TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

1988

Gac Ma

14.03

CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỤC CĂN THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TẠM THỜI (PHẦN 1)

TRUNG ĐOÀN TRẦN HƯNG ĐẠO – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỤC CĂN THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TẠM THỜI

- **MỘT SỐ BÀI TOÁN MỞ ĐẦU.**
- **LIÊN HỢP TRỰC TIẾP CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

"Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em"

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).

"Mẹ nằm yên dưới khe núi, những trái đào dại vương vãi chung quanh, tay mẹ nắm chặt một quả, máu trên người mẹ đã cứng lại thành màu đen nặng nề. Tôi đau đớn tới mức ngũ tạng vỡ ra, ôm chặt cứng lấy mẹ, gọi: mẹ ơi, mẹ ơi…mẹ sống chẳng được sung sướng ngày nào…"

(Mẹ điên – Vương Hằng Tích).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỤC CĂN THỨC – HỆ TẠM THỜI (PHẦN 1)

TRUNG ĐOÀN TRẦN HƯNG ĐẠO – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số sơ cấp, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phương pháp sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa là một phương pháp cơ bản, đơn giản nhất, các bạn đã bước đầu làm quen thông qua 7 tiêu mục. Hầu hết các phương pháp khác đều ít nhiều quy về dạng cơ bản nâng lũy thừa, điều quan trọng là quá trình thu gọn bài toán. Tiếp tục dựa trên nền tảng ấy, mang tính kế thừa và phát huy thêm một bậc, tài liệu này trân trọng giới thiệu và gửi tới toàn thể bạn đọc một hướng xử lý cũng khá phổ biến, mang tên: Sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời (phần 1). Kiến thức chủ đạo là các ví dụ minh họa mở đầu, kỹ thuật liên hợp trực tiếp các biểu thức chứa căn và bài toán liên quan đến tìm nghiệm, liên hợp hằng số. Đây có thể được coi là một phương pháp mạnh, vì bản chất là phân tích nhân tử đưa phương trình chứa căn về một phương trình tích hệ quả.

Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Kỹ năng nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức.
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, sử dụng lượng liên hợp, phân tích hằng đẳng thức.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Thực hành giải phương trình, bất phương trình bậc hai, dạng đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ.
5. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{x-1}+2 \Leftrightarrow x+3=x+3+4\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{(x+3)-(x-1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2 \quad (1)$.

Kết hợp (1) và phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2\end{cases}$

Thực hiện cộng từng vế tương ứng thu được $2\sqrt{x+3}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x=1$. Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge 1$.

Đặt $\sqrt{x+3}=a;\sqrt{x-1}=b \Rightarrow a^2-b^2=4$. Phương trình đã cho trở thành $a-b=2$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2-b^2=4\\ a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)(a+b)=4\\ a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=2\\ a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge 1$.

Đặt $\sqrt{x+3}=u;\sqrt{x-1}=v \Rightarrow u^2-v^2=4$.

Phương trình đã cho trở thành $u-v=2$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-v^2=4\\ u-v=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(v^2+4v+4\right)-v^2=4\\ u=v+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=0\\ u=2\end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

- *Một phương trình chứa căn thức cơ bản, nhưng có tới bốn lời giải khác nhau về mặt hình thức, trong đó đôi một hai lời giải có cùng bản chất.*
- *Cụ thể các bạn có thể thấy lời giải 1 sử dụng phép biến đổi tương đương và nâng lũy thừa, đưa về một phương trình hết sức đơn giản. Lời giải 2 sử dụng đẳng thức liên hợp đưa về một hệ điều kiện chứa x, từ hệ này giải bằng phương pháp cộng đại số hoặc thế đều cho kết quả tương tự. Các lời giải 3 và 4 đều đặt hai ẩn phụ quy về hệ phương trình, tuy ẩn phụ khác nhau nhưng hệ thu được thì đồng nhất, lời giải 3 sử dụng hằng đẳng thức với phép thế, lời giải 4 chỉ sử dụng phép thế đơn thuần.*
- *Nhận xét: Lời giải 1 và 4 có cùng bản chất, thực chất là bình phương hai vế của phương trình ban đầu. Lời giải 2 và 3 có cùng bản chất, thực chất là sử dụng đẳng thức liên hợp* $a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \quad (a+b\ne 0)$, *trong đó thu được* $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\text{const}$, *là một hằng số, tạo ra sự gọn nhẹ bất ngờ trong thao tác.*
- *Trọng tâm của tài liệu là sử dụng đẳng thức liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời, nghĩa là cách thực hiện tương tự lời giải 2 và 3. Hệ phương trình thu được trong lời giải 2 thường được gọi là hệ tạm thời, bởi nó chỉ chứa x, xây dựng từ hệ quả liên hợp và phương trình giả thiết ban đầu, là bước trung gian để đi tới kết quả của bài toán.*

- *Các bạn có thể trình bày một trong hai cách 2 hoặc 3, mặc dù cách 3 được coi là thuộc phạm vi đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình, nhưng bản chất giải hệ tạm thời là sử dụng nhân liên hợp, điều này phụ thuộc vào đặc thù của từng bài toán riêng biệt.*
- *Đối với các đa thức và biểu thức chứa căn thức bậc hai, các bạn chú ý các hệ thức liên hợp (trục căn thức)*

$$A+B=\frac{A^2-B^2}{A-B}\quad (A-B\neq 0);\qquad A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}\quad (A+B\neq 0)$$

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}\quad (A\ge 0;B\ge 0;A\neq B);\qquad \sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\quad (A\ge 0;B\ge 0;A^2+B^2>0)$$

Bài toán 2. Giải phương trình $\sqrt{x-3}+\sqrt{x}=3\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x-3+x+2\sqrt{x^2-3x}=9\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}=6-x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 6\\ x^2-3x=x^2-12x+36\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 6\\ x=4\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Đối chiếu điều kiện ta lấy nghiệm $x=4$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 3$.

Nhận xét $x-3\neq x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\sqrt{x-3}-\sqrt{x}\neq 0,\forall x\ge 3$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{-3}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$

Kết hợp với phương trình ban đầu ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1\\ \sqrt{x-3}+\sqrt{x}=3\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=4$.

Đối chiếu điều kiện ta lấy nghiệm $x=4$.

Bài toán 3. Giải phương trình $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}=4\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x+2+2\sqrt{4x^2+4x-15}=16\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+4x-15}=7-2x\Leftrightarrow \begin{cases}7-2x\ge 0\\ 4x^2+4x-15=4x^2-28x+49\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le\dfrac{7}{2}\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Kết hợp điều kiện ta thấy phương tình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Nhận xét $2x+5\neq 2x-3,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \sqrt{2x+5}\neq\sqrt{2x-3},\forall x\ge\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{8}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}=4\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}=2\qquad (*)$

Kết hợp (*) và phương trình ban đầu thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}=4\\ \sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}=2\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x+5}=6\Leftrightarrow 2x+5=9\Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 4. Giải phương trình $\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{3x-2}=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+6}=\sqrt{3x-2}+2\Leftrightarrow 3x+6=3x+2+4\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=1\Leftrightarrow x=1.$$

So sánh điều kiện đi đến kết luận tập nghiệm $S=\{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{8}{\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{3x-2}}=2\Leftrightarrow\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{3x-2}=4 \quad [*]$.

Kết hợp hệ thức [*] và phương trình ban đầu ta có $\begin{cases}\sqrt{3(x+2)}-\sqrt{3x-2}=2\\ \sqrt{3(x+2)}+\sqrt{3x-2}=4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{3x+6}=6\Leftrightarrow 3x+6=9\Leftrightarrow x=1$.

So sánh điều kiện đi đến kết luận tập nghiệm $S=\{1\}$.

