NGUYỄN MINH TUẤN

CHUYÊN ĐỀ

Chứng minh bất đẳng thức một biến

- *Các bài toán được chọn lọc từ nhiều diễn đàn nổi tiếng*
- *Sưu tầm nhiều cách chứng minh hay*

$$3(a^3+b^3+c^3)+2abc \geq 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$$

TẠP CHÍ OLYMPIC

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Bất đẳng thức một biến tuy không phải là một phần toán khó như bất đẳng thức một biến và hai biến nhưng tuy nhiên đây cũng là một phần toán khá hay và quan trọng đối với học sinh. Ta thường bắt gặp những bài bất đẳng thức một biến này khi đang giải phương trình, hệ phương trình vô tỷ mà cần chứng minh phần còn lại vô nghiệm. Hay là một bài bất đẳng thức 3 biến ta đã đưa về một bất đẳng thức 1 biến mà còn loay hoay chưa biết xử lý thế nào? Vì thế nên trong bài viết này tôi sẽ giúp các bạn giải quyết được một phần nào những câu hỏi đó! Bên cạnh đó cùng với sự phát triển của công cụ là máy tính điện tử trong sáng tạo các phương pháp giải toán, tôi cũng sẽ giới thiệu cho bạn đọc một số các cách giải toán bằng máy tính CASIO hay VINACAL, nhưng tuy nhiên chỉ là những định hướng cơ bản thôi tránh gây lạm dụng công cụ này quá sẽ làm mất đi những vẻ đẹp của bài toán, chúng ta không học cách bấm máy mà, mà chúng ta học để sáng tạo cách bấm máy và cách tư duy cần thiết cho một bài toán. Trong bài viết nhỏ này tôi cũng đã sưu tầm được kha khá những cách chứng minh hay từ nguồn tài nguyên Internet và các anh chị trên các diễn đàn toán, đồng thời cũng tham khảo cách làm của một số thầy cô, những cuốn sách tham khảo hay. Mà tiêu biểu là:

1. *Anh Bùi Thế Việt – Sinh viên đại học FPT*
   Facbook: https://www.facebook.com/viet.alexander.7
2. *Anh Lâm Hữu Minh – Sinh viên đại học bách khoa Hà Nội.*
   Facebook: https://www.facebook.com/lamhuuminh.KSTN.K60.HUST
3. *Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh.*
   Facebook: https://www.facebook.com/tien.la.7161

Bài viết tuy đã được mình chỉnh sửa khá nhiều nhưng không thể tránh khỏi những thiếu xót được, mọi người có đóng góp gì thì gửi qua mình qua địa chỉ:

NGUYỄN MINH TUẤN

- *Facebook: https://www.facebook.com/minhtuanblog*
- *Fanpage:*
  - *Tạp chí Olympic: https://www.facebook.com/tapchiolympic.vn/*
  - *Blog toán học – Kinh nghiệm học toán: https://www.facebook.com/DXH.Mathematical/*
- *Email: tuangenk@gmail.com*
- *Blog: https://kinhnghiemhoctoan.wordpress.com/*

Cuối cùng xin cảm ơn mọi người đã bỏ thời gian theo dõi bài viết của mình!

PHẦN 1. CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC 1 BIẾN

Trong phần này tôi sẽ giới thiệu tới các bạn một số cách chứng minh bất đẳng thức 1 biến cả bằng tay không với kết hợp với một chút CASIO, trong đó có một số bài toán khá là phức tạp có thể sẽ không giúp ích được nhiều cho lắm, nhưng tôi vẫn đưa vào để mọi người cùng tham khảo cách làm và sáng tạo thêm một số cách giải hay khác!

I. CÁC BÀI TOÁN.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$

Bài 3: Giải phương trình: $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Bài 4: Chứng minh rằng: $f(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+\dfrac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}+1>0\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

Bài 5: Chứng minh rằng: $f(x)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}>0\forall x\in[-2;+\infty)$

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$f(x)=2\sqrt{3}+\frac{x-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $x^4-2x^3+3x^2+6x+7-(x-2)\sqrt{2x+5}-(x+1)\sqrt{4x+2}>0\forall x\geq-\dfrac{1}{2}$

Bài 8: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Bài 9: Chứng minh rằng: $f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}$ vô nghiệm.

Bài 10: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}-\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+3}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{11}{6}>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Bài 11: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+2}+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2}+1}-\dfrac{19}{7}>0\forall x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Bài 12: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2}+3}+\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+8}-x-\dfrac{2}{5}>0\forall x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{4}{5}\right]$

Bài 13: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{8x+5}+x+2}+\dfrac{2x-1}{\sqrt{6x+2}+x+1}+3>0\forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Bài 14: Giải phương trình: $9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$

Bài 15: Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

Bài 16: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x\sqrt{x+2}+3x\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt{\left(3x^6+3x^5+3x^4+3x^2+x+2\right)\left(x^2+3\right)}<0\forall x\geq1$$

Bài 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{y}=\sqrt{\dfrac{4\left(x^2+x+1\right)}{y^2+3}}\,(1)\\ x^3(3y-11)=2-\sqrt{(xy-x+2)x}\,(2)\end{cases}$

Bài 18: Chứng minh rằng: $f(x)=x^2-x+4-\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2}-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}+2}>0\forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Bài 29: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+4}+x^2-x+2}-\frac{4\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+x^2+2x+2}-x^2+2x<0\forall x\geq 0$$

Bài 20: Giải phương trình: $-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$

Bài 21: Giải phương trình: $1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$

Bài 22: Cho 3 số $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc\geq 11\sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$

II. HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Bài này có rất nhiều cách giải khác nhau nhưng ta cứ liên hợp rồi chứng minh vô nghiệm xem sao.
- Ta có:

$$x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1)-(x-3)\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+(2-x)\left(\sqrt{7x+2}-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1)-\frac{3(x-3)(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{7(2-x)(x-1)}{\sqrt{7x+2}+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x+4-\dfrac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=0 \end{array}\right.$$

- Nhiệm vụ là chứng minh $f(x)>0\forall x\geq -\frac{2}{7}$.
- Với $x\geq 3\Rightarrow \begin{cases} -3(x-3)\leq 0 \\ 2-x<0 \\ \sqrt{3x+1}+2>5 \end{cases}$. Khi đó có:

$$f(x)>x+4-\frac{3(x-3)}{5}+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=\frac{(2x+29)\sqrt{7x+2}-29x+157}{5\left(\sqrt{7x+2}+3\right)}$$

1. Với $x\leq \frac{157}{29}\Rightarrow f(x)>0$.
2. Với $x>\frac{157}{29}$ thì $f(x)=\dfrac{28x^3-21x^2+15225x-22967}{5\left(\sqrt{7x+2}+3\right)\left((2x+29)\sqrt{7x+2}+29x-157\right)}>0\forall x>\frac{157}{29}$

- Với $x\in\left[-\frac{2}{7};2\right]$ ta có: $\begin{cases} 2-x\geq 0 \\ \sqrt{7x+2}+3<7 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$f(x)>6-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2}>0$$

- Với $x\in[2;3]$, ta có: $\begin{cases} -3(x-3)\geq 0 \\ 2-x\leq 0 \\ \sqrt{7x+2}+3>7 \end{cases}$. Khi đó tương tự như trên ta có:

$$f(x)>6-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2}>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!.

Nhận xét

- Ngoài cách như trên ta vẫn có thể tinh ý nhóm như sau:

$$f(x)=x+4-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=\frac{1}{2}x+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}+\frac{1}{2}x+4-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}$$
$$=\frac{x\sqrt{7x+2}-4x+14}{2\left(\sqrt{7x+2}+3\right)}+\frac{(x+8)\sqrt{3x+1}-x+25}{2\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

- Khi đó thích dùng đạo hàm hay dùng bất phương trình phụ thì tùy, tôi sẽ dùng đạo hàm.
- Đặt $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{7x+2}-4x+14 \\ g(x)=(x+8)\sqrt{3x+1}-x+25 \end{cases}$.
  - Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-8\sqrt{7x+2}+21x+4}{2\sqrt{7x+2}}=0\Leftrightarrow x=\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$. $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)\Rightarrow(+)$ khi qua $\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$ nên đạt cực tiểu tại $\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$
    $\Rightarrow f(x)\ge f\left(\frac{280+\sqrt{275968}}{882}\right)\approx 12,99>0$
  - Chứng minh tương tự ta cũng suy ra $g(x)>0$.
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$

Đoàn Chí Dũng

Giải

- Ta có:

$$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\right)+\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+6}-3\right)-(2x-5)\left(x^2+x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-3\right)\left[\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-2x+5\right]=0$$

- Đặt $f(x)=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-2x+5$.
- Chú ý rằng: $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}\ge x+a \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}\ge x+b \end{cases}$.
- Khi đó dùng lim ta tìm được $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}-x=-\frac{3}{2} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-x=-\frac{7}{2} \end{cases}$
- Ta có:

1. $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}-x+\frac{3}{2}>\frac{2\left(x^2+x+1\right)+(3-2x)\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\right)}>\frac{3\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\right)}>0$

2. $\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-x+\frac{7}{2}>\frac{2\left(x^2+1\right)+(7-2x)\sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+6}+3\right)}>\frac{7\sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+6}+3\right)}>0$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 3: Giải phương trình: $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Ta có:

$$x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^4+8x^3+20x^2+21x+18\right)-12\left(\sqrt{6-5x}-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=(x+3)\left(x^3+5x^2+5x+6\right)+\frac{60}{\sqrt{6-5x}+1}=0 \end{array}\right.$$

- Để ý thấy:

1. Với $x\in(-\infty;x_0]\cup\left[-3;\frac{6}{5}\right]\Rightarrow f(x)>0$. Với x_0 thỏa mãn ${x_0}^3+5{x_0}^2+5x_0+6=0$
2. Với $x\in[x_0;-3]$ ta có:

- $g(x)=\frac{60}{\sqrt{6-5x}+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{300}{2\sqrt{6-5x}\left(\sqrt{6-5x}+1\right)^2}>0\Rightarrow g(x)\geq g(x_0)>9$
- Khi đó: $f(x)>\left(x^2+4x+1\right)^2+2\left(x+\frac{13}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 4: Chứng minh rằng:

$$f(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}+1>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$$

Giải

- Để ý thấy:

