MỤC LỤC

PHẦN B

PHẦN A

NHẮC LẠI VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Phương trình bậc nhất một ẩn:

- **Định nghĩa:** Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng: $ax+b=0$ trong đó x là ẩn số ; a , b là các số cho trước gọi là các hệ số $\ a\neq 0\ $.
- **Phương pháp giải:** $ax+b=0\Leftrightarrow ax=-b\Leftrightarrow x=\frac{-b}{a}$.

Ví dụ minh họa

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $2x+1=0$.

b) $x-2018=0$.

c) $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}=0$.

Giải

a) $2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{-1}{2}$.

b) $x-2018=0\Leftrightarrow x=2018$. Vậy phương trình có nghiệm $x=2018$.

c) $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\sqrt{2}x=-3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=-3$. Vậy phương trình có nghiệm $x=-3$.

Bài 2: Giải các phương trình:

a) $\frac{x-1}{2}+1=\frac{x+1}{4}$

b) $\frac{2}{3}x+1=x-5$

c) $2\ \ x-1\ =\frac{x}{3}+1$

Giải

a) $\frac{x-1}{2}+1=\frac{x+1}{4}\Leftrightarrow 2x-2+4=x+1\Leftrightarrow x=-1$.Vậy pt có nghiệm $x=-1$.

b) $\frac{2}{3}x+1=x-5\Leftrightarrow\frac{1}{3}x=6\Leftrightarrow x=18$. Vậy phương trình có nghiệm $x=18$.

c) $2\ \ x-1\ =\frac{x}{3}+1\Leftrightarrow 5x=9\Leftrightarrow x=\frac{9}{5}$. Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{9}{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $6-3x=-9$.

b) $3x+2=x+3$.

c) $3x-4=2$.

d) $2\ \ x+1\ =4-x$.

e) $5x+6=3x$.

f) $2x+1=3x-5$.

g) $2\ \ x-1\ =3-x$.

h) $3x-5=x+1$.

i) $2x-\sqrt{4}=6$.

<u>Đáp số:</u>

a) $x=5$.

b) $x=\frac{1}{2}$.

c) $x=2$.

d) $x=\frac{2}{3}$.

e) $x=-3$.

f) $x=6$.

g) $x=\frac{5}{3}$.

h) $x=3$.

i) $x=\frac{6+\sqrt{4}}{2}$.

KIẾN THỨC CHUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$*, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và* $a\neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ *và biệt thức* $\Delta=b^2-4ac$ *:*

• *Nếu* $\Delta>0$ *thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt* $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

• *Nếu* $\Delta=0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

• *Nếu* $\Delta<0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

Chú ý: *Nếu phương trình có a và c trái dấu thì* $\Delta>0$*. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.*

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ *và* $b=2b'$, $\Delta'=b'^2-ac$ *:*

• *Nếu* $\Delta'>0$ *thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt* $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

• *Nếu* $\Delta'=0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1=x_2=-\dfrac{b'}{a}$.

• *Nếu* $\Delta'<0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

4. Hệ thức Viet

• **Định lí Viet**: *Nếu* x_1,x_2 *là các nghiệm của phương trình* $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ *thì:*

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

• *Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:*

$X^2-SX+P=0$ *(Điều kiện để có hai số đó là:* $S^2-4P\geq 0$*).*

5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ *(1)*

(1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P<0$

(1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Chú ý: *Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:*

- *Nếu nhẩm được:* $x_1 + x_2 = m + n;\ x_1x_2 = mn$ *thì phương trình có nghiệm* $x_1 = m,\ x_2 = n$.

- *Nếu* $a + b + c = 0$ *thì phương trình có nghiệm* $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{c}{a}$.

- *Nếu* $a - b + c = 0$ *thì phương trình có nghiệm* $x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

PHẦN CÁC DẠNG BÀI TẬP

I. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

A. Xác định phương trình bậc hai và các hệ số của phương trình bậc hai.

Phương pháp: *Học sinh xác định đúng dạng của phương trình bậc hai là $ax^2+bx+c=0$ và các hệ số $a,\ b,\ c$ tương ứng với điều kiện $a\neq 0$.*

Ví dụ minh hoạ:

Bài 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai? Chỉ rõ các hệ số $a,\ b,\ c$ của mỗi phương trình ấy.

$a) x^2-5=0$ b) $x^3+3x^2-6=0$ c) $\sqrt{2}x^2-5x+\frac{1}{2}=0$

$d) x^2+3x=0$ e) $2x-5=0$ f) $-3x^2+2x-4=0$

Giải: Phương trình bậc hai là các phương trình a; c; d; f

Phương trình $x^2-5=0$ có các hệ số $a = 1;\ b = 0,\ c = -5$

Phương trình $\sqrt{2}x^2-5x+\frac{1}{2}=0$ có các hệ số $a=\sqrt{2};\ b=-5;\ c=\frac{1}{2}$

Phương trình $x^2+3x=0$ có các hệ số $a=1;\ b=3;\ c=0$

Phương trình $-3x^2+2x-4=0$ có các hệ số $a=-3;\ b=2;\ c=-4$

Lưu ý: Dạng toán này đơn giản nhưng cần khắc sâu cho học sinh trung bình, yếu phải chỉ rõ được đúng hệ số để khi giải bài toán bằng công thức nghiệm thay số chính xác.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài A.1: Chỉ ra hệ số a,b,c trong các phương trình sau:

$6x^2+9x+1=0$ $8x^2-12x+3=0$ $2x^2-3x-2=0$ $2x^2-(4-\sqrt{5})x-2\sqrt{5}=0$

$5x^2+3x-2=0$ $x^2-x\sqrt{11}=0$ $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x=0$ $-x^2+3x-4=0$

B. Giải phương trình bậc hai dạng tổng quát $ax^2+bx+c=0$

Phương pháp 1*: Đưa phương trình về dạng phương trình tích rồi giải phương trình tích đó. (Lớp 8)*

Phương pháp 2*: Sử dụng công thức nghiệm tổng quát (hoặc công thức nghiệm thu gọn) để giải phương trình bậc hai.*

Phương pháp 3*: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:*

Nếu $a+b+c=0$ *thì phương trình có nghiệm* $x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$.

Nếu $a-b+c=0$ *thì phương trình có nghiệm* $x_1=-1,\ x_2=-\frac{c}{a}$.

Bài tập minh hoạ:

Bài 1: Giải phương trình sau:

a) $3x^2+5x-2=0$ b) $5x^2-6x+1=0$

Giải:

a) Phương pháp 1: Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

$$3x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-x-2=0 \Leftrightarrow 3x(x+2)-(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-1=0\\ x+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$

Phương pháp 2: Sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai.

Ta có $a=3$; b = 5; c = -2 $\Delta=b^2-4ac=5^2-4.3.(-2)=25+24=49>0$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2.3}=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2.3}=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$

b) *Phương pháp 1:* Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

$5x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow 5x^2-5x-x+1=0 \Leftrightarrow 5x(x-1)-(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (5x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-1=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{5} \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\dfrac{1}{5}\right\}$

Phương pháp 2: Sử dụng công thức nghiệm thu gọn (công thức nghiệm tổng quát) để giải:

Ta có $a=5;$ b = $-6 \Rightarrow$ b' = $\dfrac{b}{2}$ = $\dfrac{-6}{2}$ = -3; c = 1

$\Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-5.1=9-5=4>0$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-(-3)+\sqrt{4}}{5}=\dfrac{3+2}{5}=1$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-(-3)-\sqrt{4}}{5}=\dfrac{3-2}{5}=\dfrac{1}{5}$

Phương pháp 3: Giải bằng cách nhẩm nghiệm.

Ta có $a=5;$ b = $-6;$ c = 1 và $a+b+c=5+(-6)+1=0$ vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là $x_1=1$ và $x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{5}$.

**** Những lưu ý khi giải phương trình bậc 2***

① Nếu gặp hằng đẳng thức **1** và **2** thì đưa về dạng tổng quát giải bình thường. (không cần giải theo công thức) VD : $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow$ x = 1

② Phải sắp xếp đúng thứ tự các hạng tử để lập thành phương trình $ax^2+bx+c=0$ rồi mới áp dụng công thức :

VD: $x(x-5)=24 \Leftrightarrow x^2-5x=24 \Leftrightarrow x^2-5x-24=0 \Leftrightarrow$ Áp dụng CT giải tiếp.............

③Không phải lúc nào x cũng là ẩn số mà có thể là ẩn t , ẩn b , ẩn a ... tùy vào cách ta chọn biến :

VD: $b^2-10b+16=0 \Leftrightarrow$ áp dụng CT giải tiếp với ẩn là b ....

④ PT bậc 2 chứa căn ở các hệ số $a,\ b,\ c$ thì ở $\sqrt{\Delta}$ ta buộc phải rút căn bậc hai

VD: $x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$ ($a=1;\ b=-(2+\sqrt{3});\ c=2\sqrt{3}$)

$$\Delta=\left[-(2+\sqrt{3})\right]^{2}-4.1.2\sqrt{3}=7-4\sqrt{3}\ \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=.....$$

(Xem chuyên đề căn bậc 2: Dạng biểu thức trong căn là Hằng đẳng thức)

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

Bài B.1: Giải các phương trình:

a) $x^{2}-5x+6=0$.

b) $x^{2}-2x-1=0$.

c) $x^{2}-2x+10=0$.

d) $9x^{2}+12x+4=0$.

Bài B.2: Giải các phương trình sau bằng cách nhẩm nghiệm:

a) $x^{2}+\ 1-\sqrt{2}\ x-\sqrt{2}=0$.

b) $2x^{2}+\ \sqrt{3}-2\ x-\sqrt{3}=0$.

c) $x^{2}+x-6=0$.

d) $x^{2}-9x+20=0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài B.01: Giải các phương trình sau:

a) $x^{2}-2\sqrt{5}x+5=0$.

b) $x^{2}-9x+10=0$.

c) $2x^{2}-3x+5=0$.

d) $x^{2}-6x+14=0$.

e) $x+3^{\ 2}=16$.

f) $x^{2}-8x+15=0$.

g) $2\sqrt{3}x^{2}+x+1=\sqrt{3}\ x+1$.

h) $-4x^{2}-4x+1=0$.

i) $7x^{2}-8x+9=0$.

j) $16x^{2}-40x+25=0$.

k) $2x^{2}-\sqrt{2}x-2=0$.

l) $x^{2}-8x+19=0$.

m) $x^{2}-2\ \sqrt{3}-1\ x-2\sqrt{3}=0$.

n) $2x^{2}-3x-27=0$.

o) $7x^{2}-8x-9=0$.

p) $x^{2}+2\sqrt{2}x+4=3\ x+\sqrt{2}$.

q) $-x^{2}-3x-10\sqrt{3}=0$.

r) $x^{2}-3x=0$.

Đáp số:

a) $x=\sqrt{5}$.

b) $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{2}$.

c) Vô nghiệm..

d) Vô nghiệm.

e) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-7\end{array}\right.$.

f) $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=5\end{array}\right.$.

g) $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\x=\dfrac{-3\sqrt{3}+3}{6}\end{array}\right.$.

h) $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{-4}$.

i) Vô nghiệm..

j) $x=\dfrac{5}{4}$.

k) $x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm2\sqrt{5}}{4}$.

l) Vô nghiệm..

m) $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}-3\\x=\sqrt{3}+1\end{array}\right.$.

n) $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{9}{2}\\x=-3\end{array}\right.$.

o) $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{79}}{7}$.

p) $\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}+1\\x=-\sqrt{2}+2\end{array}\right.$.

q) Vô nghiệm...

r) $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Bài B.02. Giải các phương trình sau bằng cách nhẩm nghiệm:

a) $3x^2-11x+8=0$.

b) $x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$.

c) $3x^2-19x-22=0$.

d) $5x^2+24x+19=0$.

e) $3x^2+19x-22=0$.

f) $x^2-10x+21=0$.

g) $-2018x^2+x+2017=0$.

h) $x^2-12x+27=0$.

i) $5x^2-17x+12=0$.

j) $\left(1-\sqrt{2}\right)x^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)x+1+3\sqrt{2}=0$

k) $\left(1+\sqrt{3}\right)x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1=0$.

<u>Đáp số:</u>

a) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{8}{3}\end{array}\right.$.

b) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.$.

c) $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{22}{3}\end{array}\right.$.

d) $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\dfrac{19}{5}\end{array}\right.$.

e) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{22}{3}\end{array}\right.$.

f) $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=7\end{array}\right.$.

g) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{2017}{2018}\end{array}\right.$.

h) $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=9\end{array}\right.$.

i) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{12}{5}\end{array}\right.$.

j) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1+3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\end{array}\right.$

k) $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\end{array}\right.$.

C. Giải phương trình bậc hai khuyết b hoặc c

Phương pháp:

Dạng khuyết b: đối với phương trình $ax^2+c=0\left(a\neq 0\right)$ ta biến đổi $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{-c}{a}$. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{-c}{a}\geq 0$. Lúc này nghiệm của phương trình là $x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Dạng khuyết c : Đối với phương trình $ax^2+bx=0$ ta có thể biến đổi về phương trình tích $ax^2+bx=0\Leftrightarrow x(ax+b)=0$ để giải. Lúc này phương trình có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=\dfrac{-b}{a}$.

Ví dụ minh hoạ: Giải phương trình: a) $2x^2=8$ b) $x^2-5x=0$

Giải:

a) $2x^2=8\Leftrightarrow x^2=\dfrac{8}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{4}\\x=-\sqrt{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$. Kết luận nghiệm.

b) $x^2-5x=0\Leftrightarrow x(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$. Kết luận nghiệm.

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

Bài C1: Giải các phương trình sau:

$a.\ 5x^2+3x=0$ $b.\ 2x^2-6x=0$ $c.\ 7x^2-5x=0$

$d.\ 4x^2-16x=0$ $e.\ -0,4x^2+1,2x=0$ $f.\ 3,4x^2+8,2x=0$

D. Cho phương trình bậc hai, tính giá trị của biểu thức chứa nghiệm ($\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; $x_1^2+x_2^2$ …)

Phương pháp: *Sử dụng hệ thức Vi-et, biến đổi biểu thức đã cho suất hiện tổng và tích các nghiệm từ đó tính được giá trị biểu thức.*

Các hệ thức thường gặp:

- ✓ $x_1^2+x_2^2=\left(x_1^2+2x_1.x_2+x_2^2\right)-2x_1.x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1.x_2=S^2-2P$.
- ✓ $x_1-x_2=\pm\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm\sqrt{S^2-4P}$.
- ✓ $x_2-x_1=\pm\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm\sqrt{S^2-4P}$.
- ✓ $x_1^2-x_2^2=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)=\pm\left(x_1+x_2\right)\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm S.\sqrt{S^2-4P}$.

✓ $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2-x_1.x_2+x_2^2\right)=\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1.x_2\right]=S.\left(S^2-3P\right)$.

✓ $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2\right)^2+\left(x_2^2\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2.x_2^2=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$.

$$=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2.$$

✓ $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{P}$.

✓ $\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\sqrt{S^2-4P}}{P}$.

✓ $\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\left(x_1+x_2\right)\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2}=\pm\dfrac{S.\sqrt{S^2-4P}}{P}$

✓ $x_1^3-x_2^3=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1.x_2+x_2^2\right)=\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1.x_2\right]$.

$$=\left(\pm\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1.x_2\right]=\pm\left(\sqrt{S^2-4P}\right)\left[S^2-P\right]$$

$x_1^4-x_2^4=\left(x_1^2\right)^2-\left(x_2^2\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2-x_2^2\right)=\pm\left(S^2-2P\right)\left(S.\sqrt{S^2-4P}\right)$

Ví dụ minh hoạ:

Bài 1: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2+x-2+\sqrt{2}=0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$. $\quad B=x_1^2+x_2^2$. $\quad C=\left|x_1-x_2\right|$. $\quad D=x_1^3+x_2^3$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-1 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-2+\sqrt{2} \end{cases}$

$A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{-1}{-2+\sqrt{2}}$.

$B=x_1^2+x_2^2=\ x_1+x_2\ ^2-x_1x_2=1-\ -2+\sqrt{2}\ =3-\sqrt{2}$.

$C=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\ x_1-x_2\ ^2}=\sqrt{\ x_1+x_2\ ^2-4x_1x_2}=\sqrt{1-4\ -2+\sqrt{2}\ }=2\sqrt{2}-1$.

$D=x_1^3+x_2^3=\ x_1+x_2\ ^3-3x_1x_2\ x_1+x_2\ =-1+3\ -2+\sqrt{2}\ =-7+3\sqrt{2}$.

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

Bài D.1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$. Không giải phương trình Tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$.

$B = {x_1}^2 + {x_2}^2$.

$C = |x_1 - x_2|$.

$D = {x_1}^3 + {x_2}^3$.

$E = {x_1}^4 + {x_2}^4$.

$F = \ 3x_1 + x_2 \ \ 3x_2 + x_1$.

Bài D.2. Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm x_1 ; x_2, không giải phương trình, tính $Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$

Bài D.3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A = \ 3x_1 - 2x_2 \ \ 3x_2 - 2x_1$.

$B = \frac{x_2}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1}$.

$C = |x_1 - x_2|$

$D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$.

E. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích của hai nghiệm.

Phương pháp: Áp dụng: nếu $x_1 + x_2 = S; x_1x_2 = P$ thì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$

Ví dụ minh hoạ

Bài 1: Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} S = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} + \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} = \frac{5}{7} \\ P = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} . \frac{1}{10 + 6\sqrt{2}} = \frac{1}{28} \end{cases}$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ là : $X^2 - \frac{5}{7}X + \frac{1}{28} = 0$

Bài 2: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$. Không giải phương trình Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Giải:

Ta có $a.c<0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{x_2+x_1-2}{x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1}=\dfrac{1}{-9} \\ P=\dfrac{1}{x_1-1}.\dfrac{1}{x_2-1}=\dfrac{1}{-9} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1-1}$ và $\dfrac{1}{x_2-1}$ là: $X^2+\dfrac{1}{9}X-\dfrac{1}{9}=0$.

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

Bài E.1. Gọi p và q là hai nghiệm của phương trình: $3x^2+7x+4=0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{p}{q-1}$ và $\dfrac{q}{p-1}$.

Bài E.2: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2+5x-6=0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1; y_2 thỏa mãn: $y_1=2x_1-x_2$ và $y_2=2x_2-x_1$.

Bài E.3: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2-3x-1=0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1; y_2 thỏa mãn:

a) $\begin{cases} y_1=x_1+2 \\ y_2=x_2+2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} y_1=\dfrac{x_1^2}{x_2} \\ y_2=\dfrac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$.

Bài E.4: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2+x-1=0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1; y_2 thỏa mãn:

a) $\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1} \\ \dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}=3x_1+3x_2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} y_1+y_2=x_1^2+x_2^2 \\ y_1^2+y_2^2+5x_2+5x_1=0 \end{cases}$.

