2 t)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2} \cos t \cdot \sin t$$

$$\Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \cos t \cdot \sin t) = \sqrt{2} \cos t \cdot \sin t \quad (3)$$

Đặt: $y = \cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $0 \leq t \leq \pi$ thì $y \in [-1, \sqrt{2}]$

Phương trình (2) trở thành:

$$y\left(1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right) - \sqrt{2} \frac{y^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow y(3 - y^2) - \sqrt{2}(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \sqrt{2}y^2 - 3y - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{2})y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} - 1 \text{ (loại)} \\ y = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

+ Với $y = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + m2\pi \Rightarrow x = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Với $y = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 1$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\left(\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2} \\ 1 - x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2(1 - \sqrt{2})x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2} \\ 2x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Bài 4: Giải phương trình sau: $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Giải

Điều kiện: $-1 < x < 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in (0, \pi) \Rightarrow \sin t > 0$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \cos t}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \cos t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right)}{1 + \sqrt{2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) - \sin t} \cdot \sin t = 1 \quad (1)$$

Lại đặt: $y = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

Với $0 < t < \pi$ thì $y \in (-1, 1) \Rightarrow y^2 = 1 - \sin t \Rightarrow \sin t = 1 - y^2$

Khi đó (1) trở thành: $\frac{(2 + \sqrt{2}y)(1 - y^2)}{1 + \sqrt{2}y - (1 - y^2)} = 1$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{2}y)(1 - y^2) - y^2 - \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}y^3 + 3y^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{2}y^2 + 4y + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}y^2 + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (y + \sqrt{2})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

+ Với $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + 4m\pi \\ t = -\frac{7\pi}{6} + m4\pi \end{cases}$$

+ Với $t \in (0, \pi) \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} = x \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - 4x^2}}} \right)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$

Đặt $x = \frac{1}{2} \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$2\sqrt{1 + \sqrt{1 - \cos^2 t}} = \cos t \left(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \cos^2 t}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 + \sin t} = \cos t \left(1 + \sqrt{1 + 2\sin t} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) = \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) \left(1 + \sqrt{1 + 2\sin t} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(\sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) \left(1 + \sqrt{1 + 2\sin t} \right) \quad (2)$$

$$\left(\text{vì } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} > 0 \right)$$

$$\text{Đặt } y = \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \Rightarrow \sin t = 1 - y^2$$

$$\text{Với } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \in [0, 1]$$

Khi đó (2) trở thành:

$$2 = y \left[1 + \sqrt{1 + 2(1 - y^2)} \right] \Leftrightarrow 2 - y = y\sqrt{3 - 2y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2 - y)^2 = y^2(3 - 2y^2) \Leftrightarrow 2y^4 - 2y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(y^3 + y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2(y^2 + 2y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1$$

$$+ \text{ Với } y = 1 \Rightarrow \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = 1 \Leftrightarrow t = 0 \left(\text{vì } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

Chuyên đề 7: Dùng phương pháp đối lập

1. Cách giải

Để giải phương trình $f(x) = g(x)$ thì ta chứng minh

- a. $f(x) \leq g(x)$
- b. $f(x) \geq g(x)$
- c. $f(x) \leq A \leq g(x)$
- d. $f(x) \geq A \geq g(x)$
- e. Chứng minh $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm duy nhất.
– Sau đó xét dấu “=” xảy ra.

2. Công cụ sử dụng

- a. Dùng khảo sát hàm số
- b. Dùng bất đẳng thức Côsi; Bunhiakopxky
- c. Dùng tính chất của bất đẳng thức
- d. Đưa về dạng $f(u) = f(v)$

3. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$

Giải

$$\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x^2 + 8} = 3x - 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2 + 15} + \sqrt{x^2 + 8}} = 3x - 2 \quad \text{ĐK: } 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2 + 15} + \sqrt{x^2 + 8}};$$

Dễ thấy $f(x)$ là hàm giảm trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$g(x) = 3x - 2$ là hàm tăng trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Nên đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ chỉ có thể cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Lại có: $f(1) = g(1) = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5} = 11$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

Đặt: $f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5}; x \geq -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{5}{2\sqrt{5x+5}} > 0 \quad \forall x > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm tăng trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lại có: $f(4) = 11$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x - 2} = 3x - x^2 - 2$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 2$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} + x^2 - 2x = \sqrt{x - 2} + x - 2$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 - 2x \geq 0 \\ v = x - 2 \geq 0 \end{cases}$ ta được: $\sqrt{u} + u = \sqrt{v} + v$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + t$; $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1 > 0 \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $[0; +\infty)$

Do đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 - 2x = x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại) do } x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình: $2x^4 + 8 = 4\sqrt{4 + x^2} + 4\sqrt{x^4 - 4}$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$$2x^4 + 8 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + 2 + 2 + 2 + 2 \geq$$

$$8\sqrt{\frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot \frac{x^4}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 8x^2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{4 - x^4} \leq \sqrt{32(4 + x^4 + x^4 - 4)} = \sqrt{64x^4} = 8x^2$$