1. Do $x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$ nên $\sqrt{9-5x}+2<4\Rightarrow\frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}>5\sqrt{x+1}$
2. Khi đó $f(x)>g(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}+1$
3. Lại có: $g(x)=\frac{(x-1)\left(1-2\sqrt{5x-1}\right)^2\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}{\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$
4. Nên $f(x)>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này nhìn hình thức khá khủng bố, trông có vẻ rối rắm nhưng khá là đơn giản.
  1. Đầu tiên ta thấy có quá nhiều căn trong bài, điều này làm ta nảy ra ý tưởng đánh giá bớt 1 căn đi để đưa về dạng đơn giản hơn.
  2. Hai là bài này là một bài không được chặt cho lắm vàcác biểu thức trong căn ở bậc nhấtnên nảy ra ý tưởng đánh giá với 1 hằng số nào đó.
  3. Ba là thấy trong bài có 2 phân thức nên sẽ thử đánh giá một em xem sao, tôi sẽ chọn cái thứ 2.
- Dễ thấy $\sqrt{9-5x}+2<4 \Rightarrow \dfrac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}>5\sqrt{x+1}$. Lúc này bài toán chỉ còn 2 căn. Dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ nhận thấy $f(x)\ge 1$. Điều này chẳng khác nào cho ta biết phương trình: $4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}=0$ có nghiệm kép. Mà may mắn thay ta lại rút được $\sqrt{x+1}$ ra, lúc này chỉ là giải phương trình 1 căn có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{4}$ (tự tìm nhé) và 1 nghiệm $x=1$ (không quan tâm) quá dễ dàng, sử dụng liên hợp ngược hoặc chia căn cho nhanh là sẽ ra!
- Ta được: $4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}=\dfrac{(x-1)\left(1-2\sqrt{5x-1}\right)^2\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}\ge 0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x^2+5-\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}>0\,\forall x\in[-2;+\infty)$$

Giải

- Hướng làm vẫn như bài trước, ta sẽ đánh giá 2 cái mẫu được: $\sqrt{x+7}+3\ge\sqrt{5}+3>5$ và $\sqrt{x+2}+2\ge 2$.
- Khi đó: $f(x)>g(x)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{5}-\dfrac{2x+6}{2}=0$
- Nên $f(x)>g(x)=0\,\forall x\in[-2;+\infty)$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này không có cái gì để nói hết, trong căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá với 1 hằng số nào đó và là xong!
- Ngoài ra nếu thích DAC thì cứ việc dùng thử nhé! Ngoài cách này ra còn có một cách khác.
- Ta có: $f(x)=\left(x^2-x+2-\dfrac{5(x^2-x+2)}{\sqrt{x+7}+3}\right)+\left(x+3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+2}+2}\right)$

  $=(x^2-x+2)\left(1-\dfrac{5}{\sqrt{x+7}+3}\right)+(x+3)\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)>0\,\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$
- Đến đây dựa vào điều kiện tự giải thích nhé!

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$f(x)=2\sqrt{3}+\frac{x-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$$

Giải

- Nhận thấy

1. $g(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $g(x)\ge g(1)=\frac{\sqrt{3}}{6}$
2. $v(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $v(x)\ge v\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

- Khi đó $f(x)>\frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}}-\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}}+2\sqrt{3}=0$
- Vậy ta có điều phải chứng minh.

Hướng dẫn

- Bài này không có gì phải bàn cả. Do dưới mẫu đang có căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá từng căn với một hằng số, nếu không đánh giá được như vậy thì dùng DAC không có gì khó cả.
- Ở trên tôi trình bày hơi tắt, đáng lẽ phải có phần chứng minh đạo hàm mang 1 dấu nữa, nhưng thôi thời gian có hạn mong thông cảm .

Bài 7: Chứng minh rằng:

$$x^4-2x^3+3x^2+6x+7-(x-2)\sqrt{2x+5}-(x+1)\sqrt{4x+2}>0\forall x\ge -\frac{1}{2}$$

Giải

- Với $x>2$ ta có 2 bổ đề sau (tự chứng minh nhé): $\begin{cases}\sqrt{2x+5}\le \frac{1}{2}x+\frac{9}{4}\\ \sqrt{4x+2}<\frac{9}{4}x+\frac{8}{5}\end{cases}$.Khi đó ta có:

$$f(x)>x^4-2x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{16}{5}x+9,9=\left(x^2-x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{427}{50}>0$$

- Với $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right)$ ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x+5}>2\\ \sqrt{4x+2}<4\end{cases}$. Khi đó:

$$f(x)>x^4-2x^3+3x^2+7=x^2(x-1)^2+2x^2+7>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét.

- Ở trên tôi có nêu lên 2 bổ đề mà nhiều người đọc sẽ chẳng hiểu được kiếm đâu ra. Sau đây tôi xin trình bày các bước làm.

1. Dễ kiểm tra thấy $f(x)>0$ nên nó sẽ có giá trị nhỏ nhất, việc của ta là tìm được khi x bằng bao nhiêu thì đạt cực tiểu. Rõ ràng nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ chính là giá trị cần tìm do đó ta sẽ giải phương trình $f'(x)=0$, ta được:
$$f'(x)=4x^3-6x^2+6x+6-\frac{3x+3}{\sqrt{2x+5}}-\frac{6x+4}{\sqrt{4x+2}}=0\Leftrightarrow x=x_0=-0,3100436394$$
2. Việc làm tiếp theo là tìm nhân tử chứa nghiệm $x=x_0$, ta sẽ dùng phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$. Nhân tử có dạng $\sqrt{2x+5}+ax+b$. Với $\begin{cases} a=-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+5}\right)\Big|_{x=x_0} \\ b=-\sqrt{2x_0+5}-a \end{cases}$. Do kết quả lẻ nên ta sẽ tìm một số gần nó và phải đẹp và thay vào phương trình đầu phải thỏa mãn. Với lí do đó chọn $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{9}{4} \end{cases}$. Tương tự cho căn còn lại ta được nhân tử $\sqrt{4x+2}<\frac{9}{4}x+\frac{8}{5}$.
3. Để ý thấy $\begin{cases} \sqrt{2x+5}\le\frac{1}{2}x+\frac{9}{4} \\ \sqrt{4x+2}<\frac{9}{4}x+\frac{8}{5} \end{cases}$, mà $f(x)>0$ nên cần chia làm 2 trường hợp mới đánh giá được . Đến đó chỉ việc đánh giá phương trình bậc 4 là xong!.

Bài 8: Chứng minh rằng: $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}+1}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Giải

- Ta có: $\sqrt{x^2-3}-\frac{4}{3}x+\frac{3}{2}=\frac{-28x^2+144x-189}{6\left(6\sqrt{x^2-3}+8x-3\right)}<0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$
- Khi đó:
$$f(x)>\frac{x+1}{\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}+1}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2=\frac{(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33}{(8x-3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
- Để ý thấy :

1. $(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33$
$$=\left(2\sqrt{x^2+5}-\frac{5}{2}x-1\right)^2+16\sqrt{x^2+5}+\frac{23}{4}x^2-33x+12$$
2. $16\sqrt{x^2+5}+\frac{23}{4}x^2-33x+12>\frac{23}{4}\left(x-\frac{66}{23}\right)^2+\frac{222}{23}>0\forall x$
3. Vậy $f(x)>0$

Hướng dẫn

- Đầu tiên ta sẽ tìm điểm rơi của bài toán chính là nghiệm của đạo hàm. Ta có:
$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-3}-x-3}{\sqrt{x^2-3}\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)^2}+\frac{6\sqrt{x^2+5}-x+10}{\sqrt{x^2+5}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)^2}=0\Leftrightarrow x=A=2,677764402$$
- Tìm 2 nhân tử chứa điểm rơi bằng cách sử dụng phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$. Ta sẽ đưa về 1 căn và sử dụng nhân tử liên quan tới $\sqrt{x^2-3}$ vì điều kiện gắn chặt với con căn này. Nhân tử có dạng như giải phương trình vô tỷ là $\sqrt{x^2-3}+ax+b$.

+ Ta có $\begin{cases} a\approx -\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\Big|_{x=A} \\ b\approx -\left(\sqrt{f(x)}+ax\right)\end{cases}$. Áp dụng vào bài ta có $a=-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-3}\right)\Big|_{x=A}=-1.311...\approx -\frac{4}{3}$.

Vốn dĩ có thể lấy em $-\frac{4}{3}$ là vì ta đang cần một số đẹp để tiện biến đổi và đây cũng là bài toán chặt nhưng không phải chặt xít cổ do $f(A)=0,188421028$. Ngoài nếu thích làm chặt nữa ta có thể lấy là $a=\frac{-13}{10};a=\frac{-59}{4}...$ Đối với bài chặt hơn nữa thì ta cần phải làm như vậy chứ còn bài này thì không cần, chỉ vậy là đủ!

+ Có tiếp $b=-\left(\sqrt{f(x)}+ax\right)=1.528191379\approx\frac{3}{2}$. Lúc này nhận thấy là $\sqrt{x^2-3}<\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$ đúng chiều ta cần do bài toán cần chứng minh lớn hơn 0 và tử đang lớn hơn 0. Nếu nhân tử chưa đúng như ta cần thì ta cần phải làm tròn hệ số tự do làm sao cho đúng chiều dấu chúng ta cần.

- Đến đây mới chỉ đi qua $\frac{2}{3}$ chặng đường, còn một phần nữa là chứng minh phần sau chứa một căn lớn hơn 0 bằng SOS.
- Tìm điểm rơi của biểu thức $g(x)=(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33$. Ta có:
$$g'(x)=\frac{(32x-28)\sqrt{x^2+5}-20x^2+12x-50}{\sqrt{x^2+5}}=0\Leftrightarrow x=x_0=1,961407277$$
- Nhận thấy ta cần tìm nhân tử có dạng $\left(\sqrt{x^2+5}+ax+b\right)^2=2ax\sqrt{x^2+5}+...$Đằng trước đang có $-10x\sqrt{x^2+5}$ nên tìm a thỏa mãn khi ta lấy $g(x)-\left(\sqrt{x^2+5}+ax+b\right)^2$ phải triệt tiêu được $-10x$. Với lí do trên ta sẽ chọn $a=-5\Rightarrow b\approx\frac{34}{5}$. Từ đó có nhân tử là $\left(\sqrt{x^2+5}-5x+\frac{34}{5}\right)^2$. Nhưng tuy nhiên nhân tử chưa thỏa mãn do thay vào bị âm và ta nâng hệ số trước căn lên 2. Với cách làm tương tự ta có nhân tử sẽ là $\left(2\sqrt{x^2+5}-\frac{5}{2}x-1\right)^2$. Đến đây không còn gì phải bàn nhé!

Bài 9: Chứng minh rằng: $f\left(x\right)=\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}$ vô nghiệm.

Bùi Thế Việt

Giải

- Dùng Casio nhận thấy $f\left(x\right)>0\forall x\in\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $f\left(x\right)<0\forall x\in\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right]$.
- Trường hợp 1: Xét $x\in\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$.