Bài E.5: Cho phương trình : $x^2-3x+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Không giải phương trình trên, hãy lập phương trình bậc 2 có ẩn là y thoả mãn : $y_1=x_2+\dfrac{1}{x_1}$ và $y_2=x_1+\dfrac{1}{x_2}$

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ - GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ BÀI TOÁN PHỤ

A. **Giải và biện luận phương trình.**

Ví dụ minh hoạ:

Bài 1: Với tham số ở hệ số của phương trình bậc 2.

Cho phương trình : $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ ① với m là tham số .

Biện luận theo m sự có nghiệm của phương trình ①

Giải:

Bước 1: + Nếu m = 0 thay vào ① ta có : 4x – 3 = 0 ⇔ x = $\frac{3}{4}$

Bước 2 + Nếu $m\neq 0$ .Lập biệt số $\Delta' =(m-2)^2-m(m-3)=-m+4$

$\Delta'<0 \Leftrightarrow -m+4<0 \Leftrightarrow$ m > 4 : phương trình ① vô nghiệm

$\Delta'=0 \Leftrightarrow -m+4=0 \Leftrightarrow$ m = 4 : phương trình ① có nghiệm kép

$$x_1=x_2=\frac{-b'}{a}=\frac{m-2}{m}=\frac{4-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$\Delta'>0 \Leftrightarrow -m+4>0 \Leftrightarrow$ m < 4: phương trình ① có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{m-2-\sqrt{-m+4}}{m} \quad ; \quad x_2=\frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m}$$

Vậy : m > 4 : phương trình ①vô nghiệm

m = 4 : phương trình ①Có nghiệm kép x = $\frac{1}{2}$

$0\neq m<4$: phương trình ① có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{m-2-\sqrt{-m+4}}{m} \quad ; \quad x_2=\frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m}$$

m = 0 : Phương trình (1) có nghiệm đơn x = $\frac{3}{4}$

Bài 2: Với hệ số của phương trình bậc 2 đã cho khác 0.

Cho phương trình: $x^2+2x+m-1=0$ ② (m là tham số). Biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Giải:

Ta có $\Delta' = 1^2-(m-1) = 2-m$

$\Delta'<0 \Leftrightarrow 2-m<0 \Leftrightarrow m>2$ thì phương trình ② vô nghiệm.

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình ② có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a} = -1$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình ② có 2 nghiệm phân biệt

$x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -1 + \sqrt{2-m}$; $x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -1 - \sqrt{2-m}$

Kết luận: Vậy $m > 2$ phương trình ② vô nghiệm.

$m = 2$ thì phương trình ② có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a} = -1$

$m < 2$ thì phương trình ② có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -1 + \sqrt{2-m}$;

$x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -1 - \sqrt{2-m}$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình : $x^2 - 2(m+1) + 2m + 10 = 0$

Giải.

Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - 2m + 10 = m^2 - 9$

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 3$ .Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 - 9}$; $x_2 = m + 1 + \sqrt{m^2 - 9}$

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

- Với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm là $x_{1.2} = 4$
- Với m = -3 thì phương trình có nghiệm là $x_{1.2} = -2$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$ thì phương trình vô nghiệm

Kết kuận:

- Với $m = 3$ thì phương trình có nghiệm x = 4
- Với $m = -3$ thì phương trình có nghiệm $x = -2$
- Với $m < -3$ hoặc $m > 3$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt
  $x_1 = m + 1 - \sqrt{m^2 - 9}$ $x_2 = m + 1 + \sqrt{m^2 - 9}$
- Với -3< m < 3 thì phương trình vô nghiệm

Chú ý: *Khi giải và biện luận phương trình bậc hai chứa tham số ta cần lưu ý trường hợp tham số nằm ở phần hệ số của lũy thừa bậc hai của ẩn.*

B. Tìm giá trị tham số của phương trình để phương trình có nghiệm thoả mãn một điều kiện cho trước: (2 nghiệm cùng dấu, trái dấu, cùng dương, cùng âm, đối nhau, nghịch đảo, $\in(\alpha,\beta)$; $\in[\alpha,\beta]$ …)

Ta lập bảng xét dấu sau:

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S = x_1 + x_2$	$P = x_1x_2$	Δ	***Điều kiện chung***
trái dấu	$\pm$	$\mp$		$P < 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P < 0$.
cùng dấu,	$\pm$	$\pm$		$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$
cùng dương,	+	+	$S > 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$; $S > 0$
cùng âm	–	–	$S < 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$; $S < 0$.

Lưu ý: Nếu bài toán yêu cầu phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì ta xét $\Delta > 0$; còn nếu đề bài chỉ nói chung chung phương trình có 2 nghiệm thì ta xét $\Delta \geq 0$

Bài toán tổng quát: Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có:

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

2. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

3. Nghiệm duy nhất (nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau) $\Leftrightarrow \Delta = 0$

4. Có hai nghiệm phân biệt (khác nhau) $\Leftrightarrow \Delta > 0$

5. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$

6. *Hai nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$

7. Hai nghiệm dương(lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S > 0$ và $P > 0$

8. Hai nghiệm âm(nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S < 0$ và $P > 0$

9. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $S = 0$

10.Hai nghiệm nghịch đảo nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P = 1$

11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S < 0$

12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn

$\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S > 0$

(ở đó: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$)

Ví dụ minh hoạ:

Bài 1: Cho phương trình: x^2 -2(m-1)x – 3 – m = 0 (ẩn số x – tham số m)

a) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

d) Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1^2+x_2^2\ge 10$

Giải

a) Ta có: $\Delta' = (m-1)^2 - (-3-m) = \left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$

Do $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ với mọi m; $\frac{15}{4}>0 \Rightarrow \Delta>0$ với mọi m.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Hay phương trình luôn có hai nghiệm (đpcm)

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ a.c < 0 $\Leftrightarrow$ – 3 – m < 0 $\Leftrightarrow$ m > -3

Vậy m > -3

c) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Khi đó theo định lí Viet ta có: $S=x_1+x_2=2(m-1)$ và $P=x_1.x_2=-(m+3)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow$ S < 0 và P > 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2(m-1)<0\\-(m+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m<-3\end{cases}\Leftrightarrow m<-3$$

Vậy m < -3

d) Theo ý a) ta có phương trình luôn có hai nghiệm

Theo định lí Viet ta có: $S=x_1+x_2=2(m-1)$ và $P=x_1.x_2=-(m+3)$

Khi đó $A = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2+2(m+3)=4m^2-6m+10$

Theo bài A ≥ 10 $\Leftrightarrow 4m^2-6m\ge 0 \Leftrightarrow 2m(2m-3)\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge 0\\2m-3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}m\le 0\\2m-3\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge 0\\m\ge\frac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}m\le 0\\m\le\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{3}{2}\\m\le 0\end{array}\right.$$

Vậy $m\ge\frac{3}{2}$ hoặc $m\le 0$

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 + 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1; x_2 thoả mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Giải

a) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \geq 0 \\ m - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy m = 2

b) Ta có $\Delta' = 1^2 - (m-1) = 2 - m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$ (*)

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -2$ (1); $x_1x_2 = m - 1$ (2)

Theo bài: $3x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

Từ (1) và (3) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$

Thế vào (2) ta có: $5(-7) = m - 1 \Leftrightarrow m = -34$ (thoả mãn (*))

Vậy $m = -34$ là giá trị cần tìm.

C. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị tham số của phương trình.

Phương pháp: Ta chỉ ra phương trình có $a.c < 0$ hoặc $\Delta \geq 0$; $\Delta' \geq 0$

D. Lập hệ thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ sao cho $x_1; x_2$ độc lập đối giá trị tham số của phương trình.

Phương pháp: *Ta thường biến đổi để đưa về dạng $\alpha S \pm \beta P = \gamma$ với S và P là tổng và tích 2 nghiệm. α, β, γ là các số thực.*

E. Tìm giá trị tham số của phương trình thoả mãn biểu thức chứa nghiệm: (: $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$; $\alpha(x_1 + x_2) + \beta x_1 x_2 = \gamma$; $\alpha x_1 + \beta x_1 x_2 = \gamma$ …)

F. Tìm điều kiện của giá trị tham số của phương trình để biểu thức liên hệ giữa các nghiệm lớn nhất, nhỏ nhất.

Phương pháp: *Mục E và F ta thường sử dụng hệ thức Vi-et để biến đổi.*

G. Tìm công thức tổng quát của phương trình khi biết một nghiệm, tính nghiệm còn lại.

Phương pháp: Thay giá trị nghiệm đã biết vào phương trình từ đó tìm ra tham số. Từ tham số vừa tìm được áp dụng giải phương trình bậc hai tìm ra nghiệm còn lại.

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN PHẦN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ BÀI TOÁN PHỤ.

Câu 1: Cho phương trình $(2m-1)x^2-2mx+1=0$. Xác định m để phương trình trên có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Câu 2: Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-1=0$ (x là ẩn số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn: $(x_1-x_2)^2=x_1-3x_2$.

Câu 3: Tìm m để phương trình $x^2+5x+3m-1=0$ (x là ẩn số, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3-x_2^3+3x_1x_2=75$

Câu 4: Cho phương trình $x^2-10mx+9m=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1-9x_2=0$

Câu 5: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+m-1=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m=0$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$

Câu 6: Cho phương trình $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ (m là tham số). Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1-4x_2=11$

Câu 7: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Câu 8: Cho phương trình $\frac{1}{2}x^2-mx+\frac{1}{2}m^2+4m-1=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình đã cho với $m=-1$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=x_1+x_2$

Câu 9: Tìm tất cả các số tự nhiên m để phương trình $x^2-m^2x+m+1=0$ (m là tham số) có nghiệm nguyên.

Câu 10: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào m.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x_1^2+x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho)

Câu 11: Cho phương trình $x^2-mx+m-1=0$ (m là tham số).

a) Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2x_2+x_1x_2^2}$. Từ đó tìm m để $M>0$.

b) Tìm giá trị của m để biểu thức $P=x_1^2+x_2^2-1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 12: Cho phương trình $x^2-(2m+2)x+2m=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\le\sqrt{2}$

Câu 13: Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m=0$ (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để $A=x_1^2x_2+x_1x_2^2+2007$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 14: Cho phương trình $x^2+2mx+2m-1=0$ (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị của m để $A=x_1^2x_2+x_1x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 15: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2$.

Câu 16: Cho phương trình $x^2-mx+m-2=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $\dfrac{x_1^2-2}{x_1-1}.\dfrac{x_2^2-2}{x_2-1}=4$.

Câu 17: Cho phương trình $x^2-mx-1=0$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1):

Tính giá trị của biểu thức: $P=\dfrac{x_1^2+x_1-1}{x_1}-\dfrac{x_2^2+x_2-1}{x_2}$

Câu 18: Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-1=0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn:

$(x_1-x_2)^2=x_1-3x_2$.

Câu 19: Tìm m để phương trình $x^2-2x-2m+1=0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_2^2(x_1^2-1)+x_1^2(x_2^2-1)=8$.

Câu 20: Xác định giá trị m trong phương trình $x^2-8x+m=0$ để $4+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình. Với m vừa tìm được, phương trình đã cho còn một nghiệm nữa. Tìm nghiệm còn lại.

Câu 21: Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+m-1=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m sao cho $A=(2x_1-x_2)(2x_2-x_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 22: Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-\dfrac{1}{2}=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng hhương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

b) Tìm m để hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

c) Tìm m để hai nghiệm đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3.

Câu 23: Cho phương trình $x^2-2x+m+3=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=-1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm m để hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3+x_2^3=8$

Câu 24: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+(2m-1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $P=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 25: Cho phương trình $x^2-(m+5)x+2m+6=0$ (x là ẩn số)

a) Chứng minh rằng: phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2=35$.

Câu 26: Cho phương trình $x^2+2x+m-2=0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 là một nghiệm và tìm nghiệm còn lại

Câu 27: Cho phương trình $x^2+mx+m-1=0$ (1) với x là ẩn số

a) Giải phương trình khi $m=2$

b) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

c) Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình. Tính giá trị của biểu thức $A=(x_1+1)^2(x_2+1)^2+2016$.

Câu 28: Cho phương trình $x^2+(2m-1)x-2m=0$ với x là ẩn số; m là tham số. Tìm m để phương trình có nghiệm $x=2$. Tìm nghiệm còn lại.

Câu 29: Cho phương trình $x^2-(m+1)x+m-2=0$ (x là ẩn số, m là tham số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

b) Tính tổng và tích của hai nghiệm x_1,x_2 của phương trình theo m

c) Tính biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-6x_1x_2$ theo m và tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 30: Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x-4m=0$ (x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình với $m=-1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 31: Cho phương trình $x^2+2x-m^2-1=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo m.

c) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thỏa: $x_1=-3x_2$

Câu 32: Cho phương trình: $x^2+(m+2)x+m-1=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh: phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có $x_1^2+x_2^2-13=x_1x_2$.

Câu 33: Cho phương trình $x^2+x+m-2=0$ với m là tham số và x là ẩn số

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm

b) Giả sử x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $x_1x_2^3+x_1^3x_2=-10$

Câu 34: Cho phương trình $x^2+4x+m+3=0$ (x là ẩn)

a) Tìm m để phương trình có nghiệm x_1,x_2

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2=51$

Câu 35: Cho phương trình: $x^2+2(m+3)x+m^2-3m+1=0$ (x là ẩn số, m là tham số)

a) Tìm m để phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để $A=x_1(x_2-1)-x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 36: Cho phương trình bậc 2 có ẩn x : $x^2-2mx+2m-1=0$ (1)

a) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có nghiệm x_1,x_2 với mọi giá trị của m

b) Đặt $A=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$, tìm m sao cho $A=27$

Câu 37: Cho phương trình $x^2-(m-3)x+m-5=0$ (x là ẩn)

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2=11$

Câu 38: Cho phương trình: $x^2+mx+2m-4=0$ (x là ẩn số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m

b) Tính tổng và tích của hai nghiệm theo m

c) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Định m để $x_1^2+x_2^2=5$

Câu 39: Cho phương trình $x^2-2x+4m-1=0$ (x là ẩn số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2+2x_1+2x_2=12$

Câu 40: Cho phương trình bậc hai: $x^2-2mx+4m-4=0$ (x là ẩn)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2+2mx_2-8m+5=0$

Câu 41: Cho phương trình: $x^2-2(m-4)x+m+6=0$

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Tính theo m biểu thức $A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ rồi tìm $m\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$.

Câu 42: Cho phương trình: $x^2-2(m-2)x-2m=0$ (1) với x là ẩn số.

a) Chứng tỏ phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

b) Tìm giá trị của m để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức $x_2-x_1=x_1^2$.

Câu 43: Cho phương trình: $x^2-2x-2m^2=0$ (1) với x là ẩn số.

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Tìm giá trị của m để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức $x_1^2=4x_2^2$.

Câu 44: Cho phương trình: $x^2-(3m-2)x-2m^2-m-3=0\ (1)$,(với x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

b) Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của (1). Tìm m để $x_1=3x_2$.

Câu 45: Cho phương trình: $x^2+2(m-2)x-m^2=0\quad(1)$ với x là ẩn số.

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1)=x_1^2x_2+x_2^2x_1+2$.

Câu 46: Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0\ (1)$ (với x là ẩn số)

a) Tìm điều kiện để (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $(2x_1-1)(x_2+1)+(2x_2-1)(x_1+1)=x_1^2+x_2^2+14$.

Câu 47: Tìm m để phương trình $x^2-mx+3=0$ (m là tham số) có hai nghiệm thoả mãn $3x_1+x_2=6$

Câu 48: Cho phương trình $x^2-(5m-1)x+6m^2-2m=0\ (1)$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1{}^2+x_2{}^2=1$.

Câu 49: Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+m-3=0\quad(1)$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x_1^2+x_2^2$.

c) Tìm hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m .

Câu 50: Cho phương trình bậc hai (ẩn x , tham số m): $x^2-2mx+2m-1=0\ (1)$

Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1=3x_2$

Câu 51: Cho phương trình ẩn x : $x^2-2mx+4=0\ (1)$

a) Giải phương trình đã cho khi $m=3$.

b) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=2$.

Câu 52: Cho phương trình ẩn x : $x^2-2mx-1=0\ (1)$

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1{}^2+x_2{}^2-x_1x_2=7$.

Câu 53: Cho phương trình ẩn x : $x^2-x+1+m=0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với $m=0$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $x_1x_2\left(x_1x_2-2\right)=3\left(x_1+x_2\right)$.

Câu 54: Cho phương trình $x^4-(m^2+4m)x^2+7m-1=0$. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt và tổng bình phương tất cả các nghiệm bằng 10

Câu 55: Cho phương trình $2x^2+\left(2m-1\right)x+m-1=0$. Không giải phương trình, tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1-4x_2=11$.

Câu 56: Cho phương trình: $x^2-2\left(m-1\right)x+m^2-3=0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Câu 57: Cho phương trình: $x^2-mx+m-1=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$.

Câu 58: Cho phương trình $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}x^2-mx+\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}m^2+4m-1=0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với $m=-1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=x_1+x_2$.

Câu 59: Xác định các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2-\left(m+5\right)x-m+6=0$. Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

a) Nghiệm này lớn hơn nghiệm kia một đơn vị.

b) $2x_1+3x_2=13$.

Câu 60: Cho phương trình: $x^2-2\left(m-1\right)x+m-3=0$ (1)

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào m.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x_1^2+x_2^2$ (với x_1, x_2 là 2 nghiệm của pt (1)

Câu 61: Cho phương trình: $x^2-(2m+1)+m^2+m-6=0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm.

b) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^3-x_2^3|=50$.

Câu 62: Cho phương trình có ẩn x : $x^2-mx+m-1=0$ (m là tham số)

1. Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.
2. Đặt $A=x_1^2+x_2^2-6x_1.x_2$

a) Chứng minh $A=m^2-8m+8$

b) Tìm m sao cho $A=8$.

c) Tính giá trị nhỏ nhất của A và giá trị của m tương ứng.

d) Tìm m sao cho $x_1=3x_2$.

Câu 63: Cho phương trình bậc 2 có ẩn x: $x^2-2mx+2m-1=0$

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.
2. Đặt $A=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$

a) Chứng minh $A=8m^2-18m+9$

b) Tìm m sao cho $A=27$.

c) Tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất.

d) Tìm m sao cho $x_1=3x_2$.

Câu 64: Cho phương trình bậc hai ẩn x (m tham số): $x^2+2(m-1)x-2m+5=0 \quad (1)$

1. Giải và biện luận số nghiệm của x_1, x_2 của (m) theo tham số m .
2. Tìm m sao cho x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2.$

b) $x_1+x_2+2x_1x_2\le 6$

c) $2x_1+3x_2=-5.$

d) Tìm m sao cho $12-10x_1x_2-(x_1^2+x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 65: Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ (m là tham số)

a) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để $x_1^2+x_2^2=4,$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Câu 66: Cho phương trình: $x^2-mx+m-1=0$ (1) (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình (1) có 2 nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$x_1^2x_2+x_1x_2^2=2$.

