

**Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA**

**☎: 098 373 4349**

*Trường THPT* .....

*Họ và tên học sinh:* .....

*Lớp:* ..... *STT:* .....

**Tài liệu tự học**

# **TOÁN**

## **LỚP 10 - NH 17-18**

**Chủ đề 7**

### **TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ VÀ ỨNG DỤNG**

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Các dạng toán thường gặp*
- *Phương pháp giải toán*
- *Toán mẫu*
- *Bài tập cơ bản*
- *Bài tập nâng cao*
- *Bài tập tổng ôn*
- *Bài tập trắc nghiệm - Đáp án*

**Năm học 2017 - 2018**

**Lưu hành nội bộ**

# Chủ đề 7 TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

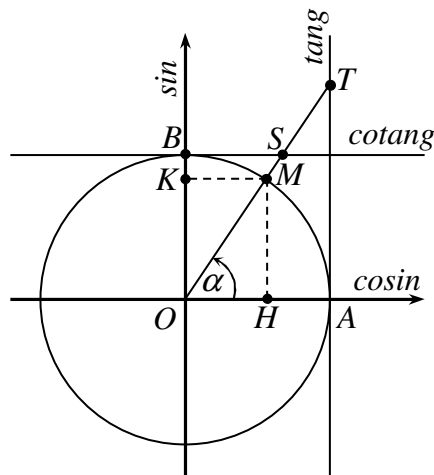
## Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

### A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho  $(OA, OM) = \alpha$  với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Giả sử  $M(x; y)$ .

- $\cos \alpha = x = \overline{OH}$
- $\sin \alpha = y = \overline{OK}$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT}$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ )
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS}$  ( $\alpha \neq 180^\circ$ )



#### Nhận xét:

- $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; 0 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $\tan \alpha$  xác định khi  $\alpha \neq 90^\circ$
- $\cot \alpha$  xác định khi  $\alpha \neq 180^\circ$
- Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ .

#### 2. Dấu của các tỉ số lượng giác:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+	+
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-	-

#### 3. Quan hệ giữa các góc phụ nhau, bù nhau:

- Hai góc phụ nhau:  $\alpha$  và  $90^\circ - \alpha$ 
  - $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
  - $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
  - $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
  - $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$
- Hai góc bù nhau:  $\alpha$  và  $180^\circ - \alpha$ 
  - $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
  - $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
  - $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
  - $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

#### 4. Các giá trị lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt

Độ	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∥	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot$	∥	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∥

#### 5. Một số hệ thức cơ bản

①  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

②  $\tan x \cdot \cot x = 1$

③  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

⑤  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

⑥  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

**B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1. Góc và dấu của các giá trị lượng giác****A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****1. Xét dấu các giá trị lượng giác**

Dựa vào bảng trong phần tóm tắt lý thuyết

⚠ Lưu ý: với  $\Delta ABC$ :  $0^\circ < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^\circ$  và  $0^\circ < A, B, C < 180^\circ$

**2. Tìm góc  $\alpha$  khi biết giá trị lượng giác:**

Sử dụng bảng các giá trị đặc biệt để tìm.

⚠ Lưu ý:  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ .

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 1.** Với những giá trị nào của góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) thì:

- a)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  cùng dấu ?  
 b)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  khác dấu ?  
 c)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu ?  
 d)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  khác dấu ?

**III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1.** Với những giá trị nào của góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) thì:

- a)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  có giá trị âm ?  
 b)  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  có giá trị âm

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Xét dấu: a)  $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos B$  b)  $\tan \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{3}$

**Bài 3.** Tìm góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $\cos \alpha = 0$       c)  $\tan \alpha = -\sqrt{3}$       d)  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Bài 4.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$       b)  $B = 2 \cos 30^\circ + 3 \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

**Bài 5.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ$       b)  $B = a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ$   
 c)  $C = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$       d)  $D = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$   
 e)  $E = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$

**Bài 6.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $\sin x + \cos x$  khi  $x$  bằng  $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$ .  
 b)  $2 \sin x + \cos 2x$  khi  $x$  bằng  $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ .  
 c)  $\sin^2 x + \cos^2 x$  khi  $x$  bằng  $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$ .

**Dạng 2. Cho một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại**

**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

**1. Sử dụng các hệ thức cơ bản trong điều kiện xác định của  $x$**

**2. Chú ý khi biến đổi**

- ▢ Lựa chọn hệ thức cơ bản thích hợp để từ giả thiết cho, suy dần ra các giá trị lượng giác còn lại. Chú ý dấu giá trị lượng giác, góc nhọn, góc tù.
- ▢ Dùng tính chất cùng bậc  $n$  (đồng cấp), để chia cho  $\sin^n \alpha$ ,  $\cos^n \alpha$  đưa về  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ .

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 2.** Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a)  $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$

b)  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha$  nhọn

c)  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$

d)  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

e)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

f)  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng trong  $\Delta ABC$ , ta có:

a)  $\sin A = \sin(B + C)$

b)  $\cos A = -\cos(B + C)$

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 7.** Biết  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ . Tính  $\cos 15^\circ$ ,  $\tan 15^\circ$ ,  $\cot 15^\circ$ ,  $\cos 105^\circ$

**Bài 8.** Cho  $\Delta OAB$  cân tại  $O$  có  $OA = a$  và các đường cao  $OH$ ,  $AK$ . Giả sử  $\widehat{AOH} = \alpha$ . Tính  $AK$  và  $OK$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

**Bài 9.** a) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

b) Cho  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

c) Cho  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ , với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha \cos \alpha$ .

d) Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

e) Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

f) Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{2 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$

**Bài 10.** a) Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

b) Cho  $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ . Tính  $Q = 3 \sin x + 4 \cos x$

**Bài 11.** Chứng minh rằng:

a)  $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$     b)  $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$     c)  $\cot 122^\circ = -\cot 58^\circ$     d)  $\tan 12^\circ = -\tan 168^\circ$

**Bài 12.** Tính và so sánh giá trị của từng cặp biểu thức sau đây:

$$A = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ \quad \text{và} \quad B = \cos 60^\circ + \sin 45^\circ$$

$$C = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} \quad \text{và} \quad D = -\tan 135^\circ \cdot \tan 60^\circ$$

**Bài 13.** Biết  $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ . Tính giá trị các biểu thức  $C = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

**Bài 14.** Biết  $\sin x + \cos x = m$ . Tính: a)  $\sin x \cdot \cos x$     b)  $\sin^4 x \cdot \cos^4 x$

### Dạng 3. Chứng minh, rút gọn một biểu thức

#### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**1. Sử dụng các hệ thức cơ bản trong điều kiện xác định của x:**

$$\begin{matrix} \textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \textcircled{2} \tan x \cdot \cot x = 1 & \textcircled{3} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \textcircled{4} \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} & \textcircled{5} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} & \textcircled{6} 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \end{matrix}$$

**2. Những hằng đẳng thức:**

- ◆  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ◆  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ◆  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- ◆  $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
- ◆  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- ◆  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a-b)$
- ◆  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^2 - 3ab(a+b)$
- ◆  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^2 + 3ab(a-b)$
- ◆  $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$
- ◆  $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

#### II - BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 4.** Chứng minh các đẳng thức sau trên điều kiện xác định của chúng:

$$\begin{matrix} \text{a) } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} & \text{b) } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \\ \text{c) } (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x & \text{d) } (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \end{matrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 5.** Chứng minh các đẳng thức sau trên điều kiện xác định của chúng:

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 15.** Chứng minh các đẳng thức sau trên điều kiện xác định của chúng:

a)  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = 2\sin^2 x - 1 = 1 - 2\cos^2 x$

b)  $\sin x \cdot \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2\sin x \cos x$

c)  $\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \tan x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \cot x)} = \sin x - \cos x$

d)  $\left( \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \left( \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{\sin x \cos x}$

**Bài 16.** Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ :

a)  $C = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

b)  $D = \cos^2 x (\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x)$

c)  $E = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

d)  $F = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

## C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 1

**Bài 17.** Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$$A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$$

$$B = \frac{\sin x + \tan x}{\tan x} - \sin x \cdot \cos x$$

$$C = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$D = \frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin^2 x} - \cos x \cdot \cot x$$

$$E = (1 + \sin x) \tan^2 x (1 - \sin x)$$

$$F = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$$

$$G = (\cot x + \tan x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

$$H = \sin^3 x (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x)$$

$$I = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$$

$$J = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x} - 1$$

**Bài 18.** Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

b)  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

c)  $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \sin^2 x - 1$

d)  $\frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

e)  $\frac{1 - \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

f)  $\frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \cos x$

g)  $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} = 1$

h)  $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

i)  $\frac{1 + 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

j)  $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$

**Bài 19.** Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x, y:

a)  $(\cot x + \tan x)^2 - (\cot x - \tan x)^2$

b)  $\cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3 \cos^2 x - \cot^2 x + 2 \sin^2 x$

c)  $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

d)  $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 2 \sin^2 x - \tan^2 x + \cos^2 x$

e)  $2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 3 \sin^2 x$

f)  $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

g)  $\sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 x (1 - \tan x)$

h)  $\sin^6 x + \cos^6 x - 2 \sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$

i)  $\sin^8 x + \cos^8 x + 6 \sin^4 x \cdot \cos^4 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$



**D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1**

- Câu 1.** [0H2-1] Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là
- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C. 1.                      D. -1.
- Câu 2.** [0H2-1] Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?
- A.  $\sin \alpha = \sin \beta$ .                      B.  $\cos \alpha = -\cos \beta$ .                      C.  $\tan \alpha = -\tan \beta$ .                      D.  $\cot \alpha = \cot \beta$ .
- Câu 3.** [0H2-1] Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\sin \alpha < 0$ .                      B.  $\cos \alpha > 0$ .                      C.  $\tan \alpha < 0$ .                      D.  $\cot \alpha > 0$ .
- Câu 4.** [0H2-1] Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?
- A.  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ .                      B.  $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$ .                      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .                      D.  $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$ .
- Câu 5.** [0H2-1] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  có góc  $\widehat{B} = 30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là sai?
- A.  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .                      B.  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $\cos C = \frac{1}{2}$ .                      D.  $\sin B = \frac{1}{2}$ .
- Câu 6.** [0H2-1] Điều khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ .                      B.  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ .  
C.  $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$ .                      D.  $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$ .
- Câu 7.** [0H2-1] Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây
- A.  $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$ .                      B.  $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$ .                      C.  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ .                      D.  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ .
- Câu 8.** [0H2-1] Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là sai?
- A.  $\sin \alpha = -\cos \beta$ .                      B.  $\cos \alpha = \sin \beta$ .                      C.  $\cos \beta = \sin \alpha$ .                      D.  $\cot \alpha = \tan \beta$ .
- Câu 9.** [0H2-1] Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?
- A. 1.                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 0.
- Câu 10.** [0H2-1] Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?
- A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .                      B.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .  
C.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .                      D.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .
- Câu 11.** [0H2-1] Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?
- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ .                      B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .                      D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .
- Câu 12.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức:  $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .
- A. 1.                      B. 0.                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D.  $-\sqrt{3}$ .
- Câu 13.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức:  $\sin 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 150^\circ \cos 165^\circ$
- A. 1.                      B. 0.                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $-\frac{3}{4}$ .
- Câu 14.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức:  $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$
- A.  $\sqrt{3}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C. 1.                      D. 0.

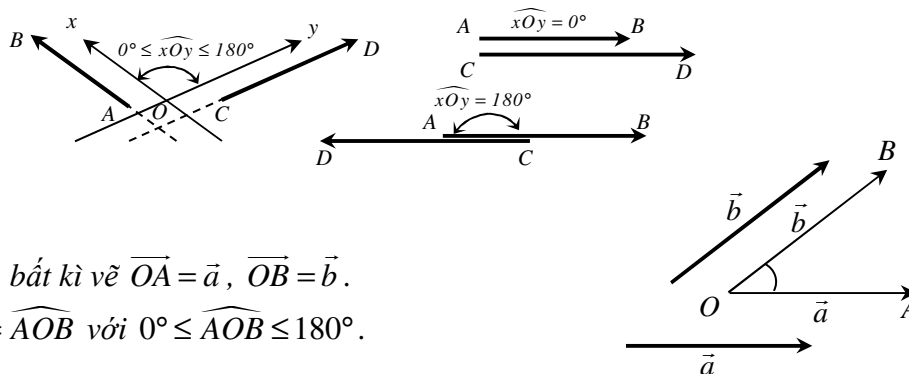
- Câu 15. [0H2-1]** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  với  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Tìm giá trị của biểu thức:  $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$   
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2.
- Câu 16. [0H2-1]** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  với  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , tìm giá trị của biểu thức:  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$   
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2
- Câu 17. [0H2-1]** Cho hai góc  $\alpha$  và  $\beta$  với  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , tìm giá trị của biểu thức:  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$   
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2.
- Câu 18. [0H2-2]** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .  
 A.  $P = \frac{25}{9}$ .                                      B.  $P = \frac{9}{25}$ .                                      C.  $P = \frac{11}{9}$ .                                      D.  $P = \frac{9}{11}$ .
- Câu 19. [0H2-2]** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$  là  
 A. 3.                                      B.  $-\frac{9}{13}$ .                                      C. -3.                                      D.  $\frac{9}{13}$ .
- Câu 20. [0H2-2]** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?  
 A.  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                                      B.  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                                      C.  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .                                      D.  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$ .
- Câu 21. [0H2-2]** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  trong đó  $\alpha < \beta$ . Khẳng định nào sau đây là sai?  
 A.  $\cos \alpha < \cos \beta$ .                                      B.  $\sin \alpha < \sin \beta$ .  
 C.  $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$ .                                      D.  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ .
- Câu 22. [0H2-2]** Tam giác đều  $ABC$  có đường cao  $AH$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?  
 A.  $\sin \widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                                      B.  $\cos \widehat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .                                      C.  $\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .                                      D.  $\sin \widehat{AHC} = \frac{1}{2}$ .
- Câu 23. [0H2-2]** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?  
 A.  $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$ .                                      B.  $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$ .  
 C.  $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$ .                                      D.  $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$ .
- Câu 24. [0H2-2]** Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **không** đúng?  
 A.  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$ .                                      B.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha$ .  
 C.  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .                                      D.  $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$ .
- Câu 25. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy tính  $\sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$   
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2.
- Câu 26. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy tính  $\cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C)$   
 A. 0.                                      B. 1.                                      C. -1.                                      D. 2.
- Câu 27. [0H2-2]** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?  
 A.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .                                      B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                                      C.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                                      D.  $\frac{1}{3}$ .
- Câu 28. [0H2-2]**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?  
 A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .                                      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                                      C.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .                                      D.  $-\frac{1}{3}$ .

## Vấn đề 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

### A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Góc giữa hai vectơ:

- Góc của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là góc tạo bởi hai tia  $Ox$ ,  $Oy$  lần lượt cùng hướng với hai tia  $AB$  và  $CD$ . Nghĩa là:  $\widehat{xOy} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .



- Cho  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ .

Từ một điểm  $O$  bất kì vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Khi đó  $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$  với  $0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$ .

#### ➤ Lưu ý: Các trường hợp đặc biệt:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng
- Nếu  $\vec{a} = \vec{0}$ ,  $\vec{b} = \vec{0}$  thì góc xen giữa là tùy ý từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ .

#### 2. Tích vô hướng của hai vectơ:

- Định nghĩa:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Đặc biệt: ①  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ; ②  $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ ; ③  $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \forall \vec{a}$

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  (bằng tích độ dài)
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  (bằng âm tích độ dài)

- Tính chất: Với  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và  $\forall k \in \mathbb{R}$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0; \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$  là góc nhọn
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$  là góc tù
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$  là góc vuông

#### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ , với  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ .
- Đặc biệt  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ .

## B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai vectơ. Góc giữa hai vectơ

#### I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

#### 3. Tích vô hướng:

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau:

✓ **Hướng 1:** Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  về cùng chung gốc để xác định chính xác góc  $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$  sau đó dùng công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

✓ **Hướng 2:** Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

✓ **Hướng 3:** Nếu đề bài cho dạng tọa độ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì:  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

✓ **Hướng 4:** Trong  $\Delta ABC$ , nếu biết độ dài 3 cạnh:

$$BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2 \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

⊗ **Chú ý:** Khi tính tích vô hướng của hai vectơ ta thường:

✓ Biến đổi các vectơ về **chung gốc** để việc tìm góc giữa 2 vectơ dễ dàng hơn.

Ví dụ:  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -\overline{BA} \cdot \overline{BC}$

✓ Đưa về các vectơ cùng phương hoặc vuông góc.

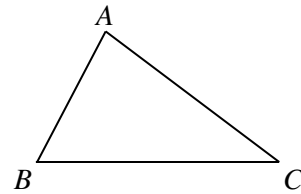
Ví dụ: nếu ABCD là hình chữ nhật (hình vuông) thì:  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{BC})$

#### 4. Tính góc:

✓ Góc giữa hai vectơ:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ , với  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .

✓ Các góc của  $\Delta ABC$ :

- $\cos A = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC}$
- $\cos B = \cos(\overline{BA}, \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{BA \cdot BC}$
- $\cos C = \cos(\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{CA \cdot CB}$



#### II - BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 6.** Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Hãy vẽ và tính các góc của các cặp vectơ sau:

- a)  $(\overline{AB}, \overline{AC})$       b)  $(\overline{AB}, \overline{BC})$       c)  $(\overline{AH}, \overline{BC})$       d)  $(\overline{HA}, \overline{AB})$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 7.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng sau:

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$    b)  $\overline{AH} \cdot \overline{AC}$    c)  $\overline{AB} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC})$    d)  $\overline{AC} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB})$    e)  $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB})$

**Ví dụ 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $CA = b$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{CA}$ .

**Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; -2)$  và  $B(-3; 1)$ .

a) Tính  $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ .

b) Tính  $\widehat{AOB}$ .

**Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong các trường hợp sau:

- a)  $\vec{a} = (2; -3), \vec{b} = (6; 4)$ .      b)  $\vec{a} = (3; 2), \vec{b} = (5; -1)$ .      c)  $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3}), \vec{b} = (3; \sqrt{3})$ .

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 20.** a) Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  và  $BC = a, \widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính  $\overline{CB} \cdot \overline{BA}$ .

b) Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $BC = a$ . Tính  $\overline{BC} \cdot \overline{CA}$ .

**Bài 21.** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , đường cao  $AB = 2a$ , đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = 2a$ .

a) Tích các tích vô hướng:  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}, \overline{BD} \cdot \overline{BC}, \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ , tính  $\overline{AI} \cdot \overline{BD}$ . Từ đó suy ra góc của hai vectơ  $\overline{AI}$  và  $\overline{BD}$ .

**Bài 22.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh  $a$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

b)  $\overline{AC} (\overline{AB} + \overline{AD})$

c)  $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$

d)  $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC})$

e)  $(\overline{AC} - \overline{AB})(2\overline{AD} - \overline{AB})$

f)  $(\overline{AB} + \overline{AC})(\overline{BC} + \overline{BD} + \overline{BA})$

g)  $\overline{OA} \cdot \overline{AB}$

h)  $(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC})$

**Bài 23.** Cho  $\Delta ABC$ , trên cạnh  $BC$  lấy 2 điểm  $E, F$  sao cho  $BE = EF = FC$ . Đặt  $\overline{AE} = \vec{a}, \overline{EB} = \vec{b}$ .

a) Biểu thị  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$  theo các vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

b) Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  nếu  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ .

**Bài 24.** a) Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}|$  nếu  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .

b) Cho  $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$ . Tính  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**Bài 25.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  thỏa  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  và  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

**Bài 26.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ .  $G$  là trọng tâm tam giác,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính:

- a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}, \overline{BA} \cdot \overline{CB}, \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$
- b)  $\overline{AB} \cdot (2\overline{AB} - 3\overline{AC}), \overline{MC} \cdot \overline{CA}, \overline{AM} \cdot \overline{GA}$

**Bài 27.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 3, BC = 6$  và  $CA = 8$ .

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  và độ dài trung tuyến  $AM$ .

b) Cho điểm  $I$  thỏa:  $3\overline{CI} = 5\overline{IA}$ . Tính  $\overline{AI} \cdot \overline{BI}$  và độ dài  $BI$ .

**Dạng 2. Tính độ dài của một đoạn thẳng****I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Ta thường sử dụng:

- Quy tắc biến đổi:  $BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2$  tức là biến đổi phép tính độ dài đoạn thẳng thành phép tính tích vô hướng.
- Công thức tọa độ:  $|\overline{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$  (nếu đề bài có liên quan đến tọa độ).

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = a$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ . Suy ra độ dài  $BC$  và độ dài trung tuyến  $AM$ .

**Ví dụ 12.** Cho hai điểm  $A(4;3)$  và  $B(2;-1)$ .

- Tìm điểm  $N$  thuộc  $Oy$  sao cho  $N$  cách đều hai điểm  $A$  và  $B$ .
- Tìm điểm  $M$  trên trục hoành sao cho  $|\overline{MA} + \overline{MB}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 28.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$  và  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

- Tính độ dài  $BC$  và trung tuyến  $AM$ .
- Gọi  $I, J$  là 2 điểm định bởi:  $2\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$ ,  $\overline{JB} - 2\overline{JC} = \vec{0}$ . Tính  $\overline{BI} \cdot \overline{BJ}$  và độ dài  $IJ$ .