  1. Để ý thấy:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x^4+1}+x>\sqrt[4]{x^4}+x=0\forall x\in\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\\ -\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}=\frac{-5\left(x+3\right)^2}{4\left(-\sqrt{x^2+3x+1}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}\geq 0\forall x\in\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\\ -\sqrt{2x+10}+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2x+10}-2\right)^2\geq 0\forall x\in\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\end{cases}$$

  2. Do đó $f\left(x\right)>-x+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}=0$

- Trường hợp 2: $x\in\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right]$

  1. Để ý thấy $\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{-2x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}\leq 0$

  2. Khi đó :

$$f\left(x\right)\leq\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}=\frac{-5x-10-2\sqrt{x^2+3x+1}\sqrt{2x+10}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x+10}}<0$$

- Vậy phương trình $f\left(x\right)=0$ vô nghiệm. (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này phương pháp giống hệt với bài 4. Ta cũng sẽ đi tìm điểm rơi của bài toán.
- Do thấy $f\left(x\right)$ luôn dương trên $\left[-5;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và luôn âm trên $\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ nên ta sẽ chia làm 2 trường hợp.
- Đối với trường hợp 1 thì không có gì phải bàn, nhưng trường hợp 2 thì có điều phải chú ý!
- Do trên $\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ thì ta sẽ không tìm được nghiệm của đạo hàm hay lúc này hàm nghịch biến, nên ta sẽ không đi chứng minh đạo hàm âm mà sẽ quy về đánh giá

$\sqrt[4]{x^4+1}$ với một $g(x)$ nào đó. Cái này hơi khó nhưng chịu để ý $\begin{cases}\sqrt[4]{x^4+1}>x\\ \sqrt{x^2+1}>x\end{cases}$. Nếu như $\sqrt[4]{x^4+1}\le\sqrt{x^2+1}$ thì thay vào thấy thỏa mãn. Vậy ta sẽ đi chứng minh $\sqrt[4]{x^4+1}\le\sqrt{x^2+1}$, đây không phải 1 câu khó, tôi cũng đã chứng minh rồi. Khi đó chỉ việc liên hợp lên là có điều cần chứng minh.

Bài 10: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}-\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+3}+\frac{x}{3}-\frac{11}{6}>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$$

Giải

- Trường hợp 1: Xét $x\in\left[\sqrt{3};3\right]$.

1. Để ý thấy: $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{3}{4}-x}{\sqrt{x^2+1}+x+\frac{1}{2}}<0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right]\\ \sqrt{x^2-3}-2x+3=\dfrac{-3(x-2)^2}{\sqrt{x^2-3}+2x-3}\le 0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right]\end{cases}$

2. Khi đó:

$$f(x)>\frac{x+1}{x+1+\frac{1}{2}}+\frac{3-x}{2x}+\frac{x}{3}-\frac{11}{6}=\frac{\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}+8x^2-8x+9}{6x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

3. Để ý tiếp:

+ $2x^2-14x+9<0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right]\Rightarrow\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}-8x^2+8x-9<0$

+ Nhân liên hợp ta được:

$$4x^6-56x^5+172x^4-180x^3+105x^2-108x$$
$$=x\left[x^4(4x-13)+x^2\left(-43x^2+172x-108\right)-110\left(x-\frac{21}{44}\right)^2-\frac{7299}{88}\right]<0$$

4. Nên $\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}+8x^2-8x+9>0$

- Trường hợp 2: Xét $x\in[3;+\infty)$.

1. Nhận thấy $\sqrt{x^2-3}+3>5$

2. Khi đó $f(x)>\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}+\dfrac{3-x}{5}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{11}{6}=\dfrac{(4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7}{30\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$

3. Đặt $g(x)=(4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7\Rightarrow g'(x)=\dfrac{34\sqrt{x^2+1}+8x^2-37x+4}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. Để ý thấy $g'(x) \geq \dfrac{8\left(x-\frac{3}{16}\right)^2+\frac{119}{32}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Suy ra $g(x) \geq g\left(\sqrt{3}\right) \approx 15,9430585 > 0$.

- Vậy $f(x) > 0 \forall x \in \left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Bài 11: Chứng minh rằng: $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+2} + \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2}+1} - \dfrac{19}{7} > 0 \forall x \in \left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Bùi Thế Việt

Giải

- Dễ nhận thấy $\sqrt{x^2-1} < x$. Khi đó ta luôn có:

$$f(x) > \frac{x+1}{x+2} + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2}+1} - \frac{19}{7} = \frac{\overbrace{(-12x-31)\sqrt{x^2-2}+14x^2+23x-17}^{g(x)}}{7(x+2)\left(\sqrt{x^2-2}+1\right)}$$

- Để ý thấy:

1. $g(x) = \dfrac{75}{11}\left(\sqrt{x^2-2} - \dfrac{22}{25}x\right)^2 + \dfrac{523}{275}x^2 + 23x - \dfrac{37}{11} - 31\sqrt{x^2-2}$
2. $\sqrt{x^2-2} - 1.123x + 0.722 = \dfrac{-0.261129x^2 + 1.621612x - 2.521284}{\sqrt{x^2-2} + 1.123x - 0.722} < 0$
3. Khi đó :

$$\frac{523}{275}x^2 + 23x - \frac{37}{11} - 31\sqrt{x^2-2} > \frac{523}{275}x^2 + 23x - \frac{37}{11} - 31(1.123x - 0.422) > 0$$

4. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 12: Chứng minh rằng:

$$f(x) = \frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2}+3} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+8} - x - \frac{2}{5} > 0 \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Để ý thấy:

1. $\sqrt{x^2+4} - \dfrac{19}{50}x - \dfrac{231}{125} = \dfrac{\frac{2139}{2500}x^2 - 1.40448x + \frac{9139}{15625}}{\sqrt{x^2+4} + \frac{19}{50}x + \frac{231}{125}} > 0 \forall x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{4}{5}\right]$
2. Khi đó $f(x) > \dfrac{\overbrace{475x^2 + 24890x + 11968 - \left(475x^2 + 8750x + 12421\right)\sqrt{x^2+2}}^{g(x)}}{5(95x+2462)\left(\sqrt{x^2+2}+3\right)}$

3. Có $g'(x)=\underbrace{950x+24890}_{v(x)}-\frac{\overbrace{1424x^3+17500x^2+14324x+17500}^{u(x)}}{\sqrt{x^2+2}}$

4. Nhận thấy $\begin{cases}\min\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]} v(x)=v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 25561,75144\\ \max\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]} u(x)=u\left(\frac{4}{5}\right)\approx 25165,00167<\min\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]} v(x)\end{cases}$

5. Nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$.

6. Từ đó có $g(x)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.957051285>0\Rightarrow f(x)>0\forall x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$.

Bài 13: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{\sqrt{8x+5}+x+2}+\frac{2x-1}{\sqrt{6x+2}+x+1}+3>0\forall x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Trường hợp 1: Xét $x>1$

1. Khi đó $f(x)>\frac{x^3+5x+4+3\sqrt{8x+5}}{\sqrt{8x+5}+x+2}>0\forall x\in(1;+\infty)$

- Trường hợp 2: Xét $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

1. Khi đó $\begin{cases}\sqrt{8x+5}+x+2>3\\ \sqrt{6x+2}+x+1>\frac{2}{3}\end{cases}$

2. Nên ta có:

$$f(x)>\frac{x^3-1}{3}+\frac{3(2x-1)}{2}+3=\frac{2x^3+18x+7}{6}>\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^3+18\left(-\frac{1}{8}\right)+7}{6}=\frac{25}{162}>0$$

- Trường hợp 3: Xét $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

1. Khi đó $\begin{cases}\sqrt{6x+2}+x+1<5\\ \sqrt{8x+5}+x+2>5.5\end{cases}$

2. Nên $f(x)>\frac{2(x^3-1)}{11}+\frac{2x-1}{5}+3=\frac{10x^3+22x+144}{55}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 14: Giải phương trình: $9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$

Lã Duy Tiến

Giải

- Ta có:

$$9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=\dfrac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23=0\,(*) \end{array}\right.$$

- Giải $(*)$:

1. Dễ dàng nhận thấy với $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{23}}{3}\right]\cup[-1;+\infty)$ thì ta thấy $f(x)>0$.
2. Xét $x\in\left[-\frac{\sqrt{23}}{3};-1\right]$, ta có bổ đề sau: $\sqrt{4-3x}<\frac{1}{2}x+\frac{19}{5}$ (bạn đọc tự chứng minh).
3. Khi đó:

$$f(x)>\frac{54}{\frac{1}{2}x+1+\frac{19}{5}}-9x^3-9x^2+23x+23=\frac{-45x^4-477x^3-317x^2+1219x+1644}{5x+48}>0$$

- Vậy PT $\Leftrightarrow x=1$.

Nhận xét

- Câu này mặc dù mẫu chứa căn ở bậc nhất nhưng ta không thể đánh giá được do $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4-3x}=+\infty$. Vì thế ta sẽ đưa về bài toán giống với bài 4.
- Khi ta đạo hàm tìm điểm rơi thì sẽ tìm được 3 nghiệm, nhiều bạn sẽ không biết chọn điểm rơi nào cho phù hợp. Vậy khi gặp những trường hợp thế này thì ta sẽ thì 3 nghiệm của $f'(x)$ vào, nghiệm nào làm $f(x)$ min thì ta sẽ chọn điểm rơi đó.
- Thứ 2 với việc tìm nhân tử, ta có điểm rơi là $x=x_0=-1,350561897$ khi thay vào $\sqrt{4-3x}-\frac{1}{2}x$ thì sẽ được kết quả là 3.512830189 và nếu ai lấy là 3.5 thì bài toán sẽ sai do $\sqrt{4-3x}-\frac{1}{2}x-\frac{7}{5}>0$ sẽ ngược chiều với bài toán. Nếu lấy khoảng $3,6;3,7$ thì vẫn chưa được do sẽ bị dương ở một vài giá trị. Mặt khác bài này không được chặt cho lắm nên ta sẽ lấy hẳn lên $\frac{19}{5}$ và kiểm tra bằng MODE 7 có thể thấy luôn âm và thay vào thấy $f(x)>0$ cho nên đây là nhân tử cần tìm. Bạn đọc có thể lấy một số khác đẹp hơn!

- Việc chứng minh $g(x)=-45x^4-477x^3-317x^2+1219x+1644>0$ nhìn có vẻ khó nhưng rất dễ, ta sẽ tách như sau: $g(x)=x^3(-45x-477)-317x^2+1219x+1644$, có thể thấy rằng với $x\in\left[-\frac{\sqrt{23}}{3};-1\right]$ thì $\begin{cases}x^3<0\\-45x-477<0\\-317x^2+1219x+1644>0\end{cases}$

  Từ đó suy ra $g(x)>0$. Và thế là hết bài!

Bài 15: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

Giải

- Do $x=1$ là nghiệm của phương trình nên ta tiến hành liên hợp.