Nhận xét.

Trên đây là 4 bài toán phương trình chứa căn thức sơ đẳng, tác giả đưa ra hai cách trình bày bằng biến đổi tương đương – nâng lũy thừa và sử dụng hệ thức liên hợp – trục căn. Rõ ràng đối với những bài toán như thế này, cách làm sử dụng liên hợp tuy có tư duy sáng tạo (không phải giải phương trình bậc hai hệ quả), nhưng không thể "chống chọi" lại được với tinh thần "ngây thơ, đơn giản" của phương pháp nâng lũy thừa. Vấn đề nảy sinh là chúng ta nên nhân liên hợp như thế nào, và nguyên nhân vì sao lại làm như thế. Để dẫn dắt tới câu trả lời, mời các bạn tham khảo các ví dụ tiếp theo sau đây.

Bài toán 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x-3}=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2+3x-3\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+3x+5}=\sqrt{x^2+3x-3}+2\Leftrightarrow x^2+3x+5=x^2+3x+1+4\sqrt{x^2+3x-3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x-3}=1\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x\in\{1;-4\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x\in\{1;-4\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2+3x-3\ge 0$. Đặt $\sqrt{x^2+3x-3}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow x^2+3x-3=t^2$, phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{t^2+8}=t+2\Leftrightarrow t^2+8=t^2+4t+4\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-4\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x\in\{1;-4\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^2+3x-3\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{8}{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+3x-3}}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+3x-3}=4 \quad [1].$$

Kết hợp [1] và phương trình ban đầu ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x-3}=2\\ \sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+3x-3}=4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^2+3x+5}=6\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-4\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x \in \{1;4\}$.

Bài toán 6. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+2x+2}+\sqrt{5x^2+2x-3}=5 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $5x^2+2x-3 \ge 0$.

Nhận xét $5x^2+2x+2 \ne 5x^2+2x+2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x+2} \ne \sqrt{5x^2+2x-3}, \forall x$ thỏa mãn $5x^2+2x-3 \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5}{\sqrt{5x^2+2x+2}-\sqrt{5x^2+2x-3}}=5 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2+2x+2}-\sqrt{5x^2+2x-3}=1 \qquad (1)$$

Kết hợp (1) và phương trình ban đầu ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{5x^2+2x+2}-\sqrt{5x^2+2x-3}=1\\ \sqrt{5x^2+2x+2}+\sqrt{5x^2+2x-3}=5\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{5x^2+2x+2}=6 \Leftrightarrow 5x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7}{5};1\right\}.$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\frac{7}{5};1\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $5x^2+2x-3 \ge 0$.

Đặt $\sqrt{5x^2+2x-3}=t\ (t \ge 0) \Rightarrow 5x^2+2x-3=t^2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{t^2+5}=5-t \Leftrightarrow \begin{cases}t \le 5\\ t^2+5=t^2-10t+25\end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=2 \Leftrightarrow 5x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7}{5};1\right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{-\frac{7}{5};1\right\}$.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{4x^3+x+4}+\sqrt{4x^3+x-4}=4 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $4x^3+x-4 \ge 0$.

Nhận xét $4x^3+x+4 \ne 4x^3+x-4, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{4x^3+x+4} \ne \sqrt{4x^3+x-4}, \forall x$ thuộc tập xác định.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{8}{\sqrt{4x^3+x+4}-\sqrt{4x^3+x-4}}=4 \Leftrightarrow \sqrt{4x^3+x+4}-\sqrt{4x^3+x-4}=2 \qquad [1]$$

Kết hợp [1] và phương trình giả thiết thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{4x^3+x+4}-\sqrt{4x^3+x-4}=2\\ \sqrt{4x^3+x+4}+\sqrt{4x^3+x-4}=4\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{4x^3+x+4}=6$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+x-5=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x+5)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $4x^3+x-4 \ge 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S=\{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $4x^3+x-4 \ge 0$. Đặt $\sqrt{4x^3+x-4}=t\ (t \ge 0) \Rightarrow 4x^3+x-4=t^2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{t^2+8}=4-t \Leftrightarrow \begin{cases}4-t \ge 0\\ t^2+8=t^2-8t+16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t \le 4\\ t=1\end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+x-5=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x+5)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $4x^3+x-4\ge 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 8. Giải phương trình $2\sqrt{3x^3+x+5}+\sqrt{12x^3+4x+9}=11 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $12x^3+4x+9\ge 0$.

Nhận xét $12x^3+4x+20\ne 12x^3+4x+9,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2\sqrt{3x^3+x+5}\ne\sqrt{12x^3+4x+9},\forall x$ thuộc tập xác định.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{12x^3+4x+20}+\sqrt{12x^3+4x+9}=11$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{12x^3+4x+20}-\sqrt{12x^3+4x+9}}=11$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{12x^3+4x+20}-\sqrt{12x^3+4x+9}=1$$

Kết hợp điều này với phương trình ban đầu ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{12x^3+4x+20}-\sqrt{12x^3+4x+9}=1\\ \sqrt{12x^3+4x+20}+\sqrt{12x^3+4x+9}=11\end{cases}\Rightarrow 4\sqrt{3x^3+x+5}=12$$
$$\Leftrightarrow 3x^3+x-4=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4)=0\Leftrightarrow x=1$$

So sánh với điều kiện thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm cần tìm: $S=\{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $12x^3+4x+9\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{12x^3+4x+20}=11-\sqrt{12x^3+4x+9}\Leftrightarrow\begin{cases}12x^3+4x+20=12x^3+4x+9-22\sqrt{12x^3+4x+9}+121\\ \sqrt{12x^3+4x+9}\le 11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{12x^3+4x+9}=5\\ \sqrt{12x^3+4x+9}\le 11\end{cases}\Leftrightarrow 12x^3+4x+9=25\Leftrightarrow 3x^3+x-4=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4)=0\Leftrightarrow x=1$$

So sánh với điều kiện thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm cần tìm: $S=\{1\}$.

Nhận xét.

- *Các bài toán từ 5 đến 8 độ khó đã tăng thêm một chút, với sự xuất hiện của các đa thức bậc hai và bậc ba phía dưới dấu căn, tuy nhiên phương pháp giải vẫn không thay đổi, ngoài cách giải bằng đẳng thức liên hợp các bạn có thể sử dụng biến đổi tương đương hoặc sử dụng ẩn phụ, thực ra hai cách làm này có cùng bản chất, ẩn phụ nhằm mục đích giảm thiểu sự cồng kềnh và sai sót trong tính toán, quan sát các lời giải 2 sẽ thấy rõ điều này.*
- *Hình thức các bài toán từ 1 đến 8 có một sự tương đồng, đó là trong từng bài các biểu thức chứa biến x dưới dấu căn (không tính hệ số tự do) giống y như nhau, và bên ngoài căn thức là hằng số, điều này tạo ra rất nhiều lợi thế trong thao tác giải, cũng là điểm mấu chốt dẫn đến sự đơn giản của bài toán.*
- *Có thể đề xuất dạng tổng quát :* $\sqrt{f(x)+a}\pm\sqrt{f(x)+b}=c$ *(với* a,b,c *là các hằng số thực).*

  Phương án 1. Nâng lũy thừa – biến đổi tương đương

  Sau khi chuyển vế và thực hiện biến đổi chúng ta sẽ xuất hiện sự triệt tiêu các đa thức $f(x)$

  Như vậy ta suy ra các hệ quả

$$*\sqrt{f(x)+a}=c-\sqrt{f(x)+b}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+a=c^2+f(x)+b-2c\sqrt{f(x)+b}\\ c-\sqrt{f(x)+b}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c^2+b-a=2c\sqrt{f(x)+b}\\ \sqrt{f(x)+b}\le c\end{cases}$$

$$*\sqrt{f(x)+a}=c+\sqrt{f(x)+b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+a=c^2+f(x)+b+2c\sqrt{f(x)+b} \\ c+\sqrt{f(x)+b}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2+b-a=-2c\sqrt{f(x)+b} \\ c+\sqrt{f(x)+b}\geq 0 \end{cases}$$

Việc giải một trong hai hệ quả trên hết sức cơ bản.