**Dạng 3. Chứng minh vuông góc**

**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau:

✓ **Hướng 1:** Dùng tính chất tích vô hướng:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = 0 \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{cases}$$

✓ **Hướng 2:** Dùng tọa độ:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 13.** Chứng minh rằng hai đường chéo của một hình thoi  $ABCD$  vuông góc với nhau.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 14.** Cho ba điểm  $A, B, M$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Chứng minh:  $4MO^2 = AB^2 \Leftrightarrow MA \perp MB$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 15.** Cho  $\Delta ABC$  với  $A(10;5), B(3;2), C(6;-5)$ . Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Ví dụ 16.** Trong hệ trục tọa độ  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , cho  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (x; -1)$ .

- a) Tìm  $x$  để  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau.      b) Tìm  $x$  để độ dài của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng nhau.

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 29.** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N, P$  là 3 điểm sao cho:  $\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ ,  $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ,  $\vec{AP} = \frac{5}{8}\vec{AC}$

- a) Tính  $\vec{AM}$ ,  $\vec{AN}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .      b) Chứng minh:  $MP \perp AN$ .

**Bài 30.** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh  $3a$ . Trên 3 cạnh  $BC, CA, AB$  lấy  $M, N, P$  thỏa:  $BM = a$ ,  $CN = 2a$ ,  $AP = x$  ( $0 < x < 3a$ ).

- a) Tính  $\vec{AM}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
b) Chứng minh:  $\vec{PN} = \frac{1}{3}\left(\vec{AC} - \frac{x}{a}\vec{AB}\right)$ .  
c) Tìm  $x$  theo  $a$  để  $AM \perp NP$ .

**Bài 31.** Cho điểm  $I$  nằm trong đường tròn tâm  $O$ . Kẻ qua  $I$  hai dây cung  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau. Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Chứng minh rằng:  $BC \perp IM$ .

**Bài 32.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tạo  $O$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của tam giác  $ABO$  và  $CDO$ ;  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Chứng minh:  $HK \perp IJ$ .

**Bài 33.** Cho  $\Delta ABC$  đều, trên  $BC, CA, AB$  lấy các điểm  $D, E, F$  thỏa  $3\vec{DB} = \vec{BC}$ ,  $3\vec{CE} = 2\vec{CA}$  và  $15\vec{AF} = 4\vec{AB}$ . Chứng minh:  $AD \perp EF$ .

**Bài 34.** Cho hình vuông  $OACB$  và một điểm  $M$  thuộc  $OC$ . Kẻ đường  $PP'$  qua  $M$  và vuông góc với  $OA$ , đường  $QQ'$  qua  $M$  và vuông góc với  $OB$ .

- a) Chứng minh:  $AM = PQ$ .      b) Chứng minh:  $AM \perp PQ$ .

**Bài 35.** Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để  $\Delta ABC$  vuông là:  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = AB^2$

**Dạng 4. Chứng minh một đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài**

**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- Sử dụng tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.
- Với các biểu thức về tích vô hướng, ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặt biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi +, -, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...
- Với các công thức về độ dài, ta thường sử dụng:  $AB^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$ . Cần nắm vững các hình tính của những hình cơ bản.
- Để chứng minh  $\vec{v} = \vec{0}$  ta có thể chứng minh tích vô hướng của  $\vec{v}$  với hai vectơ không cùng phương bằng 0, tức là  $\vec{v}$  có 2 giá khác nhau.

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 17.** Cho tam giác  $ABC$  bất kì, gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Chứng minh:  $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 18.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  bất kì.

a) Chứng minh rằng  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$

b) Suy ra rằng 3 đường cao của một tam giác bất kì đồng qui tại một điểm gọi là trực tâm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 36.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M$  là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

b)  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

c)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

d)  $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

**Bài 37.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$ .

**Bài 38.** Cho  $\Delta ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = MA^2 - MB^2$ .

**Bài 39.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  tùy ý.

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ . Suy ra cách chứng minh định lý “ba đường cao trong tam giác đồng qui”.

b) Chứng minh rằng:  $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$  suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

**Bài 40.** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Lấy điểm  $M$  tùy ý.

a) Chứng minh:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .

b) Suy ra rằng:  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ ;  $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

(Với  $O$  là tâm và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ ;  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ )

**Bài 41.** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$

b)  $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$

**Bài 42.** Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ ,  $M$  là một điểm tùy ý. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $M$  lên đường thẳng  $AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MB^2 - MA^2)$

b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

c)  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

d)  $|MA^2 - MB^2| = 2IH \cdot AB$

**Bài 43.** Cho hai điểm  $M, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ .

a) Chứng minh:  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ ;  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

b) Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$  theo  $R$ .

**Bài 44.** Từ điểm  $P$  trong đường tròn kẻ 2 dây vuông góc  $APB$  và  $CPQ$ . Chứng minh rằng đường chéo  $PQ$  của hình chữ nhật  $APCQ$  vuông góc với  $PD$ .

**Bài 45.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AA', BB', CC'$  là các đường trung tuyến,  $G$  là trọng tâm,  $M$  là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

b)  $\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

d)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

e)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

**Dạng 5. Tập hợp điểm – Cực trị**

**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

1. Các tập hợp điểm cơ bản: Cho đoạn  $AB$ , tập hợp các điểm  $M$  thỏa:

- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $A$ .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là đường tròn đường kính  $AB$ .

2. Các dạng thường gặp:

- **Dạng 1:**  $AM^2 = k > 0$ :  $M$  thuộc đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = \sqrt{k}$ .
- **Dạng 2:**  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ , với  $A, B$  cố định và  $k$  không đổi.  
 ✓ Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ , ta được:

$$\text{Ta có: } k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB})$$

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Đặt } \Rightarrow l = k + \frac{AB^2}{4}.$$

✓ Khi đó:

- Nếu  $l < 0$ :  $M$  không tồn tại
- Nếu  $l = 0$  thì  $M \equiv I$ : là trung điểm  $AB$
- Nếu  $l > 0$ :  $M$  thuộc đường tròn tâm  $I$ , bán kính  $R = \sqrt{l}$ .

⚠ Lưu ý các phép biến đổi vector, quy tắc trung điểm, trọng tâm, đặc biệt là tâm tỉ cự  $I$  thì ta phải chọn đặt và chứng minh  $I$  cố định rồi chèn  $I$  vào biểu thức vector tương ứng, nếu không có tâm tỉ cự của hệ điểm thì chọn tâm tỉ cự của bộ phận điểm.

- **Dạng 3:**  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$ , với  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ ,  $A, B, C$  cố định và  $k$  không đổi.

✓ Gọi  $I$  là điểm cố định thỏa  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

$$\text{Ta có: } \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) MA^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)$$

$$MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)}{\alpha + \beta + \gamma}. \text{ Đặt } h = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Như vậy tập hợp các điểm  $M$  là:

- Đường tròn tâm  $I$ , bán kính  $\sqrt{h}$  nếu  $h > 0$ .
- Điểm  $I$  nếu  $h = 0$ .
- $\emptyset$  nếu  $h < 0$ .

3. Bài toán cực trị hình học

a) Cho  $I$  là điểm cố định,  $M$  thay đổi thì  $MI^2$  bé nhất khi  $M \equiv I$ .

b) Cho  $I$  là điểm cố định,  $M$  thay đổi trên đường thẳng  $d$  thì  $MI$  bé nhất khi  $M$  là hình chiếu của  $I$  lên đường thẳng  $d$ .

c) Một số bất đẳng thức được đánh giá từ các bình phương vô hướng đặc biệt:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 \geq 0, (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})^2 \geq 0, \dots$$

## II - BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 19.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:

a)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

**Ví dụ 20.** Cho tam giác  $AB$  có độ dài bằng  $3a$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa:

a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$

b)  $MA^2 + 2MB^2 = AB^2$

**Ví dụ 21.** Cho  $\Delta ABC$  cố định,  $G$  là trọng tâm.

- a) Chứng minh:  $\overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0$
- b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$  ta có:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$
- c) Với vị trí nào của điểm  $M$  thì tổng  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  có giá trị bé nhất và giá trị đó bằng bao nhiêu?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 46.** Cho  $\Delta ABC$  cố định. Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn:

- a)  $\overline{MB}.\overline{BC} = 0$
- b)  $\overline{MA}.\overline{MB} = 6$
- c)  $\overline{AB}.\overline{AM} = \overline{AB}.\overline{AC}$
- d)  $\overline{MA}.\left(\overline{MB} + \overline{MC}\right) = 0$
- e)  $\overline{MB}.\left(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\right) = 0$
- f)  $\left(\overline{MA} + 3\overline{MB}\right).\left(\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC}\right) = 0$

**Bài 47.** Cho  $\Delta ABC$  cố định. Hãy tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa một trong các điều kiện sau:

- a)  $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MA}.\overline{MC}$
- b)  $\left(\overline{MA} + \overline{MB}\right)\left(\overline{MA} + \overline{MC}\right) = 0$
- c)  $\overline{MA}.\overline{MB} = k$  (với  $k$  là số không đổi)
- d)  $\overline{MA}.\overline{MB} = MC^2$
- e)  $MA^2 + \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MA}.\overline{MC} = 0$
- f)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$  (với  $k$  là số không đổi)
- g)  $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = k$  (với  $k$  là số không đổi)

**Bài 48.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ ,  $M$  là điểm tùy ý.

- a) Chứng minh rằng:  $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2)$
- b) Giả sử  $M$  di động trên đường thẳng  $d$ , xác định vị trí của  $M$  để  $MA^2 - MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 49.** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh bằng 6 (cm). Lấy  $M$  là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Đặt  $S = MA^2 - MB^2 - MC^2$ . Tìm vị trí của điểm  $M$  để  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất ?

**Dạng 6. Biểu thức tọa độ****I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ,  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$ .

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$  (hoành  $\times$  hoành + tung  $\times$  tung)
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$
- $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Khi tính tích vô hướng 2 vectơ, ta nên để ý đến chiều nhằm xác định đúng góc của chúng.

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 22.** a) Cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{a}$  biết  $|\vec{b}| = \sqrt{10}$ .

b) Cho  $\vec{a} = (2; -3)$ . Tìm vectơ  $\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{a}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$ .

c) Cho  $\vec{a} = (-2; 1)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{a}$  biết  $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ .

**III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 50.** Cho  $A(5; -1)$  và  $B(-1; 3)$ .

a) Tìm trên trục tung điểm  $P$  sao cho  $\widehat{APB} = 90^\circ$ .

b) Tìm trên trục hoành điểm  $M$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2$  nhỏ nhất.

**Bài 51.** Cho  $\vec{a} = (1; 3)$ ,  $\vec{b} = (6; -2)$  và  $\vec{c} = (x; 1)$ .

a) Chứng minh  $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Tìm  $x$  để  $\vec{a} \perp \vec{c}$

c) Tìm  $x$  để  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng phương

d) Tìm tọa độ vectơ  $\vec{d}$  để  $\vec{a} \perp \vec{d}$  và  $\vec{b} \cdot \vec{d} = 20$

**Dạng 7. Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác**

**I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

1. Để tìm điểm  $M(x; y)$  ta dùng quan hệ giữa các vector: vuông góc, cùng phương, bằng nhau, ... để thiết lập phương trình theo 2 ẩn  $x, y$ .

2. Trong  $\Delta ABC$ , ta cần nhớ các thuộc tính của một số điểm sau:

✓ **Trọng tâm  $G(x_G; y_G)$  là giao điểm ba đường trung tuyến:**

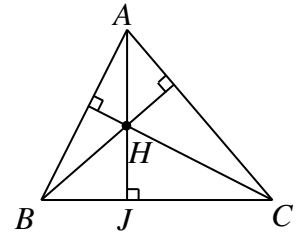
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

✓ **Trực tâm  $H(x_H; y_H)$  là giao điểm ba đường cao:**

Ta có  $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Từ đó ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$



Giải hệ trên ta tìm được  $x_H, y_H$ .

✓ **Tìm  $J(x_J; y_J)$  là chân đường cao vẽ từ  $A$ :**

▪ Vì  $AJ \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  (1)

▪ Vì 3 điểm  $B, J, C$  thẳng hàng nên:  $\overrightarrow{BJ}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương (2)

Giải hệ phương trình gồm 2 phương trình (1) và (2) ta tìm được  $x_J, y_J$ .

✓ **Tâm đường tròn ngoại tiếp  $I(x_I; y_I)$  là giao điểm 3 đường trung trực:**

❖ Trường hợp 1:  $\Delta ABC$  là tam giác đặc biệt:

- $\Delta ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow I$  là trung điểm  $BC$ .
- $\Delta ABC$  đều  $\Rightarrow I$  là trọng tâm.

❖ Trường hợp 2:  $\Delta ABC$  là tam giác thường:

▪ Cách 1: Tọa độ điểm  $I$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$$

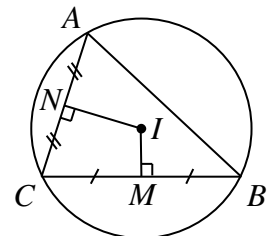
▪ Cách 2: Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AC$ .

Ta có  $IM \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$IN \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Từ đó ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được  $x_I, y_I$ .



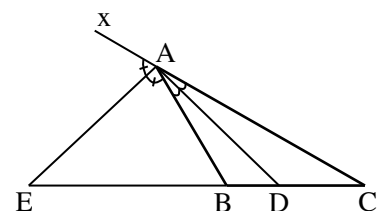
✓ **Tìm  $D$  và  $E$  lần lượt là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc  $A$ :**

• Chân đường phân giác trong  $D(x_D; y_D)$ :

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

• Chân đường phân giác ngoài  $E(x_E; y_E)$ :

$$\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$$





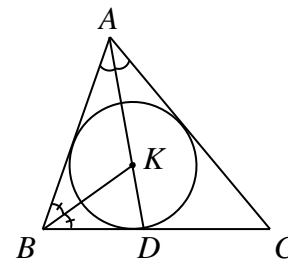
✓ Tâm đường tròn nội tiếp  $K(x_K; y_K)$  là giao điểm ba đường phân giác:

- **Bước 1:**  $\triangle ABC$ : Tìm điểm  $D$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC} \Rightarrow \overline{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overline{DC}$$

- **Bước 2:**  $\triangle ABD$ : Tìm điểm  $K$  là chân đường phân giác trong của góc  $B$ :

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KD}} = -\frac{BA}{BD} \Rightarrow \overline{KA} = -\frac{BA}{BD} \cdot \overline{KD}$$



⊗ **Chú ý:** Ta có thể dùng công thức sau để kiểm tra lại kết quả:

$$x_K = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}; y_K = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$$

(trong đó  $BC = a, AC = b, AB = c$  là độ dài 3 cạnh của tam giác)

## II - BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 23.** Cho  $\triangle ABC$ , biết  $A(1;1), B(1;7), C(9;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $K$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 52.** Cho  $\triangle ABC$ , biết  $A(4;3), B(-1;-1), C(2;-4)$ .

a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ .

b) Tìm điểm  $K$  là chân đường cao kẻ từ  $C$ .

**Ví dụ 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1;6)$ ,  $B(2;-6)$ ,  $C(-1;1)$ .

- Chứng minh rằng  $A$ ,  $B$ ,  $C$  lập thành một tam giác.
- Tìm trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$ , tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- Chứng minh rằng:  $\overline{IH} = 3\overline{IG}$ .
- Tìm chiều cao  $AA'$  và diện tích tam giác  $ABC$ .
- Cho  $\vec{a} = \overline{CA}$ ,  $\vec{b} = \overline{CB}$ . Tìm vectơ  $\vec{x}$  thỏa:  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 38$  và  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -30$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 53.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(1;5)$ ,  $B(-4;-5)$ ,  $C(4;-1)$ .

- Chứng minh rằng:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  là 3 đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ .

**Bài 54.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(1;2)$ ,  $B(-2;6)$ ,  $C(9;8)$ .

- Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ .
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$ .
- Tính chu vi, diện tích của  $\Delta ABC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $M$  trên  $Oy$  để  $B, M, A$  thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm  $N$  trên  $Ox$  để  $\Delta ANC$  cân tại  $N$ .
- Tìm tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình chữ nhật.
- Tìm tọa độ điểm  $K$  để  $AOKB$  là hình thang đáy  $AO$ .
- Tìm tọa độ điểm  $T$  thỏa  $\overline{TA} + 2\overline{TB} - 3\overline{TC} = \vec{0}$
- Tìm tọa độ điểm  $E$  đối xứng với điểm  $A$  qua  $B$ .
- Tìm tọa độ điểm  $I$  là chân đường phân giác trong tại đỉnh  $C$ .

**Dạng 8. Một số dạng toán thường gặp trên tam giác, tứ giác****I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****1. Dạng câu hỏi "Chứng minh ...":**

1) Chứng minh  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ .

Tính độ dài  $AB, AC$ . Suy ra  $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$  cân tại  $A$ .

2) Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

Cách 1: Tính  $AB, AC, BC$ . Suy ra  $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

Cách 2: Tính tọa độ  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , suy ra  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \dots = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

3) Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông cân tại  $A$ .

Tính  $AB, AC, BC$ .

Suy ra  $\begin{cases} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$  vuông cân tại  $A$ .

4) Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành:

Tính  $\overline{AB}, \overline{DC}$ , suy ra  $\overline{AB} = \overline{DC}$  và  $AB = DC \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

5) Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thoi:

Tính  $AB, BC, CD, DA$ . Suy ra  $AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD$  là hình thoi.

6) Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật:

Cách 1: Chứng minh  $ABCD$  là hình bình hành và có 1 góc vuông.

Cách 2: Chứng minh  $ABCD$  là hình bình hành và có 2 đường chéo bằng nhau.

7) Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình vuông

Cách 1: Chứng minh  $ABCD$  là hình thoi và có 1 góc vuông.

Cách 2: Chứng minh  $ABCD$  là hình bình hành + 1 góc vuông + 2 cạnh liên tiếp bằng nhau.

8) Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thang:

Tính  $\overline{AB}, \overline{DC} \Rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ , suy ra  $\overline{AB}, \overline{DC}$  cùng phương  $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$  là hình thang.

- CM hình thang vuông: chứng minh thêm 1 góc vuông.

- CM hình thang cân: chứng minh thêm 2 đường chéo bằng nhau.

9) Chứng minh  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp:

- Ta vẽ hình trong mp Oxy để xem tứ giác này có đặc điểm gì?

- Chứng minh  $A$  và  $C$  vuông bằng cách tính tọa độ các vectơ liên quan và dùng điều kiện vuông góc (tích vô hướng = 0)

Suy ra tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong đường tròn có đường kính  $BD$ .

⊗ **Lưu ý**: các tứ giác đặc biệt: hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân cũng là tứ giác nội tiếp.

**11. Dạng câu hỏi "Tìm tọa độ điểm ...":**

1) Tìm tọa độ 1 điểm  $M$  thuộc trục tung (hoặc hoành) để  $\Delta MAB$  vuông tại  $M$  (với  $A, B$  là 2 điểm cho trước).

- Nếu  $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$ ;  $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$ .

Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$ .

Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $y = a \Rightarrow M(x_M; a)$ .

- Tính sẵn tọa độ  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  (có 1 ẩn là  $x_M$  hoặc  $y_M$ ).
  - Do  $\Delta MAB$  vuông tại  $M \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , suy ra phương trình theo  $x_M$  hoặc  $y_M$ .
- 2) Tìm tọa độ 1 điểm  $M$  thuộc trục tung (hoặc hoành) để  $\Delta MAB$  vuông cân tại  $M$  hoặc  $M$  cách đều  $A$  và  $B$  (với  $A$  và  $B$  là 2 điểm cho trước)
- Nếu  $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0); M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$ .
  - Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$ .
  - Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $y = a \Rightarrow M(x_M; b)$ .
  - Tính độ dài  $MA, MB$ .
  - Do  $\Delta MAB$  cân tại  $M$  (hay  $M$  cách đều  $A$  và  $B$  - tùy câu hỏi).  
 $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \Rightarrow$  phương trình theo  $x_M$  hoặc  $y_M$ .
- ☞ **Lưu ý:** Nếu yêu cầu câu hỏi là “ $\Delta MAB$  cân” thì với tọa độ  $M$  tìm được phải thử lại để loại trường hợp  $M$  là trung điểm  $AB$ .
- 3) Tìm tọa độ 1 điểm  $M$  thuộc trục tung (hoặc hoành) để  $M, A, B$  thẳng hàng (với  $A$  và  $B$  là 2 điểm cho trước)
- Nếu  $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0); M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$ .
  - Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$ .
  - Nếu  $M$  thuộc đường thẳng  $y = a \Rightarrow M(x_M; b)$ .
  - Tính tọa độ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ .
  - Ba điểm  $M, A, B$  suy ra  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\Rightarrow$  phương trình theo  $x_M$  hoặc  $y_M$ .

## II - BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ . Xét hình tính các tam giác  $\Delta ABC$  và tính chu vi, diện tích của chúng.

a)  $A(1;4), B(2;1), C(5;2)$ .

b)  $A(1;1), B(2;3), C(5;-1)$ .

c)  $A(1;-1), B(3;1), C(-3;3)$ .

b)  $A(1;-1), B(-2;-2), C(-3;1)$ .