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)}=0\end{array}\right.$$

- Xét $x\in[-1;+\infty]$. Ta có: $\sqrt{x^2-2x+5}-1=\frac{(x-1)^2+3}{\sqrt{x^2-2x+5}+1}>0$. Nên bài toán luôn đúng.
- Xét $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right)$.
- Để ý thấy:

1. $(2x+3)\sqrt{x+4}+(x+4)\sqrt{2x+3}\le(2x+3)\sqrt{x+4}+3$
2. Khi đó $f(x)>\frac{\sqrt{x^2-2x+5}+\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{x+4}+3x+2}{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-1\right)\left((2x+3)\sqrt{x+4}+3\right)}$
3. $\sqrt{x^2-2x+5}+\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{x+4}+3x+2>(2x+3)\underbrace{\left[\frac{3}{2}+(x+1)\sqrt{x+4}\right]}_{u(x)}$
4. $u'(x)=\frac{3x+9}{\sqrt{x+4}}>0$ nên $u(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{3}{2};-1\right]\Rightarrow u(x)\ge u\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{6-\sqrt{10}}{4}>0$
5. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 16: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x\sqrt{x+2}+3x\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt{(3x^6+3x^5+3x^4+3x^2+x+2)(x^2+3)}<0\forall x\ge 1$$

Diễn đàn k2pi.net

Giải

- Đặt $\begin{cases} y=\sqrt{x+2}\left(y\ge\sqrt{3}\right) \\ z=\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}\left(z\ge\sqrt{5}\right) \end{cases}$
- Khi đó:

$$f(x)=xy+3xz-\sqrt{(3x^2z^2+y^2)(x^2+3)}=\frac{-3(y-x^2z)^2}{xy+3xz+\sqrt{(3x^2z^2+y^2)(x^2+3)}}\le 0$$

- Để ý thấy:

1. $\sqrt{x+2}-x^2\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}=\dfrac{\overbrace{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4-x-2}^{g(x)}}{\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}}$
2. $g(x)=(x-1)^8+9(x-1)^7+36(x-1)^6+84(x-1)^5+126(x-1)^4$
   $+125(x-1)^3+80(x-1)^2+29(x-1)+2>0$
3. Nên $g(x)>0\forall x\ge 1$. Vậy dấu "=" không thể xảy ra.
4. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y}=\sqrt{\dfrac{4(x^2+x+1)}{y^2+3}}\,(1) \\ x^3(3y-11)=2-\sqrt{(xy-x+2)x}\,(2) \end{cases}$

Giải

- ĐKXĐ: $2x^2y+1\ge 0;\ x\in[-1;1];\ 1-2x^2y\ge 0$
- Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+3}}\Leftrightarrow f(2x+1)=f(y)$$

Xét $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t)=\dfrac{3}{(t^2+3)\sqrt{t^2+3}}>0\forall t$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(2x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=2x+1$

Thế vào phương trình (2) ta được: $6x^4-8x^3=2-\sqrt{(2x^2+2)^3}$

Đặt $f(x)=6x^4-8x^3-2+\sqrt{(2x^2+2)^3}$

- Để ý thấy:

1. $f(x)=5\sqrt{2x^2+2}+5x^4-8x^3+x^2-\dfrac{25}{4}+\left(\sqrt{2x^2+2}+x^2-\dfrac{3}{2}\right)^2$

$$=g(x)+\left(\sqrt{2x^2+2}+x^2-\frac{3}{2}\right)^2$$

2. $g'(x)=x\left(\dfrac{10}{\sqrt{2x^2+2}}+20x^2-24x+2\right)=x.h(x).\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}$

3. $h'(x)=\dfrac{120x^3-96x^2+84x-48}{\sqrt{2x^2+2}}=\dfrac{v(x)}{\sqrt{2x^2+2}}$

4. $v'(x)=360\left(x-\dfrac{4}{15}\right)^2+\dfrac{292}{5}>0$. Suy ra phương trình $h'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm là

$$x=x_0=\frac{4}{15}+\frac{\sqrt[3]{\frac{6784}{125}+\sqrt{\frac{2338848}{625}}}+\sqrt[3]{\frac{6784}{125}-\sqrt{\frac{2338848}{625}}}}{6}$$

$\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} h(x)=h(x_0)\approx 1.31>0$. Khi đó phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\,(h(x)>0)$.

Mặt khác ta lại có: $\begin{cases}\lim g(x)=+\infty\\ g(0)=\dfrac{-25+20\sqrt{2}}{4}>0\end{cases}\Rightarrow g(x)>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>0$.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 18: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x^2-x+4-\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2}-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+2}>0\forall x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

Giải

- Ta có: $\left(\sqrt{3x^2-2x+3}\right)'=0\Leftrightarrow \dfrac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+3}}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $\sqrt{3x^2-2x+3}>\dfrac{3}{2}$.
- Khi đó:

$$f(x)>x^2-x+4-\frac{6x+2}{7}-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{(7x^2-13x+26)\sqrt{3x+1}+14x^2-26x+10}{7\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

- Để ý thấy:

+) Với $x\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right]$ thì $\begin{cases}4x^2-26x+10>0\\ 7x^2-13x+26=7\left(x-\dfrac{13}{14}\right)^2+\dfrac{559}{28}>0\end{cases}$. Do đó có điều phải chứng minh.

+) Với $x>0$ thì: $(7x^2-13x+26)\sqrt{3x+1}>7x^2-13x+26\Rightarrow f(x)>\dfrac{21\left(x-\dfrac{13}{14}\right)^2+\dfrac{501}{28}}{7\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}>0$

- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Bài 19: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+4}+x^2-x+2}-\frac{4\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+x^2+2x+2}-x^2+2x<0\ \forall x\ge 0$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Với $x\in\left[0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^4+20x^2+4}<8\\ \sqrt{x^4-x^2+4}<3\\ x^2-x-1<0\end{cases}$

Khi đó: $f(x)<\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{x^2-x+5}-\frac{4\left(x^2+x+1\right)}{x^2+2x+10}-x^2+2x$

$$=\frac{-x^4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-x^4-12x^2\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{5}{3}x^2-38\left(x-\frac{15}{19}\right)^2-620}{\left(x^2-x+5\right)\left(x^2+2x+10\right)}<0$$

- Với $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x-1>0\\ \sqrt{x^4-x^2+4}>\frac{14}{5}\\ \sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+5x-\frac{11}{4}\end{cases}$

Khi đó:

$$f(x)<\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{x^2-x+\frac{24}{5}}-\frac{4\left(x^2+x+1\right)}{2x^2+7x-\frac{3}{4}}-x^2+2x$$

$$=\frac{-40(x-1)^6-260(x-1)^5-537(x-1)^4-761(x-1)^3-389(x-1)^2-281(x-1)-690}{\left(5x^2-5x+24\right)\left(8x^2+28x-3\right)}<0$$

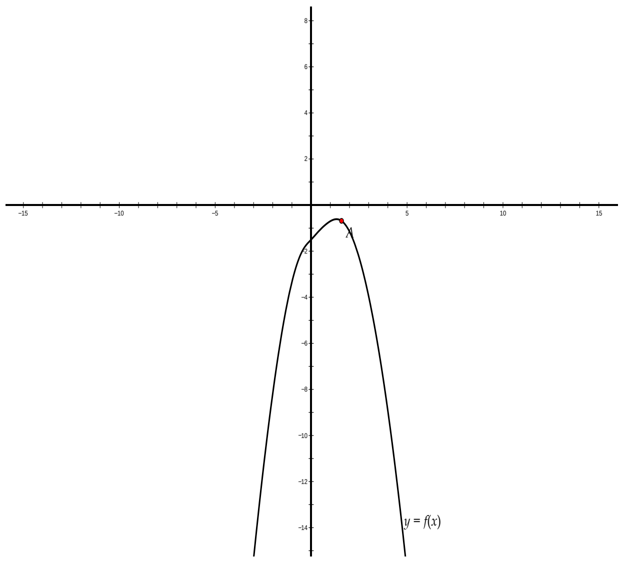
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

Nhiều bạn sẽ đặt ra cấu hỏi vì sao lại đánh giá được $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+5x-\frac{11}{4}$. Đơn giản vì:

\+ Ta đang cần đưa về chứng minh $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+ax+b$ với $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ để đưa về phương trình đa thức. Lại có $a^2>20$ nên sẽ lấy 5.

\+ Do hàm đang nghịch biến nên điểm rơi sẽ là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Có thể kiểm tra bằng Mode 7 hoặc có đồ thị của hàm $y=f(x)$ như sau:



Có thể thấy điểm $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ đang nằm ở phần đi xuống của đồ thị nên $f(x)$ sẽ nghịch biến. Do đó nhân tử là $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+5x-\frac{11}{4}$. Phần còn lại không phải nói nhiều!

Bài 20: Giải phương trình: $-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Ta có:

$$-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left(x^3+2\right)+\left(x^4+1\right)\left(\sqrt{x^6-x+2}-2x-4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left(x^3+2\right)+\frac{\left(x^4+1\right)(x+1)(x-2)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\left[x^3+2+\frac{\left(x^4+1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=2\\ f(x)=x^3+2+\dfrac{\left(x^4+1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}=0\end{array}\right.$$

- Đặt $g(x)=x^6-x+2\Rightarrow g'(x)=6x^5-1=0\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$. $g'(x)$ đổi dấu khi qua $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ nên $g(x)$ đạt cực tiểu tại $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\Rightarrow g(x)\ge g\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)\approx 1,41>0$.
- Đặt $h(x)=\sqrt{x^6-x+2}+2x+4$.

1. Với $x\ge -2\Rightarrow h(x)>0$.
2. Với $x<-2\Rightarrow \sqrt{x^6-x+2}>\sqrt{x^6}=-x^3\Rightarrow h(x)>x\left(-x^2+2\right)>0$

- Khi đó có:

$$f(x)>\frac{x^3+2+\left(x^3+2\right)(2x+4)+x^4+x^3+3x^2+5x+7}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}$$
$$=\frac{3\left(x^2+x-0,75\right)^2+\frac{9}{2}(x+1,5)^2+\frac{83}{16}}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 21: Giải phương trình: $1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Anh Sơn 2 – Nghệ An.

Giải

- Ta có:

$$1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2-x+1}+x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{(x-1)\left(2x^2-x+2\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}} > 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}\right] > 0$$

- Để ý thấy: $1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right) > \dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow x > 0$

- Khi đó ta có:

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}-1$$
$$=\frac{2x^2-x+2-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}$$
$$\frac{2x^2-x+2-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}$$
$$>\frac{2x^2-2x+3-2\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}}=g(x)$$

$$g(x)=\frac{1}{\left(2x^2-2x+3+2\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}\right)\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+2\right)}\right)} > 0$$

- Lại có:

1. $1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1-x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$
2. Xét bất phương trình: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x > 0$
   - Với $x<1 \Rightarrow$ bất phương trình luôn đúng.
   - Với $x \ge 1$ ta có: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ luôn đúng.
3. Do đó $1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}} > 0$.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 22: Cho 3 số $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc\ge 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$

Chứng minh

Đặt $f\left(a,b,c\right)=3\left(a^3+b^3+c^2\right)+2abc-11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$. Do $f\left(a,b,c\right)$ là hàm thuần nhất bậc 3, nên không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3$ và giả sử $a=\min\left\{a,b,c\right\}$. Khi đó ta cần chứng minh $f\left(a,b,c\right)=3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc-11\ge 0$

Đặt $f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=3\left(a^3+2\left(\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)^3\right)+a\left(b^2+c^2\right)-11$. Ta có:

$$f\left(a.b.c\right)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left[3\left(2\left(b^3+c^3\right)-\left(b^2+c^2\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\right)-a\left(b-c\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\left(\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c\right)\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)-a\left(b-c\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left(b-c\right)^2\left[\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a\right]$$

Do $a=\min\left\{a,b,c\right\}$ nên $\begin{cases}a\in\left[0;1\right]\\ b+c\ge 2\end{cases}$. Khi đó ta cần phải chứng minh được:

$$g\left(a,b,c\right)=\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a>0$$

$$\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a\ge\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-1$$

$$=\frac{\left(3b+3c-1\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+6bc-b-c}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}\ge\frac{5\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}$$

$$>\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}=\frac{\frac{\left(b-c\right)^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}\ge 0$$

Vậy $f\left(a,b,c\right)\ge f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)$

Ta có: $f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)=3\left(a^3+2\left(\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^3\right)+2a.\frac{3-a^2}{2}-11$

$$f(a,t,t)\ge 0 \Leftrightarrow 3\left(a^3+2\left(\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^3\right)+2a.\frac{3-a^2}{2}-11\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^3+\frac{3\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3}{\sqrt{2}}+a\left(3-a^2\right)-11\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3}{\sqrt{2}}+9a-15+(2a+4)(a-1)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[2a+4-\frac{3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)}{\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+(5-3a)\sqrt{2}\right)}\right]\ge 0(*)$$

Đặt $g(a)=(2a+4)\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+2(5-3a)\right)-3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)$

$$=\left(-2a^3-4a^2+6a+12\right)\sqrt{6-2a^2}-3a^4-6a^3+6a^2+38a-29$$

Ta có bổ đề: $\sqrt{6-2a^2}>\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a \Leftrightarrow 6-2a^2>\left(\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{1734}{625}a^2+\frac{2684}{625}a+\frac{29}{625}>0$. Dễ thấy bổ đề đúng với $a\in[0;1]$.