Do đó dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x^4 + 8 = 8x^2 \\ 4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{x^4 - 4} = 8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 = 0 \\ \sqrt{4 + x^4} + \sqrt{x^4 - 4} = 2x^2 \end{cases} \quad \text{hệ này vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = x^4 - 8x^2 + 28$ (1)

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 8 + x^3 \geq 0 \\ 64 - x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Ta có: $x^4 - 8x^2 + 28 = (x^2 - 4)^2 + 12 \geq 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta được:

$$1 \cdot \sqrt{8 + x^3} + 1 \cdot \sqrt{64 - x^3} \leq \sqrt{(1+1)(8 + x^3 + 64 - x^3)} = 12$$

Do đó:
$$\begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 \geq 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} \leq 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 = 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{8 + x^3} = \sqrt{64 - x^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ x = \sqrt[3]{28} \end{cases} \Rightarrow \text{hệ này vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} = 4$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} &\leq \sqrt{(1+1+1+1)\left(2 - x^2 + 2 - \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow \\ \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} &\leq 4 \end{aligned}$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})} \leq \sqrt{2\sqrt{2(x+1-x)}} = 2\sqrt{2} = \sqrt[4]{8} \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$$

$$\text{Do đó dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{1-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{x}\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{(x+1)(x+2+2x-1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

$\Rightarrow$ Dấu bất đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow x(2x-1) = x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 9: Giải phương trình:

$$12 - 3x = \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{3-x}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 3$$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{3-x} \leq \\ & \leq \sqrt{(3-x+4-x+5-x)(3-x+4-x+5-x)} \leq 12-3x \end{aligned}$$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} = 4-x \\ \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} = 5-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(5-x) = (4-x)^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15-8x+x^2 = 16-8x+x^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \frac{x^2}{4} + 2$

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2$$

Mặt khác: $\frac{x^2}{4} + 2 \geq 2$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 0$.

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} = \sqrt{\frac{99}{2}}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 17-x^8 \geq 0 \\ 2x^8-1 \geq 0 \end{cases} (*)$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{34-2x^8} + \sqrt{2x^8-1} \leq \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)(34-2x^8+2x^8-1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} \leq \sqrt{\frac{99}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{34-2x^8} = \sqrt{2x^8-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(34-2x^8) = 2x^8-1 \Leftrightarrow x^8 = \frac{99}{2} \text{ thỏa } (*)$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[8]{\frac{69}{6}} = \pm \sqrt[8]{\frac{23}{2}}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 9\sqrt{\frac{23}{2}}$

Bài 12: Giải phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} = 2\sqrt{3(x^2+1)}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} \leq \sqrt{(x^2+1)(x+12-x)} = \sqrt{12(x^2+1)} = 2\sqrt{3(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \text{dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{12-x}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{12-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2(12-x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x(12-x) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 12x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2}$

Bài 13: Giải phương trình: $(x + 8\sqrt{x} + 4)(x - \sqrt{x} + 4) = 36x \quad (1)$

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x + 8\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = 36$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right) \left(x + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) = 36$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 4 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8 \geq 12$

Lại có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \geq 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right) \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) \geq 36$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 4$.

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11) \quad (1)$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ z \geq 2 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + y - 4\sqrt{y-1} + z - 6\sqrt{z-2} + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 2)^2 + (\sqrt{z-2} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 2 = 0 \\ \sqrt{z-2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$$

Chuyên đề 8: Phương pháp khảo sát hàm số

1. Định lý

Phương trình $f(x) = g(m)$ (m là tham số) có nghiệm $x \in D$
 $\Leftrightarrow$ hàm $g(m)$ thuộc miền giá trị của hàm số $f(x)$.

2. Cách giải

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình xác định

Bước 2: Đặt ẩn phụ t (nếu phương trình phức tạp)

Bước 3: Tìm miền xác định của t

Bước 4: Đưa phương trình về dạng $f(t) = g(m)$

Bước 5: Khảo sát và lập bảng biến thiên hàm $f(t)$

Bước 6: Dựa vào định lý trên để tìm m .

3. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{4x-x^2} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên

x	0	2	4
t'		+	0 -
t	2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó (1) trở thành: $t - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = m$ (2)

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 - 4)$

$$f'(t) = 1 - t < 0 \quad \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên

t	2	$2\sqrt{2}$
f(t)		-
f(t)	2	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$$

Bài 2: Cho phương trình:

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - (2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = m \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(2-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 4)$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-2	0	2
t'		+	0 -
t	2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow 2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó (2) trở thành: $t - \frac{1}{2}(t^2 - 4) = m$

- Ứng với một giá trị $t \in (2; 2\sqrt{2})$ thì phương trình $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Xét hàm số: $f(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 - 4)$

$$f'(t) = 1 - t < 0, \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên

t	2	$2\sqrt{2}$
f(t)		-
f(t)	2	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$$