Phép đặt ẩn phụ $f(x)\vee\sqrt{f(x)+a}\vee\sqrt{f(x)+b}$ đều quy về một phương trình chứa căn cơ bản.

Phương án 2. Sử dụng đẳng thức liên hợp

Sau khi lập luận trường hợp $\sqrt{f(x)+a}\neq\sqrt{f(x)+b}$ ta có

$$\frac{a-b}{\sqrt{f(x)+a}\mp\sqrt{f(x)+b}}=c\Leftrightarrow\sqrt{f(x)+a}\mp\sqrt{f(x)+b}=\frac{a-b}{c}$$

Kết hợp với phương trình ban đầu $\sqrt{f(x)+a}\pm\sqrt{f(x)+b}=c$ ta sẽ có

$$2\sqrt{f(x)+a}=\frac{a-b}{c}+c \text{ hoặc } 2\sqrt{f(x)+b}=\left|\frac{a-b}{c}-c\right|.$$

- *Đối với các bài toán $\alpha\sqrt{f(x)+a}\pm\beta\sqrt{g(x)+b}=c$ thì các phương án trên cần được xem xét kỹ lưỡng và thực hiện thận trọng vì các yếu tố đã thay đổi theo hướng bất lợi cho chúng ta.*
- *Trong trường hợp bất phương trình, các bạn cần đặc biệt lưu ý dấu của biểu thức liên hợp.*

Bài toán 9. Giải bất phương trình $\sqrt{4x-1}-\sqrt{4x-2}>1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}}>1\Leftrightarrow\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x-2}<1\Leftrightarrow 8x-3+2\sqrt{16x^2-12x+2}<1\Leftrightarrow\sqrt{16x^2-12x+2}<2-4x \quad (*)$$

Dễ thấy (*) vô nghiệm vì $2-4x\leq 0,\forall x\geq\frac{1}{2}$. Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x-1}>\sqrt{4x-2}+1\Leftrightarrow 4x-1>4x-1+2\sqrt{4x-2}\Leftrightarrow\sqrt{4x-2}<0 \quad \text{(Vô nghiệm).}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{4x-1}>\sqrt{4x-2}+1$.

Ta có $a+b+2\sqrt{ab}\geq a+b,\forall a\geq 0,b\geq 0\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b} \qquad (*)$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có $\sqrt{4x-2}+1\geq\sqrt{4x-2+1}=\sqrt{4x-1}$.

Dấu đẳng thức không xảy ra. Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Lời giải 1 bài toán 9 sử dụng đẳng thức liên hợp, tuy nhiên trực quan các bạn có thể thấy phương án này không giảm thiểu sự phức tạp được mấy, thậm chí đưa bài toán đã cho về một bài toán có mức độ tương đương. Lời giải 2 sử dụng phép biến đổi tương đương cơ bản, nâng lũy thừa và dẫn đến kết quả nhanh chóng. Lời giải 3 sử dụng bất *đẳng thức để đánh giá hai vế, dẫn tới bất phương trình vô nghiệm, nguyên nhân do đặc điểm đặc biệt của hình thức bài toán, xin trình bày tại Lý thuyết sử dụng Đánh giá – Bất đẳng thức – Hàm số. Qua ví dụ này, chúng ta để ý thấy không nên áp dụng đẳng thức liên hợp theo một lối mòn giáo điều, khuôn phép, tức là cần linh hoạt và cẩn trọng trong quá trình lựa chọn các phương pháp, để có được một lời giải "cơ bản – vừa sức".*

Bài toán 10. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\le 2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\le 2 \Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{x^2-2x-3}\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}\le 1-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-2x-3\le x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 1$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 1$.

Ta có $x\ge 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}\ge 0 \\ \sqrt{x+3}\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\ge 2$

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm khi $\begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge 1$.

Nhận xét $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}; x>1$ ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}>0, \forall x>1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên miền $(1;+\infty)$.

Bất phương trình đã cho trở thành $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow x\le 1$ (Loại). Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 11. Giải bất phương trình $\sqrt{5x+4}-\sqrt{5x-1}\ge 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{5x+4}\ge\sqrt{5x-1}+1 \Leftrightarrow 5x+4\ge 5x+2\sqrt{5x-1} \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}\le 2 \Leftrightarrow x\le 1$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm $S=\left[\dfrac{1}{5};1\right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+\sqrt{5x-1}}\ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{5x+4}+\sqrt{5x-1}\le 5$

Mặt khác $-\sqrt{5x+4}+\sqrt{5x-1}\le -1$, suy ra $2\sqrt{5x-1}\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}\le 2 \Leftrightarrow x\le 1$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm $S=\left[\dfrac{1}{5};1\right]$.

Bài toán 12. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+3x+5}\le 5 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 0\vee x\le -3$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+3x+5}>\sqrt{x^2+3x},\forall x$ thuộc tập xác định.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5}{\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x}}\le 5\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x}\ge 1\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+3x+5}\le -1.$$

Kết hợp với bất phương trình ban đầu thu được $2\sqrt{x^2+3x}\le 4\Leftrightarrow x^2+3x-4\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-4;-3]\cup[0;1]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 0\vee x\le -3$.

Đặt $\sqrt{x^2+3x}=t\ (t\ge 0)$ ta có

$$\sqrt{t^2+5}\le 5-t\Leftrightarrow \begin{cases}5-t\ge 0\\ t^2+5\le t^2-10t+25\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}t\le 5\\ t\le 2\end{cases}\Leftrightarrow t\le 2\Leftrightarrow x^2+3x-4\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-4;-3]\cup[0;1]$.

Bài toán 13. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3+x-2}+\sqrt{2x^3+x-3}\ge 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^3+x-2\ge 0\\ 2x^3+x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x^3+x-2\ge 0\\ (x-1)(2x^2+2x+3)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Đặt $\sqrt{2x^3+x-3}=t(t\ge 0)$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{t^2+1}\ge 1-t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>1\\ \begin{cases}t\le 1\\ t^2+1\ge t^2-2t+1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t>1\\ 0\le t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow t\ge 0$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 1$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{x^4+x^2+2}+\sqrt{x^4+x^2+7}=5 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^4+x^2+7}\ne\sqrt{x^4+x^2+2},\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5}{\sqrt{x^4+x^2+7}-\sqrt{x^4+x^2+2}}=5\Leftrightarrow \sqrt{x^4+x^2+7}-\sqrt{x^4+x^2+2}=1$$

Kết hợp với phương trình ban đầu thu được

$$\begin{cases}\sqrt{x^4+x^2+7}-\sqrt{x^4+x^2+2}=1\\ \sqrt{x^4+x^2+7}+\sqrt{x^4+x^2+2}=5\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^4+x^2+7}=6\Leftrightarrow \sqrt{x^4+x^2+7}=3$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2+7=9\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=-2\\ x^2=1\end{array}\right.\Rightarrow x\in\{-1;1\}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x=-1;x=1$.

Bài toán 15. Giải phương trình $\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+x-2}=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+x\geq 2$.