**Ví dụ 26.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết:

- a)  $A(-1;2)$ ,  $B(1;4)$ ,  $C(5;0)$ ,  $D(3;-2)$ .      b)  $A(2;-2)$ ,  $B(-1;-3)$ ,  $C(-3;3)$ ,  $D(0;4)$ .

**Ví dụ 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thoi. Biết:

- a)  $A(3;1)$ ,  $B(5;-3)$ ,  $C(1;-1)$ ,  $D(1;-3)$ .      b)  $A(3;3)$ ,  $B(-2;8)$ ,  $C(-3;1)$ ,  $D(2;-4)$ .

**Ví dụ 28.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình vuông. Biết:

- a)  $A(0;-2)$ ,  $B(5;0)$ ,  $C(3;5)$ ,  $D(-2;3)$ .      b)  $A(7;-3)$ ,  $B(8;4)$ ,  $C(1;5)$ ,  $D(0;-2)$ .

**Ví dụ 29.** Cho hai điểm  $A(-3;3)$ ,  $B(4;4)$ .

- a) Tìm  $M$  thuộc trục tung để  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .
- b) Tìm  $N$  thuộc trục hoành để ba điểm  $A, B, N$  thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 30.** Cho ba điểm  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(2;-4)$ .

- a) Chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  lập thành tam giác.
- b) Tìm điểm  $M(m,2)$  để  $\triangle ABM$  vuông tại  $M$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 31.** Cho ba điểm  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(5;-4)$ .

- Chứng minh 3 điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  lập thành tam giác vuông.
- Tìm điểm  $E$  trên  $Oy$  sao cho  $AEBC$  lập thành hình thang.

**Ví dụ 32.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(7;-3)$ ,  $B(8;4)$ ,  $C(1;5)$  và  $D(0;-2)$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 55.** Cho ba điểm  $A(1;1)$ ,  $B(3;4)$ ,  $C(0;5)$ .

- Tìm  $\vec{a} = (x; y)$  sao cho  $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$  và  $|\vec{a}| = 5$ .
- Tìm điểm  $M$  trên  $Ox$  sao cho  $\triangle ABM$  vuông tại  $B$ .
- Tìm điểm  $D$  sao cho  $ABDC$  là hình chữ nhật.

**Bài 56.** Tìm  $x$ ,  $y$  để các điểm  $A(2;0)$ ,  $B(0;2)$ ,  $C(0;7)$  và  $D(x;y)$  là các đỉnh liên tiếp của hình thang cân.

**Bài 57.** Cho  $\triangle ABC$ , biết  $A(4;1)$ ,  $B(2;6)$  và  $C(-5;3)$ .

- Tính cosin của góc lớn nhất trong tam giác  $ABC$ .
- Tìm điểm  $D$  trên  $Ox$  sao cho  $ABCD$  là hình thang.

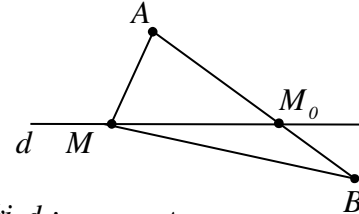
**Dạng 9. Tìm GTLN, GTNN trong hình học**

**A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

**Bài toán 1:** Cho điểm  $A, B$  và đường thẳng  $d$ . Tìm điểm  $M \in d$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

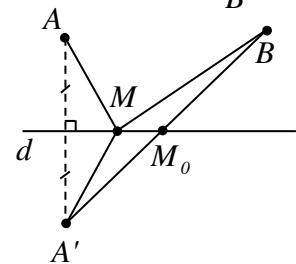
1. Trường hợp 1: Hai điểm  $A$  và  $B$  nằm khác phía đối với  $d$  :

- $M \in d \Rightarrow$  Tọa độ của  $M$  dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:  
 $MA + MB \geq AB$ . Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_0$   
 $\Leftrightarrow M, A, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  tọa độ  $M$ .



2. Trường hợp 2: Hai điểm  $A$  và  $B$  nằm cùng phía đối với  $d$  :

- $M \in d \Rightarrow$  Tọa độ của  $M$  dạng tổng quát.
- Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $d$ .
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:  
 $MA' + MB \geq A'B \Leftrightarrow MA + MB \geq A'B$   
 $\Rightarrow (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (MA' + MB) = A'B$

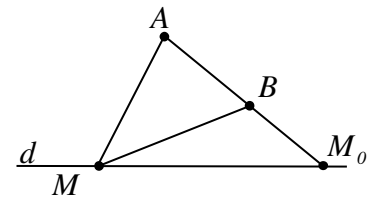


Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A', B$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  tọa độ  $M$ .

**Bài toán 2:** Cho điểm  $A, B$  và đường thẳng  $d$ . Tìm điểm  $M \in d$  sao cho  $|MA - MB|$  lớn nhất.

1. Trường hợp 1: Hai điểm  $A$  và  $B$  nằm khác phía đối với  $d$  :

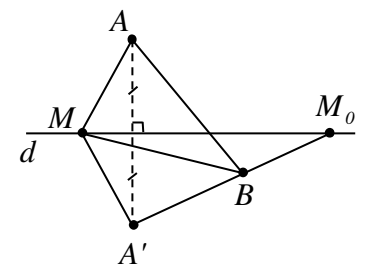
- $M \in d \Rightarrow$  Tọa độ của  $M$  dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:  
 $|MA - MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA - MB|_{\max} = AB$



Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A, B$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  tọa độ  $M$ .

2. Trường hợp 2: Hai điểm  $A$  và  $B$  nằm cùng phía đối với  $d$  :

- $M \in d \Rightarrow$  Tọa độ của  $M$  dạng tổng quát.
- Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $d$ .
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:  
 $|MA' - MB| \leq A'B \Leftrightarrow |MA - MB| \leq A'B$   
 $|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow |MA' - MB|_{\max} = A'B$



Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A', B$  thẳng hàng  $\Rightarrow$  tọa độ  $M$ .

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 33.** Tìm trên trục hoành điểm  $P$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm  $P$  đến các điểm  $A$  và  $B$  là nhỏ nhất. Biết: a)  $A(1; 1), B(2; -4)$     b)  $A(1; 2), B(3; 4)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**Bài 58.** Cho ba điểm  $A(0; 6)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $M(2t - 2; t)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho:

a)  $(MA + MB)_{\min}$

b)  $|MA - MB|_{\max}$

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 59.** Tìm trên đường thẳng  $d: y = -x$  điểm  $M$  sao cho tổng khoảng cách từ điểm  $M$  đến các điểm  $A$  và  $B$  là nhỏ nhất. Biết:

a)  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; -4)$

b)  $A(1; 1)$ ,  $B(3; -2)$

**Bài 60.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1; -2)$ ,  $B(3; 4)$ .

a) Tìm điểm  $M$  trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai điểm  $A$ ,  $B$  là ngắn nhất.

b) Tìm điểm  $N$  trên trục hoành sao cho  $|NA - NB|$  lớn nhất.

c) Tìm điểm  $I$  trên trục tung sao cho  $IA + IB$  nhỏ nhất.

d) Tìm điểm  $J$  trên trục tung sao cho  $|\overline{JA} + \overline{JB}|$  ngắn nhất.

**Bài 61.** Cho ba điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $M(2t + 2; t)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho:

a)  $(MA + MB)_{\min}$

b)  $|\overline{MA} + \overline{MB}|_{\max}$

c)  $|MA - MB|_{\max}$

d)  $|MA - MB|_{\min}$

**C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 2**

- Bài 62.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ ,  $N$  là điểm tùy ý trên cạnh  $BC$ .
- Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{NA}$ ,  $\overline{NO} \cdot \overline{BA}$ ,  $\overline{OC} \cdot \overline{BD}$ .
  - Lấy  $M \in AD$  sao cho:  $4\overline{AM} = \overline{AD}$ .  
 Tính:  $\overline{AD} \cdot \overline{MB}$ ,  $\overline{MC} \cdot \overline{MB}$ ,  $\overline{BO} \cdot \overline{MA}$ ,  $\overline{CD} \cdot (3\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC} - \overline{MD})$ .
- Bài 63.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , biết  $AB = 13$ ,  $AD = 19$ ,  $AC = 24$ .
- Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ .
  - Tính độ dài đường chéo  $BD$ .
  - Chứng tỏ  $60^\circ < \hat{A} < 90^\circ$ .
  - Tính  $\cos(\overline{AC}, \overline{BD})$ .
- Bài 64.** Cho tam giác  $ABC$  có:
- $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
  - $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AC$ .
  - $AC = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $\hat{C} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $AB$ .
- Bài 65.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có trung tuyến  $AM$ . Biết  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Tính hai cạnh  $AB$ ,  $AC$ .
- Bài 66.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = a$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ . Suy ra độ dài trung tuyến  $AM$ .
- Bài 67.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .
- Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ,  $\overline{BC} \cdot \overline{BA}$ ,  $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$  rồi suy ra  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$ .
  - Tính  $\overline{AG} \cdot \overline{BC}$ .
  - Tính  $\overline{GA} \cdot \overline{GB} + \overline{GB} \cdot \overline{GC} + \overline{GC} \cdot \overline{GA}$
  - Gọi  $D$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ . Tính  $AD$ .
- Bài 68.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ,  $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$
- Bài 69.** Cho  $\Delta ABC$  đều có độ dài cạnh là  $a$ , đường cao  $AH$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AH}$ ,  $\overline{AH} \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{AB} \cdot (2\overline{AB} - 3\overline{AC})$
- Bài 70.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tính:
- $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$
  - $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$
  - $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC})$
  - $(\overline{AC} - \overline{AB})(2\overline{AD} - \overline{AB})$
  - $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$
  - $(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD})(\overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC})$
- Bài 71.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$  và  $\hat{A} = 120^\circ$ .
- Tính  $BC$ .
  - Tính độ dài đường trung tuyến  $AM$ .
  - Gọi  $I$ ,  $J$  là các điểm định bởi  $2\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$ ,  $\overline{JB} - 2\overline{JC} = \vec{0}$ . Tính  $IJ$ .
- Bài 72.**
- Cho  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
  - Cho  $|\vec{a}| = 2$ ;  $|\vec{b}| = 3$ ;  $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .
  - Tính góc giữa 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $\begin{cases} 3\vec{a} - 5\vec{b} \perp 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{a} + 4\vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b} \end{cases}$

- Bài 73.** cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $G$  là trọng tâm.
- Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ . Suy ra  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$ .
  - Tính  $AG$  và cosin của góc hợp bởi  $AG$  và  $BC$ .
  - Gọi đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là  $(O; R)$ . Tính  $OG$ .
- Bài 74.** Cho  $\Delta ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau:
- $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MC}$
  - $MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0$
  - $MA^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$
  - $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$
- Bài 75.** Cho  $\Delta ABC$  và số  $k$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau:
- $MA = kMB$
  - $MA^2 + 4MB^2 = k^2$
  - $MA^2 - MC^2 = k^2$
  - $\overline{AM} \cdot \overline{BC} = k$
- Bài 76.** Cho  $\Delta ABC$ ,  $G$  là trọng tâm và  $M$  là điểm tùy ý.
- Chứng minh rằng:  $\vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}$  không phụ thuộc vị trí  $M$ .
  - Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . CMR:  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overline{MO} \cdot \vec{v}$
  - Giả sử  $M$  di động trên đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Tìm vị trí của điểm  $M$  để  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?
- Bài 77.**
- Cho hai điểm  $A$  và  $B$  cố định và một số  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $MA^2 + MB^2 = k$ .
  - Cho hai điểm  $A$  và  $B$  cố định và một số  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $MA^2 - MB^2 = k$ .
  - Cho  $\Delta ABC$  cố định và một số  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ .
  - Cho  $\Delta ABC$  cố định và một số  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$ .
  - Cho hình bình hành  $ABCD$  cố định và một số  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$ .
- Bài 78.** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là điểm xác định bởi  $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .
- Tính  $\overline{AG} \cdot \overline{BC}$ . Suy ra  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .
  - Tìm hệ thức giữa độ dài ba cạnh của  $\Delta ABC$  là  $a, b, c$  sao cho  $AH \perp AM$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .
- Bài 79.** Cho hình vuông  $ABCD$ .
- Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Chứng minh:  $AM \perp BN$ .
  - Gọi  $P, Q$  tương ứng trên  $BC, CD$  sao cho  $4BP = BC, 4CQ = CD$ .  
Chứng minh:  $AP \perp BQ$ .
- Bài 80.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có:
- $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $AD$ . Chứng minh:  $BK \perp AC$ .
  - $AB = a, AD = b$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $AD$  và  $L$  trên tia  $DC$  sao cho  $DL = \frac{b^2}{2a}$ .  
Chứng minh:  $BK \perp AL$ .
- Bài 81.** Cho hình vuông  $ABCD$ , điểm  $M$  nằm trên  $AC$  sao cho  $4AM = AC$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $DC$ . Chứng minh  $\Delta BMN$  vuông cân.
- Bài 82.** Cho  $\Delta ABC$ . Lấy  $M, M'$  là hai điểm tùy ý. Gọi  $H, K, L$  là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$  và  $H', K', L'$  là hình chiếu của  $M'$  trên  $BC, CA, AB$ .  
Chứng minh rằng:  $\overline{BC} \cdot \overline{HH'} + \overline{CA} \cdot \overline{KK'} + \overline{AB} \cdot \overline{LL'} = 0$ .

- Bài 83.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = h$ , cạnh đáy  $AD = a$ ,  $BC = b$ . Tìm điều kiện giữa  $a$ ,  $b$ ,  $h$  để:
- a)  $AC \perp BD$  b)  $\widehat{AIB} = 90^\circ$  với  $I$  là trung điểm  $CD$ .
- Bài 84.** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , đường cao  $AB = 2a$ ,  $AD = a$ ,  $BC = 4a$ .
- a) Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ . Suy ra góc giữa  $AC$  và  $BD$ .
- b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ ,  $J$  là điểm di động trên cạnh  $BC$ . Dùng tích vô hướng để tính  $BJ$  sao cho  $AJ$  và  $BI$  vuông góc.
- Bài 85.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  hai đáy  $AD = a$ ,  $BC = b$ , đường cao  $AB = h$ . Tìm điều kiện giữa  $a$ ,  $b$ ,  $h$  để:
- a)  $BD \perp CI$ , với  $I$  là trung điểm của  $AB$ .
- b)  $AC \perp DI$
- c)  $BM \perp CN$ , với  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ .
- Bài 86.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , có trung tuyến  $AM$ . Trên 2 cạnh  $AB$ ,  $AC$  lấy hai điểm  $B'$ ,  $C'$  sao cho:  $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ . Chứng minh:  $AM \perp B'C'$ .
- Bài 87.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho:
- a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$  b)  $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$
- c)  $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 2a^2$  d)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$
- Bài 88.** Cho  $\triangle ABC$  đều. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho:
- a)  $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$  b)  $3MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$
- c)  $2MB^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = BC^2$  d)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$
- Bài 89.** Cho hai điểm  $A$ ,  $B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .
- Bài 90.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I$ ,  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$ .
- Bài 91.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Biện luận theo  $k$  tập hợp điểm thỏa mãn:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$ .
- Bài 92.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Gọi  $M$  là điểm tùy ý.
- a) Chứng minh rằng:  $M \in (O; R) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ .
- b) Chứng minh rằng:  $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ . Suy ra quỹ tích các điểm  $M$  thỏa điều kiện  $MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2$ .
- c) Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $BC$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2 - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$
- Bài 93.** Cho  $\vec{a} = (1; 4)$ ,  $\vec{b} = (-3; 2)$  và  $\vec{v} = (2m + 1; 3 - 4m)$ .
- a) Tìm  $m$  để  $\vec{v}$  cùng phương  $\vec{a}$  b) Tìm  $m$  để  $\vec{v} \perp \vec{AB}$ .
- Bài 94.** Cho 2 điểm  $A(4; 4)$  và  $B(0; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên  $Oy$  sao cho trung trực  $AC$  đi qua  $B$ .
- Bài 95.** Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong các trường hợp sau:
- a)  $\vec{a} = (4; 3)$ ,  $\vec{b} = (1; 7)$  b)  $\vec{a} = (2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -7)$
- c)  $\vec{a} = (6; 8)$ ,  $\vec{b} = (12; 9)$  d)  $\vec{a} = (2; -6)$ ,  $\vec{b} = (-3; 9)$

- Bài 96.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(2;-4)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- Bài 97.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(1;-4)$ ,  $B(-5;-1)$ ,  $C(5;4)$ .
- Tìm tọa độ điểm  $D$  là chân đường phân giác trong của góc  $B$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $E$  là chân đường phân giác ngoài của góc  $B$ .
- Bài 98.** Cho  $\Delta ABC$  với  $A(-3;6)$ ,  $B(9;-10)$ ,  $C(-5;4)$ . Xác định tâm  $I$  và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- Bài 99.** Cho  $\Delta ABC$  với  $A(2;-4)$ ,  $B(1;3)$ ,  $C(11;2)$ . Tìm tọa độ trực tâm  $H$ .
- Bài 100.** Cho  $\Delta ABC$  với  $A(-2;6)$ ,  $B(6;2)$ ,  $C(1;-3)$ . Tìm tọa độ chân đường cao  $CH$  và tính độ dài đường cao này.
- Bài 101.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(-1;-5)$ ,  $B(5;-3)$ ,  $C(3;-1)$ .
- Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ . Suy ra tính chất của tam giác  $ABC$ . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
  - Tìm  $D \in Oy$  sao cho  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ ,  $ABCD$  là hình gì?
  - Vẽ phân giác trong  $CF$  của góc  $C$  trong  $\Delta ABC$ . Tìm tọa độ  $C$ .
- Bài 102.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(1;-1)$ ,  $B(2;-3)$ ,  $C(5;1)$ .
- Chứng minh rằng  $A, B, C$  lập thành một tam giác.
  - Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
  - Tính diện tích  $\Delta ABC$ .
- Bài 103.** Xét hình dạng của  $\Delta ABC$  khi biết:
- $A(1;0)$ ,  $B(5;0)$ ,  $C(3;4)$ .
  - $A(-1;0)$ ,  $B(3;0)$ ,  $C(1;2\sqrt{2})$ .
  - $A(1;2)$ ,  $B(-2;6)$ ,  $C(9;8)$ .
  - $A(5;7)$ ,  $B(8;-5)$ ,  $C(0;-7)$ .
- Bài 104.** Xác định hình dạng của tứ giác khi biết:
- $A(2;6)$ ,  $B(3;3)$ ,  $C(-3;1)$ ,  $D(-4;4)$ .
  - $A(-2;-2)$ ,  $B(-1;3)$ ,  $C(3;2)$ ,  $D(2;-2)$ .
  - $A(-2;-6)$ ,  $B(4;-4)$ ,  $C(2;-2)$ ,  $D(-1;-3)$ .
  - $A(2;1)$ ,  $B(3;6)$ ,  $C(-2;5)$ ,  $D(-3;0)$ .
- Bài 105.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(0;2)$ ,  $B(6;9)$ ,  $C(4;1)$ .
- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ .
  - Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
  - Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$ .
  - Tính chu vi, diện tích của  $\Delta ABC$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $M$  trên  $Oy$  để  $B, M, A$  thẳng hàng.
  - Tìm tọa độ điểm  $N$  trên  $Ox$  để  $\Delta ANC$  cân tại  $N$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình chữ nhật.
  - Tìm tọa độ điểm  $K$  để  $AOKB$  là hình thang đáy  $AO$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $T$  thỏa  $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $E$  đối xứng với điểm  $A$  qua  $B$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $I$  là chân đường phân giác trong tại đỉnh  $C$ .
- Bài 106.** Cho  $\vec{a} = (1;1)$ ,  $\vec{b} = (x-1;2)$  và  $\vec{c} = (2;y+1)$ .
- Tìm  $x$  để  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b}$
  - Tìm  $y$  để  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .

**Bài 107.** Cho bốn điểm  $A(2;3)$ ,  $B(9;4)$ ,  $C(5;y)$ ,  $D(x;-2)$ .

- Tìm  $y$  để  $\Delta ABC$  vuông tại  $C$ .
- Tìm  $x$  để ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $D$  thẳng hàng.

**Bài 108.** Cho  $\Delta ABC$  với  $A(5;3)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(-1;5)$ .

- Tính tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác.
- Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ  $A$ .

**Bài 109.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-2;1)$ . Gọi  $B$  là điểm đối xứng với điểm  $A$  qua gốc tọa độ  $O$ . Tìm tọa độ của điểm  $C$  có tung độ bằng 2 sao cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $C$ .

**Bài 110.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(1;-1)$ ,  $B(5;-3)$ ,  $C(2;0)$ .

- Tính chu vi và nhận dạng tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ điểm  $M$  biết  $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

**Bài 111.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(2;2)$ ,  $B(-2;-4)$ ,  $C(6;0)$ .

- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$  và tâm  $I$  đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABC$ . Chứng minh  $G$ ,  $H$ ,  $I$  thẳng hàng.
- Tìm điểm  $K$  là chân đường cao kẻ từ  $C$ .

**Bài 112.** Cho ba điểm  $A(1;5)$ ,  $B(-4;-5)$ ,  $C(4;-1)$ .

- Chứng minh 3 điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  là 3 đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài của góc  $A$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ .

**Bài 113.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(4;3)$ ,  $B(0;-5)$ ,  $C(-6;-2)$ .

- Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ .
- Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$
- Tìm tâm của đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$

**Bài 114.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(4;3)$ ,  $B(0;-5)$ ,  $C(-6;-2)$ .

- Chứng minh  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ .
- Tìm tọa độ hình chiếu của  $A$  lên  $BC$ . Tính diện tích  $\Delta ABC$ .
- Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$
- Tìm tâm của đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$

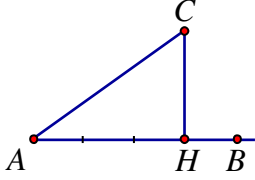
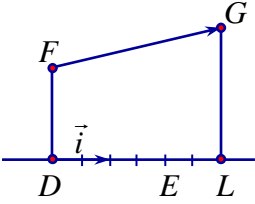
**Bài 115.** Cho ba điểm  $A(7;4)$ ,  $B(0;3)$ ,  $C(4;0)$ . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$ . Từ đó suy ra tọa độ  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $BC$ .

**Bài 116.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $A(1;2)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(5;-1)$ .

- Tính  $\overline{AB \cdot AC}$ .
- Tính  $\cos$  và  $\sin$  của góc  $A$ .
- Tìm tọa độ chân đường cao của  $\Delta ABC$ .
- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của  $\Delta ABC$ .
- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$ .
- Tìm tọa độ tâm  $I$  đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABC$ .
- Chứng minh:  $I$ ,  $H$ ,  $G$  thẳng hàng.

**D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2**

- Câu 29.** [0H2-1] Cho  $\Delta ABC$  có  $H$  là trực tâm. Biểu thức  $(\overline{AB} + \overline{HC})^2$  bằng biểu thức nào sau đây?  
 A.  $AB^2 + HC^2$ .      B.  $(AB + HC)^2$ .      C.  $AC^2 + AH^2$ .      D.  $AC^2 + 2AH^2$ .
- Câu 30.** [0H2-1] Cho tam giác  $ABC$ , có  $AB = 1$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Giá trị của  $\overline{AM} \cdot \overline{AC}$  là  
 A.  $\frac{1}{2}$ .      B. 1.      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $8 - \sqrt{2}$ .
- Câu 31.** [0H2-1] Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng 4. Khi đó, tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  ta được:  
 A. 8.      B. -8.      C. -6.      D. 6.
- Câu 32.** [0H2-1] Cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là 2 vectơ khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $(\vec{u} + \vec{v})^2$  bằng:  
 A.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$ .      B.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .      C.  $(\vec{u} + \vec{v})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .      D.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- Câu 33.** [0H2-1]  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là 2 vectơ đều khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $|\vec{u} + \vec{v}|^2$  bằng:  
 A.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .      B.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .      C.  $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$ .      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$ .
- Câu 34.** [0H2-1] Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$  là  
 A. Đường tròn đường kính  $AB$ .  
 B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
 C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
 D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .
- Câu 35.** [0H2-1] Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?  
 A.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ .      B.  $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$ .      C.  $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$ .      D.  $\vec{a} = \pm |\vec{a}|$ .
- Câu 36.** [0H2-1] Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $m$ . Khi đó  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$  bằng  
 A.  $m^2$ .      B.  $m^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $-\frac{m^2}{2}$ .      D.  $\frac{m^2}{2}$ .
- Câu 37.** [0H2-1] Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $m$ . Khi đó  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng  
 A.  $2m^2$ .      B.  $-m^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $-\frac{m^2}{2}$ .      D.  $\frac{m^2}{2}$ .
- Câu 38.** [0H2-1] Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$  là số âm khi  
 A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng chiều.      B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.  
 C.  $0^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ .      D.  $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) < 180^\circ$ .
- Câu 39.** [0H2-1] Chọn kết quả đúng  $(\vec{a} - \vec{b})^2 =$   
 A.  $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$ .      B.  $a^2 - b^2$ .  
 C.  $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ .      D.  $a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Câu 40.** [0H2-1] Điều kiện của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  sao cho  $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$  là  
 A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đối nhau.      B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
 C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng nhau.      D.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

- Câu 41. [0H2-2]** Cho hình vuông  $MNPQ$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $PQ, MN$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NJ}$ .
- A.  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PI}$ .      B.  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN}$ .      C.  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .      D.  $-\frac{\overrightarrow{PQ}^2}{4}$ .
- Câu 42. [0H2-2]** Nếu tam giác  $ABC$  là tam giác đều thì mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AB^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB^2$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} AB^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .
- Câu 43. [0H2-2]** Trong hình dưới đây, cho  $AB = 2$ ;  $AH = \frac{3}{2}$ .  
 Khi đó, tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ta được:
- A.  $-3$ .      B.  $3$ .  
 C.  $4$ .      D.  $5$ .
- 
- Câu 44. [0H2-2]** Trong hình vẽ dưới đây, tính  $2\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{FG}$ , ta được:
- A.  $8$ .      B.  $-12$ .  
 C.  $-6$ .      D.  $-8$ .
- 
- Câu 45. [0H2-2]** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$  ta được:
- A.  $a^2$ .      B.  $-a^2$ .      C.  $\frac{3}{2}a^2$ .      D.  $\frac{a^2}{2}$ .
- Câu 46. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm;  $A', B'$  lần lượt là chân đường cao xuất phát từ các điểm  $A, B$ . Gọi  $D, M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AH, BC, CA, AB$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{A'D}$ .      B.  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DM}$ .      D.  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{DA'} \cdot \overrightarrow{DB'}$ .
- Câu 47. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân đỉnh  $A$ , có  $AB = AC = a$ . Mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $\overrightarrow{AB}^2 = AB$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      C.  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$ .      D.  $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$ .
- Câu 48. [0H2-2]** Cho  $ABC$  là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \in \mathbb{R}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .  
 C.  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- Câu 49. [0H2-2]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Câu nào sau đây sai?
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 8a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .      C.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .      D.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ .
- Câu 50. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 6, CA = 4, AB = 5$ . Mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{8}$ .      B.  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{8}$ .  
 C.  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{1}{8}$ .      D.  $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{4}$ .
- Câu 51. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 5, AC = 8$ . Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- A.  $20$ .      B.  $44$ .      C.  $64$ .      D.  $60$ .



- Câu 52.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = c, CA = b, BC = a$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$  theo  $a, b, c$ .
- A.  $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ .      B.  $\frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2)$ .      C.  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ .      D.  $\frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2)$ .
- Câu 53.** [0H2-2] Trong tam giác  $ABC$  có  $AB = 10, AC = 12$ , góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Khi đó,  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:
- A. 30.      B. 60.      C. -60.      D. -30.
- Câu 54.** [0H2-2] Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$  là:
- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .  
 B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
 C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
 D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .
- Câu 55.** [0H2-2] Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2$  là:
- A. Đường tròn đường kính  $BC$ .      B. Đường tròn  $(B; BC)$ .  
 C. Đường tròn  $(C; CB)$ .      D. Một đường khác.
- Câu 56.** [0H2-2] Cho  $ABC$  là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \in \mathbb{R}$ .      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AC} \cdot \overline{AB}$ .  
 C.  $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC} = \overline{AB} (\overline{AC} \cdot \overline{BC})$ .      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .
- Câu 57.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC} = 2\overline{BC}$ .      B.  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = -2$ .  
 C.  $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = -4$ .      D.  $(\overline{AC} - \overline{BC}) \cdot \overline{BA} = -4$ .
- Câu 58.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Câu nào sau đây sai?
- A.  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ .      B.  $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = -\frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{CA}$ .  
 C.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{DC}$ .      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ .
- Câu 59.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Câu nào sau đây sai?
- A.  $\overline{DA} \cdot \overline{CB} = a^2$ .      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = a^2$ .  
 C.  $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = a^2$ .      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 0$ .
- Câu 60.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , với các đường cao  $AH, BK$  vẽ  $HI \perp AC$ . Câu nào sau đây sai?
- A.  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BH}$ .      B.  $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = 4\overline{CB} \cdot \overline{CI}$ .  
 C.  $(\overline{AC} - \overline{AB}) \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .      D.  $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 4\overline{KC} \cdot \overline{CH}$ .
- Câu 61.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , với các đường cao  $AH, BK$  vẽ  $HI \perp AC$ . Câu nào sau đây đúng?
- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$ .      B.  $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = \frac{a^2}{8}$ .      C.  $(\overline{AB} + \overline{AC}) \overline{BC} = a^2$ .      D.  $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = \frac{a^2}{2}$ .
- Câu 62.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Mệnh đề nào sau đây sai?
- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ .      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a^2$ .  
 C.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = a^2$ .      D.  $(\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC}) \overline{AD} = a^2$ .

- Câu 63.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ .
- A.  $0$ .                              B.  $a$ .                              C.  $\frac{a^2}{2}$ .                              D.  $a^2$ .
- Câu 64.** [0H2-2] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\widehat{B} = 50^\circ$ . Hệ thức nào sau đây là sai?
- A.  $(\overline{AB}, \overline{BC}) = 130^\circ$ .                              B.  $(\overline{BC}, \overline{AC}) = 40^\circ$ .  
 C.  $(\overline{AB}, \overline{CB}) = 50^\circ$ .                              D.  $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 120^\circ$ .
- Câu 65.** [0H2-2] Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .                              B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .                              C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .                              D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .
- Câu 66.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Khẳng định nào sau đây là sai?
- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} < \overline{BA} \cdot \overline{BC}$ .                              B.  $\overline{AC} \cdot \overline{CB} < \overline{AC} \cdot \overline{BC}$ .  
 C.  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} < \overline{CA} \cdot \overline{CB}$ .                              D.  $\overline{AC} \cdot \overline{BC} < \overline{BC} \cdot \overline{AB}$ .
- Câu 67.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5$  cm,  $BC = 13$  cm. Gọi góc  $\widehat{ABC} = \alpha$  và  $\widehat{ACB} = \beta$ . Hãy chọn kết luận đúng khi so sánh  $\alpha$  và  $\beta$ :
- A.  $\beta > \alpha$ .                              B.  $\beta < \alpha$ .                              C.  $\beta = \alpha$ .                              D.  $\alpha \leq \beta$ .
- Câu 68.** [0H2-2] Đường tròn tâm  $O$  có bán kính  $R = 15$  cm. Gọi  $P$  là một điểm cách tâm  $O$  một khoảng  $PO = 9$  cm. Dây cung đi qua  $P$  và vuông góc với  $PO$  có độ dài là:
- A. 22 cm.                              B. 23 cm.                              C. 24 cm.                              D. 25 cm.
- Câu 69.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tổng  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA}) + (\overline{CA}, \overline{AB})$ .
- A.  $180^\circ$ .                              B.  $360^\circ$ .                              C.  $270^\circ$ .                              D.  $120^\circ$ .
- Câu 70.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$ , tìm  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA}) - (\overline{AB}, \overline{AC})$ .
- A.  $180^\circ$ .                              B.  $90^\circ$ .                              C.  $270^\circ$ .                              D.  $120^\circ$ .
- Câu 71.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ . Tìm tổng  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA})$ .
- A.  $180^\circ$ .                              B.  $360^\circ$ .                              C.  $270^\circ$ .                              D.  $240^\circ$ .
- Câu 72.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  với  $\widehat{A} = 60^\circ$ , tìm tổng  $(\overline{AB}, \overline{BC}) + (\overline{BC}, \overline{CA})$ .
- A.  $120^\circ$ .                              B.  $360^\circ$ .                              C.  $270^\circ$ .                              D.  $240^\circ$ .
- Câu 73.** [0H2-2] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và  $BC = 2AC$ . Tính cosin của góc  $(\overline{AC}, \overline{CB})$ .
- A.  $\frac{1}{2}$ .                              B.  $-\frac{1}{2}$ .                              C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                              D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 74.** [0H2-2] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và  $BC = 2AC$ . Tính cosin của góc  $(\overline{AB}, \overline{BC})$ .
- A.  $\frac{1}{2}$ .                              B.  $-\frac{1}{2}$ .                              C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                              D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 75.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) + \cos(\overline{BA}, \overline{BC}) + \cos(\overline{CB}, \overline{CA})$ .
- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                              B.  $\frac{3}{2}$ .                              C.  $-\frac{3}{2}$ .                              D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- Câu 76.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $\cos(\overline{AB}, \overline{BC}) + \cos(\overline{BC}, \overline{CA}) + \cos(\overline{CA}, \overline{AB})$ .
- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\frac{3}{2}$ .                      C.  $-\frac{3}{2}$ .                      D.  $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 77.** [0H2-2] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính tích vô hướng  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$
- A.  $b^2 + c^2$ .                      B.  $b^2 - c^2$ .                      C.  $b^2$ .                      D.  $c^2$ .
- Câu 78.** [0H2-2] Cho  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều  $MNP$ . Góc nào sau đây bằng  $120^\circ$ ?
- A.  $(\overline{MN}, \overline{NP})$ .                      B.  $(\overline{MO}, \overline{ON})$ .                      C.  $(\overline{MN}, \overline{OP})$ .                      D.  $(\overline{MN}, \overline{MP})$ .
- Câu 79.** [0H2-2] Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
- A.  $\overline{MN}(\overline{NP} + \overline{PQ}) = \overline{MN} \cdot \overline{NP} + \overline{MN} \cdot \overline{PQ}$ .                      B.  $\overline{MP} \cdot \overline{MN} = -\overline{MN} \cdot \overline{MP}$ .
- C.  $\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = \overline{PQ} \cdot \overline{MN}$ .                      D.  $(\overline{MN} - \overline{PQ})(\overline{MN} + \overline{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .
- Câu 80.** [0H2-2] Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính tích vô hướng  $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$
- A.  $b^2 + c^2$ .                      B.  $b^2 - c^2$ .                      C.  $-b^2$ .                      D.  $c^2$ .
- Câu 81.** [0H2-2] Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$
- A.  $\frac{3a^2}{2}$ .                      B.  $\frac{-3a^2}{2}$ .                      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 82.** [0H2-2] Cho biết  $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$ ;  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a} - \vec{b}$  bằng
- A.  $\sqrt{19}$ .                      B. 7.                      C. 4.                      D. 2.
- Câu 83.** [0H2-2] Cho tam giác  $ABC$  biết:  $\overline{AB} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ ;  $\overline{BC} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ ;  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$  và  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ . Độ dài cạnh  $AC$  bằng
- A.  $4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ .                      B. 5.                      C.  $|\vec{e}_1| + |\vec{e}_2|$ .                      D.  $\sqrt{17}$ .
- Câu 84.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng
- A.  $a^2$ .                      B.  $a^2\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ .                      D.  $\frac{1}{2}a^2$ .
- Câu 85.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $\overline{AC} \cdot (\overline{CD} + \overline{CA})$  bằng
- A.  $-1$ .                      B.  $3a^2$ .                      C.  $-3a^2$ .                      D.  $2a^2$ .
- Câu 86.** [0H2-2] Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Khi đó:  $\overline{AE} \cdot \overline{AB}$  bằng
- A.  $2a^2$ .                      B.  $\sqrt{3}a^2$ .                      C.  $\sqrt{5}a^2$ .                      D.  $5a^2$ .
- Câu 87.** [0H2-2] Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- A.  $180^\circ$ .                      B.  $0^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .
- Câu 88.** [0H2-2] Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nếu  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- A.  $180^\circ$ .                      B.  $0^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .
- Câu 89.** [0H2-2] Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot \overline{AB} = 0$  là
- A. Tam giác  $OAB$  đều.                      B. Tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .
- C. Tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .                      D. Tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

- Câu 90. [0H2-2]** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây là sai ?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .                      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .                      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .
- Câu 91. [0H2-3]** Cho 2 điểm  $A, B$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ ,  $OA = a$ . Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = a^2$  là đường tròn tâm  $O$ , có bán kính bằng:
- A.  $a$ .                                      B.  $2a$ .                                      C.  $a\sqrt{2}$ .                                      D.  $2a\sqrt{2}$ .
- Câu 92. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng  $AB = a$  cố định. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = a^2$  là:
- A. Đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $a$ .                                      B. Đường tròn tâm  $B$ , bán kính  $a$ .  
 C. Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $A$ .                                      D. Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $B$ .
- Câu 93. [0H2-3]** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = \sqrt{2}$ ,  $AD = 1$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overline{AC}$  và  $\overline{BD}$ .
- A.  $89^\circ$ .                                      B.  $92^\circ$ .                                      C.  $109^\circ$ .                                      D.  $91^\circ$ .
- Câu 94. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = k$ . Hỏi có mấy điểm  $C$  để  $k = 8$  ?
- A. 3.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 0.
- Câu 95. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = k$ . Hỏi có mấy điểm  $C$  để  $k = -12$  ?
- A. 2.                                      B. 0.                                      C. 1.                                      D. 3.
- Câu 96. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  có  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Tính  $\cos(\overline{AC}, \overline{BI})$ .
- A.  $\frac{1}{3}$ .                                      B.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .                                      C.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .                                      D.  $-\frac{2}{\sqrt{10}}$ .
- Câu 97. [0H2-3]** Cho tam giác vuông  $ABH$  vuông  $H$  tại có  $BH = 2$ ,  $AB = 3$ . Hình chiếu của  $H$  lên  $AB$  là  $K$ . Tính tích vô hướng  $\overline{BK} \cdot \overline{BH}$ .
- A. 4.                                      B.  $\frac{4}{3}$ .                                      C.  $\frac{3}{4}$ .                                      D.  $\frac{16}{9}$ .
- Câu 98. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = BN = CP = DQ = x (0 < x < a)$ . Tích tích vô hướng  $\overline{PN} \cdot \overline{PQ}$ .
- A.  $AB^2$ .                                      B.  $AC^2$ .                                      C. 0.                                      D.  $AD^2$ .
- Câu 99. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = BN = CP = DQ = x (0 < x < a)$ . Tính diện tích tứ giác  $MNPQ$  ta được:
- A.  $2x^2 + 2ax + a^2$ .                      B.  $2x^2 - 2ax + a^2$ .                      C.  $2x^2 - ax + a^2$ .                      D.  $x^2 - 2ax + a^2$ .
- Câu 100. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = BN = CP = DQ = x (0 < x < a)$ . Tích tích vô hướng  $\overline{PN} \cdot \overline{PM}$  ta được:
- A.  $x^2 + (x+a)^2$ .                      B.  $x^2 + (a-2x)^2$ .                      C.  $x^2 + (a-x)^2$ .                      D.  $x^2 + (2a-x)^2$ .
- Câu 101. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = BN = CP = DQ = x (0 < x < a)$ . Nếu  $\overline{PM} \cdot \overline{DC} = \frac{a^2}{2}$  thì giá trị của  $x$  bằng:
- A.  $\frac{a}{4}$ .                                      B.  $\frac{a}{2}$ .                                      C.  $\frac{3a}{4}$ .                                      D.  $a$ .

**Câu 102. [0H2-3]** Cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là 2 vectơ đều khác  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$ .      B.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$ .
- C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$ .      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$ .

**Câu 103. [0H2-3]** Cho 3 điểm  $D, E, F$  theo thứ tự bất kỳ trên trục  $x'Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = DE \cdot DF$ .      B.  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \overline{DE} \cdot \overline{DF}$ .
- C.  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -DE \cdot DF$ .      D.  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -\overline{DE} \cdot \overline{DF}$ .

**Câu 104. [0H2-3]** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A.  $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \cdot \overline{BC} = 2\overline{BC}$ .      B.  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = -2$ .
- C.  $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = -4$ .      D.  $(\overline{AC} - \overline{BC}) \cdot \overline{BA} = 4$ .

**Câu 105. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Câu nào sau đây sai?

- A.  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ .      B.  $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{CA}$ .
- C.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{DC}$ .      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ .

**Câu 106. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Câu nào sau đây sai?

- A.  $\overline{DA} \cdot \overline{CB} = a^2$ .      B.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -a^2$ .
- C.  $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = a^2$ .      D.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 0$ .

**Câu 107. [0H2-3]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ .  $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$  bằng:

- A.  $-9a^2$ .      B.  $15a^2$ .      C.  $0$ .      D. Không tính được.

**Câu 108. [0H2-3]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ .  $(\overline{IA} + \overline{IB}) \cdot \overline{AC}$  bằng:

- A.  $\frac{3a^2}{2}$ .      B.  $-\frac{3a^2}{2}$ .      C.  $0$ .      D.  $9a^2$ .

**Câu 109. [0H2-3]** Cho 2 điểm  $A$  và  $B$  có  $AB = 4\text{cm}$ . Tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  là:

- A. Đường thẳng vuông góc với  $AB$ .      B. Đường tròn đường kính  $AB$ .
- C. Đoạn thẳng vuông góc với  $AB$ .      D. Kết quả khác.

**Câu 110. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ . Vẽ đường cao  $AH$ . Tích vô hướng  $\overline{HB} \cdot \overline{HC}$  bằng:

- A.  $\sqrt{34}$ .      B.  $-\sqrt{34}$ .      C.  $-\frac{225}{34}$ .      D.  $\frac{225}{34}$ .

**Câu 111. [0H2-3]** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , với các đường cao  $AH$ ,  $BK$  vẽ  $HI \perp AC$ . Câu nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BH}$ .      B.  $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = 4\overline{CB} \cdot \overline{CI}$ .
- C.  $(\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{BC} = (\overline{BC})^2$ .      D. Cả ba câu trên.

**Câu 112. [0H2-3]** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , với các đường cao  $AH$ ,  $BK$  vẽ  $HI \perp AC$ . Câu nào sau đây đúng?