Câu 67: Cho phương trình: $x^2-2mx+2m-3=0$

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình theo m.

c) Tìm m để $x_1+x_2-2x_1x_2=3$ (x_1, x_2 là nghiệm của phương trình trên).

Câu 68: Cho phương trình: $x^2-2(m-2)x+2m-5=0$ (x là ẩn số)

a) Chứng tỏ phương trình trên có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

b) Tìm m để $A=x_1x_2-x_1^2-x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 69: Cho phương trình: $x^2-(2m+1)x+m=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để $A=x_1^2-x_1+2mx_2+x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 70: Cho phương trình: $x^2-(2m-3)x+m^2-m+1=0$ (x là ẩn)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho $B=x_1^2+x_2^2-5x_1x_2$ tìm m để B đạt giá trị lớn nhất.

Câu 71: Cho phương trình: $x^2+2(m+1)x+m^2+4m+3=0$

a) Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=x_1x_2-2(x_1+x_2)$ và giá trị của m tương ứng.

Câu 72: Cho phương trình: $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$

a) Chứng minh phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2.

b) Viết tổng và tích hai nghiệm theo m.

c) Tìm m để 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn: $\dfrac{4x_1-1}{x_2}+\dfrac{4x_2-1}{x_1}=-9$

Câu 73: Cho phương trình $x^2-2mx+2m-1=0$

a) Chứng minh phương trình trên luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

b) Đặt $A=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$. Tìm m sao cho A = 27.

Câu 74: Cho phương trình $x^2-2mx+m-2=0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1) thỏa mãn:

$$(1+x_1)(2-x_2)+(1+x_2)(2-x_1)=x_1^2+x_2^2+2$$

Câu 75: Cho phương trình: $x^2-mx+m-2=0$ (1) (x là ẩn số)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của (1) thỏa mãn: $\dfrac{x_1^2-2}{x_1-1}.\dfrac{x_2^2-2}{x_2-1}=4$.

Câu 76: Cho phương trình $2(mx+1)-x^2=0$ (1) (x là ẩn số).

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tính giá trị của biểu thức:
$A=\left(x_1^2+4x_1-2\right)\left(x_2^2+4x_2-2\right)+2\left(x_1^2+x_2^2\right)$

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

Cho phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

PP1: Ẩn phụ: Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$ Ta được phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

- Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases}$
- Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ P = 0\\ S > 0\end{cases}$
- Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có một một nghiệm kép dương hoặc có ai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta = 0\\ S > 0\end{cases}\\ P < 0\end{array}\right.$
- Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm kép bằng 0 hoặc có một nghiệm bằng không và nghiệm còn lại âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta = 0\\ S = 0\end{cases}\\ \begin{cases}P = 0\\ S < 0\end{cases}\end{array}\right.$
- Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta < 0\\ \begin{cases}\Delta \geq 0\\ P > 0\\ S < 0\end{cases}\end{array}\right.$
- Nếu phương trình có 4 nghiệm thì tổng các nghiệm luôn bằng 0 và tích các nghiệm luôn bằng c/a.

PP2: Giải trực tiếp: Biến đổi đưa về dạng phương trình tích $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\ B=0\end{array}\right.$

Ví dụ minh họa

Bài 1: Giải phương trình: $x^4-13x^2+36=0$ (1)

Giải:

Cách 1: Đặt t = x^2 $\Rightarrow$ t ≥ 0 phương trình (1) có dạng :

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$ Ta có

$$\Delta = (-13)^2 - 4.36 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{-(-13)+5}{2} = 9;\ t_2 = \frac{-(-13)-5}{2} = 4$$

- Với $t_1 = 9 \Leftrightarrow$ $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
- Với $t_2 = 4 \Leftrightarrow$ $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm : x_1=-2 ; x_2=-3; x_3 =2; x_4 =3.

Cách 2: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 12x^2 + 36) - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 6)^2 - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 6 - x)(x^2 - 6 + x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6 - x = 0 \\ x^2 - 6 + x = 0 \end{array}\right.$$

Giải phương trình : $x^2 - 6 - x = 0$ ta được 2 nghiệm: $x = -2;\ x = 3$.

Giải phương trình : $x^2 - 6 + x = 0$ ta được 2 nghiệm $x = 2;\ x = -3$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm : $x_1 = -3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3$.

Bài 2: Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ (2)

Giải:

*Cách 1***:** Đặt t = x^2 $\Rightarrow$ t ≥ 0 phương trình (2) có dạng : $t^2 - 5t + 6 = 0$

Ta có:

$$\Delta = (-5)^2 - 4.6 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{-(-5)+1}{2} = 3;\ t_2 = \frac{-(-5)-1}{2} = 2$$

- Với $t_1 = 3 \Leftrightarrow$ $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
- Với $t_2 = 2 \Leftrightarrow$ $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy phương trình (2) có 4 nghiệm: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$.

Cách 2: $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3x^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^4 - 2x^2\right) - \left(3x^2 - 6\ \right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 2\right) - 3\left(x^2 - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{array}\right.$

Giải phương trình : $x^2 - 2 = 0$ ta được 2 nghiệm: x= $\sqrt{2}$; x=- $\sqrt{2}$.

Giải phương trình : $x^2 - 3 = 0$ ta được 2 nghiệm x= $\sqrt{3}$; x= - $\sqrt{3}$.

Vậy phương trình (2) có 4 nghiệm: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \ (\ 3\ )$

Giải:

Đặt $x^2 = t \geq 0 \Rightarrow x^4 = t^2$, phương trình (3) có dạng $t^2 - 10t + 9 = 0$ (3')

Giải phương trình (3') , có $a + b + c = 1 - 10 + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 9$

- Với $t = t_1 = 1$ thì $x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = -1$
- Với $t = t_2 = 9$ thì $x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = 3$; $x_4 = -3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1).$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ 2).$x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

3).$5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ 4).$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

5).$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ 6).$x^4 + 10x^2 + 24 = 0$

2. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

Cách giải: *Thực hiện các bước sau:*

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ minh hoạ:

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $\dfrac{14}{x^2-9}=1-\dfrac{1}{3-x}$

b. $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

Giải :

a. $\dfrac{14}{x^2-9}=1-\dfrac{1}{3-x}$

ĐKXĐ : $x\neq\pm 3$

$\dfrac{14}{x^2-9}=1-\dfrac{1}{3-x}\Leftrightarrow\dfrac{14}{(x-3)(x+3)}=1+\dfrac{1}{x-3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{14}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{(x-3)(x+3)+(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow 14 = (x-3)(x+3) + (x+3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 + x + 3 - 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4.1.(-20)$

$= 1 + 80 = 81 > 0$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

$\Rightarrow$ PT có 2 nghiệm có 2 nghiệm phân biệt :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+9}{2.1}=4$ (tm ĐK)

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}=\dfrac{-1-9}{2.1}=-5$ (tm ĐK)

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 4$; $x_2 = -5$

b. $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

ĐKXĐ: $x\neq -1$ & $x\neq 4$

$\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}\Leftrightarrow\dfrac{2x(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

$\Rightarrow 2x(x-4) = x^2 - x + 8$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - x^2 + x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$

Ta có:
$a - b + c = 1 - (-7) + (-8) = 0$
$\Rightarrow$ PT có 2 nghiệm :
$x_1 = -1$ (không tm ĐKXĐ)
$x_2 = -\frac{c}{a} = 8$(tm ĐKXĐ)
Vậy PT đã cho có 1 nghiệm: $x = 8$
BÀI TẬP TỰ LUYỆN
Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$ $\quad$ $(x_1 = -3;\ x_2 = 7)$
b. $\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+4} = \frac{8x+8}{x^2+2x-8}$ *(vô nghiệm)*

3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

Bài tập: Giải các phương trình sau:

a. $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$

b. $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

c. $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

d. $(2x^2 + 3)^2 - 10x^2 - 15x = 0$

Giải:

a. $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$

$\Leftrightarrow 12x^3 - 10x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(12x^2 - 10x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $12x^2 - 10x - 2 = 0$

+) $x_1 = 0$

+) $12x^2 - 10x - 2 = 0$

Ta có:

$a + b + c = 12 - 10 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ PT có 2 nghiệm:

$x_2 = 1$; $x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\frac{1}{6}$

b. $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ hoặc $x^2 - 2 = 0$

+) $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$

+) $x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 2 = (\pm\sqrt{2})^2$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm : $x_1 = -3$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$

c. $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)^2 - (x^2 - x + 5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5 + x^2 - x + 5)(x^2 + 2x - 5 - x^2 + x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + x)(3x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x(2x + 1)(3x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2x + 1 = 0$ hoặc $3x - 10 = 0$

+) $x_1 = 0$

+) $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

+) $3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{10}{3}$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{10}{3}$

d. $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 3)^2 - 5x(2x^2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 3)(2x^2 + 3 - 5x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 0$ hoặc $2x^2 - 5x + 3 = 0$

+) $2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 - 3 \Leftrightarrow x^2 = -1,5$ (vô nghiệm)

+) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
Ta có: a + b + c = 2 – 5 + 3 = 0
$\Rightarrow$ PT có 2 nghiệm:
$x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$
Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN:

Bài T.1: Giải các phương trình:

a) $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$.
b) $x^4 - 22x^2 - 8x + 77 = 0$
c) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$.
d) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = 0$.

Bài T.2:

a) Giải phương trình: $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$ (1).
b) Giải phương trình: $x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$
c) Giải phương trình: $2x^4 - 10x^3 + 11x^2 + x - 1 = 0$ (4)

IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng 1: *Phương trình đối xứng (hay phương trình hồi quy):*

$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm kbx + k^2a = 0 (k > 0)$. Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2 (x \neq 0)$ ta được: $a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) \pm b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0$. Đặt $t = x + \frac{k}{x}$ với $|t| \geq 2\sqrt{k}$ ta có:

$x^2 + \frac{k^2}{x^2} = \left(x + \frac{k}{x}\right)^2 - 2k = t^2 - 2k$ thay vào ta được phương trình: $a(t^2 - 2k) \pm bt + c = 0$

Dạng 2: *Phương trình:* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$, *trong đó* $a+b=c+d$

Phương trình $\Leftrightarrow \left[x^2 + (a+b)x + ab\right]\left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = e$.

Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, ta có: $(t+ab)(t+cd) = e$

Dạng 3: *Phương trình* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = ex^2$, *trong đó* $ab = cd$. *Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho* $x^2 (x \neq 0)$. *Phương trình tương đương:*

$$\left[x^2 + (a+b)x + ab\right]\left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = ex^2 \Leftrightarrow \left[x + \frac{ab}{x} + a + b\right]\left[x + \frac{cd}{x} + c + d\right] = e$$

Đặt $t = x + \frac{ab}{x} = x + \frac{cd}{x}$. Ta có phương trình: $(t+a+b)(t+c+d) = e$

Dạng 4: *Phương trình* $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$. *Đặt* $x = t - \frac{a+b}{2}$ *ta đưa về phương trình trùng phương*

Bài 1: Giải các phương trình:

1) $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$

2) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

4) $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6) + 6x^2 = 0$

Lời giải:

1) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm phương trình nên chia hai vế pương trình cho x^2 ta được:

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}, (|t| \geq 2) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$. Ta có: $2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$. Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

2) Đặt $x = t - 2$ ta được: $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Chú ý: Với bài 2 ta có thể giải bằng cách khác như sau: Trước hết ta có BĐT:

$$\frac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\frac{a+b}{4}\right)^4 \text{ với } a+b\ge 0.$$

Áp dụng BĐT này với: $a=-x-1, b=x+3 \Rightarrow VT\ge VP$. Đẳng thức xảy ra khi $x=-2$.

3) Ta có phương trình: $\Leftrightarrow\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=24$. Đặt $t=x^2+3x$. Ta được:

$t(t+2)=24\Leftrightarrow t^2+2t-24=0\Leftrightarrow t=-6, t=4$

* $t=-6\Leftrightarrow x^2+3x+6=0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* $t=4\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x=1; x=-4$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=-4$.

4) Phương trình $\Leftrightarrow\left(x^2-2x-12\right)\left(x^2+x-12\right)+6x^2=0$

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x-\frac{12}{x}-4\right)\left(x-\frac{12}{x}+1\right)+6=0$. Đặt $t=x-\frac{12}{x}$, ta có:

$(t-4)(t+1)+6=0\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

* $t=1\Leftrightarrow x-\frac{12}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$

* $t=2\Leftrightarrow x^2-2x-12=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{13}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=-3; x=4; x=1\pm\sqrt{13}$

Bài 2)

a) Giải phương trình: $3\left(x^2-x+1\right)^2-2(x+1)^2=5\left(x^3+1\right)$

b) Giải phương trình: $x^6+3x^5-6x^4-21x^3-6x^2+3x+1=0$

c) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$

d) Giải phương trình: $\left(x^3+5x+5\right)^3+5x^3+24x+30=0$.

Lời giải:

a) Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3+1 ta được:

$3\frac{x^2-x+1}{x+1}-2\frac{x+1}{x^2-x+1}$. Đặt $t=\frac{x^2-x+1}{x+1}\Rightarrow 3t-\frac{2}{t}=5\Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0\Leftrightarrow t=2, t=-\frac{1}{3}$

* $t=2\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

* $t=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ phương trình vô nghiệm

b) Đây là phương trình bậc 6 và ta thấy các hệ số đối xứng do đó ta có thể áp dụng cách giải mà ta đã giải đối với phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng.

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế của phương trình cho x^3 ta được:

$x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)-21=0$. Đặt $t=x+\frac{1}{x},|t|\ge 2$. Ta có:

$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2; x^3+\frac{1}{x^3}=t\left(t^2-3\right)$ nên phương trình trở thành:

$$t\left(t^2-3\right)+3\left(t^2-2\right)-6t-21=0 \Leftrightarrow t^3-3t^2-9t-27=0 \Leftrightarrow (t+3)^2(t-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-3 \end{array}\right.$$

* $t=3 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

* $t=-3 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Vậy phương trình có bốn nghiệm $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Phương trình $\Leftrightarrow \left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+8\right)\left(x^2+6x+9\right)=360$

Đặt $t=x^2+6x$, ta có phương trình: $(y+5)(y+8)(y+9)=360$

$$\Leftrightarrow y\left(y^2+22y+157\right)=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0; x=-6$.

d) Ta có: $x^3+5x+30=5\left(x^3+5x+5\right)-x+5$ nên phương trình tương đương

$\left(x^3+5x+5\right)^3+5\left(x^3+24x+\right)x^3+24x+30=0$. Đặt $u=x^3+5x+5$. Ta được hệ:

$$\begin{cases} u^3+5u+5=x \\ x^3+5x+5=u \end{cases} \Rightarrow (u-x)\left(u^2+ux+x^2+6\right)=0 \Leftrightarrow u=x.$$

$\Leftrightarrow x^3+4x+5=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+5\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Dạng 5: *Phương trình chứa mẫu số là phương trình bậc hai*

a) Phương trình: $\frac{ax}{x^2+mx+p}+\frac{bx}{x^2+nx+p}=c$ với $abc\ne 0$.

Phương pháp giải: Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Với $x\ne 0$, ta chia cả tử số và mẫu số cho x thì thu được:

$\dfrac{a}{x+m+\dfrac{p}{x}}+\dfrac{b}{x+n+\dfrac{p}{x}}=c$. Đặt $t=x+\dfrac{k}{x}\Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{k^2}{x^2}+2k\ge 2|k|+2k$. Thay vào phương trình để quy về phương trình bậc 2 theo t.

b) Phương trình: $x^2+\left(\dfrac{ax}{x+a}\right)^2=b$ với $a\ne 0, x\ne -a$.

Phương pháp : Dựa vào hằng đẳng thức $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$. Ta viết lại phương trình thành:

$\left(x-\dfrac{ax}{x+a}\right)^2+2a.\dfrac{x^2}{x+a}=b\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)^2+2a\dfrac{x^2}{x+a}-b=0$. Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+a}$ quy về phương trình bậc 2.

Bài 1) Giải các phương trình:

a) $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2013).

b) $\dfrac{12x}{x^2+4x+2}-\dfrac{3x}{x^2+2x+2}=1$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh 2010).

c) $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$ (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội 2008).

d) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

Giải:

a) Điều kiện $x\ne -5$

Ta viết lại phương trình thành $\left(x-\dfrac{5x}{x+5}\right)^2+\dfrac{10x^2}{x+5}-11=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x+5}\right)^2+\dfrac{10x^2}{x+5}-11=0$. Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+5}$ thì phương trình có dạng $t^2+10t-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-11\end{array}\right.$

Nếu $t=1$ ta có: $\dfrac{x^2}{x+5}=1\Leftrightarrow x^2-x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Nếu $t=-11\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{x+5}=-11$ $\Leftrightarrow x^2+11x+55=0$ phương trình vô nghiệm.

b) Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x\ne 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số vế trái cho x thì thu được: $\dfrac{12}{x+4+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{3}{x+2+\dfrac{2}{x}}=1$. Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}+2$ thì phương trình trở thành:

$\dfrac{12}{t+2}-\dfrac{3}{t}=1\Leftrightarrow 12t-3t-6=t^2+2t\Leftrightarrow t^2-7t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=6\end{array}\right.$.

Với $t=1$ ta có: $x+\frac{2}{x}+2=1 \Leftrightarrow t^2+t+2=0$ vô nghiệm. Với $t=6$ ta có:

$x+\frac{2}{x}+2=6 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$.

c) $\left(\frac{x}{x+2}-(x+2)\right)^2-(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+2}+x-3\right)\left(\frac{x}{x+2}-3x-1\right)=0$.

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x=\pm\sqrt{6}; x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

d) Sử dụng HĐT $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \left[x+\frac{x}{x-1}\right]^3-3\frac{x^2}{x-1}\left(x+\frac{x}{x-1}\right)+\frac{3x^2}{x-1}-2=0$ hay

$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2+\frac{3x^2}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}-1\right)^3=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}-1=1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN PHẦN III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Giải các phương trình sau:

1) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+3\right)=6$.

2) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1$.

3) $(x-1)^4+(x+3)^4=82$.

4) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$.

5) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)=2x^2$.

6) $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=4x^2$.

7) $3\left(x^2+2x-1\right)^2-2\left(x^2+3x-1\right)^2+5x^2=0$.

8) $3x^4-4x^3-5x^2+4x+3=0$.

9) $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$.

10) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$.

11) $\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+1}-\dfrac{x+8}{x-2}-\dfrac{x-8}{x+2}=-\dfrac{8}{3}$.

12) $\dfrac{x+1}{x(x+2)}+\dfrac{x+6}{x^2+12x+35}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$.

13) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}-\dfrac{x^2+3x+3}{x+3}-\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}=0$.

14) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

15) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2$.

16) $\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-4\right)=6(x-1)^2$.

17) $x^4-9x^3+16x^2+18x+4=0$.

18) $\dfrac{x^2-12}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$.

19) $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$.

20) $x^2\left(x^4-1\right)\left(x^2+2\right)+1=0$.

21) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2+5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2-20\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – PHẦN A

BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

I. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA THAM SỐ

B. Giải phương trình bậc hai dạng tổng quát $\text{ax}^2+bx+c=0$

Bài B.1:

a) $x^2-5x+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4.1.6=1>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+1}{2}=3$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5-1}{2}=2$.

b) $x^2-2x-1=0$

$\Delta'=b'^2-ac=1^2+1=2>0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=1+\sqrt{2}$, $x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=1-\sqrt{2}$.

c) $x^2-2x+10=0$

$\Delta'=b'^2-ac=1^2-10=-9<0$

Phương trình vô nghiệm.

d) $9x^2+12x+4=0$

$\Delta'=b'^2-ac=6^2-9.4=0$

Phương trình có nghiệm kép: $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}=\dfrac{-6}{9}=\dfrac{-2}{3}$.

Bài B2:

a) $x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0$

Ta có: $a-b+c=1-\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ nên phương trình có hai nghiệm:

$x_1=-1$; $x_2=\dfrac{-c}{a}=\sqrt{2}$.

b) $2x^2+\left(\sqrt{3}-2\right)x-\sqrt{3}=0$

Ta có: $a+b+c=2+\left(\sqrt{3}-2\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=1$; $x_2=\dfrac{c}{a}=-\sqrt{3}$.

c) $x^2+x-6=0$

Ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-1 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-6 \end{cases}$ suy ra $x_1=2$; $x_2=-3$.

d) $x^2-9x+20=0$. Ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=9 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=20 \end{cases}$ suy ra $x_1=4$; $x_2=5$.

C. Giải phương trình bậc hai khuyết b hoặc c

Bài C.1:

a. $5x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(5x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 5x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{3}{5}$

b. $2x^2 – 6x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x – 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

c. $7x^2 – 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(7x – 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 7x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{5}{7} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{5}{7}$

d. $4x^2 – 16x = 0$

$\Leftrightarrow 4x(x – 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

e. $– 0,4x^2 + 1,2x = 0$

$\Leftrightarrow – 0,4x(x – 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -0,4x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

f. $3,4x^2 + 8,2x = 0$

$\Leftrightarrow 0,2x(17x + 41) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0,2x = 0 \\ 17x + 41 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{41}{17} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{41}{17}$

D. Cho phương trình bậc hai, tính giá trị của biểu thức chứa nghiệm ($\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; $x_1^2+x_2^2$ …)

Bài D.1.

a) Ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 3 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -7 \end{cases}$

$$A = \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} = \frac{x_2+x_1-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1} = \frac{1}{-9}.$$

$$B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = 23.$$

$$C = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{37}.$$

$$D = x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = 72.$$

$$E = x_1^4 + x_2^4 = (S^2-2P)^2 - 2P^2 = 527$$

$$F = (3x_1+x_2)(3x_2+x_1) = 10x_1x_2 + 3(x_1^2+x_2^2) = -1.$$

Bài D.2

$$Q = \frac{6x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2}{5x_1x_2^3+5x_1^3x_2} = \frac{6(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{5x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]} = \frac{6.(4\sqrt{3})^2-2.8}{5.8\left[(4\sqrt{3})^2-2.8\right]} = \frac{17}{80}$$

Bài D.3:

a) Ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-5}{3} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -2 \end{cases}$

$$A = (3x_1-2x_2)(3x_2-2x_1) = 13x_1x_2 - 6(x_1^2+x_2^2) = 13P - 6(S^2-2P) = \frac{-200}{3}$$

$$B = \frac{x_2}{x_1-1} + \frac{x_1}{x_2-1} = \frac{(x_2+x_1)^2 - 2x_1x_2 - (x_2+x_1) - 2}{x_1x_2 - (x_1+x_2)+1} = \frac{38}{3}.$$

$$C = |x_1-x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{97}}{3}.$$

$$D = \frac{x_1+2}{x_1} + \frac{x_2+2}{x_2} = \frac{2x_1x_2 + 2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{11}{3}.$$

E. Lập phương trình bậc hai khi biết tổng và tích của hai nghiệm.

Bài E.1.

Ta có $a.c<0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

$$\begin{cases} S=p+q=\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{7}{3} \\ P=p.q=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Suy ra: $$\begin{cases} \dfrac{p}{q-1}+\dfrac{q}{p-1}=\dfrac{2pq-\ \ p+q}{pq-\ \ p+q\ \ +1}=\dfrac{2\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{3}}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{3}+1}=\dfrac{15}{14} \\ \dfrac{p}{q-1}.\dfrac{q}{p-1}=\dfrac{pq}{pq-\ \ p+q\ \ +1}=\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm $\dfrac{p}{q-1}$ và $\dfrac{q}{p-1}$ là : $X^2-\dfrac{15}{14}X+\dfrac{2}{7}=0$.

Bài E.2:

Ta có $a.c<0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Có : $$\begin{cases} S=y_1+y_2=\dfrac{-5}{3} \\ P=y_1y_2=-\dfrac{176}{9} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1 ; y_2 là : $X^2+\dfrac{5}{3}X-\dfrac{176}{9}=0$.

Bài E3:

Ta có $a.c<0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $$\begin{cases} S=y_1+y_2=\dfrac{11}{2} \\ P=y_1y_2=\dfrac{13}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1 ; y_2 là : $X^2-\dfrac{11}{2}X+\dfrac{13}{2}=0$.

b)

Ta có: $$\begin{cases} S=y_1+y_2=\dfrac{9}{8} \\ P=y_1y_2=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1 ; y_2 là : $X^2-\dfrac{9}{8}X-\dfrac{1}{2}=0$.

Bài E.4:

Ta có $a.c < 0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

a) Ta có: $\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} \\ \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{y_2}{y_1} = 3x_1 + 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = -3 \\ \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{y_2}{y_1} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = -3 \\ y_1 y_2 = -9 \end{cases}$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1; y_2 là : $X^2 + 3X - 9 = 0$.

b) $\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + 5x_2 + 5x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1^2 + y_2^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 y_2 = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1; y_2 là : $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Bài E.5:

Ta có $\Delta > 0 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức VI- ÉT ta có:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = (x_2 + \frac{1}{x_1})(x_1 + \frac{1}{x_2}) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy phương trình cần lập có dạng: $y^2 - Sy + P = 0$

hay $y^2 - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$

II. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ - GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ BÀI TOÁN PHỤ

BÀI TẬP PHẦN PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ.

Câu 1:

- Xét $2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$ phương trình trở thành $-x+1=0 \Rightarrow x=1 \notin (-1;0)$
- Xét $2m-1\neq 0 \Rightarrow m\neq \frac{1}{2}$ khi đó ta có:

  $\Delta' = m^2-(2m-1)=m^2-2m+1=(m-1)^2 \geq 0$ mọi m.

  Suy ra phương trình có nghiệm với mọi m.

  Ta thấy nghiệm $x=1$ không thuộc khoảng $(-1;0)$

  Với $m\neq\frac{1}{2}$ phương trình còn có nghiệm là $x=\frac{m-m+1}{2m-1}=\frac{1}{2m-1}$

  Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-1;0)$ suy ra

  $$-1\leq \frac{1}{2m-1}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2m-1}+1>0\\ 2m-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2m}{2m-1}>0\\ 2m-1<0\end{cases} \Rightarrow m<0$$

  Vậy phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng $(-1;0)$ khi và chỉ khi $m<0$.

Câu 2:

$\Delta=(2m-1)^2-4.(m^2-1)=5-4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<\frac{5}{4}$

a) Phương trình hai nghiệm $\Leftrightarrow m<\frac{5}{4}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\ x_1x_2=m^2-1\end{cases}$

Theo đề bài:

$(x_1-x_2)^2=x_1-3x_2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=x_1-3x_2$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2-4(m^2-1)=x_1-3x_2$

$\Leftrightarrow x_1-3x_2=5-4m$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\ x_1-3x_2=5-4m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\frac{m+1}{2}\\ x_2=\frac{3(m-1)}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{m+1}{2}\cdot\dfrac{3(m-1)}{2}=m^2-1$

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)=4\left(m^2-1\right)$

$\Leftrightarrow m^2-1=0$

$\Leftrightarrow m=\pm 1$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m=\pm 1$ là các giá trị cần tìm

Câu 3:

$\Delta=5^2-4.1.(3m-1)=29-12m$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta\ge 0\Rightarrow m\le\dfrac{29}{12}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1x_2=3m-1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^3-x_2^3+3x_1x_2=75$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\left(\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2\right)+3x_1x_2=75$

$\Rightarrow \left(x_1-x_2\right)\left(25-x_1x_2\right)+3x_1x_2=75$

$\Leftrightarrow 25\left(x_1-x_2\right)-\left(x_1-x_2\right)x_1x_2+3x_1x_2=75$

$\Rightarrow x_1-x_2=3$

Kết hợp $x_1+x_2=-5$ suy ra $x_1=-1; x_2=-4$ Thay vào $x_1x_2=3m-1$ suy ra $m=\dfrac{5}{3}$

Vậy $m=\dfrac{5}{3}$ là giá trị cần tìm

Câu 4:

a) Với $m=1$ phương trình đã cho trở thành $x^2-10x+9=0$

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

b) $\Delta'=\left(-5m\right)^2-1.9m=25m^2-9m$

Điều kiện phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $\Delta'>0\Leftrightarrow 25m^2-9m>0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=10m \\ x_1-9x_2=0 \\ x_1x_2=9m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 10x_2=10m \\ x_1=9x_2 \\ x_1x_2=9m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=m \\ x_1=9m \\ 9m^2-9m=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=m \\ x_1=9m,(*)\Rightarrow m=1 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Câu 5:

a) Với $m=0$, phương trình đã cho trở thành: $x^2-2x-1=0$

$\Delta'=2$; $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$

Vậy với $m=0$ thì nghiệm của phương trình đã cho là $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

b) $\Delta'=m+2$ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m+2>0 \Leftrightarrow m>-2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=m^2+m-1 \end{cases}$

Do đó:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4 \Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m^2+m-1}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1\neq 0 \\ m+1=2(m^2+m-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1\neq 0 \\ 2m^2+m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 6:

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta>0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2-4.2.(m-1)>0$

$\Leftrightarrow 4m^2-12m+9>0$

$\Leftrightarrow (2m-3)^2>0$

$\Rightarrow m\neq\dfrac{3}{2}$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét và giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-1}{2} \\ 3x_1-4x_2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{13-4m}{7} \\ x_2=\dfrac{7m-7}{26-8m} \\ 3\dfrac{13-4m}{7}-4\dfrac{7m-7}{26-8m}=11 \end{cases}$$

Giải phương trình $3\dfrac{13-4m}{7}-4\dfrac{7m-7}{26-8m}=11$

Ta được $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=4{,}125 \end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=4{,}125 \end{array}\right.$ là các giá trị cần tìm

Câu 7:

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[-(m-1)\right]^2 - 1.(m^2-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow -2m+4 \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq 2$

Vậy $m \leq 2$ là các giá trị cần tìm

a) Với $m < 2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.
Gọi một nghiệm của phương trình đã cho là a thì nghiệm kia là $3a$. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} a+3a = 2m-2 \\ a.3a = m^2-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = \dfrac{m-1}{2} \Rightarrow 3\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2 = m^2-3$

$\Leftrightarrow m^2+6m-15=0$

$\Rightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{6}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $\Rightarrow m = -3 \pm 2\sqrt{6}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 8:

a) Với $m=-1$ phương trình trở thành $\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-9=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1-\sqrt{10} \\ x_2 = -1+\sqrt{10} \end{cases}$$

b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$

$\Leftrightarrow (-m)^2 - 4.\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{2}m^2+4m-1\right) > 0 \Leftrightarrow -8m+2>0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{4}$

Để phương trình có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m^2+4m-1 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \neq -4-3\sqrt{2} \\ m_2 \neq -4+3\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2} = x_1+x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)(x_1x_2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=0 \\ m^2+8m-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4-\sqrt{19} \\ m=-4+\sqrt{19} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4-\sqrt{19} \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4-\sqrt{19} \end{array}\right.$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9:

$\Delta=\left(-m^2\right)^2-4.1.(m+1)=m^4-4m-4$

Phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta=m^4-4m-4$ là số chính phương

Nếu $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ thì $\Delta<0$ (loại)

Nếu $m=2$ thì $\Delta=4=2^2$ (nhận)

Nếu $m\geq 3$ thì $2m(m-2)>5 \Leftrightarrow 2m^2-4m-5>0$

$\Leftrightarrow \Delta-\left(2m^2-4m-5\right)<\Delta<\Delta+4m+4$

$\Leftrightarrow m^4-2m^2+1<\Delta<m^4$

$\Leftrightarrow \left(m^2-1\right)^2<\Delta<\left(m^2\right)^2$

Δ không là số chính phương.

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm

Câu 10:

a) $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(m-3)=m^2-3m+4=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\ \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1x_2=m-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2m-2 \\ 2x_1x_2=2m-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1+x_2-2x_1x_2-4=0$ không phụ thuộc vào m.

c) $P=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-2(m-3)$

$=\left(2m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geq\frac{15}{4},\ \forall m$

Do đó $P_{\min}=\frac{15}{4}$ và dấu "$=$" xảy ra khi $2m-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$. Vậy $P_{\min}=\frac{15}{4}$ với $m=\frac{5}{4}$.

Câu 11:

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Ta có $M=\dfrac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2x_2+x_1x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-1}{x_1x_2(x_1+x_2)}=\dfrac{m^2-2(m-1)-1}{(m-1)m}$

$=\dfrac{m^2-2m+1}{m(m-1)}=\dfrac{(m-1)^2}{m(m-1)}$

Để $M>0 \Rightarrow \dfrac{(m-1)^2}{m(m-1)}>0 \Rightarrow m(m-1)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>0 \\ m-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<0 \\ m-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$

a) Ta có $P=x_1^2+x_2^2-1=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-1=m^2-2(m-1)-1$

$=m^2-2m+1=(m-1)^2\geq 0$, $\forall m$

Do đó $P_{\min}=0$ và dấu "=" xảy ra khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Vậy $P_{\min}=0$ với $m=1$.

Câu 12:

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm x_1, x_2 là

$\begin{cases} \Delta'\geq 0 \\ x_1+x_2\geq 0 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+1\geq 0 \\ 2(m+1)\geq 0 \Leftrightarrow m\geq 0 \\ 2m\geq 0 \end{cases}$

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m+1) \\ x_1x_2=2m \end{cases}$

Ta có $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq\sqrt{2} \Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\leq 2$

$\Leftrightarrow 2m+2+2\sqrt{2m}\leq 2 \Leftrightarrow m=0$ (thoả mãn)

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Câu 13:

Ta có $\Delta=[-(\mathrm{m}+1)]^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Delta>0 \Rightarrow (m-1)^2>0 \Rightarrow m\neq 1$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=m \end{cases}$

Ta có $A=x_1^2x_2+x_1x_2^2+2007=x_1x_2(x_1+x_2)+2007$

$= m(m+1)+2007 = m^2+m+2007 = m^2+2.m.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2006+\frac{3}{4}$

$= \left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{8027}{4} \geq \frac{8027}{4}$, $\forall m$

Dấu "$=$" xảy ra $m+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}$

Vậy $A_{\min}=\frac{8027}{4}$ với $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 14:

Ta có $\Delta=(2m)^2-4.1.(2m-1)=4m^2-8m+4=4(m-1)^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Delta>0 \Rightarrow (m-1)^2>0 \Rightarrow m\neq 1$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$

Ta có $A=x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)$

$= m(m+1)+2007=(2m-1)(-2m)=-4m^2+2m=-4\left(m^2-\frac{1}{2}m\right)$

$=-4\left(m^2-2.m.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=-4\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$, $\forall m$

Dấu "$=$" xảy ra $m-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$. Vậy $A_{\max}=\frac{1}{4}$ với $m=\frac{1}{4}$.

Câu 15:

Ta có $\Delta=\left[-2(m-1)\right]^2-4.1.(2m-5)=4m^2-12m+22$

$=(2m)^2-2.2m.3+9+13=(2m+3)^2+13>0$, $\forall m$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

a) Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-2 \\ x_1x_2=2m-5 \end{cases}$ (I)

Theo giả thiết $x_1<1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1-1<0 \\ x_2-1>0 \end{cases} \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)<0 \Rightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$ (II)

Thay (I) vào (II) ta có:

$(2m-5)-(2m-2)+1<0 \Leftrightarrow 0.m-2<0$, đúng với mọi m.

Vậy với mọi m thì phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2$.

Câu 16:

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

$\Delta = m^2 - 4.(m-2) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 4 > 0$, $\forall m$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Vì $a+b+c = 1-m+m-2 = -1 \neq 0$, $\forall m$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \neq 1$, $\forall m$.

Phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = mx - m$

Ta có $\dfrac{x_1^2-2}{x_1-1}.\dfrac{x_2^2-2}{x_2-1} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{mx_1-m}{x_1-1}.\dfrac{mx_2-m}{x_2-1} = 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = 4 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$ là các giá trị cần tìm.

Câu 17:

Ta có $a.c = 1.(-1) = -1 < 0$, với $\forall m$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m.

a) Ta có $\begin{cases} x_1^2 = mx_1 + 1 \\ x_2^2 = mx_2 + 1 \end{cases}$ do x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Do đó $P = \dfrac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \dfrac{mx_1 + 1 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{mx_2 + 1 + x_2 - 1}{x_2}$

$= \dfrac{x_1(m+1)}{x_1} - \dfrac{x_2(m+1)}{x_2} = (m+1) - (m+1) = 0$ vì x_1, $x_2 \neq 0$.

Vậy $P = 0$.

Câu 18:

$\Delta = \left[-(2m-1)\right]^2 - 4.1.(m^2-1) = -4m + 5$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{4}$

a) Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Ta có $(x_1 - x_2)^2 = x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1 + x_2 - 4x_2$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) = 2m - 1 - 4x_2 \Leftrightarrow 6m - 6 - 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{3m-3}{2}$

Suy ra $x_1 = \dfrac{m+1}{2}$

Do đó $\dfrac{m+1}{2}.\dfrac{3m-3}{2} = m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn điều kiện có nghiệm)

Vậy $m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 19:

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-2m+1) = 8m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8m > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2m+1 \end{cases}$ (I)

Ta có $x_2^2(x_1^2 - 1) + x_1^2(x_2^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 2(x_1x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 8$

$\Leftrightarrow 2(x_1x_2)^2 - \left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = 8$ (II)

Thay (I) vào (II) ta có:

$2(-2m+1)^2 - \left[4 - 2(-2m+1)\right] = 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 2 \end{array}\right.$

So với điều kiện có nghiệm $m > 0$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 20:

Do $4+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình nên thỏa:

$\left(4+\sqrt{3}\right)^2 - 8\left(4+\sqrt{3}\right) + m = 0$

$\Leftrightarrow m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 13$

Thay $m = 13$ vào phương trình ta được phương trình: $x^2 - 8x + 13 = 0$ $(*)$

$\Delta' = (-4)^2 - 1.13 = 3$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 4+\sqrt{3} \\ x_2 = 4-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy $x = 4-\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 21:

Ta có $\Delta = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4.1.\left(m^2+m-1\right) = 5 > 0$, $\forall m$.

Nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

a) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = m^2+m-1 \end{cases}$

Ta có $A = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) = 5x_1x_2 - 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 9x_1x_2 - 2\left(x_1+x_2\right)^2$

$= 9\left(m^2+m-1\right) - 2\left(2m+1\right)^2 = m^2 + m - 11$

$=m^2+2.m.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-11=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}\ge -\frac{45}{4}$, $\forall m$

Dấu "=" xảy ra $m+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$

Vậy $A_{\min}=-\frac{45}{4}$ với $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 22:

a) $\Delta'=(-m)^2-1.\left(m^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$, $\forall m$.

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Hai nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x_1=m-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x_2=m+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Theo đề bài ta có $\left|m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\left|m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\Leftrightarrow m^2-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}=m^2+\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}m=0\Leftrightarrow m=0$

c) Theo định lý Pitago ta có:

$\left(m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=9\Leftrightarrow 2m^2-8=0\Leftrightarrow m^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$ là các giá trị cần tìm.

Câu 23:

Vì phương trình $x^2-2x+m+3=0$ có nghiệm $x=-1$ nên ta có:

$(-1)^2-2.(-1)+m+3=0\Leftrightarrow m+6=0\Leftrightarrow m=-6$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$x_1+x_2=2\Leftrightarrow -1+x_2=2\Leftrightarrow x_2=3$

Vậy $m=6$ và nghiệm còn lại là $x=3$.

a) $\Delta'=1^2-1.(m+3)=-m-2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m<-2$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=m+3\end{cases}$

Ta có

$x_1^3+x_2^3=8$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=8$

$\Leftrightarrow 2^3-3.(m+3).2=8$

$\Leftrightarrow 6(m+3)=0$

$\Leftrightarrow m+3=0$

$\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

Câu 24:

$\Delta=(2m-1)^2-4.1.(m^2-1)=-4m+5$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{5}{4}$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-(2m-1) \\ x_1x_2=m^2-1 \end{cases}$

Ta có $P=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=\left[-(2m+1)\right]^2-2(m^2-1)=2m^2-4m+3$

$=2(m^2-2.m.1+1-1)+3=2(m-1)^2+1\geq 1,\ \forall m$

Dấu $"="$ xảy ra $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ (nhận)

Vậy $P_{\min}=1$ khi $m=1$.

Câu 25:

$\Delta=\left[-(\mathrm{m}+5)\right]^2-4.1.(2\mathrm{m}+6)$

$=(m+5)^2-4.(2m+6)$

$=m^2+10m+25-8m-24$

$=m^2+2m+1$

$=(m+1)^2\geq 0;\forall m$

Vậy với mọi giá trị của m phương trình luôn luôn có hai nghiệm.

a) Với mọi m, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=m+5; \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m+6 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2+x_2^2=35$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=35$

$\Leftrightarrow (m+5)^2-2(2m+6)=35$

$\Leftrightarrow m^2+10m+25-4m-12-35=0$

$\Leftrightarrow m^2+6m-22=0\ (1)$

$\Delta'=3^2-1.(-22)=9+22=31>0$

Vì $\Delta'>0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt: $m_1=-3+\sqrt{31}; m_2=-3-\sqrt{31}$

Vậy $m\in\{-3+\sqrt{31};-3-\sqrt{31}\}$

Câu 26:

Phương trình (1) có nghiệm :

$\Leftrightarrow \Delta'\ge 0$

$\Leftrightarrow 1-(m-2)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3-m\ge 0$

$\Leftrightarrow m\le 3$

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi $m\le 3$

a) Do phương trình (1) có 2 là một nghiệm nên thỏa:

$2^2+2.2+m-2=0$

$\Leftrightarrow m+6=0$

$\Leftrightarrow m=-6$

Thay $m=-6$ vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^2+2x-8=0\ (*)$

$\Delta'=1^2-1.(-8)=1+8=9>0, \sqrt{\Delta'}=\sqrt{9}=3$

Do $\Delta'>0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{-1+3}{1}=2; x_2=\dfrac{-1-3}{1}=-4$

Vậy $m=-6$ và nghiệm còn lại là -4 là các giá trị cần tìm.

Câu 27:

a) Khi m = 2, phương trình (1) trở thành: $x^2+2x+1=0\ (2)$

Ta có $a-b+c=1-2+1=0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm: $x_1=-1; x_2=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{2}{1}=-2$

Vậy khi $m=2$, tập nghiệm của phương trình (2) là $S=\{-1;-2\}$

b) $\Delta=m^2-4.1.(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\ge 0$; với mọi m.

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

c) Với mọi m, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-m \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m-1 \end{cases}$$

Ta có: $A=(x_1+1)^2(x_2+1)^2+2016$

$A=\left[(x_1+1)(x_2+1)\right]^2+2016$

$A=(x_1x_2+x_1+x_2+1)^2+2016$

$A=(m-1-m+1)^2+2016$

$A=0^2+2016$

$A=2016$

Câu 28:

Do phương trình có nghiệm $x=2$ nên thỏa: $2^2+(2m-1).2-2m=0$

$\Leftrightarrow 4+4m-2-2m=0$

$\Leftrightarrow 2m+2=0$

$\Leftrightarrow 2m=-2$

$\Leftrightarrow m=-1$

Thay $m=-1$ vào phương trình ta được phương trình: $x^2-3x+2=0$ $(*)$

Ta có $a+b+c=1+(-3)+2=0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm: $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$

Vì $x_2=2$ nên nghiệm còn lại là $x_1=1$

Vậy $m=-1$ và nghiệm còn lại là 1 là giá trị cần tìm.

Câu 29:

$\Delta=\left[-(m+1)\right]^2-4.1.(m-2)=(m+1)^2-4(m-2)=m^2+2m+1-4m+8$

$=m^2-2m+9=(m^2-2m+1)+8=(m-1)^2+8>0$; với mọi m

Vậy phương trình lương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

a) Với mọi m, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m+1 \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=m-2 \end{cases}$$

b) Ta có $A=x_1^2+x_2^2-6x_1x_2=(x_1+x_2)^2-8x_1x_2=(m+1)^2-8(m-2)$

$=m^2+2m+1-8m+16$

$=m^2-6m+17=m^2-6m+9+8=(m-3)^2+8\geq 8$; với mọi m

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: $MinA=8$ khi và chỉ khi $m=3$.

Câu 30:

Với $m=-1$ phương trình trở thành: $x^2+4x+4=0$ $(*)$

$\Delta'=2^2-1.4=0$

Vì $\Delta'=0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệp kép: $x_1=x_2=-\frac{b'}{a}=-\frac{2}{1}=-2$

Vậy với $m=-1$, tập nghiệm của phương trình $(*)$ là $S=\{-2\}$

a) Ta có

$\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(-4m)=(m-1)^2+4m=m^2-2m+1+4m=m^2+2m+1=(m+1)^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow (m+1)^2>0\Leftrightarrow m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$

Vậy $m\neq -1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Câu 31:

a) Ta có $\Delta'=1^2-1.\left(-m^2-1\right)=1+m^2+1=m^2+2>0$, với mọi m

Vì $\Delta'>0$, với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-2}{1}=-2 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-m^2-1}{1}=-m^2-1 \end{cases}$$

c) Ta có $x_1+x_2=-2$ (do trên) và $x_1=-3x_2$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1=-3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1+3x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ -x_1-3x_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ -2x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+1=-2 \\ x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{cases} \quad (*)$$

Thay $(*)$ vào biểu thức $x_1x_2=-m^2-1$ ta được:

$$(-3).1=-m^2-1 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

Vậy $m=\pm\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 32:

Ta có $\Delta=(m+2)^2-4.1.(m-1)=m^2+4m+4-4m+4=m^2+8>0$, với mọi m.

Vì $\Delta>0$, với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m
.

a) Với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt nên thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(m+2)}{1}=-(m+2) \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-1}{1}=m-1 \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có:

$$x_1^2+x_2^2-13=x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-13-x_1x_2=0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2-13=0$$

$$\Leftrightarrow \left[-(m+2)\right]^2-3(m-1)-13=0 \Leftrightarrow (m+2)^2-3(m-1)-13=0$$

$$\Leftrightarrow m^2+4m+4-3m+3-13=0$$

$$\Leftrightarrow m^2+m-6=0 \quad (*)$$

$$\Delta=1^2-4.1.(-6)=1+24=25>0; \sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$$

Do $\Delta>0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1=\frac{-1+5}{2.1}=2; \quad m_2=\frac{-1-5}{2.1}=-3$$

Vậy $m_1=2;\ m_2=-3$ là các giá trị cần tìm .

Câu 33:

Ta có $\Delta = 1^2 - 4.1.(m-2)$

$= 1 - 4m + 8$

$= 9 - 4m$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow 9 - 4m \ge 0 \Leftrightarrow -4m \ge -9 \Leftrightarrow m \le \dfrac{9}{4}$

Vậy $m \le \dfrac{9}{4}$ thì phương trình có nghiệm .

a) Với $m \le \dfrac{9}{4}$ thì phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m-2}{1} = m-2 \end{cases}$$

Ta có $x_1x_2^3 + x_1^3x_2 = -10 \Leftrightarrow x_1x_2\left(x_2^2 + x_1^2\right) = -10$

$\Leftrightarrow x_1x_2\left[\left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right] + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (-1).\left[(-1)^2 - 2.(m-2)\right] + 10 = 0$

$\Leftrightarrow -(1 - 2m + 4) + 10 = 0$

$\Leftrightarrow -1 + 2m - 4 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2m + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2m = -5$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$

Vậy $m = -\dfrac{5}{2}$ thì phương trình trên có nghiệm.

Câu 34:

Ta có $\Delta' = 2^2 - 1.(m+3) = 4 - m - 3 = 1 - m$

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 1 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 1$

a) Theo câu a, ta có $m \le 1$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{4}{1} = -4 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m+3}{1} = m+3 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 = 51 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 + \left(x_1x_2\right)^2 - 51 = 0$

$\Leftrightarrow (-4)^2 - 2.(m+3) + (m+3)^2 - 51 = 0 \Leftrightarrow 16 - 2m - 6 + m^2 + 6m + 9 - 51 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 32 = 0$ (*)

$\Delta' = 2^2 - 1.(-32) = 4 + 32 = 36 > 0; \sqrt{\Delta'} = \sqrt{36} = 6$

Do Δ’ > 0 nên phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt:

$m_1 = \dfrac{-2+6}{1} = 4$ (loại); ; $m_2 = \dfrac{-2-6}{1} = -8$ (nhận)

Vậy $\mathrm{m} = -8$ là giá trị cần tìm .

Câu 35:

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - 1.(m^2 - 3m + 1) = m^2 + 6m + 9 - m^2 + 3m - 1 = 9m + 8$

Để phương trình luôn có nghiệm với mọi m

$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 9m \geq -8 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{-8}{9}$

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm với mọi $m \geq \dfrac{-8}{9}$.

a) Theo câu a, với mọi $m \geq \dfrac{-8}{9}$ thì phương trình luôn luôn có nghiệm thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-2(m+3)}{1} = -2(m+3) \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m^2 - 3m + 1}{1} = m^2 - 3m + 1 \end{cases}$$

Ta có $A = x_1(x_2 - 1) - x_2 = x_1x_2 - x_1 - x_2 = x_1x_2 - (x_1 + x_2)$

$= m^2 - 3m + 1 + 2(m+3) = m^2 - 3m + 1 + 2m + 6 = m^2 - m + 7 = \left(m^2 - m + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{27}{4}$

$= \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} \geq \dfrac{27}{4}$, với mọi m (vì $\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, với mọi m)

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: $MinA = \dfrac{27}{4}$ khi và chỉ khi $m = \dfrac{1}{2}$

Câu 36:

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(2m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$; với mọi m

Do $\Delta' \geq 0$ (với mọi m) nên phương trình (1) luôn có nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị của m.

a) Theo câu a, với mọi m thì phương trình (1) luôn có nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{2m}{1} = 2m \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2m-1}{1} = 2m - 1 \end{cases}$$

Ta có $A = 2(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1x_2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] - 5x_1x_2$

$= 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 = 2(2m)^2 - 9(2m - 1) = 8m^2 - 18m + 9$

Do A = 27 nên thỏa:

$8m^2 - 18m + 9 = 27$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 18m - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2-9m-9=0\ (*)$

Ta có $\Delta=(-9)^2-4.4.(-9)=81+144=225>0; \sqrt{\Delta}=\sqrt{225}=15$

Do $\Delta>0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $m_1=\dfrac{9+15}{2.4}=3;\quad m_2=\dfrac{9-15}{2.4}=\dfrac{-3}{4}$

Vậy $m_1=3;\quad m_2=\dfrac{-3}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 37:

Ta có $\Delta=\left[-(m-3)\right]^2-4.1.(m-5)=(m-3)^2-4.(m-5)=m^2-6m+9-4m+20$

$=m^2-10m+29=(m^2-10m+25)+4=(m-5)^2+4>0$; với mọi m.

Vì $\Delta>0$ (với mọi m) nên phương trình luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

a) Theo câu a, ta có với mọi m thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Viet:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-(m-3)}{1}=m-3 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-5}{1}=m-5 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2=11 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-4(x_1+x_2)-11=0$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4(x_1+x_2)-11=0$

$\Leftrightarrow (m-3)^2-2(m-5)-4(m-3)-11=0 \Leftrightarrow m^2-6m+9-2m+10-4m+12-11=0$

$\Leftrightarrow m^2-12m+20=0\ (*)$

Ta có $\Delta'=(-6)^2-1.20=36-20=16>0; \sqrt{\Delta'}=\sqrt{16}=4$

Do $\Delta' > 0$ nên phương trình (6) có 2 nghiệm phân biệt: $m_1=\dfrac{6+4}{1}=10;\quad m_2=\dfrac{6-4}{1}=2$

Vậy $m_1=10;\quad m_2=2$ là các giá trị cần tìm.

Câu 38:

Ta có: $\Delta=m^2-4.1.(2m-4)=m^2-8m+16=(m-4)^2\ge 0$; với mọi m.

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

a) Với mọi m, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-m \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-4 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2+x_2^2=5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-5=0 \Leftrightarrow (-m)^2-2.(2m-4)-5=0$

$\Leftrightarrow m^2-4m+8-5=0 \Leftrightarrow m^2-4m+3=0\ (*)$

Vì $a+b+c=1+(-4)+3=0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm: $m_1=1;\quad m_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{1}=3$

Vậy $m_1 = 1; m_2 = 3$ là các giá trị cần tìm.

Câu 39:

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1.(4m-1) = 1 - 4m + 1 = 2 - 4m$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 2 - 4m \ge 0 \Leftrightarrow -4m \ge -2 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}$.

Vậy $m \le \frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm.

a) Theo câu a, với $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2 \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4m-1}{1} = 4m-1 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 2^2 - 2(4m-1) + 2.2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 4 - 8m + 2 + 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow -8m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$ (thỏa)

Vậy $m = \frac{-1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 40:

Ta có $\Delta' = (-m)^2 - 1.(4m-4) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \ge 0, \forall m$

Do $\Delta' \ge 0, \forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

a) Theo câu a) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \ne 2$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{1} = 2m \\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4m-4}{1} = 4m-4 \end{cases}$$

Do x_1 là nghiệm của phương trình nên thỏa: $x_1^2 - 2mx_1 + 4m - 4 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 = 2mx_1 - 4m + 4 \quad (*)$

Ta có $x_1^2 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2mx_1 - 4m + 4 + 2mx_2 - 8m + 5 = 0$ (do $(*)$)

$\Leftrightarrow 2\mathrm{m}(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2) - 12\mathrm{m} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{m}.2\mathrm{m} - 12\mathrm{m} + 9 = 0$ (do hệ thức Vi-ét)

$\Leftrightarrow 4\mathrm{m}^2 - 12\mathrm{m} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (2\mathrm{m} - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{m} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{m} = 3 \Leftrightarrow \mathrm{m} = \frac{3}{2}$

Vậy $\mathrm{m} = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 41:

Ta có: $\Delta' = [-(m-4)]^2 - (m-6)$

$\Delta' = (m-4)^2 - m + 6$

$\Delta' = m^2 - 8m + 16 - m + 6$

$\Delta' = m^2 - 9m + 22$

$\Delta' = \left(m - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

a) Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\left[-2(m-4)\right] = 2(m-4) = 2m-8 \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} = m-6 \end{cases}$$

Có: $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \frac{2m-8}{m-6} = \frac{2(m-6)+12-8}{m-6}$

$= \frac{2(m-6)+4}{m-6} = \frac{2(m-6)}{m-6} + \frac{4}{m-6} = 2 + \frac{4}{m-6}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{4}{m-6} \in \mathbb{Z}$ suy ra $4 \vdots (m-6)$ hay $m-6 \in$ Ư(4)$=\{-4;-2;-1;1;2;4\}$

Lập bảng:

$m-6$	-4	-2	-1	1	2	4
m	2	4	5	7	8	10

Vậy $m \in \{2;4;5;7;8;10\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Câu 42:

Ta có: $\Delta' = \left[-(m-2)\right]^2 - (-2m) = (m-2)^2 + 2m = m^2 - 4m + 4 + 2m$

$= m^2 - 2m + 4 = (m-1)^2 + 3 > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

a) Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\left[-2(m-2)\right] = 2(m-2) = 2m-4 \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} = -2m \end{cases}$$

Ta có: $x_2 - x_1 = x_1^2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2(m-2)x_1 + 2m \Leftrightarrow 2m - 4 - x_1 - x_1 = 2(m-2)x_1 + 2m$

$\Leftrightarrow -4 - 2x_1 = (2m-4)x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{2-2m} = \frac{2}{1-m}$

Thay $x_1=\dfrac{2}{1-m}$ vào (1),ta được: $\left(\dfrac{2}{1-m}\right)^2-2(m-2)\left(\dfrac{2}{1-m}\right)-2m=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(1-m)^2}-\frac{4(m-2)(1-m)}{(1-m)^2}-\frac{2m(1-m)^2}{(1-m)^2}=0$$

$$\Rightarrow 4-4\left(-m^2+3m-2\right)-2m\left(1-2m+m^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4+4m^2-12m+8-2m+4m^2-2m^3=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^3-8m^2+14m-12=0$$

$$\Leftrightarrow m^3-4m^2+7m-6=0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)\left(m^2-2m+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m=2$$

Vậy $\mathrm{m}=2$ là giá trị cần tìm.