Mặt khác $-2a^3-4a^2+6a+12=2a(1-a)(a+3)+12>0\forall a\in[0;1]$, nên ta được:

$$g(a)>\left(-2a^3-4a^2+6a+12\right)\left(\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a\right)-3a^4-6a^3+6a^2+38a-29$$

$$=\frac{-31a^4-184a^3-226a^2+1052a+7}{25}=\frac{-31a^4-184a^3+215a^2-441a^2+1052a+7}{25}$$

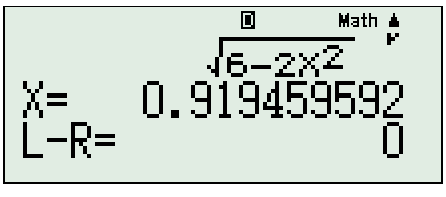
Do $\begin{cases}-31a^4-184a^3+215a^2>0\forall a\in[0;1]\\ -441a^2+1052a+7>0\forall a\in[0;1]\\ \sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+(5-3a)\sqrt{2}\right)>0\end{cases} \Rightarrow g(a)>0\Rightarrow 2a+4-\frac{3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)}{\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+(5-3a)\sqrt{2}\right)}>0$

Vậy $(*)$ luôn đúng $\Rightarrow$ $f(a,t,t)\ge 0\Rightarrow f(a,b,c)\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

- Bây giờ vấn đề đặt ra là kiếm đâu ra cái bổ đề kia. Để làm được điều này ta sẽ dùng tiếp tuyến để tìm ra nó dưới sự giúp đỡ của CASIO. Nhưng tuy nhiên làm sao ta có thể đánh giá được $\sqrt{6-2a^2}>ax+b$ khi chưa có manh mối gì? Để giải quyết vấn đề này ta sẽ tìm điểm rơi của bất đẳng thức đang cần chứng minh. Ta có:

$$g'(a)=\frac{16a^4+24a^3-60a^2-72a+36}{\sqrt{6-2a^2}}-12a^3-18a^2+12a+38$$



Phương trình $g'(a)=0$ có 1 nghiệm là :

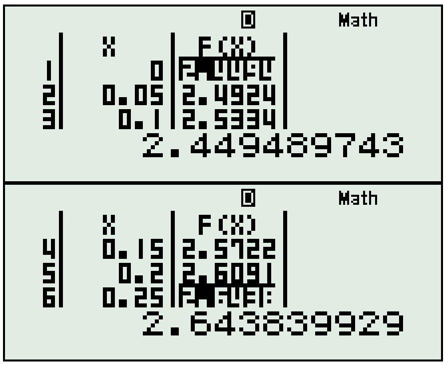
$$X=A=0,919459592$$

Bây giờ ta cần đánh giá được biểu thức trước căn là $-2a^3-4a^2+6a+12$. Dễ thấy rằng:

$$-2a^3-4a^2+6a+12=a(1-a)(a+3)+12>0$$

Vậy bây giờ cần chứng minh $\sqrt{6-2a^2} > ax + b$. Ta sẽ sử dụng phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$.

Ta được $a = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{6-2X^2}\right)\Big|_{X=A} = -0,8858596433$. Bây giờ ta sẽ lấy a làm sao cho bất đẳng thức không bị đánh giá quá trội và vừa đồng thời là một số hữu tỷ đẹp vừa để về sau dễ đánh giá hơn. Do đó mình sẽ lấy $a = -0,88 = \frac{-22}{25}$. Bây giờ cần tìm b,do đang cần chứng minh trên đoạn$[0;1]$ nên ta sẽ dùng MODE 7 để tìm ra b. MODE 7 với hàm $F(X) = \sqrt{6-2X^2} + \frac{22}{25}X$ trên $[0;1]$ ta được:



Để ý thấy là $\sqrt{6-2x^2} + \frac{22}{25}x > 2,449489742$. Bây giờ ta sẽ chọn b là một số hữu tỷ vừa đẹp vừa gần số $2,449$ nhất. Ta sẽ chọn số $b = 2,44 = \frac{61}{25}$, đồng thời thay vào bài toán ta thấy nhân tử này thỏa mãn. Vậy ta tìm được nhân tử là $\sqrt{6-2a^2} + \frac{22}{25}a - \frac{61}{25}$.

Chú ý rằng chắc mấy bạn khi tìm được a thì thay luôn $X = A$ vào để tìm ra b và tìm được $b = 2,884982846$, hiển nhiên là nhân tử này là sai. Đối với bài mà chứng minh trên đoạn thì ta thường sẽ dùng MODE 7 để tìm ra b, còn những bài chứng minh trên khoảng thì ta mới dùng cách thay trực tiếp nhân tử vào, nếu có thời gian hãy thử chứng minh những bài sau thì sẽ rõ. Ngoài ra nếu giải phương trình đạo hàm bằng 0 mà nhiều nghiệm thì ta chọn nghiệm nào làm phương trình đầu min max

PHẦN 2. PHỤ LỤC – MỘT SỐ CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC MỘT BIẾN KHÔNG CHỨA CĂN

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4.

1. Sử dụng tính chất tam thức bậc 2.

Nền tảng: Ta sẽ phân tích phương trình ban đầu thành $\left(x^2+\frac{ax}{2}+m\right)^2+f(x)$ trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc 2 luôn lớn hơn 0 với mọi $x\in\mathbb{R}$

Ví dụ: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^4+x^3+3x^2+x+7=0$

- **Bước 1:** Đầu tiên ta biến đổi phương trình theo tham số m như sau:

$$x^4+x^3+3x^2+x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{x}{2}+m\right)^2+\left(\frac{11}{4}-2m\right)x^2+(1-m)x+7-m^2=0$$

Nhiều bạn sẽ đặt ra câu hỏi tại sao lại là $x^2+\frac{x}{2}+m$. Rất đơn giản, khi ta khai triển biểu thức $\left(x^2+\frac{x}{2}+m\right)^2$ sẽ xuất hiện ngay x^3 vì $2.x^2.\frac{x}{2}=x^3$. Hiểu rồi chứ, các bài khác cũng tách tương tự được như vậy, chỉ có điều ta phải đưa nó về dạng tổng quát: $x^4+2ax^3+bx^2+cx+d=0$ thì mới tách thành như trên.

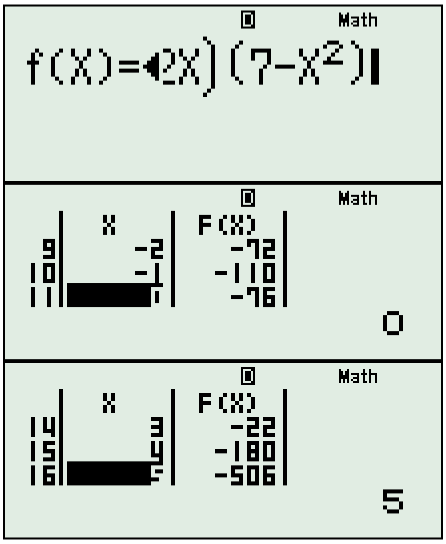
- **Bước 2:** Ta tính Δ theo tham số m: $\Delta=(1-m)^2-4\left(\frac{11}{4}-2m\right)\left(7-m^2\right)$
- **Bước 3:** Ta thấy phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình

$$\left(\frac{11}{4}-2m\right)x^2+(1-m)x+7-m^2=0$$

Phải vô nghiệm. Để phương trình này vô nghiệm thì $\begin{cases}\Delta<0\\ \frac{11}{4}-2m>0\end{cases}$

- Dùng MODE 7 ,nhập hàm sau vào máy:

$$F(X)=(1-X)^2-4\left(\frac{11}{4}-2X\right)\left(7-X^2\right)$$



- Start $=-10$
- End $=10$
- Step $=1$

Sau đó ta tìm các giá trị X làm $F(X)<0\,\&\,\frac{11}{4}-2X>0$

Nhìn vào bảng ta thấy rất nhiều giá trị làm $F(X)<0$, nhưng tuy nhiên ta phải chọn làm sao cho $\frac{11}{4}-2X>0$ và đó phải là một giá trị bé dễ rút gọn. Với lí do như thế tôi sẽ chọn $X=0$ hay $m=0$

- **Bước 4:** Do biết $m=0$ nên phương trình sẽ trở thành:

$$x^4+x^3+3x^2+x+7=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\left(x+\frac{2}{11}\right)^2+\frac{76}{11}}_{>0\forall x}=0$$

Nên phương trình vô nghiệm!

2. Sử dụng đạo hàm.

Ta xét phương trình tổng quát: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x)=0$. Nếu :

1. Phương trình có 1 nghiệm thì đây là điểm rơi của bài toán.
2. Phương trình có nhiều nghiệm thì thử xem nghiệm nào làm vế trái nhỏ nhất

- **Bước 3:** Tìm k sao cho:

  + $x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{ax}{2}+k\right)^2>0\forall x$

  + $k\approx -x_0{}^2-\frac{a}{2}x_0$ nhất.

Mục tiêu của phương pháp này tương tự như phương pháp ở trên nhưng có vài điểm tối ưu hơn.

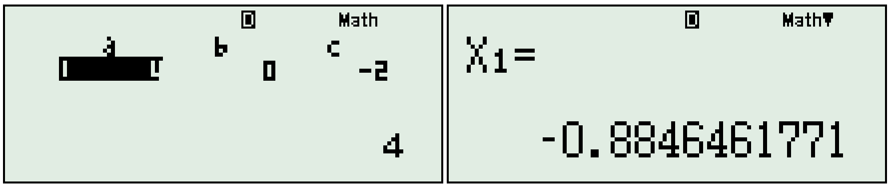
- **Bước 4:** Sau khi ta tìm được k thì chỉ việc lấy :

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{a}{2}x+k\right)^2=mx^2+nx+p>0\forall x$$

Do $f(x)-g(x)=h(x)$ mà trong đó $\begin{cases}h(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ nên $f(x)>0$. Thế là xong bài!