Nhận xét $\sqrt{x^3+x-1}\neq\sqrt{x^3+x-2}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+x-2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+x-2}=1.$$

Kết hợp với phương trình đề bài thu được

$$\begin{cases}\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+x-2}=1\\ \sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+x-2}=1\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^3+x-1}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^3+x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+x+2=0\end{array}\right.\Rightarrow x=1$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}=8$.
2. $2\sqrt{x}+\sqrt{4x+9}=3$.
3. $\sqrt{7x+2}-\sqrt{7x-3}=5$.
4. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+3x+1}=1$.
5. $\sqrt{4x^2+x+4}-\sqrt{4x^2+x}=4$.
6. $\sqrt{6x^2+3x}+\sqrt{6x^2+3x+1}=1$.
7. $\sqrt{2x^2+x+4}+\sqrt{2x^2+x-1}=5$.
8. $\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+3}=2$.
9. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-3}=4$.
10. $\sqrt{8x^2+x+5}-\sqrt{8x^2+x}=5$.
11. $\sqrt{x^3+x^2+7}-\sqrt{x^3+x+2}=1$.
12. $\sqrt{4x^3+x+4}+\sqrt{4x^3+x-5}=3$.
13. $\sqrt{5x^3+x+3}-\sqrt{5x^3+x-5}=3$.
14. $\sqrt{2x^3+x+6}-\sqrt{2x^3+x+1}=1$.
15. $\sqrt{3x^3+x+5}-\sqrt{3x^3+x-3}=2$.
16. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x+1}>1$.
17. $\sqrt{8x+1}-\sqrt{8x-7}\geq 2$.
18. $\sqrt{7x+2}+\sqrt{7x-6}\geq 4$.
19. $\sqrt{10x+2}-\sqrt{10x+1}\leq 1$.
20. $\sqrt{10x-1}+\sqrt{10x-9}\geq 4$.
21. $\sqrt{4x^2+5x}-\sqrt{4x^2+5x-8}\leq 2$.
22. $\sqrt{6x^2+2x+1}+\sqrt{6x^2+2x-4}<5$.
23. $\sqrt{4x^2+x+11}+\sqrt{4x^2+x+4}>7$.
24. $\sqrt{7x^2+x+1}+\sqrt{7x^2+x-4}<5$.
25. $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2+x+1}\leq 2$.
26. $\sqrt{7x^2+x+4}-\sqrt{x(7x+1)}\leq 2$.
27. $\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-3}>1$.
28. $\sqrt{6x^2+x+2}-\sqrt{6x^2+x-6}\leq 2$.
29. $\sqrt{x^3+3x^2+5}+\sqrt{x^3+3x^2-3}>4$.
30. $\sqrt{5x^3+2x^2+2}-\sqrt{5x^3+2x^2-3}\leq 1$.
31. $\sqrt{2x^2+5x+2}+\sqrt{2x^2+5x-3}\geq 5$.
32. $\sqrt{3x^3+x+5}-\sqrt{3x^3+x-4}\leq 3$.
33. $\sqrt{x^3+x+7}-\sqrt{x^3+x-2}\leq 3$.
34. $\sqrt{5x^3+x+3}-\sqrt{5x^3+x-2}\leq 1$.

Bài toán 16. Giải phương trình $\sqrt{2x-3}+6=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right) \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2\left(x-3\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{x}=\frac{1}{2}\quad(*)\end{array}\right.$$

Nhận thấy $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}>\frac{1}{2},\forall x\ge\frac{3}{2}$, suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-3}=u;\sqrt{x}=v\ \left(u\ge 0;v>0\right)$ ta có $u^2-v^2=x-3$.

Phương trình đã cho trở thành $u-v=2x-6$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases}u^2-v^2=x-3\\ u-v=2x-6\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\frac{1}{2}\left(u-v\right)\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(2u+2v-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow x=3$.
- $u+v=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm vì $x\ge\frac{3}{2}$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-3}=\sqrt{x}+2x-6\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}-\sqrt{3}=\sqrt{x}-\sqrt{3}+2x-6$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-6}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{3}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}+2x-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \frac{2}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}+2\quad(*)\end{array}\right.$$

Ta có $x\ge\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{3}}\le\frac{2}{\sqrt{3}}<2<\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}+2\Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 17. Giải phương trình $\sqrt{4x-1}-\sqrt{x+1}=3x-2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}=3x-2\Leftrightarrow\left(3x-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}}-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\ \sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}=1\quad(*)\end{array}\right.$$

Ta có $\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{\frac{5}{4}}>1,\forall x\ge\frac{1}{4}$, do đó (*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho tập nghiệm $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{4}$. Đặt $\sqrt{4x-1} = u; \sqrt{x+1} = v$ $\left(u \ge 0; v \ge \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ta có $u^2 - v^2 = 3x - 2$.

Phương trình đã cho tương đương $u - v = 3x - 2$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u - v = 3x - 2 \\ u^2 - v^2 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 = u - v \Leftrightarrow (u-v)(u+v-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v = 1 \end{array}\right.$$

- $u = v \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
- Phương trình $u + v = 1$ vô nghiệm vì $u \ge 0; v \ge \frac{\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho tập nghiệm $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Bài toán 18. Giải phương trình $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{9}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 9 \quad (*) \end{array}\right.$

$$(*) \Leftrightarrow 7x - 1 + 2\sqrt{12x^2 - 5x - 2} = 81 \Leftrightarrow 2\sqrt{12x^2 - 5x - 2} = 82 - 7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{82}{7} \\ 48x^2 - 20x - 8 = 49x^2 - 1148x + 6724 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{82}{7} \\ x^2 - 1128x + 6732 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{82}{7} \\ x \in \{6; 1122\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 6$.

Nhận xét.

- *Xét riêng từng bài toán, các bạn có thể bài toán 16 và 17, với hai lời giải 1, 2 có cùng một bản chất, đều sử dụng đẳng thức liên hợp, tuy lời giải các lời giải 2 đặt hai ẩn phụ đưa về "hệ tạm thời" với hai phương trình, ba ẩn, kết hợp sử dụng hằng đẳng thức đưa về phương trình tích, dẫn đến các phương trình hệ quả trùng lặp.*
- *Bài toán 18 còn một lời giải đưa về "hệ tạm thời", tác giả xin không trình bày. Ngoài ra còn có thể giải được theo cách giải 3 của bài toán 16, tuy nhiên việc đánh giá phương trình hệ quả phía sau tỏ ra khá phức tạp, rườm rà, không gọn nhẹ.*
- *Đặc trưng của các bài toán trên là sử dụng đẳng thức liên hợp, làm xuất hiện nhân tử chung, đưa phương trình ban đầu về một phương trình tích mà chúng ta có thể giải được. Cụ thể là*

  Bài toán 16: $(2x-3) - x = x - 3 = \frac{1}{2}(2x-6)$.

  Bài toán 17: $(4x-1) - (x+1) = 3x - 2$.

  Bài toán 18: $(4x+1) - (3x-2) = x + 3$.

  Từ các quan sát trên chúng ta thấy nếu nhân liên hợp hai căn thức vế trái với nhau (sau khi biến đổi) sẽ hợp với vế phải tạo ra phương trình tích, với hai nhân tử không quá phức tạp. Ngoài cách nhân liên hợp trực tiếp các căn các bạn có thể nhẩm nghiệm để ép nhân tử như lời giải 3 bài toán 14. Vấn đề này và việc giải phương trình hệ quả phía sau cũng là một vấn đề đáng lưu ý, xin được trình bày tại các ví dụ tiếp theo.

Bài toán 19. Giải phương trình $\sqrt{7x+9}-\sqrt{3x+1}=x+2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4x+8}{\sqrt{7x+9}+\sqrt{3x+1}}=x+2\Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{2}{\sqrt{7x+9}+\sqrt{3x+1}}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \sqrt{7x+9}+\sqrt{3x+1}=2 \quad (*)\end{array}\right.$$

Ta có $\sqrt{7x+9}+\sqrt{3x+1}\ge\sqrt{\frac{20}{3}}>2,\forall x\ge -\frac{1}{3}$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 20. Giải bất phương trình $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-5}\le 2x-3 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3-2x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-5}}\le 2x-3\Leftrightarrow (2x-3)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{3x-5}}\right)\ge 0\Leftrightarrow 2x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $x\ge 2$.