- A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$ .      B.  $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = \frac{a^2}{8}$ .      C.  $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC} = a^2$ .      D. Cả ba câu trên.

- Câu 113. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Mệnh đề nào sau đây sai?  
 A.  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ . B.  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a^2$ .  
 C.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = a^2$ . D.  $(\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AD} = a^2$ .
- Câu 114. [0H2-3]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AB$ .  $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$  bằng:  
 A.  $-9a^2$ . B.  $15a^2$ . C.  $0$ . D.  $9a^2$ .
- Câu 115. [0H2-3]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Câu nào sau đây sai?  
 A.  $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 8a^2$ . B.  $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$ . C.  $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$ . D.  $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = 0$ .
- Câu 116. [0H2-3]** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AB$ .  $(\overline{IA} + \overline{IB}) \cdot \overline{ID}$  bằng:  
 A.  $\frac{3a^2}{2}$ . B.  $-\frac{3a^2}{2}$ . C.  $0$ . D.  $9a^2$ .
- Câu 117. [0H2-3]** Trong tam giác có  $AB = 10$ ,  $AC = 12$ , góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Khi đó,  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:  
 A.  $30$ . B.  $60$ . C.  $-60$ . D.  $-30$ .
- Câu 118. [0H2-3]** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{CM} \cdot \overline{CB} = \overline{CM}^2$  thuộc  
 A. Đường tròn đường kính  $BC$ . B. Đường tròn  $(B, BC)$ .  
 C. Đường tròn  $(C, CB)$ . D. Một đường khác không phải đường tròn.
- Câu 119. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = 30$  cm. Hai đường trung tuyến  $BF$  và  $CE$  cắt nhau tại  $G$ . Diện tích tam giác  $GFC$  là:  
 A.  $50 \text{ cm}^2$ . B.  $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$ . C.  $75 \text{ cm}^2$ . D.  $15\sqrt{105} \text{ cm}^2$ .
- Câu 120. [0H2-3]** Cho góc  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm di động lần lượt trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $AB = 1$ . Độ dài lớn nhất của đoạn  $OB$  bằng:  
 A.  $1,5$ . B.  $\sqrt{3}$ . C.  $2\sqrt{2}$ . D.  $2$ .
- Câu 121. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  bằng  $100^\circ$  và có trực tâm  $H$ . Tìm tổng:  
 $(\overline{HA}, \overline{HB}) + (\overline{HB}, \overline{HC}) + (\overline{HC}, \overline{HA})$   
 A.  $360^\circ$ . B.  $180^\circ$ . C.  $80^\circ$ . D.  $160^\circ$ .
- Câu 122. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{BC} + \overline{BD} + \overline{BA})$  bằng  
 A.  $2\sqrt{2}a$ . B.  $-3a^2$ . C.  $0$ . D.  $-2a^2$
- Câu 123. [0H2-3]** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nếu hai vectơ  $\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau và  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ .  
 A.  $90^\circ$ . B.  $180^\circ$ . C.  $60^\circ$ . D.  $45^\circ$ .
- Câu 124. [0H2-4]** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm. Gọi các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $HA, HB, HC$ ;  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ ;  $A', B', C'$  lần lượt là chân đường cao xuất phát từ  $A, B, C$ ; Đường tròn đường kính  $NE$  đi qua:  
 A.  $M$  và  $A$ . B.  $N$  và  $B$ . C.  $P$  và  $C$ . D.  $M, N, P$

- Câu 125. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} + \overline{MB} \cdot \overline{MD} = a^2$  là
- A. đường tròn  $(O, a\sqrt{2})$ . B. đường tròn  $(O, a)$ .  
 C. đường tròn  $\left(O, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ . D. đường tròn đường kính  $AC$ .
- Câu 126. [0H2-3]** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$  là
- A. đường thẳng  $AC$ . B. đường thẳng  $CD$ .  
 C. đường tròn đường kính  $BC$ . D. đường tròn đường kính  $AC$ .
- Câu 127. [0H2-4]** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ ra ngoài tam giác các hình vuông  $ABMN$  và  $ACEF$ . Hệ thức nào sau đây sai?
- A.  $MN \perp FE$ . B.  $AN \perp FA$ . C.  $MF \perp NE$ . D.  $AI \perp FN$ .
- Câu 128. [0H2-4]** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$  bằng
- A.  $\frac{12}{13}$ . B.  $\frac{5}{12}$ . C.  $\frac{5}{13}$ . D.  $\frac{13}{12}$ .
- Câu 129. [0H2-4]** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3$ ,  $AD = 4$ . Gọi  $M$  là điểm thỏa mãn điều kiện  $\overline{AM} = k \cdot \overline{AB}$ . Xác định  $k$  để hai đường thẳng  $AC$  và  $DM$  vuông góc nhau?
- A.  $\frac{9}{16}$ . B.  $\frac{16}{9}$ . C.  $\frac{4}{3}$ . D.  $\frac{3}{4}$ .
- Câu 130. [0H2-4]** Cho hình thang cân  $ABCD$ , đáy lớn là  $AB$ , góc nhọn ở đáy là  $60^\circ$ , biết  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = m > 0$ ,  $|\vec{b}| = n > 0$ ,  $m > n$ . Hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$  vuông góc nhau khi
- A.  $m = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{3})$ . B.  $m = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{3})$  hoặc  $m = \frac{n}{2}(1 - \sqrt{3})$ .  
 C.  $n = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{3})$ . D.  $n = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{3})$  hoặc  $n = \frac{m}{2}(1 - \sqrt{3})$ .
- Câu 131. [0H2-4]** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = c$ ,  $CA = b$ ,  $BC = a$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Vẽ đường phân giác  $AD$  của góc  $A$  ( $D \in BC$ ). Tính  $AD$ .
- A.  $\frac{bc}{b+c} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}$ . B.  $\frac{bc \cos \alpha}{b+c}$ . C.  $\frac{bc}{b+c} \sqrt{1 + \cos \alpha}$ . D.  $\frac{(b+c) \cos \alpha}{bc}$ .
- Câu 132. [0H2-1]** Cho 2 vectơ  $\vec{u} = (4; 5)$  và  $\vec{v} = (3; a)$ . Tính  $a$  để  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- A.  $a = \frac{12}{5}$ . B.  $a = -\frac{12}{5}$ . C.  $a = \frac{5}{12}$ . D.  $a = -\frac{5}{12}$ .
- Câu 133. [0H2-1]** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho 2 vectơ  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  và  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ . Tính  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  ta được:
- A. 6. B. 2. C. 4. D. -4.
- Câu 134. [0H2-1]** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho 2 vectơ  $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  và  $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . Lúc đó  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}$  bằng:
- A.  $2\vec{v}$ . B.  $\vec{0}$ . C.  $\vec{u}^{-2}$ . D.  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) (\vec{u}^{-2})$ .

**Câu 135. [OH2-1]** Trong hệ trục  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , mệnh đề nào sau đây sai?

- A.  $\vec{i}^2 = \vec{i}$ .                      B.  $|\vec{i}| = 1$ .                      C.  $|\vec{i}| = |\vec{j}|$ .                      D.  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ .

**Câu 136. [OH2-1]** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$  và  $\vec{b} = (3; -2)$ . Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là

- A. 4.                      B. -4.                      C. 0.                      D. 1.

**Câu 137. [OH2-1]** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; -1)$ ,  $\vec{b} = (-3; 4)$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là  $-10$ .    B. Độ lớn của vectơ  $\vec{a}$  là  $\sqrt{5}$ .  
C. Độ lớn của vectơ  $\vec{b}$  là 5.                      D. Góc giữa hai vectơ là  $90^\circ$ .

**Câu 138. [OH2-1]** Cho các vectơ  $\vec{u} = (-2; 1)$ ,  $\vec{v} = (1; 2)$ . Tích vô hướng của  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là

- A. 0.                      B.  $\vec{0}$ .                      C. 2.                      D. 5.

**Câu 139. [OH2-1]** Cho hai điểm  $A = (1; 2)$  và  $B = (3; 4)$ . Giá trị của  $\overline{AB}^2$  là:

- A. 4.                      B.  $4\sqrt{2}$ .                      C.  $6\sqrt{2}$ .                      D. 8.

**Câu 140. [OH2-1]** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 141. [OH2-1]** Cho hai điểm  $M(1; -2)$  và  $N(-3; 4)$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $M$  và  $N$  là

- A. 4.                      B. 6.                      C.  $3\sqrt{6}$ .                      D.  $2\sqrt{13}$ .

**Câu 142. [OH2-1]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(3; -1)$ ,  $B(2; 10)$ . Tích vô hướng  $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$  bằng bao nhiêu?

- A. -4.                      B. 4.                      C. 16.                      D. 0.

**Câu 143. [OH2-1]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(3; -1)$ ,  $B(2; 10)$ ,  $C(4; -2)$ . Tích vô hướng  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng bao nhiêu?

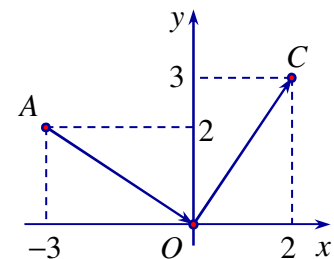
- A. 40.                      B. -12.                      C. 26.                      D. -26.

**Câu 144. [OH2-1]** Cho hai điểm  $A(0; 1)$  và  $B(3; 0)$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là:

- A. 3.                      B. 4.  
C.  $\sqrt{5}$ .                      D.  $\sqrt{10}$ .

**Câu 145. [OH2-2]** Trong hình bên,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng:

- A. 13.                      B. 0.  
C. -13.                      D.  $13\sqrt{2}$ .



**Câu 146. [OH2-2]** Trong mặt phẳng  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  cho ba điểm  $A(3; 6)$ ,  $B(x; -2)$ ,  $C(2; y)$ . Tính  $\overline{OA} \cdot \overline{BC}$ :

- A.  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 3x + 6y - 12$ .                      B.  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = -3x + 6y + 18$ .  
C.  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = -3x + 6y + 12$ .                      D.  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 0$ .

**Câu 147. [OH2-2]** Trong mặt phẳng  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  cho ba điểm  $A(3; 6)$ ,  $B(x; -2)$ ,  $C(2; y)$ . Tìm  $x$  để  $OA$  vuông góc với  $AB$ .

- A.  $x = 19$ .                      B.  $x = -19$ .                      C.  $x = 12$ .                      D.  $x = 18$ .



- Câu 148. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  cho ba điểm  $A(3;6)$ ,  $B(x;-2)$ ,  $C(2;y)$ . Tính  $y$  biết rằng  $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 12$ .
- A.  $y = 3$ .                      B.  $y = -2$ .                      C.  $y = -1$ .                      D.  $y = 1$ .
- Câu 149. [0H2-2]** Nếu trong mặt phẳng  $Oxy$  cho  $A(1;1)$ ,  $B(x;5)$ ,  $C(2;x)$  thì  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:
- A.  $5x - 5$ .                      B.  $2x + 2$ .                      C.  $10$ .                      D.  $0$ .
- Câu 150. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho  $A(1;2)$ ,  $B(4;1)$ ,  $C(5;4)$ . Tính  $\widehat{BAC}$ ?
- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .
- Câu 151. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  cho 2 vector:  $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$ . Kết luận nào sau đây sai?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .                      B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .                      C.  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ .                      D.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$ .
- Câu 152. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho  $A(1;2)$ ,  $B(4;1)$ ,  $C(5;4)$ . Tính  $\widehat{BAC}$ ?
- A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 153. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  cho 2 vector  $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$ . Kết luận nào sau đây sai?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .                      B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .                      C.  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ .                      D.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$ .
- Câu 154. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho 3 điểm  $A(2;4)$ ,  $B(1;2)$ ,  $C(6;2)$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?
- A. Vuông cân tại  $A$ .                      B. Cân tại  $A$ .                      C. Đều.                      D. Vuông tại  $A$ .
- Câu 155. [0H2-2]** Cho các vector  $\vec{a} = (1; -2)$ ,  $\vec{b} = (-2; -6)$ . Khi đó góc giữa chúng là
- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $135^\circ$ .
- Câu 156. [0H2-2]** Cho các vector  $\vec{a} = (1; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; 5)$ . Tính tích vô hướng của  $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$ .
- A.  $16$ .                      B.  $26$ .                      C.  $36$ .                      D.  $-16$ .
- Câu 157. [0H2-2]** Cho  $\overline{OM} = (-2; -1)$ ,  $\overline{ON} = (3; -1)$ . Tính góc  $(\overline{OM}, \overline{ON})$ .
- A.  $135^\circ$ .                      B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $-135^\circ$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 158. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  biết  $A(1; -1)$ ,  $B(5; -3)$ ,  $C(0; 1)$ . Tính chu vi tam giác  $ABC$ .
- A.  $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ .                      B.  $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ .                      C.  $5\sqrt{3} + \sqrt{41}$ .                      D.  $3\sqrt{5} + \sqrt{41}$ .
- Câu 159. [0H2-2]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  biết  $\vec{a} = (1; -2)$ ,  $\vec{b} = (-1; -3)$ . Tính góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $135^\circ$ .
- Câu 160. [0H2-2]** Cặp vector nào sau đây vuông góc với nhau?
- A.  $\vec{a} = (2; -1)$  và  $\vec{b} = (-3; 4)$ .                      B.  $\vec{a} = (3; -4)$  và  $\vec{b} = (-3; 4)$ .  
C.  $\vec{a} = (2; -3)$  và  $\vec{b} = (-6; 4)$ .                      D.  $\vec{a} = (-7; -3)$  và  $\vec{b} = (3; -7)$ .

- Câu 161. [0H2-2]** Góc giữa hai vectơ  $\vec{u} = (3; -4)$  và  $\vec{v} = (-8; -6)$  là  
 A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .
- Câu 162. [0H2-2]** Góc giữa hai vectơ  $\vec{u} = (-2; 2)$  và  $\vec{v} = (1; 0)$  là  
 A.  $45^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $135^\circ$ .                      D.  $150^\circ$ .
- Câu 163. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $A = (10; 5)$ ,  $B = (3; 2)$  và  $C = (6; -5)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?  
 A.  $ABC$  là tam giác đều.                      B.  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ .  
 C.  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .                      D.  $ABC$  là tam giác có góc tù tại  $A$ .
- Câu 164. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ, cho  $\vec{a} = (3; 4)$ ,  $\vec{b} = (4; -3)$ . Kết luận nào sau đây là sai?  
 A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .                      B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .                      C.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$ .                      D.  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ .
- Câu 165. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ, cho  $\vec{a} = (9; 3)$ . Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ  $\vec{a}$ ?  
 A.  $\vec{v} = (1; -3)$ .                      B.  $\vec{v} = (2; -6)$ .                      C.  $\vec{v} = (1; 3)$ .                      D.  $\vec{v} = (-1; 3)$ .
- Câu 166. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
 A.  $(5; 0)$ .                      B.  $(0; 6)$ .                      C.  $(3; 1)$ .                      D.  $(0; -6)$ .
- Câu 167. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(-2; 4)$ ,  $B(8; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên  $Ox$  (khác điểm  $O$ ) sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .  
 A.  $(1; 0)$ .                      B.  $(3; 0)$ .                      C.  $(-1; 0)$ .                      D.  $(6; 0)$ .
- Câu 168. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(6; -3)$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .  
 A. 8.                      B. 7,5.                      C.  $3\sqrt{3}$ .                      D.  $5\sqrt{2}$ .
- Câu 169. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(2; -5)$ ,  $B(10; 4)$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$ .  
 A. 29.                      B. 58.                      C. 14,5.                      D.  $\sqrt{29}$ .
- Câu 170. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(5; 0)$ ,  $B(0; 10)$ ,  $C(8; 4)$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .  
 A. 50.                      B. 25.                      C. 10.                      D.  $5\sqrt{2}$ .
- Câu 171. [0H2-3]** Cho hai điểm  $A(-3; 2)$ ,  $B(4; 3)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  và có hoành độ dương để tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$ .  
 A.  $M(7; 0)$ .                      B.  $M(5; 0)$ .                      C.  $M(3; 0)$ .                      D.  $M(9; 0)$ .
- Câu 172. [0H2-3]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(5; 5)$ ,  $B(-3; 1)$ ,  $C(1; -3)$ . Diện tích tam giác  $ABC$ .  
 A.  $S = 24$ .                      B.  $S = 2$ .                      C.  $S = 2\sqrt{2}$ .                      D.  $S = 12$ .

**Câu 173. [0H2-3]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(0;-2)$ ,  $B(1;5)$ ,  $C(8;4)$ ,  $D(7;-3)$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.** Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. **B.** Ba điểm  $A, C, D$  thẳng hàng.  
**C.** Tam giác  $ABC$  là tam giác đều. **D.** Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông.

**Câu 174. [0H2-3]** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho các điểm  $A(2;3)$ ,  $I\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$ .  $B$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $I$ . Giả sử  $C$  là điểm có tọa độ  $(5; y)$ . Giá trị của  $y$  để tam giác  $ABC$  là tam giác vuông tại  $C$  là

- A.**  $y=0, y=7$  **B.**  $y=0, y=-5$ . **C.**  $y=5, y=7$ . **D.**  $y=-5$ .

**Câu 175. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  có  $A=(-1;1)$ ,  $B=(1;3)$  và  $C=(1;-1)$ . Trong các phát biểu sau đây, hãy chọn phát biểu đúng:

- A.**  $ABC$  là tam giác có ba cạnh bằng nhau. **B.**  $ABC$  là tam giác có ba góc đều nhọn.  
**C.**  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$  ( $BA=BC$ ). **D.**  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .

**Câu 176. [0H2-4]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a}=(4;1)$ ,  $\vec{b}=(1;4)$ . Số giá trị của  $n$  để  $\vec{x}=n\vec{a}+\vec{b}$  tạo với  $\vec{y}=\vec{i}+\vec{j}$  một góc  $45^\circ$  là

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 177. [0H2-4]** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(3;4)$ ,  $B(2;1)$ ,  $C(-1;-2)$ .

Cho  $M(x; y)$  trên đoạn thẳng  $BC$  sao cho  $S_{ABC} = 3S_{ABM}$ . Khi đó  $x^2 + y^2$  bằng

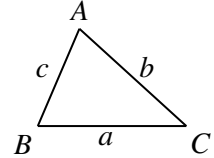
- A.** 13. **B.** 1. **C.** 113. **D.** 221.

## Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

### A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Qui ước kí hiệu dùng cho  $\Delta ABC$ :

- Độ dài các cạnh:  $BC = a, CA = b, AB = c$
- Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh  $A, B, C$ :  $m_a, m_b, m_c$ .
- Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh  $A, B, C$ :  $h_a, h_b, h_c$
- Độ dài các đường phân giác vẽ từ các đỉnh  $A, B, C$ :  $l_a, l_b, l_c$
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác:  $R, r$
- Nửa chu vi tam giác:  $p$
- Diện tích tam giác:  $S$



#### 1. Định lí cosin:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos A$  hay  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC \cos B$  hay  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC \cos C$  hay  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

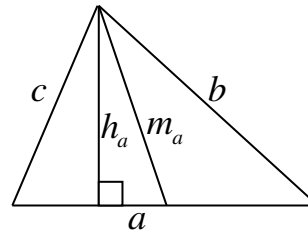
Hệ quả:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ;  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ;  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

#### 2. Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

#### 3. Độ dài trung tuyến: $m_a = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ; $m_b = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ ; $m_c = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

#### 4. Diện tích tam giác:

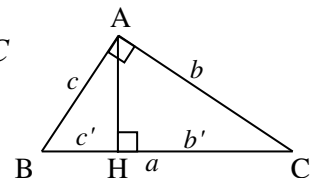
$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c \\ \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \\ \frac{abc}{4R} = p.r \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Herông)} \end{cases}$$



#### ❖ Một số kiến thức cần nhớ:

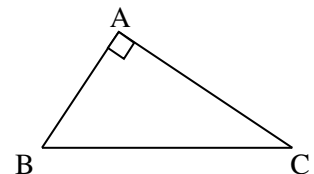
#### 5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

- ①  $AB^2 = BH.BC$       ②  $AC^2 = CH.BC$       ③  $AH^2 = HB.HC$   
 ④  $BC^2 = AB^2 + AC^2$       ⑤  $AH.BC = AB.AC$   
 ⑥  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$       ⑦  $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$



#### 6. Tỷ số lượng giác của góc nhọn:

- ①  $\sin B = \frac{\text{đoi}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}$       ②  $\cos B = \frac{\text{ke}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC}$   
 ③  $\tan B = \frac{\text{đoi}}{\text{ke}} = \frac{AC}{AB}$       ④  $\cot B = \frac{\text{ke}}{\text{đoi}} = \frac{AB}{AC}$



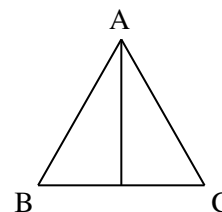
☞  $B$  và  $C$  là hai góc phụ nhau:  $\sin B = \cos C, \cos B = \sin C, \tan B = \cot C, \cot B = \tan C$

## 7. Một số tam giác, tứ giác đặc biệt

### a) Tam giác đều

Cho  $\Delta ABC$  đều có độ dài cạnh là  $a$ , đường cao  $AH = h$ :

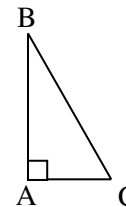
$$\textcircled{1} h = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{2} S = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



### b) Tam giác nửa đều

Cho  $\Delta ABC$  là nửa tam giác đều có độ dài cạnh là  $a$ :

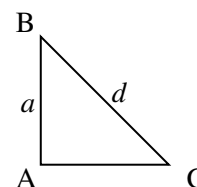
$$\textcircled{1} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{2} AC = \frac{a}{2} \quad \textcircled{3} S = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$



### c) Tam giác vuông cân

Cho  $\Delta ABC$  vuông cân tại  $A$  có độ dài cạnh bằng  $a$ , cạnh huyền  $d$ :

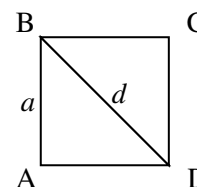
$$\textcircled{1} d = a\sqrt{2} \quad \textcircled{2} a = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{3} S = \frac{a^2}{2}$$



### d) Hình vuông

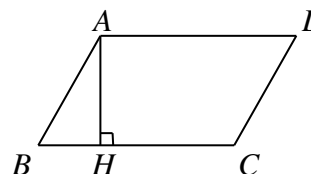
Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh bằng  $a$ , đường chéo  $d$ :

$$\textcircled{1} d = a\sqrt{2} \quad \textcircled{2} a = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{3} S = a^2$$



### e) Hình bình hành:

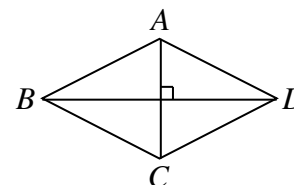
Diện tích:  $S_{ABCD} = BC \cdot AH = AB \cdot AD \cdot \sin A$



### f) Hình thoi:

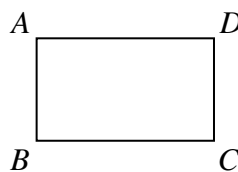
• Diện tích:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$

• Đặc biệt: khi  $\widehat{ABC} = 60^\circ$  hoặc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$  thì các tam giác  $ABC$ ,  $ACD$  đều.