Bài 3: Cho phương trình:

$$2(x + \sqrt{2-x^2}) - x\sqrt{2-x^2} - 3m + 2 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Đặt $t = x + \sqrt{2-x^2} \Rightarrow x\sqrt{2-x^2} = \frac{1}{2}(t^2 - 2)$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x^2} - x}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
t'	+	0	-
t	$-\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq 2$

$$(1) \text{ trở thành: } 2t - \frac{1}{2}(t^2 - 2) + 2 = 3m \Leftrightarrow 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3 = 3m \quad (2)$$

- Biện luận số nghiệm tương quan giữa t và x (dựa vào bảng biến thiên)

+ Ứng với một giá trị $t \in [\sqrt{2}; 2)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2 - x^2}$ có đúng hai nghiệm x phân biệt.

+ Ứng với một giá trị $t \in [-\sqrt{2}; 2) \vee t = 2$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2 - x^2}$ có đúng một nghiệm x .

Xét hàm số: $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3$; $f'(t) = 2 - t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
f(t)		+	
f(t)	$2 - 2\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$	5

Dựa vào bảng biến thiên và cách biện luận số nghiệm ở trên, ta suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2)$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2} \leq 3m < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(2 + 2\sqrt{2}) \leq m < \frac{5}{3}$

Bài 4: Cho phương trình: $(x + 1)(x - 3) + \sqrt{8 + 2x - x^2} = 2m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Đặt $t = \sqrt{8 + 2x - x^2} = \sqrt{9 - (1 - x)^2} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq t \leq 3$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + \sqrt{8 + 2x - x^2} = 2m$

$\Leftrightarrow 8 - t^2 - 3 + t = 2m \Leftrightarrow -t^2 + t + 5 = 2m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \in [-2; 4]$ thì (2) có nghiệm $t \in [0; 3]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 5$

$f'(t) = -2t + 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	3
t'	+	0	-
t	5	$\frac{21}{4}$	-1

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2m \leq \frac{21}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{11}{8}$$

Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = \sqrt{5m+4x-x^2}$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4x-x^2} = 5m + 4x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x-x^2} - (4x-x^2) + 5 = 5m \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(2-x)^2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$$

$$(2) \text{ trở thành: } 2t - t^2 + 5 = 5m \quad (3)$$

Để (1) có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì (3) có nghiệm $t \in [0; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 2t - t^2 + 5$; $f'(t) = 2 - 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

t	0	1	2
f'(t)	+	0	-
f(t)	5	6	5

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 5 \leq 5m \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{6}{5}$$

Bài 6: Cho phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(1-x)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$(1) \text{ trở thành: } \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} = m \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}$;

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1+t}}{2\sqrt{1-t^2}}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Bảng biến thiên

t	0	1
f(t)		-
f(t)	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 2$$

Bài 7: Cho phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x} = m(3x+5)$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

• Nếu $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ thì (1) vô nghiệm

• Khi $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \neq 0$; nhân vế vế của (1) cho $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$ ta được:

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x})(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) = m(3x-5)(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) \Leftrightarrow 3x-5 = m(3x-5)(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x})$$

$$\Leftrightarrow 1 = m(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \quad (2) \quad (m \neq 0)$$

Để (1) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ thì (2) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ và $x \neq \frac{5}{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

Bảng biến thiên

t	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2
f(x)		+	+
f(x)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	1

Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{m} \leq 1 \\ \frac{1}{m} \neq \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq \sqrt{2} \\ m \neq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình: $2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$

Ta thấy: $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1$

Đặt $t = 2\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \geq 1$ thì $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t^2}$

(1) trở thành: $\frac{2}{t} + t^2 = m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \geq 1$ thì (2) có nghiệm $t \geq 1$

Xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + t^2$

$$f'(t) = -\frac{2}{t^2} + 2t = 2 \cdot \frac{t^3 - 1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	1	$+\infty$
f(t)	3	$+\infty$
f(t)	3	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow m \geq 3.$$

Bài 9: Cho phương trình:

$$m(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$

$$t' = x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}; \quad t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
t'	-	0	+
t	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

(1) trở thành: $m(t+1) = t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 1}{t+1}$

Để (1) có nghiệm $x \in [-1; 1]$ thì (2) có nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2]$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$; $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} > 0 \forall t \in [\sqrt{2}; 2]$

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{2}$	2
f(t)	+	
f(t)	$2\sqrt{2} - 1$	$\frac{7}{3}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq m \leq \frac{7}{3}$$

Bài 10: Cho phương trình: $16\sqrt{x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = mx$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 10$.
2. Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x > 1$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 16\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x-1}} = m$ (2)

Đặt $t = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; $t' = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
t'	+	0	-
t	0	$\frac{1}{2}$	0

Từ biến thiên suy ra: $0 < t \leq \frac{1}{2}$

Phương trình (2) trở thành: $16t + \frac{1}{t} = m$ (3)

1. Với $m = 10$

$$(3) \Leftrightarrow 16t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow 16t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8} \vee t = \frac{1}{2}$$

+ Với $t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} = x$

$$\Leftrightarrow 64(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 64x + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 - \sqrt{960} \\ x = 32 + \sqrt{960} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: } \begin{cases} x = 32 \pm \sqrt{960} \\ x = 2 \end{cases}$$

2. Định m để phương trình có nghiệm:

$$\text{Để (1) có nghiệm } x > 1 \text{ thì (3) có nghiệm } t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = 16t + \frac{1}{t} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = \frac{16t^2 - 1}{t^2} ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f'(t)	-	0	+
f(t)	$+\infty$	8	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m thỏa đề bài là: $m \geq 8$.