Bài toán 21. Giải phương trình $2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=3x+5 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x+5}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=3x+5\Leftrightarrow (3x+5)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{5} \\ 2\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1 \quad (*)\end{array}\right.$$

Nhận xét $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\ge 2\sqrt{2}>1,\forall x\ge 1$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 22. Giải phương trình $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x}=x+2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Nhận xét $\sqrt{3x+4}\ne\sqrt{x},\forall x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+4}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}}=x+2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \sqrt{3x+4}-\sqrt{x}=2 \quad [*]\end{array}\right.$$

$[*]\Leftrightarrow\sqrt{3x+4}=\sqrt{x}+2\Leftrightarrow 3x+4=x+4\sqrt{x}+4\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)=0\Leftrightarrow x\in\{0;4\}$.

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm $S=\{0;4\}$.

Bài toán 23. Giải phương trình $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+1}=x+4 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$.

Nhận xét $\sqrt{2x+5}\ne\sqrt{x+1},\forall x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+4}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}}=x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ \sqrt{2x+5}=\sqrt{x+1}+1 \qquad [*] \end{array}\right.$$

$$[*] \Leftrightarrow 2x+5=x+2+2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+3=2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+6x+9=4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+5=0 \end{cases}$$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 24. Giải phương trình $\sqrt{3-x}-\sqrt{3-2x}=x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-2x}}=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{3-x}+\sqrt{3-2x}=1 \qquad (*) \end{array}\right.$

Ta có $\sqrt{3-x}+\sqrt{3-2x} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} > 1, \forall x \leq \frac{3}{2}$, nên phương trình (*) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 25. Giải phương trình $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}=x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $-\frac{1}{2} \leq x \neq 0$ ta có phương trình tương đương

$$\frac{x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}=1 \qquad [*] \end{array}\right.$$

Trong đó

$$[*] \Leftrightarrow \sqrt{1+2x}=\sqrt{1+x}+1 \Leftrightarrow 1+2x=2+x+2\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x-1=2\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1=4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3+2\sqrt{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=3+2\sqrt{3}$.

Bài toán 26. Giải bất phương trình $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \leq x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \leq x \Leftrightarrow x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right) \geq 0 \qquad [*]$

Để giải bất phương trình [*] có hai phương án.

1. Chia trường hợp

- Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì $[*] \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \geq 2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2} \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=0$.
- Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì $[*] \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ (Hiển nhiên).

Vậy ta thu được nghiệm $-1 \le x \le 0$.

2. Sử dụng đánh giá – bất đẳng thức hoặc biến đổi tương đương

   Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\sqrt{1+x} \le \dfrac{1+x+1}{2} = \dfrac{x+2}{2}; \sqrt{1-x} \le \dfrac{1-x+1}{2} = \dfrac{2-x}{2}$.

   Cộng từng vế tương ứng thu được $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le \dfrac{x+2+2-x}{2} = 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=0$.

   Do đó $[*] \Leftrightarrow x \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le 0$.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} > x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} > x-2 \Leftrightarrow (x-2)\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}-3\right) < 0 \qquad [*]$$

Xét hai trường hợp

- Với $x > 2$ thì $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} > 2\sqrt{1} + \sqrt{4} = 4 > 3$, [*] không thỏa mãn.
- Với $1 \le x < 2$ thì

$$[*] \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2} > 3 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2+4\sqrt{x^2+x-2} > 9 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x^2+x-2} > 11-5x \\ 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2+16x-32 > 25x^2-110x+121 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-14x+17 < 0 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 7-4\sqrt{2} < x < 2$$

Kết hợp hai trường hợp ta có nghiệm $S = \left(7-4\sqrt{2};2\right)$.

Bài toán 28. Giải bất phương trình $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+5} \ge x-3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x-9}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+5}} \ge x-3 \Leftrightarrow (x-3)\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+5}-3\right) \le 0 \qquad [*]$$

Xét các trường hợp

- Với $x=3$ thì [*] nghiệm đúng.
- Với $x > 3 \Rightarrow 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+5} > 2\sqrt{2}+\sqrt{8} = 4\sqrt{2} > 3$, [*] không thỏa mãn.
- Với $1 \le x < 3$ thì [*] trở thành

$$2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+5} \ge 3 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+4x-5} \ge 8-5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{8}{5} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{8}{5} \\ 9x^2-144x+144 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{8}{5} \\ 8-4\sqrt{3} \le x \le \dfrac{8}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 8-4\sqrt{3}$$

   Suy ra $8-4\sqrt{3} \le x < 3$.

Tổng hợp ba trường hợp ta thu được tập nghiệm $x \in \left[8-4\sqrt{3};3\right]$.

Bài toán 29. Giải bất phương trình $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} \le x+6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1$.

Nhận xét $\sqrt{2x+5} > \sqrt{x-1}, \forall x \ge 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}} \le x+6 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1} \ge 1$$
$$\Leftrightarrow 3x+4+2\sqrt{2x^2+3x-5} \ge 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+3x-5} \ge -3-3x \qquad (*)$$

Nhận thấy (*) nghiệm đúng với mọi giá trị $x \ge 1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \ge 1$.

Bài toán 30. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x} < x-1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$.

Nhận xét: $x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{x} \ge \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > 1+\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{2x-1} > \sqrt{x}$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}} < x-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}-1\right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > \sqrt{x}+1$$
$$\Leftrightarrow 2x-1 > x+2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{3}+1 \Leftrightarrow x > 4+2\sqrt{3}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 4+2\sqrt{3}$.

Bài toán 31. Giải bất phương trình $\sqrt{3x-2} \le \sqrt{x}+x-1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x} \le x-1 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}} \le x-1 \Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-2\right) \ge 0 \qquad [*]$$

Xét các trường hợp

- Nếu $x \ge 1$ thì

$$[*] \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x} \ge 2 \Leftrightarrow 4x-2+2\sqrt{3x^2-2x} \ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x} \ge 3-2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x<0 \\ \begin{cases} 3-2x \ge 0 \\ 3x^2-2x \ge 4x^2-12x+9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<2x \\ \begin{cases} 3 \ge 2x \\ x^2-10x+9 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<2x \\ \begin{cases} 3 \ge 2x \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 1$$

- Nếu $x \le 1$ thì

$$[*] \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow 4x-2+2\sqrt{3x^2-2x} \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x} \le 3-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \ge 0 \\ 3x^2-2x \le 4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \ge 2x \\ x^2-10x+9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \ge 2x \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 9 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \le 1$$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta có nghiệm $x \ge \frac{2}{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}\le x-1\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}\le x-1\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-2\right)\ge 0 \quad [1]$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-2; f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0,\forall x>\frac{2}{3}$.

Hàm số đồng biến và liên tục trên $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có $f(1)=0$ nên $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1; f(x)\le 0\Leftrightarrow x\le 1$, nghĩa là $f(x)$ cùng dấu với $x-1$.

Bất phương trình [1] tương đương với $(x-1)^2\ge 0$ (Hiển nhiên). Vậy ta có nghiệm $x\ge\frac{2}{3}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}\le x-1\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}\le x-1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-2\right)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{3x-2}-1+\sqrt{x}-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\right)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)\ge 0 \quad (1)$$

Nhận thấy (1) nghiệm đúng với mọi giá trị $x\ge\frac{2}{3}$. Kết luận tập nghiệm $S=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Bài toán 32. Giải phương trình $\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}=x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}}=x+1\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}=2\end{array}\right. \quad (*)$$

Kết hợp (*) và phương trình đề bài thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}=2\\ \sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}=x+1\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x+3}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ 4x+12=x^2+6x+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ x^2+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ (x-1)(x+3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ x\in\{-3;1\}\end{cases}\Rightarrow x\in\{-3;1\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm $S=\{-3;-1;1\}$.