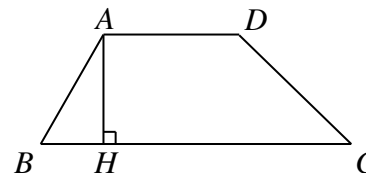
### g) Hình chữ nhật:

$S_{ABCD} = AB \cdot AD$



### h) Hình thang:

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AH}{2}$$



## B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Dạng 1. Tính toán các đại lượng

#### I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ✓ Vận dụng các định lý sin, cosin, trung tuyến, diện tích.
- ✓ Chú ý các quan hệ trực tiếp và quan hệ trung gian giữa các đại lượng cho và đại lượng cần tính, các tam giác đặc biệt.

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 34.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $AB = 1$  và  $AC = 2$ .

a) Tính  $BC$ .

b) Trên tia  $CA$  kéo dài lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = 2$ . Tính  $AD$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 35.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7$ ,  $b = 24$  và  $c = 23$ . Tính góc  $A$ .

.....

.....

.....

**Ví dụ 36.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh thỏa  $a(a^2 - b^2) = c(b^2 - c^2)$ . Tính góc  $B$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 37.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $\widehat{C} = 75^\circ$  và đường phân giác trong  $AD = 4$ . Tính cạnh  $AC$ ,  $BC$ ,  $AB$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 38.** Cho tam giác  $ABC$  có  $m_b = 4$ ,  $m_c = 2$  và  $a = 3$ . Tính độ dài các cạnh  $AB$  và  $AC$ .

**Ví dụ 39.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$ ,  $AC = 8$  và  $\widehat{A} = 60^\circ$ .

- Tính diện tích  $\Delta ABC$ .
- Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Tính diện tích  $\Delta IBC$ .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ .
- Tính độ dài đường phân giác trong của  $\widehat{A}$ .

**Bài 117.** Cho  $\Delta ABC$ , biết:

- $a = 12, b = 13, c = 15$ . Tính  $\cos A$  và góc  $A$ .
- $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Tính  $\widehat{A}, \widehat{B}, h_a$  và  $l_a$ .
- $c = 3 \text{ cm}, a = 5 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}$ . Tính  $S, h_a$  và  $R$ .
- $a = 7, b = 8, c = 6$ . Tính  $m_a, S, h_a$ .
- $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$ . Tính các góc của tam giác,  $R, m_a$ .
- $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, c = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ . Tính  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, R, S$ .
- $AB = 2, AC = 3, BC = 4$ . Tính  $r$ .
- $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính  $S, h_b, R, r$ .
- $a = 21, b = 17, c = 10$ . Tính  $S, h_a, r, m_a$ .
- $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, b = 4$ . Tính  $a$  và  $c$ .
- $\widehat{A} = 60^\circ, a = 6$ . Tính  $R$ .
- $\widehat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$ . Tính  $S, h_a, R, r$ .
- $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 5 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}$ . Tính  $AC, R, r, h_a$ .
- $\widehat{A} = 120^\circ, AB = 6 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}$ . Tính  $BC, R, S$ .
- $b = 7, c = 5, \cos A = 0,6$ . Tính  $S, R$  và  $r$ .
- $AB = 3, AC = 4, S = 3\sqrt{3}$ . Tính  $BC$ .
- $\widehat{A} = 120^\circ, BC = 7 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$ . Tính  $AB, R, r, m_a, l_a$ .
- $AC = 13 \text{ cm}, AB + BC = 22 \text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ$ . Tính  $AB, BC$ .

**Bài 118.**  $\Delta ABC$  có  $a = 5, b = 4, c = 3$ . Lấy  $D$  đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Tính  $AD$ .

**Bài 119.** Cho  $\Delta ABC$ . Biết  $a = 3, b = 4, c = 6$ . Tính góc lớn nhất và đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

**Bài 120.** Cho  $\Delta ABC$ . Biết  $AB + BC = 11 \text{ cm}$  ( $AB > BC$ ),  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Bán kính đường tròn nội tiếp trong  $\Delta ABC$  là  $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm}$ . Tính độ dài đường cao  $AH$ .

**Bài 121.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 8, AC = 9, BC = 10$ . Một điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 7$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$ .

**Bài 122.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, BC = 5, BD = 7$ . Tính  $AC$ .

**Bài 123.** Cho  $\Delta ABC$  có độ dài 3 trung tuyến bằng 15, 18, 27.

- Tính diện tích của  $\Delta ABC$ .
- Tính độ dài các cạnh của  $\Delta ABC$ .

**Bài 124.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5, AC = 12$ , đường cao  $AH$ .

- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp  $\Delta ABC$ .
- Vẽ phân giác trong  $AD$ . Tính  $DB, DC, AD$ .

**Bài 125.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ, BC = a$ .

- Tính  $AB, AC$ .
- Chứng minh:  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$



**Dạng 2. Chứng minh hệ thức****I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ✓ Vận dụng các phương pháp chung để chứng minh đẳng thức; biến đổi vế này sang vế kia, biến đổi tương đương hoặc so sánh với biểu thức trung gian, tỉ lệ thức, ...
- ✓ Sử dụng các định cơ bản về tam giác, tam giác vuông: định lí Pitago, định lí đường trung tuyến trong tam giác vuông, ...

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 40.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Chứng minh  $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$ .

b) Biết  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ . Tính giá trị của  $\sin A - 2 \sin B + \sin C$ .

**Ví dụ 41.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt lấy 2 điểm  $M$ ,  $N$ . C/m  $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$ .

**Ví dụ 42.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $BD = m$  và  $AC = n$ . Cmr:  $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Ví dụ 43.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

a)  $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ .

b)  $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 126.** Cho  $\Delta ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Chứng minh rằng:

a)  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

b)  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

**Bài 127.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

a)  $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$ .

b)  $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$ .

**Bài 128.** Cho  $\Delta ABC$  có  $b - c = \frac{a}{2}$ . Chứng minh:

a)  $\sin A = 2 \sin B - 2 \sin C$ .

b)  $\frac{1}{2h_a} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .

**Bài 129.** Cho  $\Delta ABC$  có  $b + c = 2a$ . Chứng minh:

a)  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .

b)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

**Dạng 3. Dạng tam giác****I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

$$\checkmark \Delta ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 90^\circ \\ \cos A = 0 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \widehat{B} = \widehat{C} \\ \sin B = \sin C \\ \cos B = \cos C \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \\ a = b \text{ và } 1 \text{ góc} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ nhọn} \Leftrightarrow A, B, C \text{ đều nhọn}$$

⚡ **Chú ý:** Sử dụng phối hợp các hệ thức cơ bản về tam giác, biến đổi về tích số bằng 0, biến đổi tổng bình phương, các bất đẳng thức cơ bản, so sánh, ...

**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 44.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh các khẳng định sau:

- Góc  $A$  nhọn khi và chỉ khi  $a^2 < b^2 + c^2$ .
- Góc  $A$  vuông khi và chỉ khi  $a^2 = b^2 + c^2$ .
- Góc  $A$  tù khi và chỉ khi  $a^2 > b^2 + c^2$ .

**Ví dụ 45.** Tam giác  $ABC$  thỏa hệ thức:  $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$ . Chứng minh rằng:  $\Delta ABC$  có  $\widehat{C} = 60^\circ$  hoặc  $\widehat{C} = 120^\circ$ .

**Ví dụ 46.** Cho  $\Delta ABC$  thỏa mãn:  $a^3 = b^3 + c^3$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  có 3 góc nhọn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 130.** Tam giác  $ABC$  thỏa hệ thức:  $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ . CMR:  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  hay  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

**Bài 131.** Tính góc  $A$  của  $\Delta ABC$  thỏa:  $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$ .

**Bài 132.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 2$  và  $\widehat{C} = 30^\circ$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân. Tính diện tích và chiều cao  $h_a$ .

**Bài 133.** Cho  $a = x^2 + x + 1$ ,  $b = 2x + 1$ ,  $c = x^2 - 1$ . Định  $x$  để  $a$ ,  $b$ ,  $c$  là độ dài 3 cạnh một tam giác. Với  $x$  vừa tìm được, chứng minh rằng tam giác có 1 góc bằng  $120^\circ$ .

**Bài 134.** a) Cho  $\Delta ABC$  biết  $a = 7$ ,  $b = 8$ ,  $c = 5$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  có 1 góc  $60^\circ$ .

b) Cho  $\Delta ABC$  biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $a = 10$ ,  $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ . Chứng minh  $\Delta ABC$  đều.

**Bài 135.** Tính các góc của  $\Delta ABC$  nếu có  $\frac{\sin A}{1} - \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$ .

**Bài 136.** Chứng minh rằng  $\Delta ABC$  đều  $\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 \\ b + c - a \\ a = 2b \cos C \end{cases}$

**Bài 137.** Xét dạng  $\Delta ABC$  nếu có:

a)  $\frac{1 + \cos B}{\sin^2 B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$       b)  $\begin{cases} \frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \\ \sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4} \end{cases}$       c)  $S = p(p - a)$

**Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế****I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ✓ Giải tam giác là tìm các cạnh và các góc còn lại sau khi biết các giả thiết: cho ba cạnh, hai cạnh và một góc, một cạnh và hai góc. Vận dụng các định lý sin, cosin với chú ý  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$  để tính toán.
- ✓ Ứng dụng thực tế là chuyển các bài toán thực tế thành bài toán tam giác, cho biết yếu tố xác định rồi tìm đại lượng nào đó.

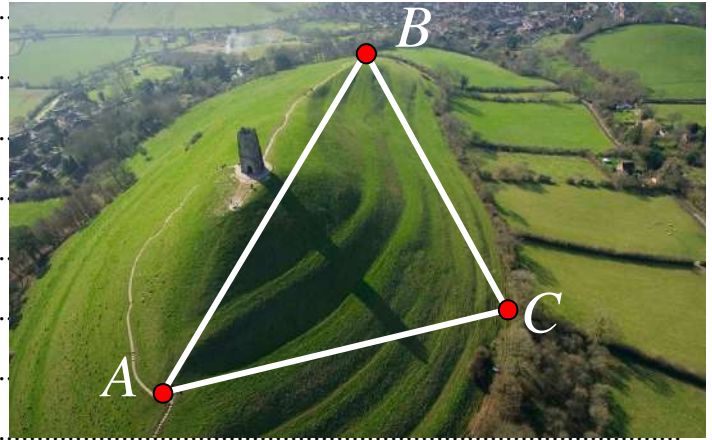
**II - BÀI TẬP MẪU**

**Ví dụ 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $a = 17,4$ ;  $\widehat{B} = 44^\circ 30'$ ,  $\widehat{C} = 64^\circ$ . Tính góc  $\widehat{A}$  và các cạnh  $b, c$ .

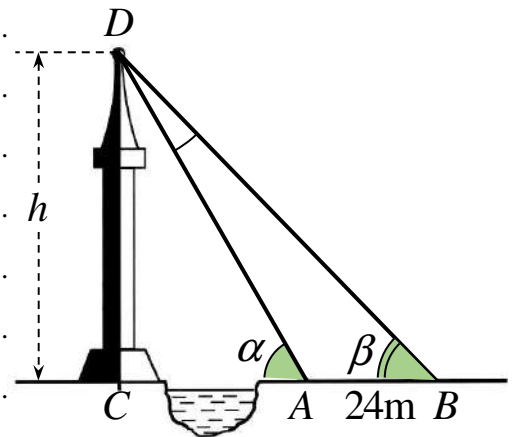
**Ví dụ 48.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $a = 6,3$ ;  $b = 6,3$ ;  $\widehat{C} = 54^\circ$ . Tính góc  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  và cạnh  $c$ .

**Ví dụ 49.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $a = 14$ ;  $b = 18$ ;  $c = 20$ . Tính các góc  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$ .

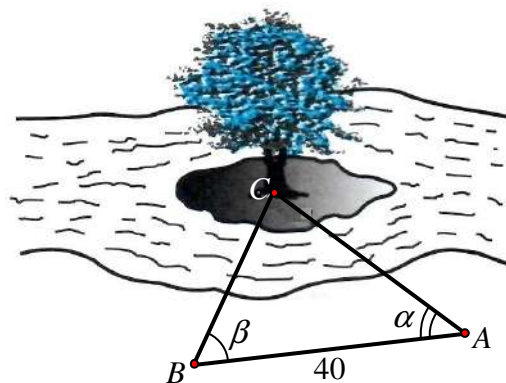
**Ví dụ 50.** Để lập đường dây cao thế từ vị trí  $A$  đến vị trí  $B$ , ta phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$  dài 10 km rồi nối từ vị trí  $C$  thẳng đến vị trí  $B$  dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây  $AC$  và  $CB$  là  $75^\circ$ . Hỏi so với việc nối thẳng từ  $A$  đến người ta tốn thêm bao nhiêu km dây?



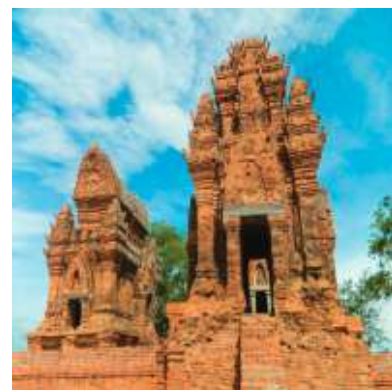
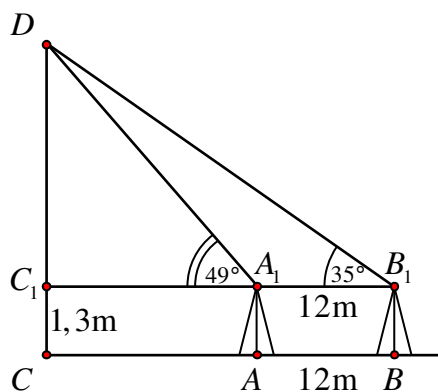
**Ví dụ 51.** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo khoảng cách  $AB$  và các góc  $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$ . Chẳng hạn ta đo được  $AB = 24 \text{ m}$ ,  $\widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ$ ,  $\widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$ . Tính chiều cao của tháp.



**Ví dụ 52.** Để đo khoảng cách từ một điểm  $A$  đến gốc cây  $C$  trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm  $B$  cùng ở trên bờ với  $A$  sao cho từ  $A$  và  $B$  có thể nhìn thấy điểm  $C$ . Biết  $AB = 40$  m,  $\widehat{CAB} = \alpha = 45^\circ$ ,  $\widehat{CBA} = \beta = 70^\circ$ . Tính khoảng cách từ một điểm  $A$  đến gốc cây  $C$ .



**Ví dụ 53.** Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por Klong Garai ở tỉnh Ninh Thuận, người ta lấy hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất có khoảng cách  $AB = 12$  m cùng thẳng hàng với chân  $C$  của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao  $h = 1,3$  m. Gọi  $D$  là đỉnh tháp và hai điểm  $A_1, B_1$  cùng thẳng hàng với  $C_1$  thuộc chiều cao  $CD$  của tháp. Người ta đo được  $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$  và  $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$ . Tính chiều cao  $CD$  của tháp đó.



**Ví dụ 54.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

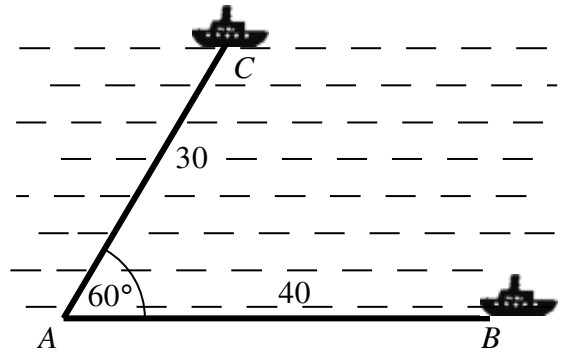
.....

.....

.....

.....

.....



### III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 138.** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

a)  $c = 14$ ;  $\widehat{A} = 60^\circ$ ;  $\widehat{B} = 40^\circ$ .

b)  $b = 4,5$ ;  $\widehat{A} = 45^\circ$ ;  $\widehat{C} = 75^\circ$

c)  $c = 35$ ;  $\widehat{A} = 40^\circ$ ;  $\widehat{C} = 120^\circ$

d)  $a = 137,5$ ;  $\widehat{B} = 60^\circ$ ;  $\widehat{C} = 40^\circ$ .

**Bài 139.** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

a)  $a = 6,3$ ;  $b = 6,3$ ;  $\widehat{C} = 54^\circ$

b)  $b = 32$ ;  $c = 45$ ;  $\widehat{A} = 87^\circ$

c)  $a = 7$ ;  $b = 23$ ;  $\widehat{C} = 130^\circ$

d)  $b = 14$ ;  $c = 10$ ;  $\widehat{A} = 145^\circ$

**Bài 140.** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

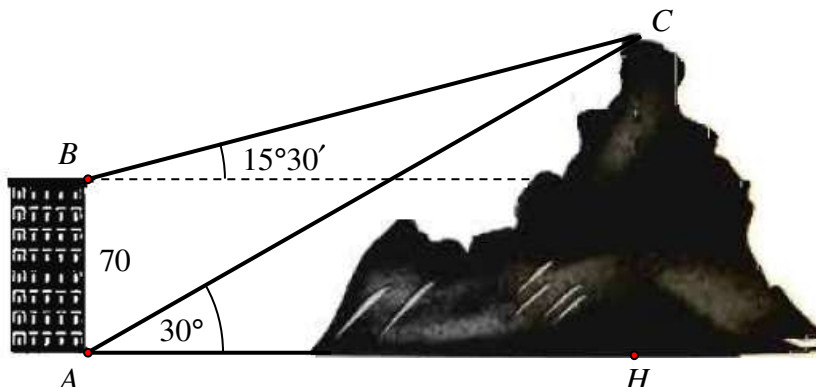
a)  $a = 14$ ;  $b = 18$ ;  $c = 20$

b)  $a = 6$ ;  $b = 7,3$ ;  $c = 4,8$

c)  $a = 4$ ;  $b = 5$ ;  $c = 7$

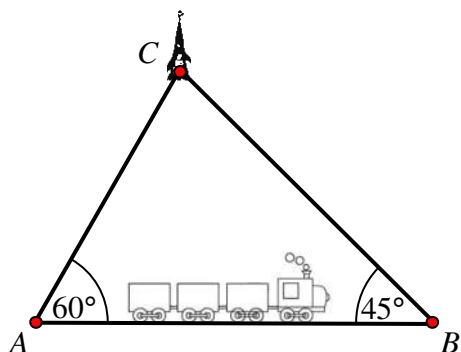
d)  $a = 2\sqrt{3}$ ;  $b = 2\sqrt{2}$ ;  $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

**Bài 141.** Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc  $30^\circ$  phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc  $15^\circ 30'$ . Hỏi ngọn núi đó cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

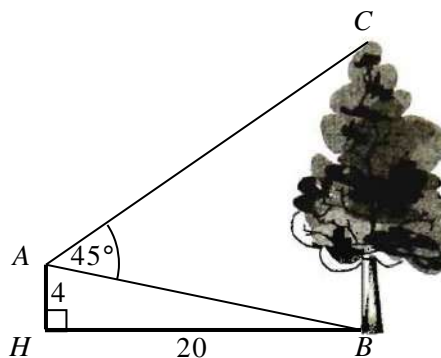




**Bài 142.** Một người ngồi trên tàu hỏa đi từ ga A đến ga B. Khi tàu đỗ ở ga A, qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C (hình a). Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi tàu một góc  $60^\circ$ . Khi tàu đỗ ở ga B, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C, hướng nhìn từ người đó đến tháp tại với hướng ngược với hướng đi của tàu một góc  $45^\circ$ . Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với ga B dài 8 km. Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu?