Bài 11: Cho phương trình: $m\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = m$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 2$.

2. Định m để (1) có hai nghiệm và mọi nghiệm của nó để thỏa mãn bất phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2 \leq 0$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = \sqrt{x+1} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x \\ b^2 = x+1 \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = 1 \text{ và } ab = \sqrt{x^2+x}$$

Khi đó (1) trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ ma + b - ab = m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ m(a-1) - (a-1)b = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ (a-1)(m-b) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \end{cases} & \text{(II)} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Khi $m = 2$

$$\text{Giải hệ (I): } \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Giải hệ (II): } \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

2. Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$.

Để có hai nghiệm thì hệ (II) có thêm một nghiệm nữa.

$$\text{Hệ (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = m^2 - 1 \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1 (*)$$

+ Với $x = 1$ thỏa bất phương trình (2)

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$$

$$\text{Kết hợp } (*) \Rightarrow 1 \leq m \leq 2 \quad (a)$$

+ Với $x = m^2 - 1$ thỏa (2)

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 - m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} . \text{ Kết hợp với } (*) \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad (b)$$

$$\text{Từ (a); (b)} \Rightarrow \text{các giá trị của } m \text{ cần tìm là: } 1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

Chuyên đề 9: Phương pháp đồ thị

1. Cách giải

- Đưa bài toán về sự tương giao của đường thẳng và đường tròn; elip; hypebol; parabol.
- Vẽ đồ thị; dựa vào đồ thị để kết luận.

2. Bài tập

Bài 1. Định m để phương trình có nghiệm:

$$\sqrt{2x - x^2} = m - x \quad (1)$$

Giải

$$\text{Đặt: } y = \sqrt{2x - x^2} ; y \geq 0$$

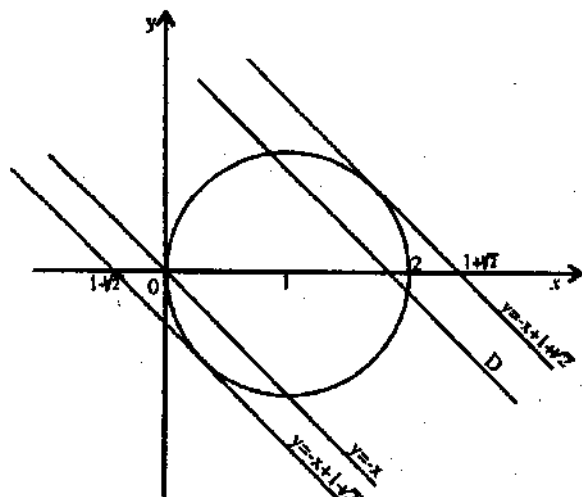
$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & (C) \\ y = m-x & (D) \end{cases} (*)$$

(C) là đường tròn tâm $I(1,0)$, bán kính $R = 1$

(D) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -x$

Đồ thị:



Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}$

Bài 2: Cho phương trình: $mx - \sqrt{x-3} = m+1$ (1)
định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $y = \sqrt{x-3}$, $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-3$

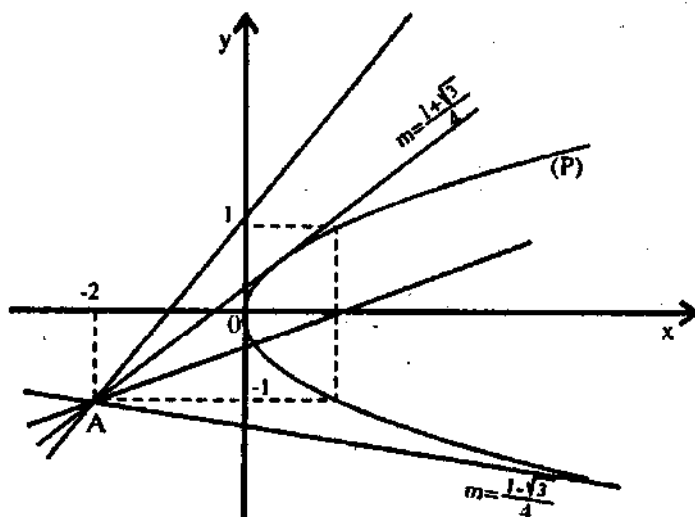
Phương trình (1) tương đương với hệ:
$$\begin{cases} y^2 = x-3 \\ mx - y = m+1 \end{cases}$$