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^4-x^2+x+2>0\forall x$

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái $f'(x)=4x^3-2x+1$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0=-0..8846461771$



  - **Bước 3:** Tìm k:

$$k\approx -x_0{}^2-\frac{a}{2}x_0=-0.7825988 \Rightarrow k=-0.8=-\frac{4}{5}$$

  - **Bước 4:** Ta lấy: $x^4-x^2+x+2-\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{3}{5}x^2+x+1,36>0\forall x$

Do đó phương trình ban đầu vô nghiệm! Nhanh hơn chứ!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng : $f(x)=2x^4+x^3-2x^2+x+3>0$

- **Bước 1:** Đạo hàm: $f'(x)=8x^3+3x^2-4x+1 \Leftrightarrow x=x_0=-1$

- **Bước 2:** Tìm $k = -x_0{}^2 - \frac{a}{2}x_0 = -\frac{3}{4}$
- **Bước 3:** Lấy $f(x) - 2\left(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}(x+1)^2 + 1$. Xong!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 14 > 0$

- **Bước 1:** Đạo hàm $f'(x) = 16x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0{,}7909677904$
- **Bước 2:** Tìm $k \approx -x_0{}^2 - \frac{a}{2}x_0 \approx -\frac{1}{2}$
- **Bước 3:** Lấy $f(x) - 4\left(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\left(x + \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{87}{7} > 0 \forall x$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 6

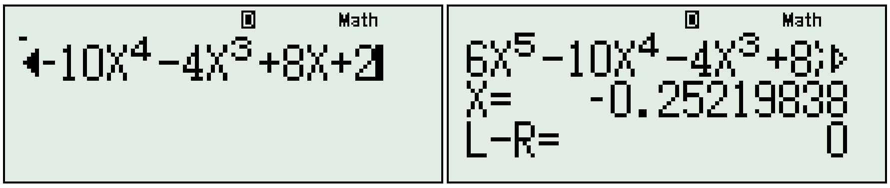
Ta xét phương trình tổng quát sau: $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

- Ta sẽ thêm bớt biểu thức: $\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + mx + n\right)^2$
- Lấy $f(x) - \left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + mx + n\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{4} - 2m\right)x^4 + \ldots$
- Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ thỏa mãn $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$
- Tìm m thỏa mãn $\begin{cases} m \in \mathbb{Q} \\ b - \frac{a^2}{4} - 2m > 0 \end{cases}$, thông thường ta sẽ cho $b - \frac{a^2}{4} - 2m = 1$
- Tìm n thỏa mãn $\begin{cases} n \in \mathbb{Q} \\ x_0{}^3 + \frac{a}{x}x_0{}^2 + mx_0 + n \approx 0 \end{cases}$
- Khi tìm được m,n bài toán coi như được giải quyết!

Sau đây là 2 ví dụ để tìm hiểu rõ cách làm.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^2 + 2x + 1 > 0$

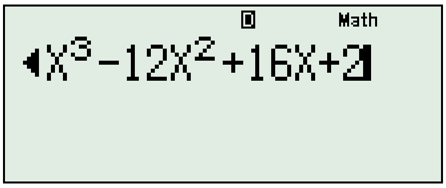
- Ta có $f'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0{,}25219838$

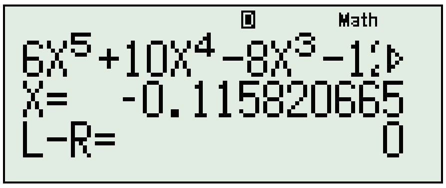


- Lấy $f(x) - \left(x^3 - x^2 + mx + n\right)^2 = (-2 - 2m)x^4 + \ldots$
- Ta tìm m thỏa mãn $-2 - 2m = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$
- Ta tìm n thỏa mãn $x_0{}^3 - x_0{}^2 - \frac{3}{2}x_0 + n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{4}$
- Lấy $f(x) - \left(x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{16}x^2 + \frac{11}{16} > 0$
- Vậy bài toán đã đượcgiải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^6+2x^5-2x^4-4x^3+8x^2+2x+12>0$

- Ta có $f'(x)=6x^5+10x^4-8x^3-12x^2+16x+2=0 \Leftrightarrow x=x_0=-0,115820665$

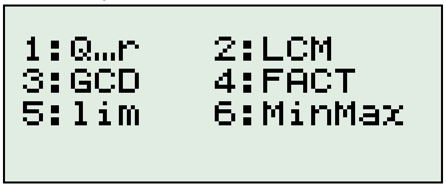


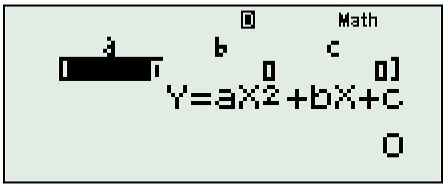


- Lấy $f(x)-\left(x^3+x^2+mx+n\right)^2=(-3-2m)x^4+...$
- Ta tìm m thỏa mãn $-3-2m=1 \Leftrightarrow m=-2$
- Ta tìm n thỏa mãn $x_0{}^3+x_0{}^2-2x_0+n\approx 0 \Leftrightarrow n\approx -\dfrac{1}{4}$. Để ý thấy $f(x_0)\approx 11,58>0$ rất nhiều nên đây là một bài toán khá lỏng lẻo. Do đó ta có thể coi $n=0$ để tiện rút gọn bằng máy tính.
- Lấy $f(x)-\left(x^3+x^2-2x\right)^2=x^4+4x^2+2x+12>0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn

III. CÁCH PHÂN TÍCH RIÊNG CHO HAI DÒNG MÁY ĐẶC BIỆT.

Phương pháp này chỉ hữu ích cho 2 dòng máy VINACAL 570es PLUS II và CASIO 570VN – PLUS bởi vì 2 dòng máy này có tính năng tính min max của 1 tam thức bậc 2. Đối với máy VINACAL thì ta sẽ bấm $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{6}\boxed{6}$ *máy sẽ hiện lên như sau:*





Còn máy CASIO VN thì tích hợp trong chức năng giải phương trình bậc 2.

- **Nội dung**

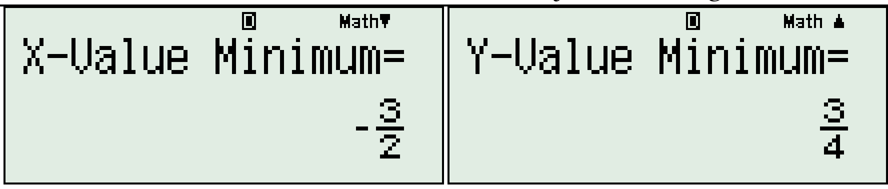
Phương pháp này sẽ dung tính chất cơ bản của tam thức bậc 2 như sau:Xét tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ thì ta luôn có $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}$. Tưởng chừng đơn giản nhưng lại giúp ích khá nhiều!

- **Ví dụ minh họa.**

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{16}>0\forall x$

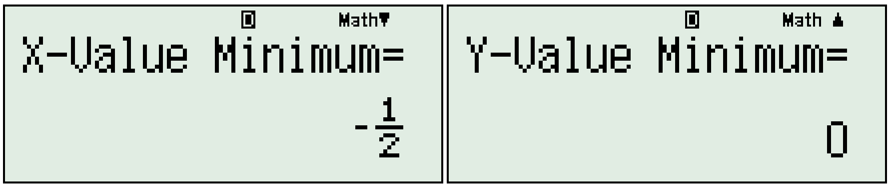
Giải

1. Nếu quen với phương pháp này thì sẽ cho ra kết quả khoảng 15s .
2. Do tôi dùng máy VINACAL nên sẽ khởi động tính năng tìm min max.
3. Nhập vào máy $\boxed{1}\boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}$, máy sẽ cho ra kết quả:



Vậy ta sẽ có $x^4+3x^3+3x^2=x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}$.

4. Tiếp tục nhập $\boxed{\frac{3}{4}}\boxed{=}\boxed{\frac{3}{4}}\boxed{=}\boxed{\frac{3}{16}}\boxed{=}$ ta lại được kết quả:



Vậy ta sẽ có $\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{4}x+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

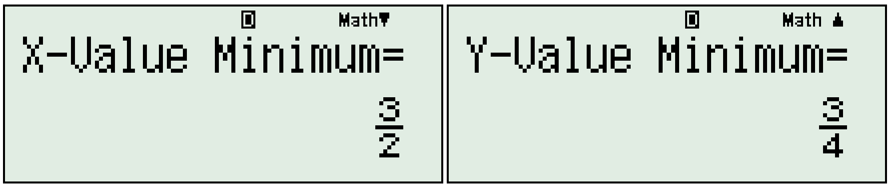
5. Vậy ta được $f(x)=x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0$. Bài toán đã được giải quyết!

Nhanh chứ!. Đấy vẫn là bình thường ta sẽ chiến một ví dụ tiếp theo!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^6-3x^5+3x^4-x^3+2x^2-x+1>0$

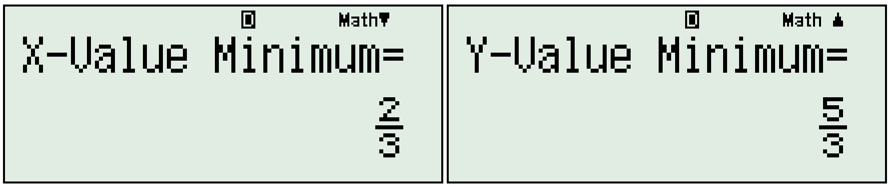
Giải

1. Nhập 3 hệ số đầu vào máy ta sẽ được kết quả:



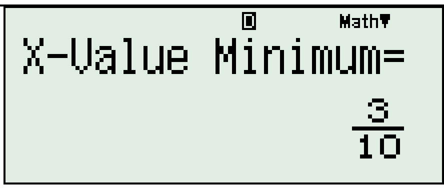
Vậy sẽ có $x^6-3x^5+3x^4=x^4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^4$

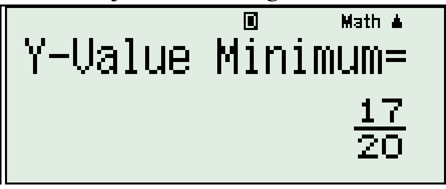
2. Nhập vào máy 3 hệ số tiếp theo sẽ được kết quả:



Vậy sẽ có $\frac{3}{4}x^4-x^3+2x^2=\frac{3}{4}x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}x^2$

3. Nhập vào máy 3 hệ số cuối sẽ được kết quả:





Vậy sẽ có $\frac{5}{3}x^2-x+1=\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{17}{20}$

4. Vậy $f(x)=x^4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{17}{20}>0\forall x$.

Bây giờ sẽ chiến nốt ví dụ cuối cùng!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f(x)=x^8+\frac{2}{3}x^7+3x^6+\frac{4}{3}x^5+\frac{14}{3}x^4-2x^3+3x^2-x+\frac{1}{3}>0\forall x$

Giải

Chỉ cần bấm máy khoảng 1 phút ta sẽ có kết quả dưới đây:

$$f(x)=x^6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{26}{9}x^4\left(x+\frac{3}{13}\right)^2+\frac{176}{39}x^2\left(x-\frac{39}{176}\right)^2+\frac{489}{176}\left(x-\frac{88}{489}\right)^2+\frac{119}{489}$$

Tự làm nhé! Cuối cùng hãy thử sức với bài sau đây.