Bài toán 33. Giải phương trình $2+\sqrt{3-8x}=6x+\sqrt{4x-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{8}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2-6x=\sqrt{4x-1}-\sqrt{3-8x}\Leftrightarrow 2(1-3x)=\frac{12x-4}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{3-8x}}\Leftrightarrow (3x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{3-8x}}+1\right)=0.$$

Dễ thấy $\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{3-8x}}+1>0,\forall x\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{8}\right]$ nên thu được $3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=\dfrac{1}{3}$.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $x\le\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge-\dfrac{1}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x\le\frac{2x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}-2\right)\le0\qquad[*].$$

Xét các khả năng xảy ra

- Với $x=0$, [*] nghiệm đúng.
- Với $x>0\Rightarrow\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}>\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\Rightarrow x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}-2\right)>0$, [*] vô nghiệm.
- Với $-\dfrac{1}{3}\le x<0\Rightarrow\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}<\sqrt{1}+\sqrt{1}=2\Rightarrow x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}-2\right)>0$, [*] vô nghiệm.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x=0$.

Bài toán 35. Giải bất phương trình $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+3}\le x-1\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge-\dfrac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}}\le x-1\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}}+1\right)\ge0\Leftrightarrow x\ge1.$$

Kết luận bài toán có nghiệm $x\ge1$.

Kết luận bất phương trình nhận nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 36. Giải bất phương trình $\sqrt{8x-1}-\sqrt{x}\le7x-1$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{8}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{7x-1}{\sqrt{8x-1}+\sqrt{x}}\le7x-1\Leftrightarrow(7x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{8x-1}+\sqrt{x}}-1\right)\le0\Leftrightarrow(7x-1)\left(\sqrt{8x-1}+\sqrt{x}-1\right)\le0\quad(1).$$

Xét trường hợp $x>\dfrac{1}{7}\Rightarrow7x-1>0$, ta thu được

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{8x-1}+\sqrt{x}\le1\Leftrightarrow9x-1+2\sqrt{x(8x-1)}\le1\Leftrightarrow2\sqrt{x(8x-1)}\le2-9x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-9x\ge0\\4x(8x-1)\le81x^2-36x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{2}{9}\\49x^2-32x+4\ge0\end{cases}\Leftrightarrow x\le\frac{16-2\sqrt{15}}{49}\Rightarrow\frac{1}{7}<x\le\frac{16-2\sqrt{15}}{49}$$

Xét trường hợp $x<\dfrac{1}{7}\Rightarrow7x-1<0\Rightarrow\sqrt{8x-1}+\sqrt{x}<1$, (1) không thỏa mãn.

Trường hợp $x=\frac{1}{7}$ bất phương trình nghiệm đúng.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $\frac{1}{7}\le x\le\frac{16-2\sqrt{15}}{49}$.

Bài toán 37. Giải phương trình $\sqrt{10x-1}+14x=\sqrt{3x}+2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{10}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{10x-1}-\sqrt{3x}+14x-2=0\Leftrightarrow\frac{7x-1}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{3x}}+2(7x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(7x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{3x}}+2\right)=0 \quad (1)$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{3x}}+2>0,\forall x\ge\frac{1}{10}$. Do đó phương trình (1) trở thành $(1)\Leftrightarrow 7x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{7}$.

Bài toán 38. Trích lược bài I.1, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán); Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hà Nội; Năm học 2015 – 2016.

Giải phương trình $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 8$.

Xét trường hợp $3\sqrt{x}=\sqrt{x+8}\Leftrightarrow 9x=x+8\Leftrightarrow x=1$, loại vì $x\ge 8$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$x+1=3\sqrt{x}+\sqrt{x-8}\Leftrightarrow x+1=\frac{8x+8}{3\sqrt{x}-\sqrt{x-8}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}-\sqrt{x-8}=8\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=\sqrt{x-8}+8\Leftrightarrow 9x=x+56+16\sqrt{x-8}$$

$$\Leftrightarrow x-7=2\sqrt{x-8}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-8}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x-8}=1\Leftrightarrow x=9$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=9$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{7x+2}-\sqrt{x}=6x+2$.
2. $\sqrt{8x+1}-\sqrt{x}=7x+1$.
3. $\sqrt{3x+8}-\sqrt{2x}=x+8$.
4. $\sqrt{4x-1}-\sqrt{x}=3x-1$.
5. $\sqrt{9x+3}-\sqrt{x-2}>8x+5$.
6. $\sqrt{9x-2}-\sqrt{4x}=5x-2$.
7. $\sqrt{16x+1}-\sqrt{7x+1}=9x$.
8. $\sqrt{8x-1}-\sqrt{2x+3}>4x-4$.
9. $\sqrt{10x+1}-\sqrt{6x+1}=4x$.
10. $\sqrt{3x-1}-\sqrt{2x}=x-1$.
11. $\sqrt{7x+3}-\sqrt{x+2}>6x+1$.
12. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}>x+5$.
13. $\sqrt{5x+4}>3x+9+\sqrt{2x-5}$.
14. $\sqrt{13x+1}>\sqrt{x}+12x+1$.
15. $x+1=2\sqrt{x}-\sqrt{3x-1}$.
16. $x+3=3\sqrt{x}-\sqrt{8x-3}$.
17. $\sqrt{7+x}-\sqrt{1-x}=2x+6$.
18. $\sqrt{x+8}-\sqrt{3-x}=2x+5$.
19. $\sqrt{3x+10}-\sqrt{5-x}=4x+5$.
20. $\sqrt{5x+3}-\sqrt{2-x}>6x+1$.
21. $\sqrt{7x+6}-\sqrt{3-2x}<9x+3$.
22. $\sqrt{8x+5}-\sqrt{x}<7x+5$.
23. $\sqrt{8x+1}-\sqrt{x}+7x+1=0$.
24. $\sqrt{10x+3}-\sqrt{x+3}+9x=0$.
25. $\sqrt{5x-2}-\sqrt{2x-1}=3x-1$.
26. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}=2x-4$.
27. $\sqrt{10x+1}-\sqrt{2x}+8x+1=0$.
28. $\sqrt{13x+2}-2\sqrt{2x}=8x+2$.
29. $\sqrt{7x-2}-\sqrt{x-3}+6x-1\le 0$.
30. $\sqrt{8x+1}-\sqrt{x}+7x+1=0$.
31. $\sqrt{10x+1}-\sqrt{9-x}+11x-8>0$.
32. $\sqrt{12x-1}-\sqrt{x}+11x-1=0$.
33. $\sqrt{13x-3}-\sqrt{x}>12x-3$.
34. $\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}>2x+2$.
35. $\sqrt{19x-5}-\sqrt{4-x}<20x-9$.
36. $\sqrt{10x-9}-\sqrt{x}\le 9x-9$.
37. $\sqrt{6x-5}-\sqrt{x-4}<5x-1$.