Lại đặt $X = x-3$, ta được
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = X & (P) \\ mX - y + 2m - 1 = 0 & (D) \end{cases}$$

Họ đường thẳng D qua điểm cố định $A(-2, -1)$

Hai tiếp tuyến kẻ từ A tới (P) có hệ số góc lần lượt là:

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$$



Dựa vào đồ thị suy ra:

$$\text{Hệ trên có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{\frac{x+1}{2}} - \sqrt{3-x} = m$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

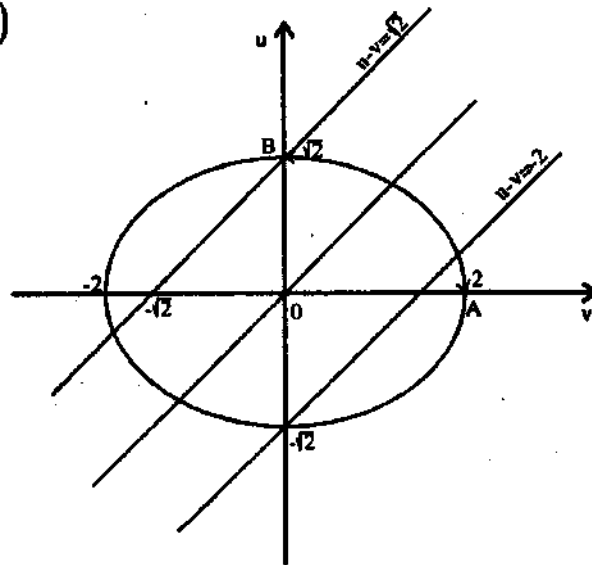
Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{\frac{x+1}{2}}, u \geq 0 \\ v = \sqrt{3-x}, v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2 = x+1 \\ v^2 = 3-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2u^2 + v^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1$$

Phương trình (1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u - v = m \quad (D) \\ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} = 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$$



Đường thẳng D qua điểm $(0, \sqrt{2}) \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$

và D qua điểm $(2, 0) \Leftrightarrow m = -2$

Đường thẳng $u - v = \sqrt{2}$ cắt Ov tại điểm $(-\sqrt{2}, 0)$

Dựa vào đồ thị, suy ra hệ trên có nghiệm

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \sqrt{2}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq \sqrt{2}$

Bài 4: Cho phương trình: $mx - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Đặt: $y - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}, y \geq 1$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = 4x - x^2 - 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 & (C) \\ y = mx & (D) \end{cases}$$

Đường thẳng D tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow d(I, D) = R \text{ với } I(2, 1); R = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m - 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Đường thẳng D qua $A(1, 1) \Leftrightarrow m = 1$

và D qua $B(3, 1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ đường thẳng D tiếp xúc với (C)

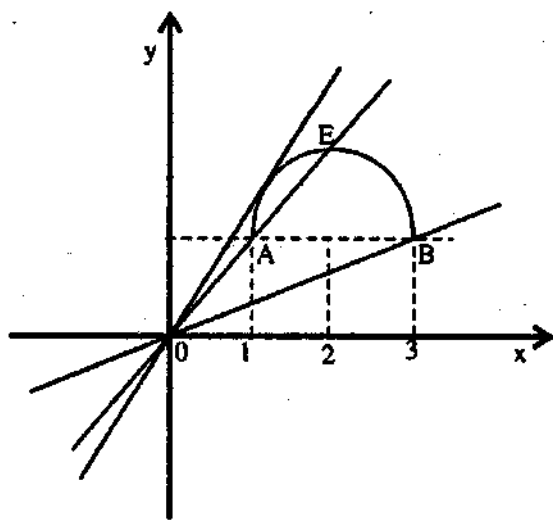
hoặc D cắt cung EB.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$m = \frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là:

$$m = \frac{4}{3} \text{ hoặc } \frac{1}{3} \leq m \leq 1$$



Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{2x - m} + \sqrt{x + 1} = 3$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{2x - m} \\ v = \sqrt{x + 1} \end{cases}$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x - m \\ 2v^2 = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow u^2 - 2v^2 = -m - 2$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} u, v \geq 0 \\ u + v = 3 \\ u^2 - 2v^2 = -m - 2 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3; \quad u, v > 0 \\ \frac{v^2}{\frac{m+2}{2}} - \frac{u^2}{m+2} = 1 \quad (H) \quad (m \neq -2) \end{cases}$$

(H) là một hyperbol có đỉnh trục lớn:

$$A\left(\sqrt{\frac{m+2}{2}}, 0\right) \quad (m > -2)$$

Hệ (2) có nghiệm nếu (H) cắt đoạn BD

$$\text{Điều này xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m+2}{2}} \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 16$$

Khi $m = -2$ thì:

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot v \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3(\sqrt{2} - 1) > 0 \\ u = 6 - 3\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+2} = 6 - 3\sqrt{2} \\ \sqrt{x+1} = 3(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

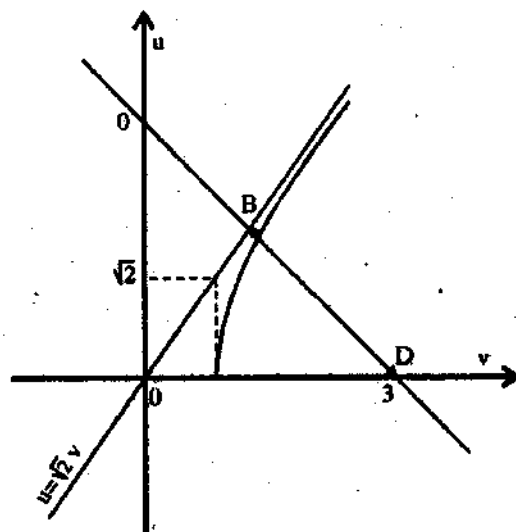
$$\Leftrightarrow x = 26 - 18\sqrt{2} > 0$$

Tóm lại các giá trị của m cần tìm là:

$$-2 \leq m \leq 16$$

+ Nhận xét:

- Cách 1: sử dụng sự tương giao giữa đường thẳng và parabol.
- Cách 2: sử dụng sự tương giao giữa đường tròn và đường thẳng.



Bài 6: Cho phương trình: $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = 0$ (1)

Định m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

+ Nếu $a = 0$ thì $x = 3 \Rightarrow$ (1) chỉ có đúng 1 nghiệm
nên $a = 0$ không thỏa đề.

+ Nếu $a \neq 0$:

Nhân hai vế của (1) cho a ta được:

$$a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = ax$ thì (2) trở thành:

$$t^4 + 6at^2 - t + 9a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 3(2t^2 + 1)a + t^4 - t = 0 \quad (3)$$

Xem (3) là phương trình bậc hai theo ẩn số là a

(3) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \Delta = 9(2t^2 + 1)^2 - 36(t^4 - t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 36t^2 + 36t + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 9(2t+1)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Khi đó hai nghiệm của (3) là:

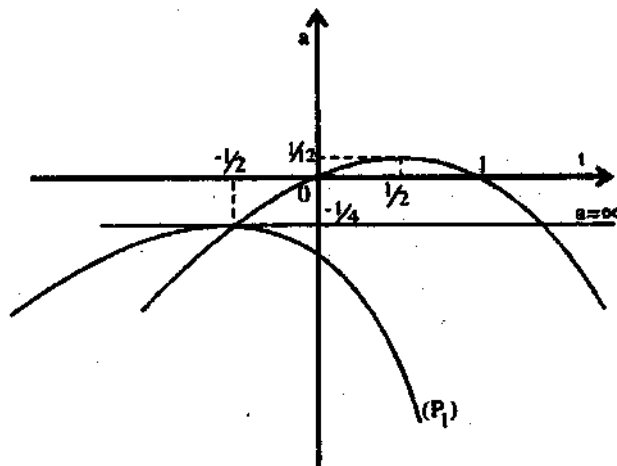
$$a = \frac{-t^2 - t - 1}{3} \quad \vee \quad a = \frac{t - t^2}{3}$$

Xét hệ trục tọa độ (tOa):

vẽ hai parabol:

$$(P_1): a = \frac{-1}{3}(t^2 + t + 1) ;$$

$$(P_2): a = \frac{1}{3}(t - t^2)$$



lên cùng một hệ trục tọa độ.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $a = \alpha$ cắt hai parabol (P_1) và (P_2) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Dựa vào đồ thị, suy ra } \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq a < \frac{1}{12}$$

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ (1)

Định a để phương trình có đúng hai nghiệm khác nhau.

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{cases} x \geq a \\ x^2 + 2x + 2 + a = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ x^2 + 6x + 2 - 3a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ a = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \quad \text{(I) hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2) \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Xét hệ trục tọa độ (xOa):

Vẽ các parabol:

$$(P_1): a = -x^2 - 2x - 2 ; \quad (P_2): a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2) \text{ và đường thẳng:}$$

$$x = a.$$

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi:

- Hệ (I) có đúng một nghiệm và hệ (II) có đúng một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là: Hệ (I) tồn tại một điểm $M(x, a)$ với $x > a$

và hệ (II) tồn tại một điểm $N(x,a)$ với $x < a$

Dựa vào đồ thị suy ra, các giá trị của a cần tìm là: $-2 < a < -1$

Bài 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0 \\ ax = 1 \end{cases} \quad (1). \text{ Định } a \text{ để hệ có nghiệm.}$$

Giải

$$\text{Hệ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-2a+2) < 0 \\ ax = 1 \end{cases}$$