Câu 43:

Ta có: $\Delta'=(-1)^2-\left(-2m^2\right)=1+2m^2>0,\forall \mathrm{m}$

Do $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

a) Theo câu a, $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-(-2)=2 \\ P=x_1.x_2=\dfrac{c}{a}=-2m^2 \quad (3) \end{cases}$$

Có: $x_1^2=4x_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2x_2 \\ x_1=-2x_2 \end{array}\right.$

<u>TH1:</u> $\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{4}{3} \\ x_2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ thay vào (3) .Ta được: $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=-2m^2$ (vô lý)

<u>TH2:</u> $\begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-2 \end{cases}$ thay vào (3). Ta được: $4(-2)=-2m^2 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Vậy $\mathrm{m}=\pm 2$ là giá trị cần tìm .

Câu 44:

Ta có: $\Delta=\left[-(3m-2)\right]^2-4\left(2m^2-m-3\right)$

$$=(3m-2)^2-8m^2+4m+12$$

$$=9m^2-12m+4-8m^2+4m+12$$

$$=m^2-8m+16=(m-4)^2\geq 0,\forall m$$

Do $\Delta\geq 0,\forall m$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

a) Theo câu a, $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq 4$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức

Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -\left[-\left(3m-2\right)\right] = 3m-2 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m^2 - m - 3 \quad (3) \end{cases}$

Ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9m-6}{4} \\ x_2 = \dfrac{3m-2}{4} \end{cases}$, thay vào (3), ta được: $\dfrac{9m-6}{4} \cdot \dfrac{3m-2}{4} = 2m^2 - m - 3$

$\Leftrightarrow (9m-6)(3m-2) = 16\left(2m^2 - m - 3\right)$

$\Leftrightarrow 27m^2 - 36m + 12 = 32m^2 - 16m - 48$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 20m - 60 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m = -2, m = 6$

Vậy $m = -2, m = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 45:

Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - \left(-m^2\right) = (m-2)^2 + m^2 > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

a) Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -2(m-2) = 4-2m \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -m^2 \quad (3) \end{cases}$

Ta có:

$(x_1+1)(x_2+1) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 2$

$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 = x_1x_2(x_1+x_2) + 2$

$\Leftrightarrow -m^2 + 4 - 2m + 1 = -m^2(4-2m) + 2$

$\Leftrightarrow -m^2 - 2m + 5 = -4m^2 + 2m^3 - 2m^2$

$\Leftrightarrow 2m^3 - 5m^2 + 2m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow m^2(2m-5) + (2m-5) = 0$

$\Leftrightarrow (2m-5)\left(m^2+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$

Vậy $m = \dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 46:

Ta có: $\Delta' = \left[-(m+1)\right]^2 - (m^2-3) = (m+1)^2 - m^2 + 3 = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 3 = 2m+4$

Để (1) có nghiệm thì $\Delta' = 2m+4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$

a) Theo câu a) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -2$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -\left[-2(m+1)\right] = 2m+2 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - 3 \quad (3) \end{cases}$$

Ta có:

$(2x_1-1)(x_2+1)+(2x_2-1)(x_1+1) = x_1^2 + x_2^2 + 14$

$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 1 + 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 1 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 14$

$\Leftrightarrow 4x_1x_2 + (x_1+x_2) - 2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 14$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 6x_1x_2 - (x_1+x_2) + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - 6(m^2-3) - (2m+2) + 16 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 6m^2 + 18 - 2m - 2 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 6m - 36 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 18 = 0$

$\Leftrightarrow m = -3, m = 6$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Câu 47:

Ta có: $\Delta = m^2 - 12$

Để pt có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ $m \geq 2\sqrt{3}$ hoặc $m \leq -2\sqrt{3}$

Kết hợp với hệ thức Viét ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m & (1) \\ 3x_1 + x_2 = 6 & (2) \\ x_1x_2 = 3 & (3) \end{cases}$

Giải hệ $(1),(2)$ ta được $x_1 = \dfrac{6-m}{2}$; $x_2 = \dfrac{3m-6}{2}$

Thay $x_1 = \dfrac{6-m}{2}$, $x_2 = \dfrac{3m-6}{2}$ vào (3) ta được :

$\dfrac{6-m}{2} \cdot \dfrac{3m-6}{2} = 3 \Leftrightarrow (6-m)(3m-6) = 12$ $\Leftrightarrow m = 4$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm .

Câu 48:

Ta có: $\Delta = \left[-(5m-1)\right]^2 - 4\left(6m^2 - 2m\right) \quad = 25m^2 - 10m + 1 - 24m^2 + 8m$

$= m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \quad \forall m$

Vì $\Delta \geq 0, \forall m$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

Ta có: $x_1 = \dfrac{5m-1+m-1}{2} = 3m-1$; $x_2 = \dfrac{5m-1-(m-1)}{2} = 2m$

Theo đề bài: ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 \Leftrightarrow (3m-1)^2 + (2m)^2 = 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 + 4m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 13m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0\,; m = \dfrac{6}{13}$

Vậy $m = 0\,;\ m = \dfrac{6}{13}$ là giá trị cần tìm.

Câu 49:

Ta có: $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-3)$

$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m + 3$

$\Delta' = m^2 - 3m + 4$

$\Delta' = \left[m^2 - 2.m.\dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right] + 4 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$\Delta' = \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Áp dụng định lý Vi-ét: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2(m-1) & (2) \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = m-3 & (3) \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$P = x_1^2 + x_2^2$

$P = \left(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\right) - 2x_1x_2$

$P = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$P = 4(m-1)^2 - 2(m-3)$

$P = 4m^2 - 8m + 4 - 2m + 6$

$P = 4m^2 - 10m + 10$

$$P=\left[(2m)^2-2.2m.\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]+10-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$P=\left(2m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\ge\frac{15}{2},\forall m$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow 2m-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{4}$

Vậy $Min\left(x_1^2+x_2^2\right)=\frac{15}{2}$ khi $m=\frac{5}{4}$.

b) Từ $(3)\Rightarrow m=x_1x_2+3$

Thay $m=x_1x_2+3$ vào (2), ta được: $x_1+x_2=2\left(x_1x_2+3-1\right)\Leftrightarrow x_1+x_2-2x_1x_2=4$

Câu 50:

Ta có: $\Delta'=(-m)^2-(2m-1)$

$\Delta'=m^2-2m+1$

$\Delta'=(m-1)^2\ge 0,\forall m$

Với $m\ne 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$

Áp dụng Định lý Vi-ét: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=2m & (2)\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=2m-1 & (3)\end{cases}$

Giải hệ: $\begin{cases} x_1+x_2=2m\\ x_1-3x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4x_2=2m\\ x_1-3x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{m}{2}\\ x_1=\dfrac{3m}{2}\end{cases}\quad(4)$

Thay (4) vào (3), ta được: $\frac{3m^2}{4}=2m-1\Leftrightarrow 3m^2-8m+4=0\ (*)$

$\Delta'=(-4)^2-3.4$

$\Delta'=4$

$\sqrt{\Delta'}=2>0$

Nên phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt: $m_1=2;\ \ m_2=\frac{2}{3}$

Vậy $m_1=2;\ \ m_2=\frac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 51:

Với m = 3 phương trình (1) trở thành: $x^2-6x+4=0$ (2)

Giải (2) ra ta được hai nghiệm: $x_1=3+\sqrt{5}, x_2=3-\sqrt{5}$.

a) Ta có: $\Delta'=m^2-4$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq -2 \end{array}\right.$ $(*)$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=2m \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=4 \end{cases}$

Ta có : $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=2 \Leftrightarrow x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1=2 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2(x_1+x_2)=0$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)=0 \Leftrightarrow (2m)^2-2.4+2.2m=0 \Leftrightarrow 4m^2+4m-8=0$

$\Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=1 \\ m_2=-2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện $(*)$ ta thấy chỉ có nghiệm $m_2=-2$ thỏa mãn.

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Câu 52:

Ta có: $\Delta'=m^2+1>0, \forall m$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

a) Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=2m \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=7 \Leftrightarrow (2m)^2-3(-1)=7$

$\Leftrightarrow 4m^2+3=7 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 53:

Với $m=0$ phương trình (1) trở thành $x^2-x+1=0$ (2)

Ta có : $\Delta=(-1)^2-4.1.1=-3<0$, nên phương trình (2) vô nghiệm.

a) Ta có: $\Delta=(-1)^2-4(1+m)=-3-4m$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow -3m-4\geq 0 \Leftrightarrow m\leq \dfrac{-4}{3}$ $(*)$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 1 \\ \text{P}= x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 1 + m \end{cases}$$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2\left(x_1x_2 - 2\right) = 3\left(x_1 + x_2\right)$ ta được: $(1+m)(1+m-2) = 3.1$

$\Leftrightarrow (1+m)(m-1) = 3 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Đối chiếu với điều kiện $(*)$ suy ra chỉ có $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 54:

Đặt $X = x^2\left(X \ge 0\right)$

Phương trình trở thành $X^4 - (m^2 + 4m)X^2 + 7m - 1 = 0$ (1)

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 4m)^2 - 4(7m - 1) > 0 \\ m^2 + 4m > 0 \\ 7m - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Với điều kiện (I), (1) có 2 nghiệm phân biệt dương X_1, X_2.

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 4 nghiệm

$x_{1,2} = \pm\sqrt{X_1}$;

$x_{3,4} = \pm\sqrt{X_2}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(X_1 + X_2) = 2(m^2 + 4m)$

Vậy ta có $2(m^2 + 4m) = 10 \Rightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right.$

Với $m = 1$, (I) thỏa mãn

Với $m = -5$, (I) không thỏa mãn.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 55:

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left(2m-1\right)^2 - 4.2.\left(m-1\right) > 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 8m + 8 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 > 0 \Leftrightarrow \left(2m-3\right)^2 > 0$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \ne \dfrac{3}{2}$ (1) .

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2m-1}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-1}{2} \\ 3x_1 - 4x_2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{13-4m}{7} \\ x_2 = \dfrac{7m-7}{26-8m} \\ 3.\dfrac{13-4m}{7} - 4.\dfrac{7m-7}{26-8m} = 11 \end{cases}$ $(*)$

Giải phương trình $(*)$ ta được: $m = -2 \vee m = 4{,}125$.

So với điều kiện (1), ta được: $m = -2 \vee m = 4{,}125$.

Câu 56:

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[-2(m-1)\right]^2 - 4.\left(m^2-3\right) \ge 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12 \ge 0 \Leftrightarrow m \le 2$.

Vậy với $m \le 2$ phương trình (1) luôn có nghiệm.

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Với $m \le 2$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Gọi a là một nghiệm thì nghiệm kia là $3a$.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} a + 3a = 2(m-1) \\ a.3a = m^2 - 3 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $m = -3 \pm 2\sqrt{6}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m = -3 \pm 2\sqrt{6}$ phương trình (1) có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Câu 57:

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Phương trình luôn có nghiệm với mọi m khi và chỉ khi $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4(m-1) \ge 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 \ge 0$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)}$.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m-1 \end{cases}$.

Khi đó: $P = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$

Tìm điều kiện để P có nghiệm theo ẩn

Suy ra $-\dfrac{1}{2} \le P \le 1$. Vậy giá trị lớn nhất bằng 1 khi $m = 1$, giá trị nhỏ nhất bằng $-\dfrac{1}{2}$ khi $m = -2$.

Câu 58:

Giải phương trình (1) với $m=-1$.

Thế $m=-1$ vào phương trình (1) ta được $x^2+2x-9=0$.

Giải phương trình này ta được: $\left[\begin{array}{l} x_1=-1-\sqrt{10} \\ x_2=-1+\sqrt{10} \end{array}\right.$.

a) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=x_1+x_2$.

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta>0 \Leftrightarrow -8m+2>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$ $(*)$.

Để phương trình có nghiệm khác 0 thì: $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}m^2+4m-1\neq 0$

Hay $\begin{cases} m_1\neq -4-3\sqrt{2} \\ m_2\neq -4+3\sqrt{2} \end{cases}$ $(**)$.

Theo đề bài, ta có: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=x_1+x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)(x_1x_2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=0 \\ m^2+8m-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-4-\sqrt{19} \\ m=-4+\sqrt{19} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ và $(**)$, ta được $m=0 \vee m=-4-\sqrt{19}$.

Câu 59:

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta>0$

$\Leftrightarrow (m+5)^2+4(m-6)>0 \Leftrightarrow m^2+14m+1>0 \Leftrightarrow m<-7-4\sqrt{3} \vee m>-7+4\sqrt{3}$ $(*)$

a) Nghiệm này lớn hơn nghiệm kia một đơn vị.

Giả sử $x_1<x_2$, theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_2-x_1=1 \\ x_1+x_2=m+5 \\ x_1x_2=-m+6 \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được: $m=0 \wedge m=-14$ thỏa mãn $(*)$.

b) Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} 2x_1+3x_2=13 \\ x_1+x_2=m+5 \\ x_1x_2=-m+6 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $m=0 \wedge m=1$ thỏa mãn $(*)$.

Câu 60:

Để phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - (m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ luôn đúng với mọi m.

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi m.

a) Theo Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1.x_2 = m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ 2x_1.x_2 = 2m-6 \end{cases}$.

d) Suy ra $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$ hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình (1) mà không phụ thuộc vào m.

$$P = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m-2)^2 - 2m + 6 = 4m^2 - 10m + 10 = \left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + 4 \ge 4$$

Vậy $P_{\min} = 4$ khi và chỉ khi $m = \frac{5}{4}$.

Câu 61:

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì: $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4(m^2 + m - 6) > 0 \Leftrightarrow 25 > 0$

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm âm thì: $\begin{cases} x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 2 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$

Vậy với $m < -3$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm âm.

a) Với $\Delta = 25$ suy ra $x_1 = m-2; x_2 = m+3$

Theo giả thiết, ta có: $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50 \Leftrightarrow \left|(m-2)^3 - (m+3)^3\right| = 50 \Leftrightarrow \left|5(3m^2 + 3m + 7)\right| = 50$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Câu 62:

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 > 0$

Vậy với $m \ne 2$ phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt.

1. $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1.x_2$

a) $A =$ $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1.x_2$ $(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 = m^2 - 8(m-1)$ $= m^2 - 8m + 8$

b) Với $A = 8$ $\Leftrightarrow m^2 - 8m + 8 = 8 \Leftrightarrow m = 8 \vee m = 0$

c) $A=m^2-8m+8=(m-4)^2-8\ge -8$

Vậy $A_{\min}=-8$ khi và chỉ khi $m=4$.

d) Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m-1 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=4 \\ m_2=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Câu 63:

Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 4m^2-4(2m-1)\ge 0 \Leftrightarrow (2m-2)^2\ge 0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi m.

1. $A=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2 \Leftrightarrow A=2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-5x_1x_2 \Leftrightarrow A=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2$

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-1 \end{cases}$.

a) $A=2(2m)^2-9(2m-1)=8m^2-18m+9$ (đpcm).

b) Theo giả thiết, ta có: $A=27 \Leftrightarrow 8m^2-18m+9=27 \Leftrightarrow 4m^2-9m-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=3 \\ m_2=-\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

c) Tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất: $A=8m^2-18m+9=\left(2\sqrt{2}m-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{9}{8}\ge -\dfrac{9}{8}$

Vậy $A_{\min}=-\dfrac{9}{8}$ khi $m=-\dfrac{9}{8}$.

d) Tìm m sao cho $x_1=3x_2$.

Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-1 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=2 \\ m_2=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Câu 64:

Giải và biện luận số nghiệm của x_1, x_2 của (1) theo tham số m.

$\Delta'=(m-1)^2+2m-5=m^2-4$.

- Nếu $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu $\Delta'=0 \Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=-1$.

- Nếu $\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

1. Tìm m sao cho x_1, x_2 thỏa mãn

- Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2(m-1) \\ x_1x_2=-2m+5 \end{cases}$

- Điều kiện nghiệm khác $0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{5}{2}$ $(*)$

a) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=2x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2+8m-20=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

b) $x_1+x_2+2x_1x_2 \le 6 \Leftrightarrow -2(m-1)-4m+10 \le 6 \Leftrightarrow m \ge 1$

c) Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2(m-1) \\ x_1x_2=-2m+5 \\ 2x_1+3x_2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow m_1=\dfrac{13}{6} \vee m_2=2$

d) Tìm m sao cho $12-10x_1x_2-(x_1^2+x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $12-10x_1x_2-(x_1^2+x_2^2)=12-8x_1x_2-(x_1+x_2)^2=12-8(-2m+5)-4(m-1)^2$

$=-4m^2+24m-32=-4\left[(m-3)^2+23\right] \le -92$

Đẳng thức đạt giá trị lớn nhất bằng -92 khi $m=3$.

Câu 65:

Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \Delta=-2m+4 \Leftrightarrow m<2$

a) Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1x_2=m^2-3 \\ x_1^2+x_2^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow m=1 \vee m=3$

Câu 66:

$\Delta=m^2-4m+4=(m-2)^2 \ge 0$ với mọi m.

a) $x_1^2x_2+x_1x_2^2=2 \Leftrightarrow x_1x_2(x_1+x_2)=2 \Leftrightarrow (m-1)m=2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$
$\Leftrightarrow m=-1 \vee m=2$.

Câu 67:

$\Delta'=m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

a) Theo Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1x_2=2m-3 \end{cases}$

b) $x_1+x_2-2x_1x_2=3 \Leftrightarrow 2m=3 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Câu 68:

$\Delta' = (m-2)^2 - (2m-5) = (m-3)^2 \geq 0$

Vậy với mọi m phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2.

a) $A = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = x_1x_2 - (x_1+x_2)^2 = 2m-5-4(m-2)^2 = -\left[\left(2m-\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \leq -\frac{3}{4}$

Vậy $A_{max} = -\frac{3}{4}$ khi $m = \frac{9}{4}$.

Câu 69:

$\Delta = (2m-1)^2 - 4m = 4m^2 - 8m + 4 = 4(m-1)^2 \geq 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

a) Theo Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = 2m+1$ và $x_1x_2 = m$

Khi đó: $A = 4m^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$. Vậy $A_{min} = \frac{3}{2}$ khi $m = 0$.

Câu 70:

$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - m + 1) = -8m + 5$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{8}$.

a) $B = (x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2$

$B = (2m-3)^2 - 7(m^2 - m + 1)$

$B = -3\left[\left(m+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right] \leq \frac{49}{12}$

Vậy $B_{max} = \frac{49}{12}$ khi $m = -\frac{5}{6}$.

Câu 71:

$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4m + 3) = -2m - 2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

a) Theo Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = m^2 + 4m + 3$

Khi đó: $A = m^2 + 4m + 3 - 4(m+1) \Leftrightarrow A = m^2 - 1 \geq -1$

Vậy $A_{min} = -1$ khi $m = 0$.

Câu 72:

$\Delta=(2m-1)^2-4.2.(m-1)\ =(2m-3)^2\geq 0$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2.

a) Theo Vi-et, ta có: $x_1+x_2=-\dfrac{2m-1}{2}$ và $x_1x_2=\dfrac{m-1}{2}$ \.

b) Điều kiện để x_1 và x_2 khác 0 là $m\neq 1$

Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{4x_1-1}{x_2}+\dfrac{4x_2-1}{x_1}=-9\ \Leftrightarrow 4(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2+\dfrac{2m+1}{2}+m-1=0\Leftrightarrow 8m^2-4m=0\Leftrightarrow m=0\vee m=2$ thỏa điều kiện $m\neq 1$.