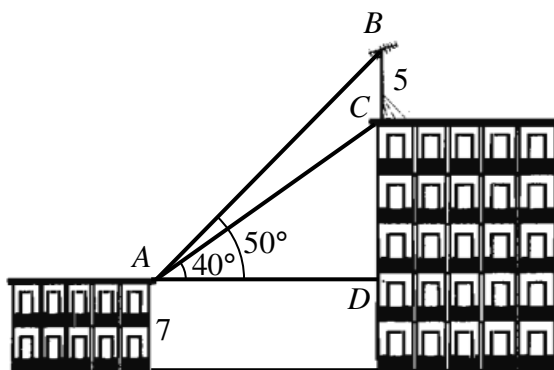
Hình a.



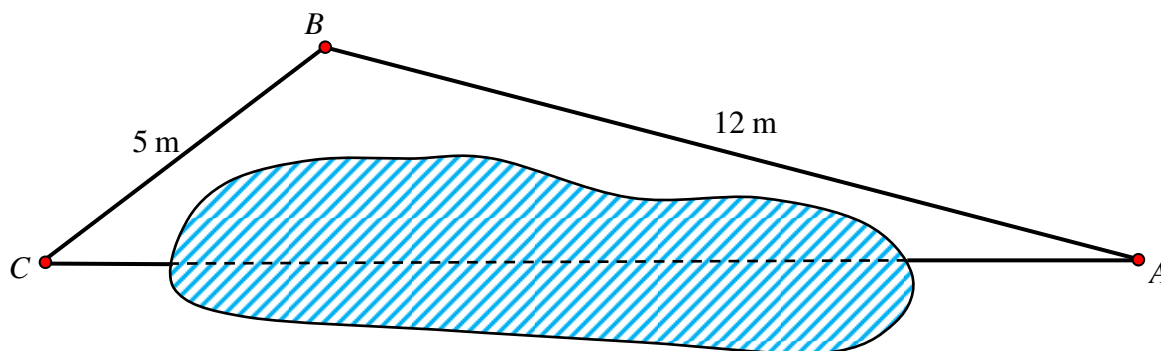
Hình b.

**Bài 143.** Từ vị trí A, người ta quan sát một cây cao (hình b). Biết  $AH = 4\text{ m}$ ,  $HB = 20\text{ m}$ ,  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Tính chiều cao của cây.

**Bài 144.** Trên nóc tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà (hình bên dưới)



**Bài 145.** Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau: Xác định một điểm B có khoảng cách  $AB = 12\text{ km}$  và đo được góc  $\widehat{ACB} = 37^\circ$ . Hãy tính khoảng cách AC biết rằng  $BC = 5\text{ km}$ .



**Bài 146.** Biết 2 lực cùng tác dụng vào một vật và tạo với nhau một góc  $40^\circ$ . Cường độ của 2 lực đó bằng 3 N và 4 N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

**Bài 147.** Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300 m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc  $\widehat{BPA} = 35^\circ$  và  $\widehat{BQA} = 48^\circ$ . Tính chiều cao của tháp.

### C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3

**Bài 148.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $b = 7$ ,  $c = 9$ ,  $\cos A = \frac{5}{13}$ . Tính  $h_a$ ,  $R$ .

**Bài 149.** Cho  $\Delta ABC$ , biết  $a = 9$ ,  $b = 10$ ,  $c = 13$ . Tính  $h_a$ ,  $m_a$ ,  $S$ ,  $r$ .

**Bài 150.** Cho  $\Delta ABC$  có:  $m_a = 5$ ,  $m_b = 4$ ,  $m_c = 3$ .

a) Tính  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

b) Chứng minh rằng  $\widehat{A} < 45^\circ$ .

**Bài 151.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ . Một điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = d$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$ .

**Bài 152.** Cho  $\Delta ABC$  có  $\sin A > \sin B > \sin C$ . Chứng minh  $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ .

**Bài 153.** Chứng minh trong mọi tam giác  $ABC$ :

a)  $b = a \cos C + c \cos A$       b)  $\sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C$       c)  $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$

**Bài 154.** Chứng minh rằng: nếu  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$  thì  $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{18}(b^2 + c^2 - 5a^2)$ .

**Bài 155.** Cho  $\Delta ABC$  với  $AB = 2$  cm, trung tuyến  $BD = 1$  cm,  $\widehat{BDA} = 30^\circ$ . Tính  $AD$ ,  $BC$  và diện tích.

**Bài 156.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  với  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = AC = 5$  cm. Đường thẳng qua  $B$  và tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Tính  $BD$ .

**Bài 157.** Cho  $\Delta ABC$  với  $AB = 8$  cm và  $\widehat{A} = 60^\circ$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  bán kính  $R = 7\sqrt{3}/3$ . Tính độ dài các cạnh  $BC$ ,  $AC$  và diện tích  $\Delta ABC$ .

**Bài 158.** Cho  $\Delta ABC$  đều,  $N$  là 1 điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AN = \frac{1}{3}AC$ . Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABN$  và  $\Delta ABC$ .

**Bài 159.** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh  $4a$ , lấy  $D \in BC$ ,  $E \in AC$ ,  $F \in AB$  sao cho  $BD = x$  ( $0 < x < 4a$ ),  $AE = a$ ,  $AF = 3a$ .

a) Tính  $EF$ .

b) Định  $x$  để tam giác  $DEF$  vuông tại  $F$ .

**Bài 160.** Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy bằng 20, đường cao ứng với cạnh bên bằng 24. Tính các cạnh của tam giác cân đó.

**Bài 161.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 7$ .

a) Tính  $\widehat{BAC}$ .

b) Tính độ dài các đường phân giác trong và ngoài của góc  $\widehat{BAC}$ .

**Bài 162.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , có  $\widehat{A} = \alpha$ ,  $AB = a$ .

a) Tính  $BC$  theo  $a$  và  $\alpha$ .      b) Gọi  $D$  là điểm trên  $BC$ , xác định bởi  $BC = 3BD$ . Tính  $AD$ .

**Bài 163.** Tam giác  $ABC$  có hai trung tuyến  $BM = 6$ ,  $CN = 9$  hợp với nhau một góc  $120^\circ$ . Tính các cạnh của tam giác đó.

**Bài 164.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ ,  $BC = a$ , đường cao  $AH = 2a$ .  $M$  là trung điểm  $AB$ .

a) Tính độ dài đường trung tuyến  $CM$ .

b) Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $CM$ .

**Bài 165.** Cho  $ABCD$  là hình thang có đáy lớn  $AB = 3a$ , đáy nhỏ  $CD$  và cạnh  $AD$  bằng  $a$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy. Tính  $BC$  và  $MN$ .

**Bài 166.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ ,  $M$  là trung điểm  $AB$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OMC$ .

**Bài 167.** Cho  $\Delta ABC$  vuông ở  $A$ ,  $D$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ ;  $E$  và  $F$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  xuống  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh:

$$\text{a) } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC} \text{ và } \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF} \qquad \text{b) } AD^3 = BC \cdot EB \cdot CF$$

**Bài 168.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

$$\text{a) } a^2 - c^2 = b(a \cos C - c \cos A) \qquad \text{b) } b = r \left( \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \qquad \text{c) } \tan A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}$$

**Bài 169.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

- a) Nếu  $m_a = m_b$  thì tam giác cân.  
 b) Nếu hai trung tuyến  $AM \perp CN$  thì  $\cot B = 2(\cot A + \cot C)$

**Bài 170.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AM$  là trung tuyến. Biết  $AM = AB$ . Chứng minh:

$$\text{a) } \sin A = 2 \sin(B - A) \qquad \text{b) } \cot C = 3 \cot B$$

**Bài 171.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a^4 + b^4 = c^4$ . Chứng minh rằng:  $A, B, C$  nhọn và  $2 \sin^2 C = \tan A \cdot \tan B$

**Bài 172.** Cho  $\Delta ABC$  có  $m_a = c$ . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \tan B = 3 \tan C \qquad \text{b) } \sin A = 2 \sin(B - C)$$

**Bài 173.** Cho  $\Delta ABC$  có  $bc = a^2$ . Chứng minh:

$$\text{a) } \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C. \qquad \text{b) } h_b \cdot h_c = h_a^2.$$

**Bài 174.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= b \cos C + c \cos B & \text{b) } \sin A &= \sin B \cos C + \sin C \cos B \\ \text{c) } h_a &= 2R \sin B \cdot \sin C & \text{d) } a &= r \left( \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

**Bài 175.** Chứng minh trong  $\Delta ABC$ :  $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

**Bài 176.** Chứng minh rằng:

- a) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\frac{\sin B}{\sin A} = 2 \cos C$  thì  $\Delta ABC$  cân.  
 b) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$  thì  $\Delta ABC$  cân.  
 c) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{2bc}}$  thì  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ .  
 d) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$  thì  $\Delta ABC$  cân.  
 e) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $h_a = \sqrt{p(p-a)}$  thì  $\Delta ABC$  cân.  
 f) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$  thì một trong 3 góc của nó bằng  $60^\circ$ .  
 g) Nếu 3 góc của  $\Delta ABC$  thỏa hệ thức  $\sin A = 2 \sin B \cos C$  thì  $\Delta ABC$  là tam giác cân.  
 h) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa hệ thức  $a + b + c = 2(a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C)$  thì  $\Delta ABC$  đều.

**Bài 177.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \qquad \text{b) } \frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

**Bài 178.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

a)  $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ .

b)  $S = \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overline{ABAC})^2}$ .

**Bài 179.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{BAM} = \alpha$ .

a) Tính  $BC$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

b) Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh:  $r = \frac{a \sin \alpha}{2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}$

**Bài 180.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , cạnh góc vuông là  $b, c$ . Lấy  $M \in BC$  sao cho  $\widehat{BAM} = \alpha$ . Chứng minh rằng:  $AM = \frac{bc}{b \cos \alpha + c \sin \alpha}$ .

**Bài 181.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AD$  là phân giác trong của góc  $A$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$ .

**Bài 182.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , cạnh góc vuông là  $b, c$ . Chứng minh rằng:

a) Độ dài phân giác trong của góc  $A$  là  $l_a = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$ .      b)  $r = \frac{1}{2}(b+c - \sqrt{b^2+c^2})$

**Bài 183.** Tam giác  $ABC$  và  $DEF$  cùng nội tiếp trong một đường tròn tâm. Chứng minh rằng: chu vi 2 tam giác bằng nhau khi và chỉ khi:  $\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$

**Bài 184.** Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

**Bài 185.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng:  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$ .

**Bài 186.** Gọi  $S$  là diện tích và  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng:  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ .

**Bài 187.** Cho  $\Delta ABC$  có  $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ . Chứng minh rằng  $2 \cot A = \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = \cot B + \cot C$ .

**Bài 188.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ , gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ .

a) Chứng minh:  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình bình hành.

**Bài 189.** Cho  $\Delta ABC$  có  $\frac{abc}{a+b+c} = k$ . Chứng minh:  $R \cdot r = \frac{k}{2}$ .

**Bài 190.** Cho  $\Delta ABC$  có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $K, L, M$ . Chứng minh:  $S_{\Delta KLM} = 2S_{\Delta ABC} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ .

**Bài 191.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy  $AB = a, CD = b$ , 2 cạnh bên  $AD = c, BC = d$  và hai đường chéo  $AC = p, BD = q$ . Chứng minh rằng:  $p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab$ .

**Bài 192.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a+c=2b$ . Chứng minh:  $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} = 2 \cot \frac{B}{2}$

**Bài 193.** Tính diện tích  $\Delta ABC$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $a = 5, b = 7, \widehat{C} = 135^\circ$       b)  $a = 2, b = 3, c = 4$       c)  $\widehat{A} = 30^\circ, \widehat{B} = 120^\circ, c = 12.$

**Bài 194.** Cho  $\Delta ABC$  với  $\widehat{A} = 60^\circ$ , bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng  $\frac{7}{\sqrt{3}}$  và bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $\sqrt{3}$ . Tính diện tích và chu vi  $\Delta ABC$ .

**Bài 195.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh:

a)  $h_a h_b h_c = 8R^3 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C.$

b)  $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{\cot A + \cot B + \cot C}$

c)  $S = \frac{1}{4} (a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$

**Bài 196.** Các đường phân giác trong của  $\Delta ABC$  kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ở các điểm  $L, M, N$ . Chứng minh:  $S_{MLN} = \frac{1}{2} p \cdot R.$

**Bài 197.** Chứng minh rằng:

a) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\sin A \cdot \cos^3 B = \sin B \cdot \cos^3 A$  thì  $\Delta ABC$  cân.

b) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$  thì  $\Delta ABC$  đều.

c) Nếu  $\Delta ABC$  thỏa  $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$  thì  $\Delta ABC$  cân.

**Bài 198.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b)  $a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$

c)  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

d)  $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

e)  $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$

f)  $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$

**Bài 199.** Cho  $\Delta ABC$  có  $a < b < c$ . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $b \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{b} (a+c) < \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) (a+c)$

b)  $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} < \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}$

c)  $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) < 0$

d)  $(a+b+c)^2 < 9bc$

**Bài 200.** Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$

b)  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$

c)  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

d)  $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

**Bài 201.** Cho  $\Delta ABC$  có góc  $120^\circ$  nếu đồng dạng với tam giác có độ dài 3 cạnh lần lượt là  $\sqrt{3}, \sqrt{2}$  và  $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ .

**D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3**

- Câu 178. [0H2-1]** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?  
 A.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$ .                      B.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .  
 C.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$ .                      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$ .
- Câu 179. [0H2-1]** Tam giác  $ABC$  có  $A = 120^\circ$  thì câu nào sau đây đúng?  
 A.  $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$ .    B.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .    C.  $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$ .    D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .
- Câu 180. [0H2-1]** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8, b = 7, c = 5$ . Diện tích của tam giác là:  
 A.  $5\sqrt{3}$                       B.  $8\sqrt{3}$ .                      C.  $10\sqrt{3}$ .                      D.  $12\sqrt{3}$ .
- Câu 181. [0H2-1]** Tính diện tích tam giác  $ABC$  biết  $A = 60^\circ, b = 10, c = 20$ .  
 A.  $50\sqrt{3}$ .                      B. 50.                      C.  $50\sqrt{2}$ .                      D.  $50\sqrt{5}$ .
- Câu 182. [0H2-1]** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$ . Góc  $B$  là:  
 A.  $115^\circ$ .                      B.  $75^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $53^\circ 32'$ .
- Câu 183. [0H2-1]** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$ . Tính góc  $A$ .  
 A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $68^\circ$ .                      D.  $75^\circ$ .
- Câu 184. [0H2-1]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 12, AC = 13, \hat{A} = 30^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .  
 A. 39.                      B. 78.                      C.  $39\sqrt{3}$ .                      D.  $78\sqrt{3}$ .
- Câu 185. [0H2-1]** Tính diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là  $\sqrt{3}, \sqrt{2}$  và 1.  
 A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 186. [0H2-1]** Tính diện tích tam giác có ba cạnh là 9, 10, 11.  
 A.  $50\sqrt{3}$ .                      B. 44.                      C.  $30\sqrt{2}$ .                      D. 42.
- Câu 187. [0H2-1]** Tính diện tích tam giác  $ABC$  có ba cạnh là 13, 14, 15.  
 A. 84.                      B.  $\sqrt{6411}$ .                      C. 168.                      D.  $16\sqrt{24}$ .
- Câu 188. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$ . Trung tuyến  $AM$  có độ dài:  
 A.  $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$ .    B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .    C.  $\sqrt{3a^2 - 2b^2 - 2c^2}$ .    D.  $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ .
- Câu 189. [0H2-2]** Nếu tam giác  $ABC$  có  $a^2 < b^2 + c^2$  thì:  
 A.  $A$  là góc nhọn.    B.  $A$  là góc tù.    C.  $A$  là góc vuông.    D.  $A$  là góc nhỏ nhất.
- Câu 190. [0H2-2]** Trong tam giác  $ABC$ , hệ thức nào sau đây sai?  
 A.  $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .    B.  $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .    C.  $a = 2R \cdot \sin A$ .    D.  $b = R \cdot \tan B$ .
- Câu 191. [0H2-2]** Tính góc  $C$  của tam giác  $ABC$  biết  $a \neq b$  và  $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$ .  
 A.  $C = 150^\circ$ .    B.  $C = 120^\circ$ .    C.  $C = 60^\circ$ .    D.  $C = 30^\circ$ .
- Câu 192. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$  thỏa mãn hệ thức  $3h_a = 2h_b + h_c$ . Tìm hệ thức giữa  $a, b, c$ .  
 A.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ .    B.  $3a = 2b + c$ .    C.  $3a = 2b - c$ .    D.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

**Câu 193. [0H2-2]** Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu  $a^2 > b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc tù.  
 B. Nếu tam giác  $ABC$  có một góc tù thì  $a^2 > b^2 + c^2$ .  
 C. Nếu  $a^2 < b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc nhọn.  
 D. Nếu  $a^2 = b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc vuông.

**Câu 194. [0H2-2]** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?

- A.  $m_a = \frac{b+c}{2}$ .      B.  $m_a > \frac{b+c}{2}$ .      C.  $m_a < \frac{b+c}{2}$ .      D.  $m_a = b+c$ .

**Câu 195. [0H2-2]** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $2h_a = h_b + h_c$  thì:

- A.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .      B.  $2\sin A = \sin B + \sin C$ .  
 C.  $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$ .      D.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ .

**Câu 196. [0H2-2]** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $a^2 = bc$  thì:

- A.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .      B.  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .      C.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .      D.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$ .

**Câu 197. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}+1$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp.

- A.  $\sqrt{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\sqrt{3}$ .

**Câu 198. [0H2-2]** Diện tích  $S$  của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

- I.  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .  
 II.  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ .

- A. Chỉ I.      B. Chỉ II.      C. Cả I và II.      D. Không có.

**Câu 199. [0H2-2]** Trong  $\Delta ABC$ , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau là:

- A.  $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$ .      B.  $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$ .      C.  $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$ .      D.  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .

**Câu 200. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=8$  cm,  $AC=18$  cm và có diện tích bằng  $64$  cm<sup>2</sup>. Giá trị  $\sin A$  là:

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\frac{3}{8}$ .      C.  $\frac{4}{5}$ .      D.  $\frac{8}{9}$ .

**Câu 201. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=4$  cm,  $BC=7$  cm,  $CA=9$  cm. Giá trị  $\cos A$  là:

- A.  $\frac{2}{3}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C.  $-\frac{2}{3}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 202. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ . Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Khi đó tỉ số  $\frac{R}{r}$  bằng:

- A.  $1+\sqrt{2}$ .      B.  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ .      D.  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 203. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB=9$  cm,  $AC=12$  cm và  $BC=15$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là:

- A. 8 cm.      B. 10 cm.      C. 9 cm.      D. 7,5 cm.

- Câu 204. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và có diện tích  $S$ . Nếu tăng cạnh  $BC$  lên 2 lần đồng thời tăng cạnh  $AC$  lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc  $C$  thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:
- A.  $2S$ .                      B.  $3S$ .                      C.  $4S$ .                      D.  $6S$ .
- Câu 205. [0H2-2]** Cho tam giác  $DEF$  có  $DE = DF = 10$  cm và  $EF = 12$  cm. Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $EF$ . Đoạn thẳng  $DI$  có độ dài là:
- A. 6,5 cm.                      B. 7 cm.                      C. 8 cm.                      D. 4 cm.
- Câu 206. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh  $BC$ ?
- A.  $\sqrt{129}$ .                      B. 7.                      C. 49.                      D.  $\sqrt{69}$ .
- Câu 207. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $a = 14$ ,  $b = 18$ ,  $c = 20$ . Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất?
- A.  $\hat{B} \approx 42^\circ 50'$ .                      B.  $\hat{B} \approx 60^\circ 56'$ .                      C.  $\hat{B} \approx 119^\circ 04'$ .                      D.  $\hat{B} \approx 90^\circ$ .
- Câu 208. [0H2-2]** Nếu tam giác  $MNP$  có  $MP = 5$ ,  $PN = 8$  và  $\widehat{MPN} = 120^\circ$  thì độ dài cạnh  $MN$  (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là:
- A. 11,4.                      B. 12,4.                      C. 7,0.                      D. 12,0.
- Câu 209. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 10$ ,  $\hat{A} = 30^\circ$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng bao nhiêu?
- A. 5.                      B. 10.                      C.  $\frac{10}{\sqrt{3}}$ .                      D.  $10\sqrt{3}$ .
- Câu 210. [0H2-2]** Tam giác với ba cạnh là 5, 12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu?
- A. 30.                      B.  $20\sqrt{2}$ .                      C.  $10\sqrt{3}$ .                      D. 20.
- Câu 211. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
- A.  $\sqrt{3}$ .                      B. 4.                      C. 2.                      D. 1.
- Câu 212. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 5$ . Hỏi cạnh  $AC$  bằng bao nhiêu?
- A.  $5\sqrt{3}$ .                      B.  $5\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ .                      D. 10.
- Câu 213. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 2$  cm,  $AC = 1$  cm,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Khi đó độ dài cạnh  $BC$  là:
- A. 1 cm.                      B. 2 cm.                      C.  $\sqrt{3}$  cm.                      D.  $\sqrt{5}$  cm.
- Câu 214. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $a = 5$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 5$  cm. Khi đó số đo của góc  $\widehat{BAC}$  là:
- A.  $\hat{A} = 45^\circ$ .                      B.  $\hat{A} = 30^\circ$ .                      C.  $\hat{A} > 60^\circ$ .                      D.  $\hat{A} = 90^\circ$ .
- Câu 215. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$  cm,  $BC = 10$  cm,  $CA = 6$  cm. Đường trung tuyến  $AM$  của tam giác đó có độ dài bằng:
- A. 4 cm.                      B. 5 cm.                      C. 6 cm.                      D. 7 cm.
- Câu 216. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $a = \sqrt{3}$  cm,  $b = \sqrt{2}$  cm,  $c = 1$  cm. Đường trung tuyến  $m_a$  có độ dài là:
- A. 1 cm.                      B. 1,5 cm.                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  cm.                      D. 2,5 cm.