Xét hệ trục tọa độ (xoa). Vẽ các đường thẳng:

$$d_1: x-a=0; \quad d_2: x-2a+2=0$$

và hyperbol (H): $ax = 1$ lên cùng một hệ trục tọa độ

Các điểm (a,x) thỏa mãn hệ (1) nằm trên cung MN và cung PQ

- Đường thẳng d_1 cắt (H) tại Q có: $a_1 = -1$ và tại M có: $a_2 = 1$

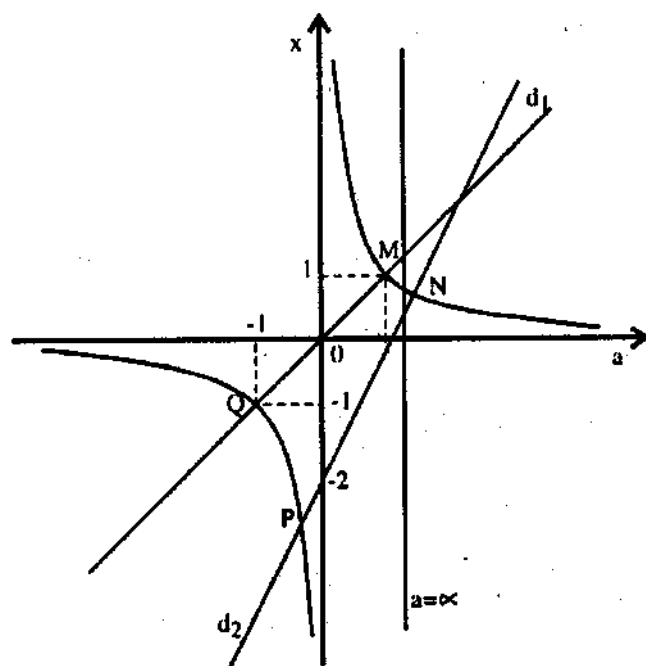
- Đường thẳng d_2 cắt (H) tại N có: $a_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

và tại P có: $a_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $a = \alpha$ cắt cung MN và cung PQ

Dựa vào đồ thị, suy ra điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$1 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } -1 < a < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$



Chuyên đề 10: Phương pháp tam thức bậc hai

1. Cách giải

- **Bước 1:** Đặt điều kiện xác định của phương trình
- **Bước 2:** Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.
- **Bước 3:** Biện luận tương quan số nghiệm giữa t và x trong phương trình đặc ẩn phụ. Dùng công thức so sánh nghiệm.

2. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $m^2 + 2(m+1)\sqrt{x} = x + 5 + 4m$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$

(1) trở thành: $m^2 + 2(m+1)t = t^2 + 5 + 4m$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2(m+1)t - m^2 + 4m + 5 = 0 \quad (2)$$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (5+4m-m^2) > 0 \\ 5+4m-m^2 \geq 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m - 4 > 0 \\ 5 + 4m - m^2 \geq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ -1 \leq m \leq 5 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2 < m \leq 5$.

Bài 2: Cho phương trình:

$$2\sqrt{2x-x^2} - 2m(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) + 2m^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow 2\sqrt{2x-x^2} = t^2 - 2$$

$$t' = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{2x-x^2}}; t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	2
f'(t)	+	0	-
f(t)	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$

Phương trình (1) trở thành:

$$f(t) = t^2 - 2mt + 2m^2 - 6 = 0 \quad (2)$$

- Ứng với một giá trị $t \in [\sqrt{2}; 2)$ thì phương trình $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Do đó, để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn: $\sqrt{2} < t_1 < t_2 < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(\sqrt{2}) > 0 \\ f(2) > 0 \\ \sqrt{2} < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m^2 > 0 \\ 2m^2 - 2\sqrt{2}m - 4 > 0 \\ 2m^2 - 4m - 2 > 0 \\ \sqrt{2} < m < 2 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm}$$

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Cho phương trình:

$$2x\sqrt{4-x^2} - 2(m-2)(x + \sqrt{4-x^2}) + m^2 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4$$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$\sqrt{2}$	2
t'	+	0	-
t	-2	$2\sqrt{2}$	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

(1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m-2)t + m^2 - 4 = 0$ (2)

• Biện luận số nghiệm giữa t và x

+ Ứng với một giá trị $t = 2\sqrt{2}$ hoặc $t \in [-2; 2)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4 - x^2}$ có đúng một nghiệm x .

+ Ứng một giá trị $t \in [2; 2\sqrt{2})$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4 - x^2}$ có đúng hai nghiệm phân biệt x .