Bài toán 39. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{2x^2+1}=x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+2}+\sqrt{2x^2+1}}=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{2x^2+x+2}+\sqrt{2x^2+1}=1 \qquad (*)\end{array}\right.$$

Nhận xét $\sqrt{2x^2+x+2}+\sqrt{2x^2+1}>1,\forall x\in\mathbb{R}$, do đó phương trình (*) vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài toán 40. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+2x+2}+\sqrt{3x^2+x+3}=x-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn phương trình đã cho, suy ra $\sqrt{3x^2+2x+2}\neq\sqrt{3x^2+x+3},\forall x\neq 1$.
Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{x-1}{\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x+3}}=x-1\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x^2+x+3}=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+2x+2}=1+\sqrt{3x^2+x+3}\Leftrightarrow 3x^2+2x+2=3x^2+x+3+2\sqrt{3x^2+x+3}+1$$

$$\Leftrightarrow x-2=2\sqrt{3x^2+x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-4x+4=12x^2+4x+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ 11x^2+8x+8=0\end{cases} \quad [*]$$

Hệ phương trình [*] vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 41. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+x+4}-\sqrt{4x^2-x+1}=\dfrac{2x+3}{5} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+x+4}+\sqrt{4x^2-x+1}}=\frac{2x+3}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{2}\\ \sqrt{4x^2+x+4}=5-\sqrt{4x^2-x+1} \qquad (*)\end{array}\right.$$

Trong đó

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-x+1\leq 25\\ 4x^2+x+4=4x^2-x+1-10\sqrt{4x^2-x+1}+25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-x-24\leq 0\\ 5\sqrt{4x^2-x+1}=11-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 11;4x^2-x-24\leq 0\\ 100x^2-25x+25=x^2-22x+121\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{32}{33};1\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{-\dfrac{32}{33};1\right\}$.

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+6x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=5x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $2x^2+6x+1\geq 0$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2+6x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+6x+1}+\sqrt{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 5x>0\Leftrightarrow x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5x}{\sqrt{2x^2+6x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}=5x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{2x^2+6x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}=1\quad(1)\end{array}\right.$$

Kết hợp (1) và giả thiết bài toán ta thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+6x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=5x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}=1\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+6x+1}=5x+1\quad[*]$$

Với điều kiện $x>0$ thì $[*]\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 4\left(2x^2+6x+1\right)=25x^2+10x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 17x^2-14x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left\{-\frac{3}{17};1\right\}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 43. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{x^2+x+2}=x-1\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\neq 1$ ta có

$$\frac{2x^2-2x}{\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{x^2+x+2}}=x-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{x^2+x+2}=2x\quad(1)\end{array}\right.$$

Kết hợp (1) với phương trình ban đầu ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{x^2+x+2}=x-1\\ \sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{x^2+x+2}=2x\end{cases}\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-x+2}=3x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{3}\\ 3x^2+2x+7=0\end{cases}\quad\text{(Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 44. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+x+3}+\sqrt{5x^2-x}=2x+3\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left(5x-1\right)\geq 0$.

Nhận xét $x=-\frac{3}{2}$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\neq-\frac{3}{2}$ ta có

$$\frac{2x+3}{\sqrt{5x^2+x+3}-\sqrt{5x^2-x}}=2x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\ \sqrt{5x^2+x+3}-\sqrt{5x^2-x}=1\quad[*]\end{array}\right.$$

Kết hợp (*) và phương trình ban đầu ta có

$$\sqrt{5x^2+x+3}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ 5x^2+x+3=x^2+4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -2\\ 4x^2-3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{4};1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{-\frac{3}{2};-\frac{1}{4};1\right\}$.

Bài toán 45. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x-1}-2\sqrt{x^2-x-1}=9x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^2+5x-1\ge 0\\ x^2-x-1\ge 0\end{cases}$

Nhận xét $x=-\dfrac{1}{3}$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\ne -\dfrac{1}{3}$ ta có phương trình tương đương

$$\frac{4x^2+5x-1-4\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{4x^2+5x-1}+2\sqrt{x^2-x-1}}=9x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{4x^2+5x-1}+2\sqrt{x^2-x-1}=1 \qquad [*]\end{array}\right.$$

Kết hợp [*] với phương trình ban đầu ta có

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+5x-1}+2\sqrt{x^2-x-1}=1\\ \sqrt{4x^2+5x-1}-2\sqrt{x^2-x-1}=9x+3\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{4x^2+5x-1}=9x+4$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}9x+4\ge 0\\ 16x^2+20x-4=81x^2+72x+16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{4}{9}\\ 65x^2+52x+20=0\end{cases} \quad \text{(Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 46. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}\le 3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt{x^2-3x+3}=t\ (t>0)$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{t^2+3}\le 3-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 3\\ t^2+3\le t^2-6t+9\end{cases}\Leftrightarrow t\le 1\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2-3x+6}>\sqrt{x^2-3x+3},\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{3}{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-3x+3}}\le 3\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-3x+3}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+6}\ge 1+\sqrt{x^2-3x+3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+6\ge x^2-3x+4+2\sqrt{x^2-3x+3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+3}\le 1\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Bài toán 47. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}\ge 2x \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}}+\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình ban đầu nghiệm đúng với $x\le 0$.

Xét trường hợp $x>0\Rightarrow\sqrt{2x^2+x+1}>\sqrt{2x^2-x+1}$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1}}\geq 2x\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-x+1}\leq 1\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}\leq 1+\sqrt{2x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1\leq 2x^2-x+2+2\sqrt{2x^2-x+1}\Leftrightarrow 2x-1\leq 2\sqrt{2x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x<1\\ \begin{cases}2x\geq 1\\ 4x^2-4x+1\leq 8x^2-4x+4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x<1\\ \begin{cases}2x\geq 1\\ 4x^2+3\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow x>0$$

Kết hợp hai trường hợp ta có tập nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 48. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{2x-3}\leq\frac{1}{5}x^2\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}}\leq\frac{1}{5}x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}\geq 5\qquad(*)$$

Ta có $x\geq 3\Rightarrow\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{2x-3}\geq\sqrt{12}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}>5$, do đó (*) nghiệm đúng với $x\geq 3$.

Kết luận nghiệm $x\geq 3$.

Bài toán 49. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+1}\geq x\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình nghiệm đúng trong trường hợp $x\leq 0$.

Xét khả năng $x>0\Rightarrow\sqrt{4x^2+x+1}>\sqrt{4x^2+1}$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+1}}\geq x\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+x+1}\leq 1+\sqrt{4x^2+1}\Leftrightarrow 4x^2+x+1\leq 4x^2+2+2\sqrt{4x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x-1\leq 2\sqrt{4x^2+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\ \begin{cases}x\geq 1\\ x^2-2x+1\leq 16x^2+4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\ \begin{cases}x\geq 1\\ 15x^2+2x+3\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\Rightarrow x>0$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

Bài toán 50. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\geq x+1\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+x}{\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}\geq x+1\Leftrightarrow(x+1)\left(\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\leq 0\qquad(1).$$

- Nếu $x\leq -1$ thì $(1)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\geq x$ (Nghiệm đúng).
- Nếu $x\geq -1$ thì

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\leq x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x-\sqrt{x^2+x+1}>0\\ \sqrt{2x^2+2x+1}\leq x-\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x+1<0\\ \sqrt{2x^2+2x+1}\leq x-\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}\qquad[*]$$

Dễ thấy hệ [*] vô nghiệm. Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\leq -1$.

Bài toán 51. Giải bất phương trình $2x^2 \ge (x+4)\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2} \ge x+4 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2 \ge x+4 \Leftrightarrow x\ge 4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-16x-16\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 8+4\sqrt{5}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 8+4\sqrt{5}$.

Bài toán 52. Giải bất phương trình $\dfrac{2x^2}{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)^2} < 21+x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $-\dfrac{9}{2}\le x\ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2\left(3+\sqrt{2x+9}\right)^2}{\left[9-(2x+9)\right]^2} < 21+x \Leftrightarrow \left(3+\sqrt{2x+9}\right)^2 < 2(21+x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+9+6\sqrt{2x+9}+9 < 2x+42 \Leftrightarrow \sqrt{2x+9}<4 \Leftrightarrow x<\frac{7}{2}$$

Sử dụng điều kiện suy ra bất phương tình đã cho có nghiệm $S=\left[-\dfrac{9}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$.