Câu 73:

$\Delta'=m^2-m+2=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$

Vậy phương trình trên luôn có hai nghiệm với mọi m.

a) $A=2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-9x_1x_2=8m^2-18m+9$

Theo giả thiết, có: $A=27\Leftrightarrow 8m^2-18m+9=27\Leftrightarrow 8m^2-18m-18=0\ \Leftrightarrow m=3\vee m=-\dfrac{3}{4}$.

Câu 74:

$\Delta'=m^2-m+2=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}>0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m.

a) Theo Vi-et, ta có: $x_1+x_2=2m$ và $x_1x_2=m-2$

Theo giả thiết, ta có: $(1+x_1)(2-x_2)+(1+x_2)(2-x_1)=x_1^2+x_2^2+2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-2=0\Leftrightarrow 4m^2-2m-2=0\Leftrightarrow m=1\vee m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 75:

$\Delta=m^2-4.(m-2)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

a) Theo Vi-et, ta có: $x_1+x_2=m$ và $x_1x_2=m-2$.

Theo giả thiết: $\dfrac{x_1^2-2}{x_1-1}.\dfrac{x_2^2-2}{x_2-1}=4\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-(x_1x_2)^2-4(x_1+x_2)=0$

$\Leftrightarrow 2m^2-(m-2)^2-4m=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Câu 76:

Phương trình $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2 = 0$

a) $\Delta' = m^2 + 2 > 0$. Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = -2$.

Theo giả thiết, ta có: $A = \left(x_1^2 + 4x_1 - 2\right)\left(x_2^2 + 4x_2 - 2\right) + 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

$\Leftrightarrow A = \left(x_1x_2\right)^2 + 4x_1x_2\left(x_1 + x_2\right) - 8\left(x_1 + x_2\right) + 16x_1x_2 + 4$

$\Leftrightarrow A = 4m^2 - 16m - 16m - 32 + 4 \Leftrightarrow A = 4m^2 - 32m - 28$.

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Bài T.1:

a) $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 10x^2 + x - 20$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2 + m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4 + 2mx^2 + m^2 = (10 + 2m)x^2 + x + m^2 - 20$

Ta có $\Delta_{VP} = 1 - 4(m^2 - 20)(10 + 2m) = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4 - 9x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. và $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

b) $x^4 - 22x^2 - 8x + 77 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 22x^2 + 8x - 77$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2 + m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4 + 2mx^2 + m^2 = (22 + 2m)x^2 + 8x + m^2 - 77$.

Ta có $\Delta_{VP} = 1 - 4(22 + 2m)(m^2 - 77) = 0 \Leftrightarrow m = -9$.

Ta viết lại phương trình thành:

$x^4 - 18x^2 + 81 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow \left(x^2 - 9\right)^2 - \left(2x + 2\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 7)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \pm 2\sqrt{2} \\ x = 1 \pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

c) Phương trình có dạng: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 = -8x^2 - 2x + 1$

Ta tạo ra vế trái dạng: $(x^2 - 3x + m)^2 = x^4 - 6x^3 + (9 + 2m)x^2 - 6mx + m^2$

Tức là thêm vào hai vế một lượng là: $(9 + 2m)x^2 - 6mx + m^2$ phương trình trở thành:

$(x^2 - 3x + m)^2 = (2m + 1)x^2 - (6m + 2)x + m^2 + 1$. Ta cần

$\Delta'_{VP}=(3m+1)-(2m+1)(m^2+1)=0\Leftrightarrow m=0$. Phương trình trở thành: $(x^2-3x)^2=(x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{3}\\x=2-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

d) Phương trình đã cho được viết lại như sau: $x^4+2x^3=5x^2-6x+3$

Ta tạo ra phương trình: $(x^2+x+m)^2=(2m+6)x^2+(2m-6)x+m^2+3$

Ta cần: $\begin{cases}2m+6>0\\\Delta'_{VP}=(m-3)^2-(2m+6)(m^2+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$

Phương trình trở thành: $(x^2+x-1)^2=(2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x-3)(x^2-x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\\x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Bài T.2:

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow x^4-(2x-3)^2=0$ (1.1)

$\Leftrightarrow (x^2+2x-3)(x^2-2x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\x^2-2x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1;x=3$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1;x=3$

b) Phương trình $\Leftrightarrow (x^4-4x^2+4)-(9x^2-18x+9)=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)^2-(3x-3)^2=0\Leftrightarrow (x^2+3x-5)(x^2-3x+1)=0$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-5=0\\x^2-3x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\\x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2};x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Ta có phương trình

$$\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)^2\Leftrightarrow\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)(x^2-3x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-4x+1=0\\x^2-3x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\\x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right..$$

IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

BÀI TẬP RÈN LUYỆN PHẦN III: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

1) Đặt $x^2+x+2=t$. Phương trình đã cho thành $t(t+1)=6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

Với $t=2$ thì $x^2+x+2=2 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$.

Với $t=-3$ thì $x^2+x+2=-3 \Leftrightarrow x^2+x+5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;0;\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

2) Biến đổi phương trình thành $\left(36x^2+84x+49\right)\left(36x^2+84x+48\right)=12$.

Đặt $t=36x^2+84x+48$ thì phương trình trên thành $t(t+1)=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4 \end{array}\right.$.

Với $t=3$ thì $36x^2+84x+48=3 \Leftrightarrow 36x^2+84x+45=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{5}{6}$. Với $t=-4$ thì $36x^2+84x+48=-4 \Leftrightarrow 36x^2+84x+52=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{5}{6};-\dfrac{3}{2}\right\}$.

3) Đặt $y=x+1$ thì phương trình đã cho thành

$24y^4+48y^2+216=82 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-2;0\}$.

4) Đặt $y=\dfrac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4}=x+3$ thì phương trình trở thành:

$\left(y^2-4\right)\left(y^2-1\right)=10 \Leftrightarrow y^4-5y^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{6}-3 \\ x=\sqrt{6}-3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\sqrt{6}-3;\sqrt{6}-3\right\}$.

5) Do $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x+\dfrac{2}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{2}{x}+2\right)=2$. Đặt $y=x+\dfrac{2}{x}$ thì phương trình trở thành

$(y+1)(y+2)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=0 \\ x+\dfrac{2}{x}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

6) Biến đổi phương trình thành

$\left((x-2)(x-4)\right)\left((x-1)(x-8)\right)=4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-9x+8\right)=4x^2$.

Do $x=2$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x+\dfrac{8}{x}-6\right)\left(x+\dfrac{8}{x}-9\right)=4$. Đặt $y=x+\dfrac{8}{x}$ thì phương trình trở thành

$(y-6)(y-9)=4 \Leftrightarrow y^2-15y+50=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=10 \end{array}\right.$. Với $y=5$ thì $x+\dfrac{8}{x}=5 \Leftrightarrow x^2-5x+8=0$

(vô nghiệm). Với $y=10$ thì $x+\dfrac{8}{x}=10 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-\sqrt{17} \\ x=5+\sqrt{17} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(5-\sqrt{17};5+\sqrt{17}\right)$.

7) Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta

được $3\left(x-\dfrac{1}{x}+2\right)^2-2\left(x-\dfrac{1}{x}+3\right)^2+5=0$. Đặt $y=x-\dfrac{1}{x}$, phương trình trở thành:

$3(y+2)^2-2(y+3)^2+5=0 \Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=1 \\ x-\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

8) Phương trình không nhận $x=0$ là nghiệm, chia hai vế cho x^2 được

$3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-5=0$. Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$ thì phương trình trở thành $3t^2-4t+1=0$

$3t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=\dfrac{1}{3}$.

Với $t=1$ thì $x-\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Với $t=\dfrac{1}{3}$ thì $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x_3=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$ hoặc $x_4=\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{37}}{2};\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

9) $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$ (8).

Lời giải:

Ta thấy $k=\frac{105}{-21}=-5$ và $k^2=\frac{50}{2}=25$ nên phương trình (8) là phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng tỉ lệ. $(8)\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x-\frac{5}{x}\right)+34=0$. Đặt $t=x-\frac{5}{x}$ suy ra $t^2=x^2+\frac{25}{x^2}-10$.

Phương trình (9) trở thành $2t^2-21t+54=0\Leftrightarrow t=6$ hoặc $t=\frac{9}{2}$. Với $t=6$ thì

$x-\frac{5}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x-5\Leftrightarrow x^2-6x-5=0$. Phương trình có hai nghiệm

$x_1=3+\sqrt{14};x_2=3-\sqrt{14}$. Với $x=\frac{9}{2}$ thì $x-\frac{5}{x}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-9x-10=0$. Phương trình có hai nghiệm $x_3=\frac{9+\sqrt{161}}{4};x_4=\frac{9-\sqrt{161}}{4}$. Vậy PT (8) có tập nghiệm

$S=\left\{3+\sqrt{14};3-\sqrt{14};\frac{9+\sqrt{161}}{4};\frac{9-\sqrt{161}}{4}\right\}$.

10) Điều kiện $x\notin\{-1;-2;-3;-4;0\}$. Ta biến đổi phương trình thành

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0\Leftrightarrow\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0$$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0$. Đặt $u=x^2+4x$, phương trình trở thành

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+3}+\frac{1}{2(u+4)}=0\Leftrightarrow\frac{5u^2+25u+24}{2u(u+3)(u+4)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{-25+\sqrt{145}}{10}\\ u=\frac{-25-\sqrt{145}}{10}\end{array}\right..$$

Do đó $\left[\begin{array}{l}x^2+4x=\frac{-25+\sqrt{145}}{10}\\ x^2+4x=\frac{-25-\sqrt{145}}{10}\end{array}\right.$. Tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}};-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}\right\}.$$

11) Biến đổi phương trình thành $\frac{5}{x-1}+\frac{-5}{x+1}-\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x+2}=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{10}{x^2-1}-\frac{40}{x^2-4}=-\frac{8}{3}$.

Đặt $u=x^2\,(u\neq 1,u\neq 4;u\geq 0)$ dẫn đến phương trình

$4u^2-65u+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=16\\ u=\frac{1}{4}\end{array}\right.$. bTìm được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{1}{2};-4;\frac{1}{2};4\right\}$.

12)

Điều kiện $x \notin \{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{x+6}{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{x+2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x+5}{x}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6x}\right)+\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2+7x}+\dfrac{1}{x^2+7x+10}+\dfrac{1}{x^2+7x+6}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0(*) \end{array}\right. .$$

Đặt $u=x^2+7x$ thì phương trình (*) có dạng

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+10}+\frac{1}{u+6}+\frac{1}{u+12}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+6}\right)+\left(\frac{1}{u+10}-\frac{1}{u+12}\right)=0 \Leftrightarrow u^2+18u+90=0.$$

Mặt khác $u^2+18u+90=(u+9)^2+9>0$ với mọi u. Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{7}{2}$.

13) .

Lời giải:

Điều kiện $x \notin \{-4;-3;-2;-1\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+4}\right)+\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{3}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=0(*) \end{array}\right. .$$

Đặt $u=x^2+5x$ thì phương trình (*) trở thành $\dfrac{3}{u+4}+\dfrac{1}{u+6}=0 \Leftrightarrow u=-\dfrac{11}{2}$. Từ đó ta có

$$2x^2+10x+11=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;\dfrac{-5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

14)

Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái của phương trình cho x, rồi đặt $y=4x+\frac{7}{x}$ ta được

$$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1.$$

Phương trình trên có 2 nghiệm $y=16, y=9$.

Với $y=9$ thì $4x+\frac{7}{x}=9 \Leftrightarrow 4x^2-9x+7=0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $y=16$ thì $4x+\frac{7}{x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}; x_2=\frac{7}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$.

15) Đặt $t=2x^2+x+1$, phương trình (1) thành

$(t-4x)(t+4x)=9x^2 \Leftrightarrow t^2-16x^2=9x^2 \Leftrightarrow t^2=25x^2 \Leftrightarrow t=-5x$ hoặc $t=5x$.

Với $t=-5x$ thì $2x^2+x+1=-5x \Leftrightarrow 2x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Với $t=5x$ thì $2x^2+x+1=5x \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2};\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

16) Lời giải:

Đặt $u=x-1$ đưa phương trình (2) về dạng tổng quát $(u^2-7u-3)(u^2-2u-3)=6u^2$.

Bạn đọc giải tiếp theo phương pháp đã nêu. Ta có thể giải bằng cách khác như sau

Viết phương trình đã cho về dạng $(x^2-4-5x+5)(x^2-4)-6(x-1)^2=0$.

Đặt $t=x^2-4$, phương trình thành

$t^2+(-5x+5)t+(-6x+6)(x-1)=0 \Leftrightarrow (t-6x+6)(t+x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6x-6 \\ t=-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=6x-6 \\ x^2-4=-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+2=0 \\ x^2+x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\pm\sqrt{7} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của PT(2) là $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2};3-\sqrt{7};\frac{-1+\sqrt{21}}{2};3+\sqrt{7}\right\}$.

17) PTtương đương với $x^4-9x\left(x^2-2\right)+16x^2+4=0$.

Đặt $t=x^2-2$ thì $t^2=x^4-4x^2+4$, PT trên thành

$t^2-9xt+20x^2=0\Leftrightarrow(t-4x)(t-5x)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4x\\t=5x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2=4x\\x^2-2=5x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x-2=0\\x^2-5x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pm\sqrt{6}\\x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{2-\sqrt{6};\frac{5-\sqrt{33}}{2};2+\sqrt{6};\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

18) Điều kiện $x\neq-2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương:
$3x^4+6x^3-16x^2-36x-12=0\Leftrightarrow 3x^4+6x\left(x^2-6\right)-16x^2-12=0$.
đặt $t=x^2-6$ thì $t^2=x^4-12x^2+36$, suy ra $3x^4=3t^2+36x^2-108$, PT trên thành
$3t^2+6xt+20t=0\Leftrightarrow t(3t+6x+20)=0\Leftrightarrow t=0$ hoặc $3t=-6x-20$. Với $t=0$ thì
$x^2-6=0$, suy ra $x=\pm\sqrt{6}$ (thỏa mãn đk). Với $3t=-6x-20$ ta có $3x^2-18=-6x-20$ hay
$3x^2+6x+2=0$ suy ra $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn đk). Vậy tập nghiệm của PT(4) là
$S=\left\{\frac{-3-\sqrt{3}}{3};-\sqrt{6};\frac{-3+\sqrt{3}}{3};\sqrt{6}\right\}$.

19) $\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6$ (5).

Lời giải: Đặt $t=3x^2+2$ PT(5) trở thành

$\frac{2x}{t-5x}+\frac{13x}{t+x}=6$. ĐK: $t\neq 5x, t\neq -x$.
Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$2t^2-13tx+11x^2=0\Leftrightarrow(t-x)(2t-11x)=0$

$\Leftrightarrow t=x$ hoặc $t=\frac{11}{2}x$ (thỏa mãn ĐK)

Với $t=x$ thì $3x^2+2=x\Leftrightarrow 3x^2-x+2=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=\frac{11}{2}x$ thì $3x^2+2=\frac{11}{2}x\Leftrightarrow 6x-11x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{4}{3}$.Vậy tập nghiệm của PT(5) là $\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\}$.

20) PT $\Leftrightarrow x^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2\right)\left(x^4+x^2-2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2\right)^2-2\left(x^4+x^2\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^4+x^2-1\right)^2=0\Leftrightarrow x^4+x^2-1=0$.

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT là $\left\{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

21) Lời giải:

Điều kiện $x\neq\pm1$.

Đặt $\frac{x-2}{x+1}=y;\frac{x+2}{x-1}=z$, PT có dạng: $20y^2+5z^2-20yz=0\Leftrightarrow 5\left(2y-z\right)^2=0\Leftrightarrow 2y=z$

Dẫn đến $2.\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+2}{x-1}\Leftrightarrow 2\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\left(x+2\right)\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=x^2+3x+2\Leftrightarrow x^2-9x+2=0$ $\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{73}}{2}$ hoặc $x=\frac{9-\sqrt{73}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy tập nghiệm của PT(2) là $\left\{\frac{9-\sqrt{73}}{2};\frac{9+\sqrt{73}}{2}\right\}$.

PHẦN B: CÁC DẠNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO PHỨC TẠP

I. PHƯƠNG TRÌNH CÓ ẨN Ở TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1). Dạng có bản

$$\bullet |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$\bullet |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases} \end{array}\right.$$

2). Các dạng khác

- Ta thường xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối trên mỗi khoảng. Giải phương trình trên mỗi khoảng đó.

- Có thể đặt ẩn phụ

3). Một số bài tập mẫu

<u>Bài 1:</u> Giải phương trình: $x^2 + |x-1| = 1$

<u>Giải</u>

$$x^2 + |x-1| = 1$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x - 1 = \pm(1 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 - x^2 \\ x - 1 = -1 + x^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \vee x = 1 \\ x = 1 \vee x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Vậy x=1; x= 0

<u>Bài2</u> :Giải phương trình $|x^2 - x| + |2x - 4| = 3 \quad (1)$

<u>Giải:</u>

+ Xét dấu. Từ đó ta có 3 trường hợp:

• Trường hợp 1: $\left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ 1 < x \leq 2 \end{array}\right.$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Hai giá trị này đều không thuộc khoảng đang xét nên trường hợp này phương trình vô nghiệm.

• Trường hợp 2: $0 < x \le 1$ ta có

(1) $\Leftrightarrow -x^2 - x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ta thấy $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

• Trường hợp 3: x > 2 ta có

(1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$. Ta thấy $x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$ thỏa mãn.

Tóm lại: Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

<u>Bài 3:</u> Giải phương trình: $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$

<u>Giải</u>

$|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 6 = x^2 - 5x + 9 \\ x - 6 = -x^2 + 5x - 9 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy: x= 1; x= 3

<u>Bài 4:</u> Giải phương trình: $(|x|+ 1)^2 = 4|x|+ 9$

<u>Giải</u>

$(|x|+ 1)^2 = 4|x|+ 9$

Đặt t= |x| với $t \ge 0$

PT: $(t+ 1)^2 = 4t + 9$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2\ (loai) \end{array}\right.$

Với t= 4 thì |x|= 4 $\Leftrightarrow x = \pm 4$

Vậy x= 4; x= – 4

Bài 5: Giải và biện luận $|x^2 - 2x + m| + x = 0$

Giải

$|x^2 - 2x + m| + x = 0$

$\Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \ge 0 \\ x^2 - 2x + m = \pm x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{ll} x^2 - 3x + m = 0 & (1) \\ x^2 - x + m = 0 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

$Ta\, có\ \ \Delta_1 = 9 - 4m$

$\Delta_2 = 1 - 4m$

Biện luận

+ $m \le 0\ \ x = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2} \vee x = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$

+ m> 0: Vô nghiệm

4). Bài tập tự luyện.