Xét các trường hợp sau:

TH1: (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 \in (-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 2 < m < 2$$

TH2: (2) có đúng một nghiệm $t \in (2; 2\sqrt{2})$

THa: (2) có nghiệm kép $\in (2; 2\sqrt{2})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t_0 = m - 2 \in (2; 2\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m - 2 \in (2; 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

THb: (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < t_1 < 2\sqrt{2} < t_2 \\ t_1 < -2 < 2 < t_2 < 2\sqrt{2} \\ \begin{cases} f(2) > 0 \\ f(2\sqrt{2}) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(2\sqrt{2}) > 0 \end{cases} \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

TH3: nếu (2) có một nghiệm $t_1 = -2$

$$\Rightarrow m^2 + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -2 - 2\sqrt{3} \vee m = 2\sqrt{3} - 2$$

• Với $m = -2 - 2\sqrt{3}$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 2(4 + 2\sqrt{3})t + 12 + 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -6 - 4\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

• Với $m = 2\sqrt{3} - 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2(2\sqrt{3} - 4)t + 12 - 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 4\sqrt{3} - 6 \in (-2; 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ giá trị $m = 2\sqrt{3} - 2$ thỏa mãn đề bài.

TH4: Nếu (2) có một nghiệm $t_1 = 2$.

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 8 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

TH5: Nếu (2) có một nghiệm $t = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow m^2 - 4\sqrt{2}m + 4 + 8\sqrt{2} = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2\sqrt{3} - 2 \leq m < 2$

Chuyên đề 11: Phương pháp vector

1. Các bất đẳng thức vectơ .

a. $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ cùng chiều với $\vec{b}$

b. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \text{ hay } \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \end{cases}$

2. Cách giải

Bước 1: Từ phương trình: biến đổi để các biểu thức có dạng $\sqrt{a^2 + b^2}$

Bước 2: Chọn các vectơ

Bước 3: Sử dụng các bất đẳng thức trên

– Sau đó xét dấu "=" xảy ra.

3. Bài tập

Bài 1 . Giải các phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

Giải

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 2$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}\left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\vec{b}\left(-x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1, \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2$$

Ta có:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq 2$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{-x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 0$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$

Giải

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{9x^2 - 12x + 13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(2x-1, 1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(2x-1)^2 + 1}$$

$$\vec{b}(x-1, 2) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3x-2, 3) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq \sqrt{(3x-2)^2 + 9}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x-2 = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{3}$

Bài 3: Giải phương trình: $\left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| = \sqrt{5}$

Giải

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{(x-3)^2 + 1} \right| = \sqrt{5}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(x-1, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\vec{b}(x-3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(x-3)^2 + 1}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \left| \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \right| \leq \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x-1 = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$

Bài 4: Giải phương trình: $\left| \sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x} \right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$

Giải

$$\left| \sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x} \right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+1) \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}(\sqrt{x}, \sqrt{1-x}) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x+1-x} = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{x^2+1}, 1-x) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{x^2+1+(1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x} \sqrt{x^2 + 1} + (1-x) \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

+ Hoặc có một trong hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$:

$$\text{Để thấy chỉ có thể } \vec{a} \text{ là vectơ } \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

+ Hoặc hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1-x} \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm.

Do vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$

Giải

$$\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{1 + \cos^2 x}, \sqrt{1 + \sin^2 x}) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{\cos x} \Rightarrow \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow (1 + \cos^2 x) \cos^2 x = \sin^2 x (1 + \sin^2 x)$$

Với: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nên:

$$(1 + \cos^2 x) \cos^2 x = 1 - \cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^4 x = 2 - 3\cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Thử trực tiếp họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$ vào phương trình

ta nhận nghiệm cuối cùng là: $x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$

với: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \neq \{-2, -1, 1, 2\} \\ m \text{ chẵn: } m = 4n \end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

Tóm lại nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$

Giải

$$\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(2x+3)^2 + 1} + \sqrt{(5-3x)^2 + 25} = 10$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(x-2, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

$$\vec{b}(2x+3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}$$

$$\vec{c}(5-3x, 5) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{9x^2 - 30x + 50}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (6, 8) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 10$$

Theo bất đẳng thức: $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} \geq 10$$

Suy ra: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng chiều

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{2x+3}{1} = \frac{5-3x}{5} \quad (\text{hệ này vô nghiệm})$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7: Giải phương trình: $\sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \quad (1)$

Giải

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$\vec{b}(\sqrt{1 - \cos x}, \sqrt{1 + \cos x}) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x}$$

Theo bất đẳng thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 - \cos x} + \cos x \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều:

$$\Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b} \text{ với } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos x} - \cos x \sqrt{1 - \cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \sqrt{1 + \cos x} = \cos x \sqrt{1 - \cos x} \quad (1)$$

Vì chu kỳ của hàm sin, cos là 2π nên ta xét trên một chu kỳ:

+ Nếu $\frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi$ thì $\sin x \cdot \cos x \leq 0$ nên suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x (1 + \cos x) = \cos^2 x (1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)(1 + \cos x) = \cos^2 x (1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 8 . Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$$

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{3}{4}} = m$$

Trong một hệ trục tọa độ phẳng nào đó, xét các điểm sau:

$$A(-x, 0) ; B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB}\left(x + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; |\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overrightarrow{AC}\left(x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overrightarrow{BC}(-1, 0) ; |\overrightarrow{BC}| = BC = 1$$

Với mọi điểm $A(-x, 0)$ thì ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên $|AB - AC| < BC$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là $|m| < 1$