➢ Chứng minh:

$$f(x)=x^{12}+2x^{11}+18x^{10}-11x^9+18x^8-16x^7+22x^6-17x^5+31x^4-10x^3+20x^2-10x+21>0$$

- *Chú ý rằng:*

1. *Nếu bạn nào không có 2 dòng máy trên thì vẫn có thể tính được như trên nhưng mất thời gian tính* $-\frac{b}{2a}$ & $\frac{-\Delta}{4a}$. *Nhưng đừng ngại nhé làm nhiều sẽ tiến bộ .*
2. *Nếu bạn nào có VINACAL hay VN PLUS thì đừng vội mừng, nhiều khi gặp phải những bài hệ số xấu thì cũng phải tính tay thôi vì máy tính không hiển thị được, thế là bằng nhau. Tiêu biểu là bài bên trên tôi cho, vui vẻ nhé.*

IV. CHỨNG MINH TRÊN KHOẢNG.

Đầu tiên xét dạng tổng quát cho các bài toán có điểm rơi không chặt.

Giả sử cần chứng minh phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên $[b;+\infty)$; $(-\infty;a]$. Ta sẽ CALC sao cho $X+a=1000$; $X+b=1000$ sau đó khai triển như bình thường. Để hiểu rõ hơn ta sẽ cùng chiến một ví dụ lấy .

Ví dụ 1: Chứng minh rằng : $f(x)=3x^4-2x^3-2x^2+10x+4>0\forall x\in[2;+\infty)$

1. ***Cách 1: Hàm số***
   - Ta có $f'(x)=12x^3-6x^2-4x+10\Rightarrow f''(x)=36x^2-12x-4$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{6} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{6} \end{array}\right.$
- Lập bảng biến thiên cho $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{6}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{6}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{83+5\sqrt{5}}{9}$	$\searrow$	$\frac{83-5\sqrt{5}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có thể thấy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất thuộc vào khoảng $(-0,9;-0,8)$ do $f'(-0,9).f'(-0,8)<0$. Giả vờ nghiệm đó là $x=x_0=-0,8997774777$.

Lại tiếp tục lập bảng biến thiên cho $f(x)$ ta được.

x	$-\infty$		x_0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	48	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng dễ thấy $f(x)>0 \forall x \in [2;+\infty)$. Vậy là hết bài!

2. ***Cách 2: Nhóm thành tổng dựa vào điều kiện.***

Ta dễ dàng nhận thấy $x \ge 2 \Rightarrow x-2 \ge 0$ nên nảy ra ý tưởng viết $f(x)$ dưới dạng :

$$f(x)=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$$

Và công việc này sẽ nhờ tới sự trợ giúp của thủ thuật CASIO.

- Ta sẽ CALC X sao cho $X-2=1000 \Rightarrow X=1002$
- CALC $X=1002$ ta được kết quả $3,022058\times10^{12} \approx 3(x-2)^4$
- Ghi vào sau $-3(X-2)^4$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $2,205807\times10^{10} \approx 22(x-2)^3$
- Ghi vào sau $-22(X-2)^3$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $58074048 \approx 58(x-2)^2$
- Ghi vào sau $-58(X-2)^2$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $74048=74(x-2)+48$
- Thử lại với $X=\pi$ ta được kết quả là 0. Vậy kết quả luôn đúng
- Vậy $f(x)=3(x-2)^4+22(x-2)^3+58(x-2)^2+74(x-2)+48>0 \forall x \in [2;+\infty)$
- Thế là bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^5-x^4-x^3+4x^2+6x+1<0\forall x\le -1$

Giải

- Đúng như những bước làm bên trên ta sẽ tách thành:

$$f(x)=(x+1)^5-6(x+1)^4+13(x+1)^3-17(x+1)^2+20(x+1)-10$$

- Để ý thấy với $x\le -1\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^5\le 0\\ 13(x+1)^3\le 0\\ 20(x+1)\le 0\end{cases}\Rightarrow f(x)<0\forall x\in(-\infty;-1]$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f(x)=x^7-x^6+x^5-2x^4+8x^3-8x^2+10x-2>0\forall x>1$

Giải

- Do bài này bậc tương đối cao nên ta sẽ cứ làm như bình thường và tìm các hệ số còn lại bằng đồng nhất hệ số.
- Ta có:

$$f(x)=(x-1)^7+6(x-1)^6+16(x-1)^5+23(x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+f(1)$$

- Lập hệ, cho x lần lượt bằng 1,2,3 sẽ tìm được a,b,c.
- Ta được:

$$f(x)=(x-1)^7+6(x-1)^6+16(x-1)^5+23(x-1)^4+25(x-1)^3+20(x-1)^2+16(x-1)+7$$

- Bài toán đã được giải quyết

V. CHỨNG MINH TRÊN ĐOẠN

Ý tưởng của phương pháp này chính là phương pháp DAC – Phương pháp này đã có trong cuốn " Những viên kim cương trong bất đẳng thức – Trần Phương" bạn đọc có thể tham khảo thêm!

Bài 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^5-x^4-2x^3-2x^2+5x+3>0\forall x\in[1;+\infty)$

Giải

- Để ý thấy:

1. $f(x)=(x-1)^5+4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4$
2. $4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4=4\left[\left(x^2-\frac{3x+1}{2}+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{7}{20}\left(x-\frac{9}{7}\right)^2+\frac{58}{175}\right]>0$
3. Nên do đó $f(x)>0\forall x\in[1;+\infty)$ (đpcm). Xong! Hết bài.

Hướng dẫn

- Do ta đang cần chứng minh $f(x)>0\forall x\ge 1$ nên nảy ra ý tưởng tách thành:

$$(x-1)^5+a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$$

- Để tách thành như vậy ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay để giải quyết. Để ý thấy với $x\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0$ nên ta sẽ nhập vào máy và $\boxed{\text{CALC}}$ sao cho $X-1=1000\Rightarrow X=1001$ và sử dụng kỹ thuật xấp xỉ như khai triển đa thức ta sẽ tách thành dạng như trên. Cụ thể các bước làm như sau:

1.1. Nhập vào máy biểu thức trên, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả là $1.0...\times 10^{15}\approx (x-1)^5$.

1.2. Ghi vào sau $-(X-1)^5$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả là $4.0...\times 10^{12}\approx 4(x-1)^4$.

1.3. Ghi vào sau $-4(X-1)^4$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $3.99...\times 10^{9}\approx 4(x-1)^3$

1.4. Ghi vào sau $-4(X-1)^3$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $-4003996\approx -4(x-1)^2$

1.5. Ghi vào sau $+4(X-1)^2$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $-3996=-4(x-1)+4$.

1.6.Nhớ rằng để tìm hệ số tự do ta sẽ $\boxed{\text{CALC}}$ giá trị mốc tức là 1 và được kết quả là 4.

- Vậy ta được kết quả $f(x)=(x-1)^5+4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4$, thử lại với $x=\pi$ ta thấy kết quả luôn đúng. Đến đây vấn đề đặt ta là tất cả không phải dấu $"="$nên ta cần phải xử lý thêm 1 bước nữa. Thật may là biểu thức bậc 4 đằng sau luôn dương nên ta sẽ quy nó về bài toán chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm với ẩn $y=x-1$. Sử dụng thủ thuật SOS ta sẽ tách nó thành:

$$\begin{aligned}&4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4\\&=4\left[\left(x^2-\frac{3x+1}{2}+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{7}{20}\left(x-\frac{9}{7}\right)^2+\frac{58}{175}\right]>0\end{aligned}$$

- Khi đó bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Nhận xét

Bài toán trên chỉ là dạng đặc biệt do biểu thức $f(x)$khá là lỏng. Vậy đối với những bài toán chặt khác mà khi tách ra dạng như trên toàn dấu $"-"$ thì phải làm như thế nào? Sau đây sẽ là cách giải quyết.

1.1. Thứ nhất ta sẽ cần nới rộng khoảng cần chứng minh ta, có nghĩa là nếu bài toán cho $x\ge 1$ thì ta sẽ chứng minh hẳn nó lớn hơn 0 với $x\ge 3$ chẳng hạn, sau đó sẽ chứng minh nó lớn hơn 0 với $x\in[1;3]$.

1.2. Để chứng minh $f(x)>0\forall x\in[1;3]$ ta sẽ sử dụng kỹ thuật chia để trị DAC. (Áp dụng chứng minh vô nghiệm trên đoạn).

1.3. Nội dung phương pháp DAC: Bổ đề: Cho hàm số $f(x,y)$liên tục và xác định trên $D=[a;b]\times[a;b]$Hàm số $f(x,y)$đồng biến theo x và nghịch biến theo y. Khi đó nếu $f(a,b)>0$ thì $f(x,y)\ge f(a,b)>0$.

1.4. Chứng minh bổ đề:

+ Do hàm số đồng biến theo x, $x\ge a$ nên $f(x,y)\ge f(a,y)(1)$

+ Do hàm số nghịch biến theo y, $y\le b$ nên $f(a,y)\ge f(a,b)(2)$

+ Từ $(1)\&(2)$ có điều phải chứng minh.