**Câu 217. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Đường trung tuyến  $BM$  có độ dài là:

- A.  $1,5a$ .                      B.  $a\sqrt{2}$ .                      C.  $a\sqrt{3}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 218. [0H2-2]** Tam giác đều cạnh  $a$  nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R$ . Khi đó bán kính  $R$  bằng:

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 219. [0H2-2]** Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh  $a$  bằng:

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{5}}{7}$ .

**Câu 220. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  nhọn.                      B. Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$  thì góc  $A$  tù.  
C. Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$  thì góc  $A$  nhọn.                      D. Nếu  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$  thì góc  $A$  vuông.

**Câu 221. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ . Tính cạnh  $BC$

- A. 76.                      B.  $2\sqrt{19}$ .                      C. 14.                      D.  $6\sqrt{2}$ .

**Câu 222. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$ ,  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ . Tính cạnh  $BC$

- A. 76.                      B.  $2\sqrt{19}$ .                      C. 14.                      D.  $6\sqrt{2}$ .

**Câu 223. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A.  $\sqrt{3}$ .                      B. 3.                      C. 1,5.                      D. 1,7.

**Câu 224. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{C} = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ . Tính cạnh  $AB$

- A.  $\sqrt{10}$ .                      B. 10.                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 1.

**Câu 225. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{C} = 150^\circ$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .

- A.  $\sqrt{13}$ .                      B. 10.                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 1.

**Câu 226. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 135^\circ$ ,  $BC = 3$ ,  $AB = \sqrt{2}$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A. 5.                      B.  $\sqrt{5}$ .                      C.  $\sqrt{17}$ .                      D. 2,25.

**Câu 227. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 228. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 229. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 105^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 10$ . Tính cạnh  $AB$ .

- A.  $10\sqrt{2}$ .                      B.  $5\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $5\sqrt{2}$ .

**Câu 230. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

- Câu 231. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có tổng hai góc  $B$  và  $C$  bằng  $135^\circ$  và độ dài cạnh  $BC$  bằng  $a$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $a\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $a\sqrt{3}$ .
- Câu 232. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $AC = 9$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $2\sqrt{17}$ .                      B.  $\sqrt{17}$ .                      C.  $\sqrt{129}$ .                      D.  $22$ .
- Câu 233. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $2\sqrt{6}$ .                      B.  $5$ .                      C.  $\sqrt{22}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .
- Câu 234. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  và trung tuyến  $BM = 3$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $\sqrt{17}$ .                      B.  $2\sqrt{5}$ .                      C.  $4$ .                      D.  $8$ .
- Câu 235. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $5$ ,  $12$ ,  $13$ . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.
- A.  $\frac{60}{13}$ .                      B.  $\frac{120}{13}$ .                      C.  $\frac{30}{13}$ .                      D.  $12$ .
- Câu 236. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 1$ ,  $AC = 3$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- A.  $\sqrt{7}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$ .                      C.  $\frac{5}{2}$ .                      D.  $\sqrt{3}$ .
- Câu 237. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có góc  $B$  tù,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và có diện tích bằng  $3\sqrt{3}$ . Góc  $A$  có số đo bằng bao nhiêu?
- A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 238. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 10$ ,  $AC = 24$ , diện tích bằng  $120$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $AM$ .
- A.  $13$ .                      B.  $7\sqrt{3}$ .                      C.  $26$ .                      D.  $11\sqrt{2}$ .
- Câu 239. [0H2-2]** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn,  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ , diện tích bằng  $12$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .
- A.  $2\sqrt{3}$ .                      B.  $4$ .                      C.  $5$ .                      D.  $3\sqrt{2}$ .
- Câu 240. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$  và  $1$ . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.
- A.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{2}$ .
- Câu 241. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $1$ ,  $2$ ,  $\sqrt{5}$ . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất
- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .                      B.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ .                      C.  $1,4$ .                      D.  $1,3$ .
- Câu 242. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là  $5$ ,  $6$ ,  $7$ . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng  $6$ .
- A.  $\sqrt{6}$ .                      B.  $2\sqrt{6}$ .                      C.  $5$ .                      D.  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

- Câu 243. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 7, 8, 9. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 8.
- A.  $4\sqrt{3}$ .                      B.  $2\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $3\sqrt{5}$ .
- Câu 244. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 21, 22, 23. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 22.
- A.  $\frac{4\sqrt{11}}{7}$ .                      B. 27.                      C.  $3\sqrt{10}$ .                      D.  $6\sqrt{10}$ .
- Câu 245. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh 13, 14, 15. Tính đường cao ứng với cạnh có độ dài 14.
- A. 10.                      B. 12.                      C. 1.                      D. 15.
- Câu 246. [0H2-2]** Cho tam giác với ba cạnh  $a=13$ ,  $b=14$ ,  $c=15$  Tính đường cao  $h_c$ .
- A.  $10\frac{1}{5}$ .                      B.  $11\frac{1}{5}$ .                      C.  $5\frac{3}{5}$ .                      D. 12.
- Câu 247. [0H2-2]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 12, 13.
- A. 11.                      B.  $5\sqrt{2}$ .                      C. 6.                      D. 6,5.
- Câu 248. [0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$  và 1.
- A.  $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .                      D.  $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 249. [0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 12, 13.
- A.  $\sqrt{2}$ .                      B. 2.                      C.  $2\sqrt{2}$ .                      D.  $\sqrt{3}$ .
- Câu 250. [0H2-2]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có ba cạnh là 13, 14, 15.
- A. 8.                      B.  $\frac{33}{4}$ .                      C.  $8\frac{1}{8}$ .                      D.  $6\sqrt{2}$ .
- Câu 251. [0H2-2]** Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  có ba cạnh là 13, 14, 15.
- A. 2.                      B. 4.                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D. 3.
- Câu 252. [0H2-2]** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích  $S$ . Nếu tăng độ dài mỗi cạnh  $BC$  và  $AC$  lên hai lần đồng thời giữ nguyên độ lớn của góc  $C$  thì diện tích của tam giác mới được tạo nên là:
- A.  $2S$ .                      B.  $3S$ .                      C.  $4S$ .                      D.  $5S$ .
- Câu 253. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$ , xét các bất đẳng thức sau:
- I.  $|a-b| < c$ .                      II.  $a < b+c$ .                      III.  $m_a + m_b + m_c < a+b+c$ .
- Hỏi bất đẳng thức nào đúng?
- A. Chỉ I, II.                      B. Chỉ II, III.                      C. Chỉ I, III.                      D. Cả I, II, III.
- Câu 254. [0H2-3]** Cho tam giác  $MPQ$  vuông tại  $P$ . Trên cạnh  $MQ$  lấy hai điểm  $E, F$  sao cho các góc  $\widehat{MPE}$ ,  $\widehat{EPF}$ ,  $\widehat{FPQ}$  bằng nhau. Đặt  $MP = q$ ,  $PQ = m$ ,  $PE = x$ ,  $PF = y$ . Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?
- A.  $ME = EF = FQ$ .                      B.  $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$ .  
C.  $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ .                      D.  $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$ .
- Câu 255. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính  $r$  bằng:
- A. 1 cm.                      B.  $\sqrt{2}$  cm.                      C. 2 cm.                      D. 3 cm.

- Câu 256. [0H2-3]** Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính  $R = 4$  cm có diện tích là:  
 A.  $13 \text{ cm}^2$ .                      B.  $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$ .                      C.  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .                      D.  $15 \text{ cm}^2$ .
- Câu 257. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  có bán kính  $r$  bằng:  
 A.  $\frac{a}{2}$ .                      B.  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .                      C.  $\frac{a}{2+\sqrt{2}}$ .                      D.  $\frac{a}{3}$ .
- Câu 258. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện:  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Khi đó số đo của góc  $C$  là:  
 A.  $120^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .
- Câu 259. [0H2-3]** Hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a, BC = a\sqrt{2}$  và  $\widehat{BAD} = 45^\circ$ . Khi đó hình bình hành có diện tích bằng  
 A.  $2a^2$ .                      B.  $a^2\sqrt{2}$ .                      C.  $a^2$ .                      D.  $a^2\sqrt{3}$ .
- Câu 260. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng:  
 A.  $60^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 261. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 6$  và góc  $C$  nhọn. Tính cạnh  $AB$ .  
 A.  $\sqrt{27}$ .                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $27$ .                      D.  $8$ .
- Câu 262. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $AC = 3\sqrt{3}$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 6$ . Tính số đo góc  $B$ .  
 A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 263. [0H3-2]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 5\sqrt{5}$ ,  $AC = 5\sqrt{2}$ ,  $AB = 5$ . Tính  $\widehat{A}$ .  
 A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $30^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 264. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và  $\tan A = 2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$   
 A.  $\sqrt{33}$ .                      B.  $\sqrt{17}$ .                      C.  $3\sqrt{2}$ .                      D.  $4\sqrt{2}$ .
- Câu 265. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và  $\tan A = -2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$ .  
 A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $4\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{33}$ .                      D.  $7$ .
- Câu 266. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = -2$ . Tính cạnh  $AB$ .  
 A.  $\sqrt{26}$ .                      B.  $\sqrt{21}$ .                      C.  $\frac{9}{5}$ .                      D.  $2\sqrt{10}$ .
- Câu 267. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .  
 A.  $6$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{9}{5}$ .                      D.  $2\sqrt{10}$ .
- Câu 268. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  và  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$ . Tính  $BC$ .  
 A.  $2\sqrt{15}$ .                      B.  $4\sqrt{22}$ .                      C.  $4\sqrt{15}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .
- Câu 269. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính cạnh  $AB$ .  
 A.  $\sqrt{46}$ .                      B.  $11$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $6$ .

- Câu 270. [0H3-3]** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $F$  là trung điểm cạnh  $AE$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $DF$ .
- A.  $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $\frac{3a}{4}$ .
- Câu 271. [0H3-3]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{1}{6}$ .      B.  $-\frac{1}{6}$ .      C.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$ .      D.  $-\frac{4}{25}$ .
- Câu 272. [0H3-3]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .      B.  $\frac{7}{8}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ .
- Câu 273. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Tính  $\cos(B+C)$ .
- A.  $\frac{1}{8}$ .      B.  $-\frac{1}{4}$ .      C.  $-0,125$ .      D.  $0,75$ .
- Câu 274. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{A} = 105^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $\sqrt{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- Câu 275. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .
- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .      B.  $\sqrt{6}$ .      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .      D.  $1,2$ .
- Câu 276. [0H3-3]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = c$  và  $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ .      B.  $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$ .      C.  $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$ .      D.  $\frac{3c}{2}$ .
- Câu 277. [0H3-3]** Tìm chu vi tam giác  $ABC$ , biết rằng  $AB = 6$  và  $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$ .
- A. 26.      B. 13.      C.  $5\sqrt{26}$ .      D.  $10\sqrt{6}$ .
- Câu 278. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 10$  và  $\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{3}$ . Tìm chu vi của tam giác đó.
- A. 12.      B. 36.      C. 24.      D. 22.
- Câu 279. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$ ,  $BC = 10$ ,  $CA = 11$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Tính độ dài  $BN$ .
- A. 6.      B.  $4\sqrt{2}$ .      C. 5.      D.  $\sqrt{34}$ .
- Câu 280. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 6$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng  $CG$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{5\sqrt{7}}{2}$ .      B.  $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ .      C.  $\frac{5\sqrt{7}}{6}$ .      D.  $\frac{13}{3}$ .
- Câu 281. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 6$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng  $AG$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{\sqrt{58}}{3}$ .      B.  $\frac{\sqrt{58}}{2}$ .      C.  $\frac{7\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

- Câu 282. [0H3-3]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $CA = 6$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng  $BG$  bằng bao nhiêu?  
 A. 4.                                      B. 6.                                      C.  $\frac{\sqrt{142}}{3}$ .                                      D.  $\frac{\sqrt{142}}{2}$ .
- Câu 283. [0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 5 và 9, một đường chéo bằng 11. Tìm độ dài đường chéo còn lại.  
 A. 9,5.                                      B.  $4\sqrt{6}$ .                                      C.  $\sqrt{91}$ .                                      D.  $3\sqrt{10}$ .
- Câu 284. [0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 3 và 5, một đường chéo bằng 5. Tìm độ dài đường chéo còn lại.  
 A.  $\sqrt{43}$ .                                      B.  $2\sqrt{13}$ .                                      C. 8.                                      D.  $8\sqrt{3}$ .
- Câu 285. [0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 5 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 5  
 A. 3.                                      B. 1.                                      C.  $5\sqrt{6}$ .                                      D. 5.
- Câu 286. [0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 4 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 4  
 A.  $\sqrt{34}$ .                                      B. 6.                                      C.  $\sqrt{42}$ .                                      D. 5.
- Câu 287. [0H2-3]** Cho tam giác vuông, trong đó có một góc bằng trung bình cộng của hai góc còn lại. Cạnh lớn nhất của tam giác đó bằng  $a$ . Tính diện tích tam giác.  
 A.  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .                                      B.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ .                                      C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .                                      D.  $\frac{a^2\sqrt{6}}{10}$ .
- Câu 288. [0H2-3]** Tam giác có ba cạnh là 9, 10, 11. Tính đường cao lớn nhất của tam giác.  
 A.  $\frac{60\sqrt{2}}{9}$ .                                      B.  $3\sqrt{2}$ .                                      C.  $\sqrt{70}$ .                                      D.  $4\sqrt{3}$ .
- Câu 289. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính  $R$ ,  $AB = R$ ,  $AC = R\sqrt{3}$ . Tính góc  $\hat{A}$  nếu biết  $\hat{B}$  là góc tù.  
 A.  $30^\circ$ .                                      B.  $45^\circ$ .                                      C.  $60^\circ$ .                                      D.  $90^\circ$ .
- Câu 290. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính  $R$ ,  $AB = R$ ,  $AC = R\sqrt{2}$ . Tính góc  $\hat{A}$  biết  $\hat{A}$  là góc tù.  
 A.  $135^\circ$ .                                      B.  $105^\circ$ .                                      C.  $120^\circ$ .                                      D.  $150^\circ$ .
- Câu 291. [0H2-3]** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Hãy tính giá trị  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$   
 A.  $\frac{-a^2}{2}$ .                                      B.  $\frac{c^2 + b^2}{2}$ .                                      C.  $\frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .                                      D.  $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .
- Câu 292. [0H2-3]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$   
 A.  $-a^2$ .                                      B.  $\frac{c^2 + b^2}{2}$ .                                      C.  $\frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .                                      D.  $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .
- Câu 293. [0H3-4]** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{BC}{3}$ . Độ dài  $AM$  bằng bao nhiêu?  
 A.  $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ .                                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ .                                      C.  $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .                                      D.  $\frac{2a}{3}$ .

- Câu 294. [0H3-4]** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$  và  $AB = AC = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2BC}{5}$ . Tính độ dài  $AM$ .
- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\frac{11a}{5}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{7}}{5}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .
- Câu 295. [0H3-4]** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ ,  $AB = 6$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 4$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$ .
- A.  $2\sqrt{5}$ .      B.  $3\sqrt{2}$ .      C.  $\sqrt{20}$ .      D.  $\sqrt{19}$ .
- Câu 296. [0H3-4]** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{8}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ . Tính cạnh  $BC$ .
- A. 7.      B. 5.      C.  $3\sqrt{3}$ .      D. 2.
- Câu 297. [0H3-4]** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho góc  $\widehat{BAM} = 30^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{MB}{MC}$ .
- A.  $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}c}{b}$ .      D.  $\frac{b-c}{b+c}$ .
- Câu 298. [0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 10$  và  $\tan(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $\frac{5\sqrt{10}}{9}$ .      B.  $\frac{10}{3}$ .      C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .      D.  $5\sqrt{10}$ .
- Câu 299. [0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 12$  và  $\cot(A+B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $2\sqrt{10}$ .      B.  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ .      C.  $5\sqrt{10}$ .      D.  $3\sqrt{2}$ .
- Câu 300. [0H2-4]** Cho góc  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm di động lần lượt trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của đoạn  $OB$  bằng:
- A. 2.      B. 3.      C. 4.      D. 5.

# ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	D	C	D	A	A	A	A	B	C	A	A	B	D	B	A	C	C	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	C	C	D	A	C	A	A	A	A	A	D	B	B	B	C	D	D	D	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	A	B	B	D	A	D	C	D	C	B	D	C	B	A	A	C	C	B	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	C	A	D	A	D	B	C	B	A	C	D	B	D	B	C	D	A	B	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	A	D	A	C	A	B	A	B	C	C	D	C	C	C	D	D	C	B	C
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	A	B	C	B	C	A	C	B	C	D	A	C	A	D	C	C	A	C	D
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
D	D	B	D	A	A	C	C	B	A	A	B	C	B	A	A	D	A	D	C
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
D	A	B	D	B	B	A	D	A	B	C	B	C	D	A	D	A	D	A	D
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C	C	B	D	C	B	D	B	A	B	C	A	D	A	D	D	B	B	B	C
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
A	C	B	A	D	C	A	B	A	D	B	D	B	C	A	B	A	C	D	D
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
A	A	D	D	C	B	B	A	B	A	C	C	C	C	B	C	D	C	C	A
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
B	C	A	D	A	C	B	A	D	B	A	A	D	B	A	B	B	A	C	B
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
A	B	D	D	B	B	D	A	B	C	B	C	D	C	C	C	C	D	C	B
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
B	A	A	B	C	B	B	A	D	A	B	A	C	A	C	B	A	C	D	B
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
A	C	C	A	D	A	B	A	A	B	A	A	B	C	D	B	B	D	A	C

## Tài liệu tham khảo:

- [1] Trần Văn Hạo – Hình học 10 CB- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [2] Trần Văn Hạo – Bài tập Hình học 10 CB- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [3] Trần Văn Hạo - Hình học 10 NC- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [4] Trần Văn Hạo - Bài tập Hình học 10 NC- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [5] Nguyễn Phú Khánh - Phân dạng và phương pháp giải các chuyên đề Hình học 10.
- [6] Lê Mậu Dũng - Rèn luyện kỹ năng trắc nghiệm Hình học 10.
- [7] Nguyễn Hữu Ngọc – Các dạng toán và PP giải Hình học 10.
- [8] Tài liệu học tập Toán 10 – THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM
- [9] Tài liệu học tập Toán 10 – THPT Marie Curie TPHCM
- [10] Một số tài liệu trên internet.



# MỤC LỤC

## TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^{\circ}$ ĐẾN $180^{\circ}$ .....	1
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	1
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN .....	2
Dạng 1. Góc và dấu của các giá trị lượng giác.....	2
Dạng 2. Cho một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại .....	3
Dạng 3. Chứng minh, rút gọn một biểu thức.....	5
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 1 .....	7
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1 .....	8
Vấn đề 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ .....	10
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	10
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN .....	11
Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ. Góc giữa hai vectơ.....	11
Dạng 2. Tính độ dài của một đoạn thẳng.....	14
Dạng 3. Chứng minh vuông góc .....	15
Dạng 4. Chứng minh một đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài .....	17
Dạng 5. Tập hợp điểm – Cực trị.....	19
Dạng 6. Biểu thức tọa độ.....	22
Dạng 7. Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác.....	23
Dạng 8. Một số dạng toán thường gặp trên tam giác, tứ giác.....	26
Dạng 9. Tìm GTLN, GTNN trong hình học.....	31
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 2 .....	33
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2 .....	38
Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.....	51
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	51
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN .....	52
Dạng 1. Tính toán các đại lượng.....	52
Dạng 2. Chứng minh hệ thức.....	56
Dạng 3. Dạng tam giác.....	58
Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế.....	60
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3 .....	65
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3 .....	69

**Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA - 098 373 4349**

**Chuyên: TOÁN**

- LỚP 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- LUYỆN THI LỚP 10
- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

## TRỌN BỘ TÀI LIỆU HỌC TẬP

Môn: TOÁN - Lớp: 10 và THPTQG

Năm học 2017-2018

---

1. Tài liệu TOÁN 10 theo chủ đề (8 chủ đề)
2. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 10 HK 1
3. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 10 HK 2

Năm học 2017 - 2018

---

Lưu hành nội bộ