Bài 1: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

1). $|2x - 1| + |2x + 1| = 4\ \ (x = \pm 1)$

2). $|x - 2| + |x - 3| = 4\ \ (x = \frac{1}{2}; \frac{9}{2})$

3). $2|x + 2| + 2|x - 1| = 5$ (PTVN)

4). $|3x + 4| = |x - 2|\ \ (x = -3; -\frac{1}{2})$

6). $|x^2 - 1| + |x| = 1$ (x=0; – 1; 1)

7). $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8\ \ (x = \frac{9}{2})$

8). $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x\ \ (x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2})$

9). $\dfrac{|3 - 2x| - |x|}{|2 + 3x| + x - 2} = 5\ \ (x = -\frac{23}{9}; \frac{3}{23})$

10). $\dfrac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x|(x - 2)} = 2$ (x=5)

11). $|x^2 - 3x + 2| = 2x + 1\ \ (x = 5 \pm \sqrt{21})$

Bài 2: Giải các phương trình sau

1) $|x^2 - x - 2| = |x^2 + 2x|\ \ (x = -\frac{2}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4})$

2) $|2 - |2 - x|| = 1\ \ (x = \pm 1; 3; 5)$

3) $|x^2 - 4x + 3| = x + 3\ \ (x = 0;\ 5)$

4) $|2x - 3| = \dfrac{1}{x}\ \ (x = 1; \frac{1}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{4})$

5) $|x^2 - 2x| = |2x^2 - 1|\ \ (x = 1; -\frac{1}{3}; -1 \pm \sqrt{2})$

6) $|x^2 - 3x + 2| - 2x = 1\ \ (x = 5 \pm \sqrt{21})$

7) $|x^2 + x - 12| = x^2 - x - 2\ \ (x = 5; \pm \sqrt{7})$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình sau

$$1).|3x+m|=|x-1|$$
$$2).x^2+4x-2|x-m|+2-m=0$$

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $|x^2-2x+m|=x^2+3x-m-1$

II. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

1). Các dạng cơ bản

$$\bullet\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\ (hay\ \ B\geq 0)\\ A=B\end{cases}$$

$$\bullet\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\ A=B^2\end{cases}$$

$$\bullet\sqrt[3]{A}=B\Leftrightarrow A=B^3$$

2). Các dạng khác

- Đặt điều kiện cho $\sqrt[2n]{A}\ là\ \ A\geq 0$, nâng cả hai vế lên lũy thừa tương ứng để khử căn thức

Lưu ý:

$$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A.B\geq 0\\ A^{2n}=B^{2n}\end{cases}$$

$$A=B\Leftrightarrow A^{2n+1}=B^{2n+1}$$

- Đặt ẩn phụ để đưa về phương trình hay hệ phương trình đơn giản

3). Các bài tập mẫu

Bài 1: Giải các phương trình sau

$$1).\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$$
$$2).\sqrt{25-x^2}=x-1$$
$$3).\sqrt{3x^2-9x+1}+2=x$$

Giải

$$1).\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geq 0\\ 4+2x-x^2=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x^2-3x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x=0\vee x=3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

$$2).\sqrt{25-x^2}=x-1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\geq 0\\ 25-x^2=(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ 2x^2-2x-24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x=4\vee x=-3\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

3). $\sqrt{3x^2-9x+1}+2=x \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ 3x^2-9x+1=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 2x^2-5x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=3 \vee x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

<u>Bài 2</u>: Giải các phương trình :

1) $x-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=-1 \vee x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x+4}=\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x+4=1-x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}+1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x\ge -\dfrac{1}{2} \\ (1-x)(1-2x)=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x=0 \vee x=-\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ:

Để khử căn thức, ta có thể đưa thêm một hoặc nhiều ẩn phụ. Tùy theo dạng của phương trình, bất phương trình mà lựa chọn cho thích hợp.

1. Các bài tập mẫu

<u>Bài 1</u>: Cho phương trình : $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=m \quad (1)$.

a) Giải phương trình với m = -3

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Giải: Đặt $X=(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} \Rightarrow X^2=(x-3)(x+1)$ nên pt (1) đưa về :$X^2+4X-m=0$ (2)

a) Với m = -3 thì phương trình (2) trở thành $X^2+4X+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-1 \\ X=-3 \end{array}\right.$

+ Nếu

$$X=-1 \Leftrightarrow -1=(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ 1=(x-3)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}$$

+ Nếu

$$X = -3 \Leftrightarrow -3 = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 9 = (x-3)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}$$

b) Trước hết phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Giả sử nghiệm là X_0 thì $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = X_0$.

+ Nếu $X_0 = 0$ thì x = – 1

+ Nếu $X_0 > 0$ thì $\begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(x+1) = X_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{4 + X_0^2}$

+ Nếu $X_0 < 0$ thì $\begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(x+1) = X_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{4 + X_0^2}$

Vậy với $m \geq -4$ thì phương trình (2) có nghiệm tức là phương trình (1) có nghiệm.

Bài 2: Giải phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$.

Hướng dẫn: Đặt $X = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.Đưa về phương trình:$X^2 - 2X - 3 = 0$

Bài 3: Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Hướng dẫn: Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$.Đáp số: x=1; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 4: Giải bất phương trình $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$.

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Bất phương trình trở thành $2t^2 - 5t + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ 0 < x < \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $t < \frac{1}{2}$.Bất phương trình vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình

$$-4\sqrt{(4-x)(2+x)} = x^2 - 2x - 8 \ (1)$$

Hướng dẫn: Đặt t = $\sqrt{(4-x)(2+x)}$ $(t \geq 0)$

(1) trở thành: $-4t = -t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right.$

**** Tuy nhiên, trong một số trường hợp, sau khi đặt ẩn phụ t, phương trình vẫn còn lại cả ẩn x cũ, khi đó ta sẽ coi x là tham số trong phương trình mới hoặc coi x là ẩn thứ 2 (cùng với t) trong 1 hệ phương trình. Cụ thể:***

+ Nếu phương trình mới (ẩn t, tham số x) có biệt thức Δ chính phương ($\Delta = g^2(x)$, g(x) là một đa thức, thường có bậc 1) thì giải t theo x; nếu phương trình là phương trình đẳng cấp (của x và t) thì đặt x = ty.

Bài 6: Giải phương trình

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1 \ (1)$$

Hướng dẫn: Đặt t = $\sqrt{x^2+1}$ $(t \geq 1)$

(1) trở thành $(4x-1)t = 2t^2 + 2x - 1$

$\Delta = (4x-3)^2$ (chính phương)

$$\Rightarrow t = \frac{(4x-1) \pm (4x-3)}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{x^2+1} = 2x-1 \end{array}\right.$$

Bài 7: Giải phương trình

$$2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2} \ (1)$$

Hướng dẫn: Đặt t = $\sqrt{3x-2}$ $(t \geq 0)$

(1) trở thành $t^2 + xt - 2x^2 = 0$.

- Cách 1: $\Delta = 9x^2$ (chính phương) $\Rightarrow t = \dfrac{-x \pm 3x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2} = x \\ \sqrt{3x-2} = -2x \end{array}\right.$

- Cách 2: phương trình đẳng cấp $\Rightarrow$ đặt x = ty:

  $t^2 + yt^2 - 2y^2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(1 + y - 2y^2) = 0.$

Bài 8: Giải phương trình

$$2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1.$$

+ Nếu phương trình mới không phải đẳng cấp và Δ cũng không chính phương thì coi t và x là 2 ẩn của 1 hệ phương trình.

<u>Bài 9:</u> Giải phương trình

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5 \ (1)$$

Hướng dẫn: Đặt t = $\sqrt{x+5}$ $(t \geq 0)$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + t = 5 \\ t^2 = x + 5 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau được: $(t + x)(x - t + 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -x \\ t = x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = -x \\ \sqrt{x+5} = x + 1 \end{array}\right.$$

<u>Bài 10</u>: Giải phương trình

$$x^2 + 4x = \sqrt{x+6} \ (1)$$

Hướng dẫn:

- Nếu đặt t = $\sqrt{x+6}$ $(t \geq 0)$ ta được hệ $\begin{cases} x^2 + 4x = t \\ t^2 = x + 6 \end{cases}$ $\rightarrow$ khó khăn
- Ta dự kiến đặt $\sqrt{x+6} = at + b$ để đưa về hệ phương trình đối xứng:

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 4x = at + b \\ a^2t^2 + 2abt = x + 6 - b^2 \end{cases}$

hệ này đối xứng nếu $\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 4 \\ a = 1 \\ b = 6 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

. Như vậy ta đặt $t + 2 = \sqrt{x+6}$ $(t \geq -2)$

Khi đó có hệ pt đối xứng: $\begin{cases} x^2 + 4x = t + 2 \\ t^2 + 4t = x + 2 \end{cases}$ (ĐS $x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$)

<u>Bài 11</u>: Giải phương trình

$$7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}} \ (x > 0)$$

Hướng dẫn:

Dự đoán đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}} = at + b$ ta tìm được $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ để có hệ phương trình đối xứng.

Như vậy sẽ đặt $t + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$.

Bài 12: Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ (1)$$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$

(1) trở thành: $t + \frac{1}{t} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,t^2 - 3t + \sqrt{2} = 0.$

Bài 13: Giải phương trình

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 \ (1)$$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{t^2-5}{2}$

(1) trở thành: $t + \frac{t^2-5}{2} = 5.$

Bài 14: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x} + \sqrt{7+x(1+x)} = 3 + \sqrt{2} \ (1)$$

Hướng dẫn:

Đặt $\sqrt{x^2+x} = t$ $(t \geq 0)$

(1) trở thành: $t + \sqrt{t^2+7} = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{t^2+7} = 3 + \sqrt{2} - t$ (dạng 1 căn)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+\sqrt{2} \geq 0 \\ t^2+7 = (3+\sqrt{2}-t)^2 \end{cases}$$

Bài 15: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+7} = 3 + \sqrt{2} \ (1)$$

Hướng dẫn:

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+x} \\ v = \sqrt{x^2+x+7} \end{cases}$

(1) trở thành: $u + v = 3 + \sqrt{2}$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u+v = 3+\sqrt{2} \\ v^2 - u^2 = 7 \end{cases}$

<u>Bài 16</u>: Giải phương trình

$$3(2+\sqrt{x-2}) = 2x+\sqrt{x+6}$$

Hướng dẫn:

Đặt $\begin{cases} u = 3-\sqrt{x-2} \\ v = \sqrt{x+6} \end{cases}$

2). Bài tập tự luyện

<u>Bài 1</u>: Giải các phương trình

1)$3\sqrt{x+34}-3\sqrt{x-3}=1$ $\quad kq: x=\dfrac{27583}{9}$

2)$x^2+\sqrt{x+5}=5$ $\quad kq: x=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{17}; x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{21}$

3)$\sqrt{3x^2-9x+1}+x-2=0$ $\quad kq: x=\dfrac{-1}{2}$

4)$\sqrt{2x+9}=\sqrt{4-x}+\sqrt{3x+1}$ $\quad kq: x=\dfrac{11}{3}; x=0$

5)$\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$ $\quad kq: x=2$

6)$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}-x^2+4x-6=0$ $\quad kq: x=2$

7). $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$ $\quad kq: x=5$

8).$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$ $\quad kq: x=\dfrac{-47}{24}$

9).$\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$ $\quad$ x=0

<u>Bài 2</u>: Giải các phương trình

1) $\sqrt{x-2}=x-4$ $\quad$ (x=6)

2) $\sqrt{3x^2-9x+1}+x-2=0$ $\quad$ $(x=-\dfrac{1}{2})$

3) $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5$ $\quad$ $(x=\dfrac{14}{5})$

4) $2x-\sqrt{2x-1}=7$ $\quad$ $(x=5)$

5) $\sqrt{x^2-2x+3}=2x+1$ $\quad$ $(x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{3})$

4) $\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$ $\quad$ $(x=\pm 2\sqrt{2})$

Bài 3: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{2x+9}=\sqrt{4-x}+\sqrt{3x+1}$ $\left(x=0 \vee x=\frac{11}{3}\right)$

2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$ (x=2)

3) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+7}=1$ $(x=9)$

4) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$ $(x=1)$

5) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}$ $\left(x=\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right)$

6) $\sqrt{x+1}=3-\sqrt{x+4}$ $(x=0)$

Bài 4: Giải các phương trình

1) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$. (x=1;x=-4)

2) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}-4\sqrt{4x-x^2-3}=-2$. (x=2)

3) $x^2+\sqrt{x+7}=7$. x=2 ; $\left(x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{29}\right)$

4) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$. ptvn

5) $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$ (x=1;x=-2)

6) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (x=1;x=2)

7) $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$ $\left(x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

8) $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1$ $\left(x=1; x=\frac{-7}{2}\right)$

9) $x+\sqrt{26-x^2}+x\sqrt{26-x^2}=11$ (x=1;x=5)

10) $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$ (x=2;x=0; $x=\frac{-2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{14}$)

11) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ (x=2)

12) $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$ $\left(x=\frac{4}{3}\right)$

Bài 5: Giải các phương trình

1) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$ $(x=1\vee x=-4)$

2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$ $(x=0\vee x=3)$

3) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ $(x=1\vee x=2-\sqrt{2})$

4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ $(x=1\vee x=2\vee x=10)$

5) $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4$ $(x=\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2})$

6) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$ (x=5)

7) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (x=1;x=2)

8) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$ (x=2)

V. ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

1). Một số bài tập mẫu

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ và áp dụng để giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Giải: Áp dụng bất đẳng thức : $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ .ta có:

$2(x-2+4-x)\geq\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2\Rightarrow 2\geq y$. Do đó y lớn nhất bằng 2 khi và chỉ khi:

$\sqrt{x-2}=\sqrt{4-x}\Leftrightarrow x=3$.Mặt khác $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\geq 2.\forall x$ nên:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2\\x^2-6x+11=2\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Bài 2: Giải phương trình

$$3\sqrt{x}+\frac{1}{x}=4\sqrt[8]{x}\quad(1)$$

Giải.

MXĐ: $x>0$

Có $\dfrac{3\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{4}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}{8}\geq\sqrt[8]{x}$ (2) $\forall x>0$ (BĐT Côsi)

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=1$.

<u>Bài 3</u>: Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11. \qquad (1)$$

Giải.

** Cách 1*

$[VT(1)]^2 \le (1^2 + 1^2)(x-2+4-x) = 4.$ (BĐT Bunhiacopxki)

$\Rightarrow VT \le 2.$

$VP(1) = (x-3)^2 + 2 \ge 2.$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} VT(1) = 2 \\ VP(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-2}}{1} = \dfrac{\sqrt{4-x}}{1} \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

** Cách 2*

Đặt $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

$A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \Rightarrow A^2 \le 2 + (x-2) + (4-x) \Rightarrow A^2 \le 4$ (BĐT Côsi)

$\Rightarrow VT \le 2$ với $2 \le x \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 3$

Mặt khác VP = $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 3

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ x^2 - 6x + 11 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Vậy x = 3 là nghiệm duy nhất của phương trình

<u>Bài 4</u>: Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 4} = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{3x^2 - 5x - 1} \qquad (1)$$

Giải.

Viết $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1 - 2(x-2)}$

$\sqrt{x^2 - 3x + 4} = \sqrt{x^2 - 2 - 3(x-2)}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - 2 \ge 0 \\ 3x^2 - 5x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

<u>Bài 5</u>: Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2 \qquad (1)$$

Giải.

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$

$\Rightarrow VT(1)\ge 5,\ VP(1)\le 5,\forall x$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}VT(1)=5\\VP(1)=5\end{cases}\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Vậy x = -1 là nghiệm duy nhất của phương trình

VI. NHIỀU CĂN BẬC LẺ:

**** Nâng lũy thừa:***

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}\ \Leftrightarrow\ A+B+3\sqrt[3]{AB}\,(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})=C$

$\Rightarrow\ A+B+3\sqrt[3]{AB}\,\sqrt[3]{C}=C$ (Bước này không tương đương)

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{ABC}=C-A-B\ \Leftrightarrow\ 27ABC=(C-A-B)^3$

<u>Bài 1</u>. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}. \qquad (1)$$

Giải:

$(1)\Rightarrow 2x-1+x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)^2}.\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{(x-1)^2}=3x+1$

$\Leftrightarrow 3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=3x+1$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}.\sqrt[3]{3x+1}=1$

$\Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(3x+1)=1$

$\Leftrightarrow 6x^3-7x^2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{loai})\\ x=\dfrac{7}{6}\ (\text{nhan})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{6}$

<u>Bài 2</u>. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3} \qquad (1)$$

Giải.

$(1)\ \Leftrightarrow\ x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}\,(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})=2x-3$

$\Rightarrow 2x - 3 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\,\sqrt[3]{2x-3} = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \dfrac{3}{2}\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy x= 1; x=2

**** Đặt ẩn phụ:***

<u>Bài 1</u>. Giải phương trình

$\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{x-1} = 3.$ (1)

Giải.

Đặt u = $\sqrt[3]{10-x}$

v = $\sqrt[3]{x-1}$

Ta có hệ $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$ (ĐS x= 9; x= 2)

VII. PHƯƠNG TRÌNH CÓ CẢ CĂN BẬC CHẲN, CẢ CĂN BẬC LẺ

**** <u>Cách 1</u>: Làm mất căn lần 1: đặt 1 ẩn phụ.***

Làm mất căn lần 2: nâng lũy thừa.

**** <u>Cách 2</u>: Đặt nhiều ẩn phụ.***

1). Bài tập mẫu

<u>Bài 1</u>. Giải phương trình

$\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x} = 1$ (1)

Hướng dẫn

+Cách 1: Đặt t = $\sqrt{x}$ $(t \geq 0)$

(1) trở thành $\sqrt[3]{t^2+7} = t + 1 \Leftrightarrow t^2 + 7 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 3t + 6) = 0$ (ĐS x=1)

+Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x+7} \\ v = \sqrt{x} \end{cases}$ có hệ $\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^2 = 7 \end{cases}$

<u>Bài 2</u>. Giải phương trình

$\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x} = 1$ (1)

Hướng dẫn

+ Cách 1: Đặt t = $\sqrt[3]{x}$, (1) trở thành: $\sqrt{t^3+1}$ = t + 1

+ Cách 2: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+3} \\ v=\sqrt[3]{x} \end{cases}$ có hệ $\begin{cases} u-v=1 \\ u^2-v^3=3 \end{cases}$ (ĐS $x=1; x=2\sqrt{2}$)

TÀI LIỆU ĐƯỢC SOẠN LÀ TỔNG HỢP KIẾN THỨC TẤT CẢ CÁC NGUỒN CỦA SÁCH VÀ CÁC TÁC GIẢ TRÊN CẢ NƯỚC.

Với năng lực có hạn, bài viết chưa được test lại kết quả nên rất mong các thầy cô giáo, các em học sinh đóng góp bổ sung.

Xin chân thành cảm ơn!