Áp dụng

1. Đối với bài này ta cứ giả vờ tách nó dưới dạng $(x-3)$ ta sẽ được:
   $f(x)=(x-3)^5+14(x-3)^4+76(x-3)^3+196(x-3)^2+236(x-3)+108>0\forall x>3$
2. Xét $x\in[1;3]$. Đây là điều quan trọng nhất. Do bổ đề xét tới hàm 2 biến nên ta sẽ biến $f(x)$ thành hàm 2 biến dựa vào tính đồng biến nghịch biến. Ta có:
   2.1. $(x^5)'=5x^4>0\Rightarrow$ Chỗ này đồng biến ta sẽ đặt là x.
   2.2. $(-x^4)'=-4x^3<0\Rightarrow$ Chỗ này nghịch biến nên đặt là y.
   2.3. Tương tự với các chỗ còn lại. Cuối cùng ta sẽ đặt $g(x,y)=x^5-y^4-2y^3-2y^2+5x+3$, hàm này chắc chắn đồng biến theo x và nghịch biến theo y với $x,y\in D=[1;3]\times[1;3]$.
3. Sau khi đặt xong hàm $g(x,y)$ ta cần phải chứng minh nó lớn hơn 0. Do bổ đề phát biểu nếu $f(a,b)>0\Rightarrow f(x,y)>0$ thì nhiều người sẽ tương luôn $x=1\,\&\,y=3$, nhưng chớ trêu là nó âm choét ra do ta đánh giá quá mạnh tay, và nhiều bạn sẽ nghĩ bổ đề sai, nhưng hãy để ý rằng phương pháp này có tên chia để trị nên các bạn cần phải chia $[1;3]=[1;a]\cup[a;b]\cup...\cup[z;3]$ và xét từng khoảng để khi thay 2 cận vào nó luôn dương, hiểu chứ?. Để tìm các khoảng kia phải sử dụng đến tài sản quý báu là chiếc máy tính.
   3.1. Nhập hàm $g(x,y)$ vào máy: $X^5-Y^4-2Y^3-2Y^2+5X+3$. Đầu tiên bấm $\boxed{\text{CALC}}$ và nhập $X=1$ trước do đây là cận nhỏ nhất, sau đó ta thử thay $Y=3$ vào thấy âm thì sẽ chuyển $Y=2$ thấy vẫn âm. Chuyển tiếp Y xuống 1,5 thì thấy vẫn âm, lúc này đừng hoảng ta sẽ tìm được $Y=1{,}2$ thì $g(x,y)=\dfrac{369}{625}>0$, thế là đã tìm được 1 khoảng đầu tiên.
   3.2. Để tìm tiếp các khoảng tiếp theo ta lại cho $X=1{,}2$ và tìm Y. Cứ lặp lại quá trình trên ta sẽ chia được:
   $[1;3]=[1;1{,}2]\cup[1{,}2;1{,}3]\cup[1{,}3;1{,}39]\cup[1{,}39;1{,}46]\cup[1{,}46;1{,}51]$
   $\cup[1{,}51;1{,}56]\cup[1{,}56;1{,}6]\cup[1{,}6;1{,}64]\cup[1{,}64;1{,}67]\cup[1{,}67;1{,}7]\cup[1{,}7;1{,}73]$
   $\cup[1{,}73;1{,}76]\cup[1{,}76;1{,}8];[1{,}8;1{,}84]\cup[1{,}84;1{,}88]\cup[1{,}88;1{,}93]\cup[1{,}93;1{,}99]\cup[1{,}99;2]$.

Woa! Thật đẹp mắt. Lúc đến 2 là các bạn sẽ gặp khó khăn do các khoảng càng ngày càng hẹp. Ta lại nảy ý tưởng chứng minh $f(x)>0\forall x>2$. Ta sẽ được:

$$f(x)=(x-2)^5+9(x-2)^4+30(x-2)^3+42(x-2)^2+21(x-2)+5>0$$

Vậy lời giải sơ lược của bài này sẽ như sau:

1. Xét $x>2$ ta có $f(x)=(x-2)^5+9(x-2)^4+30(x-2)^3+42(x-2)^2+21(x-2)+5>0$
2. Xét $x\in[1;2]$.

+ Ta có bổ đề sau: Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục và xác định trên $D=[a;b]\times[a;b]$ Hàm số $f(x,y)$ đồng biến theo x và nghịch biến theo y. Khi đó nếu $f(a,b)>0$ thì $f(x,y)\ge f(a,b)>0$.

+ Chứng minh:

- Do hàm số đồng biến theo x, $x \ge a$ nên $f(x,y) \ge f(a,y)(1)$
- Do hàm số nghịch biến theo y, $y \le b$ nên $f(a,y) \ge f(a,b)(2)$
- Từ $(1)\&(2)$ có điều phải chứng minh.

+ Xét hàm $g(x,y) = x^5 - y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 5x + 3 \Rightarrow f(x) = g(x,x)$.Hàm số đồng biến theo x, nghịch biến theo y, liên tục trên

$[1;1,2];[1,2;1,3];[1,3;1,39];[1,39;1,46];[1,46;1,51]$

$;[1,51;1,56];[1,56;1,6];[1,6;1,64];[1,64;1,67];[1,67;1,7];[1,7;1,73]$

$;[1,51;1,56];[1,56;1,6];[1,6;1,64];[1,64;1,67];[1,67;1,7];[1,7;1,73]$.

+ Lại có $\begin{cases} g(1;1,2) = \dfrac{369}{625} > 0 \\ \qquad ... \\ g(1,99;2) \approx 4,1579601 > 0 \end{cases}$ nên theo bổ đề ta sẽ có

$$\begin{cases} f(x) = g(x,x) > 0 \forall x \in [1;1,2] \\ \qquad ... \\ f(x) = g(x,x) > 0 \forall x \in [1,99;2] \end{cases}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

** Lưu ý: Một điều đáng buồn là khi viết trong bài không được ghi "…" mà phải ghi hết ra để người ta công nhận không sẽ bị bắt bẻ ngay lập tức. Nói chung cách làm tổng quát bao giờ cũng dài hơn cách làm dùng IQ mà . Sau đây là một số bài có thể làm theo DAC.*

Bài 2: Chứng minh rằng: $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Giải

1. **Cách 1: Tạo dựng hằng đẳng thức**

   Ta luôn có: $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = \left(x^4 - \dfrac{1}{2}x\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} > 0$

   Từ đó suy ra điều phải chứng minh.
2. **Cách 2: DAC**

Nhìn cách 1 có vẻ rất ngắn gọn nhưng sẽ nhiều bạn có thể không nhận thấy dấu hiệu tách hằng đẳng thức thì ta vẫn có thể làm như sau:

- Xét $x < 0$ khi đó $-x^5 < 0$ lại có $\begin{cases} x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0 \\ x^8 \ge 0 \end{cases}$ nên có điều phải chứng minh.
- Xét $x > 1$ khi đó $x^8 - x^5 = x^5(x^3 - 1) = x^5(x-1)(x^2 + x + 1) > 0$ ta cũng có điều phải chứng minh.
- Xét $x \in [0;1]$ đây là khâu quan trọng nhất. Cách làm DAC sẽ như sau:

  + Bước 1: Phát biểu, chứng minh bô đề.

+ Bước 2: Đặt hàm $g(x,y)$ sao cho hợp lí đảm bảo luôn đúng theo bổ đề (rất quan trọng!). Để đặt hàm $g(x,y)$ ta sẽ đạo hàm từng biến một và xét tính đồng biến, nghịch biến.Nhớ là chỗ nào đang đồng sẽ đặt là x, nghịch biến là y.

♦ Có: $\begin{cases}(x^8)'=8x^7>0\\(-x^5)'=-5x^4<0\\(x^2)'=2x>0\\(-x)'=-1<0\end{cases}$. Nên sẽ đặt hàm $g(x,y)=x^8-y^5+x^2-y+1$.

+ Chia để trị: Để chứng minh vô nghiệm được ta sẽ phải chia thành các khoảng nhỏ $[a;m];[m;n];...;[y;b]$ làm sao cho khi ta thay cận min bằng x và cận max bằng y thì $g(x,y)>0$. Công việc này có casio để hỗ trợ.

♦ Nhập vào máy $X^8-Y^5+X^2-Y+1$. Ta sẽ CALC $X=0$ trước và thử cho với $Y=0$ luôn xem có dương không. Nhưng tiếc là biểu thức bị âm do ta đã đánh giá quá trội, và vì thế cần thu nhỏ khoảng lại. Thử $\boxed{\text{CALC}}$ tiếp và cho $Y=0,5$ xem.Lần này đã dương, nhưng ta có thể nới rộng khoảng hơn nữa thử cho $Y=0,7$ lần này cũng dương nhưng nếu nới rộng ra hơn nữa sẽ bị âm.Thế là đã tìm được một khoảng. Ta sẽ lập lại quá trình trên với $X=0,7$ và sẽ phải tìm Y. Lần lượt tìm được 2 khoảng nữa là $[0,7;0,9]\&[0,9;1]$.

+ Bước 3: Lời giải:

- Viết lại bước 1.
- Đặt $g(x,y)=x^8-y^5+x^2-y+1$ liên tục trên các khoảng $[0;0,7];[0,7;0,9];[0,9;1]$. Đồng biến theo x, nghịch biến theo y, có $f(x)=g(x,x)$.
- Lại có $\begin{cases}g(0;0,7)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0;0,7]\\g(0,7;0,9)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0,7;0,9]\\g(0,9;1)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0,9;1]\end{cases}$.
- Suy ra điều phải chứng minh.

Vậy bài toán đã được giải quyết! Hay chứ . Chiến 1 cái nữa nào!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=-x^6+x^5-x^4+2x^2+x+\frac{1}{10}>0\forall x\in\left[-\frac{1}{9};\frac{4}{3}\right]$

Giải

Đây là 1 bài toán khá là chặt nên chắc chắn sẽ phải chia tương đối nhiều khoảng.

1. Xét $x\in\left[-\frac{1}{9};0\right]$. Đặt $g(x,y)=-x^6+x^5-x^4+2y^2+x+\frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là $\left[-\frac{1}{9};-0,1\right];[-0,1;-0,05];[-0,05;0]$

2. Xét $x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$. Đặt $g(x,y)=-y^6+x^5-y^4+2x^2+x+\frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là $[1;1,1];[1,1;1,2];[1,2;1,25];[1,25;1,29];[1,29;1,31];[1,31;1,32];\left[1,32;\frac{4}{3}\right]$. Ghê chưa!

Vậy bài toán đã được giải quyết!

❖ Áp dụng làm bài sau: Chứng minh rằng: $f(x)=-x^4-3x^2+6x-1>0\forall x\in[0,2;1,1]$

- Thử áp dụng cách làm trên làm các bài sau

  Chứng minh rằng:

  1. $f(x)=-x^6+x^5-x^4+2x^2+x+\frac{1}{10}>0\forall x\in\left[-\frac{1}{9};\frac{4}{3}\right]$
  2. $f(x)=x^8-x^5+x^2-x+1>0\forall x$ *(thử dùng DAC nhé).*
  3. $f(x)=x^5-x^4-x^3+4x^2+6x+1<0\forall x\in(-\infty;-1]$
  4. $f(x)=x^7-x^6+x^5-2x^4+8x^3-8x^2+10x-2>0\forall x>1$
  5. $f(x)=-x^4-3x^2+6x-1>0\forall x\in[0,2;1,1]$

Kết thúc phương pháp này ở đây, trong mục này tôi chỉ trình bày cho các bạn một số cách bấm máy thôi để xử lý các đa thức thôi, nếu muốn tìm hiểu thêm về cách chứng minh bất đẳng thức 2 hay 3 biến bằng DAC thì hãy tham khảo thêm ở cuốn sách mà tôi đã nói ở đầu mục nhé! Cảm ơn các bạn đã theo dõi bài viết!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học – Trần Phương*
2. *Sáng tạo bất đẳng thức – Phạm Kim Hùng*
3. *Bất đẳng thức – Định lý và áp dụng – Nguyễn Văn Mậu*
4. *Sáng tạo phương trình, bất phương trình, hệ phương trình – Nguyễn Tài Chung*
5. *Bất đẳng thức đánh giá phương trình vô tỷ - Nguyễn Minh Tuấn*
6. *Vận dụng tính đơn điệu của hàm số giải phương trình vô tỷ - Nguyễn Minh Tuấn*
7. *Tài nguyễn Internet.*