Bài toán 53. Giải bất phương trình $(4x+3)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}\right)^2 \le 16 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x+3\le \frac{16}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)^2} \Leftrightarrow 4x+3\le\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow 4x+3\le 2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1\le 2\sqrt{x^2+2x-3} \Leftrightarrow 4x^2+4x+1\le 4x^2+8x-12 \Leftrightarrow x\ge\frac{13}{4}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge\dfrac{13}{4}$.

Bài toán 54. Giải phương trình $2(x+1)\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2 = x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge -4$.
Nhận xét $x=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\ne 0$, bài toán trở thành

$$2(x+1)=\frac{x^2}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2} \Leftrightarrow 2x+2=\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2 \Leftrightarrow 2x+2=x+6+4\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow x-4=4\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-8x+16=16x+64\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ x^2-24x-48=0\end{cases} \Leftrightarrow x=12+8\sqrt{3}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{0;12+8\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 55. Giải phương trình $(3x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)^2 = x^2-2x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq 0$.
Nhận xét $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\neq 1$ ta có

$$3x+1=\frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \Leftrightarrow 3x+1=x+2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S=\{0;1\}$.

Bài toán 56. Giải bất phương trình $(x-3)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)^2 \geq (x-1)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq \frac{1}{2}$.
Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn bài toán, do đó $\sqrt{2x-1}\neq\sqrt{x}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-3\geq \frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)^2} \Leftrightarrow x-3\geq\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow x-3\geq 3x-1-2\sqrt{2x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}\geq x+1 \Leftrightarrow 2x^2-x\geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{3+\sqrt{13}}{2}\vee x\leq\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x\geq\frac{\sqrt{13}+3}{2}$.

Bài toán 57. Giải bất phương trình $(2x-5)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x}\right)^2 \leq (x-2)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq\frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-5\leq\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x}\right)^2}=\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}\right)^2 \Leftrightarrow 2x-5=5x-2-2\sqrt{6x^2-4x}$$

$$\Leftrightarrow 3x+3=2\sqrt{6x^2-4x} \Leftrightarrow 9x^2+18x+9=24x^2-16x \Leftrightarrow 15x^2-34x-9=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{17+2\sqrt{106}}{15};\frac{17-2\sqrt{106}}{15}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=\frac{17+2\sqrt{106}}{15}$.

Bài toán 58. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\geq x+2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\geq 0$.
Nhận xét $\sqrt{x+3}>1,\forall x\geq 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}+2\geq\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}=\sqrt{x+3}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1\geq\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1\geq x+3 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 59. Giải bất phương trình $\left[\sqrt{2\left(x^2-x+6\right)}-1\right]\left(\sqrt{6-x}+x+1\right)\ge 2x^2-2x+11 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\le 6$.
Nhận xét $\sqrt{2\left(x^2-x+6\right)}-1=\sqrt{x^2+(x-1)^2+5}-1>\sqrt{5}-1>0$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{6-x}+x+1\ge\frac{2x^2-2x+11}{\sqrt{2\left(x^2-x+6\right)}-1}=\sqrt{2\left(x^2-x+6\right)}+1\Leftrightarrow\sqrt{6-x}+x\ge\sqrt{2\left(x^2-x+6\right)} \quad [1].$$

Áp dụng bất đẳng thức $a+b\le|a+b|\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$ ta có $\sqrt{6-x}+x\le\sqrt{2\left(6-x+x^2\right)}$ [2].

Do đó [1] có nghiệm khi [2] xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow\sqrt{6-x}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2+x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 60. Giải bất phương trình $(2x-1)\left(3-2\sqrt{-x^2-x+2}\right)\le(2x+1)^2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $-2\le x\le 1$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-1)\left(3-2\sqrt{-x^2-x+2}\right)\left(3-2\sqrt{-x^2-x+2}\right)\le(2x+1)^2\left(3+2\sqrt{-x^2-x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2x-1)(2x+1)^2\le(2x+1)^2\left(3+2\sqrt{-x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x-2\le\sqrt{-x^2-x+2} \quad [*]\end{array}\right.$$

Với điều kiện $-2\le x\le 1$ thì [*] nghiệm đúng. Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-2\le x\le 1$.

Bài toán 61. Giải bất phương trình $\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\ge 1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $\begin{cases}-2\le x\le 2\\x\ne 0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2}{x\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)}\ge 1\Leftrightarrow x\ge 2+\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x-2\ge\sqrt{4-x^2} \quad [*]$.

Dễ thấy [*] có nghiệm khi $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$. Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\{2\}$.

Bài toán 62. Giải bất phương trình $\dfrac{1-\sqrt{1+x-2x^2}}{2x-1}\le 2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $-\dfrac{1}{2}\le x\le 1;x\ne\dfrac{1}{2}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-x}{(2x-1)\left(1+\sqrt{1+x-2x^2}\right)}\le 2\Leftrightarrow x\le 2+2\sqrt{1+x-2x^2}\Leftrightarrow x-2\le 2\sqrt{1+x-2x^2}\quad [*].$$

Dễ thấy [*] nghiệm đúng với $-\frac{1}{2}\le x\le 1; x\ne\frac{1}{2}$. Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-\frac{1}{2}\le x\le 1; x\ne\frac{1}{2}$.

Bài toán 63. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{4}{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $\sqrt{2x^2+x+6}>0,\forall x\in\mathbb{R};\sqrt{x^2+x+2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\ne 0$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}=\frac{x^2+4}{x}>0\Rightarrow x>0$ và $2x^2+x+6\ne x^2+x+2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(2x^2+x+6)-(x^2+x+2)}{\sqrt{2x^2+x+6}+\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{x^2+4}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2+4}{\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{x^2+4}{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+6}-\sqrt{x^2+x+2}=x\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+6}=x+\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+6=2x^2+x+2+2x\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow 2=x\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4=x^2(x^2+x+2)\Leftrightarrow x^4+x^3+2x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3+2x^2+4x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^3+2x^2+4x+4=0\qquad [*]\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x^3+2x^2+4x+4>0,\forall x>0$ nên [*] vô nghiệm. Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=2\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-x+1>0;x^2+x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^2+x+1\ne x^2-x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+x+1-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}=2\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=x.$$

Kết hợp với phương trình đề bài ta thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=x\\ \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+1}=2\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^2+x+1}=x+2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 4x^2+4x+4=x^2+4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 3x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 65. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2+x+9>0;2x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-4$ không thỏa mãn phương trình đã cho và $\sqrt{2x^2+x+9}\ne\sqrt{2x^2-x+1}$. Biến đổi

$$\frac{2x^2+x+9-\left(2x^2-x+1\right)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4\Leftrightarrow\frac{2\left(x+4\right)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4\Rightarrow\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=2.$$

Kết hợp phương trình đề bài thu được hệ

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -6\\ 4\left(2x^2+x+9\right)=x^2+12x+36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -6\\ x\left(7x-8\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{8}{7}\right\}$$

Thử lại nghiệm ta có tập nghiệm $S=\left\{0;\frac{8}{7}\right\}$.

Bài toán 66. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2+x+1>0;x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $3x=\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}>0\Rightarrow x>0\Rightarrow x^2+2x>0\Rightarrow\sqrt{2x^2+x+1}\ne\sqrt{x^2-x+1}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\left(2x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}=3x\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\frac{x^2+2x}{3}=\frac{x+2}{3}.$$

Kết hợp với phương trình đề bài ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x+2}{3}\\ \sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+1}=\frac{10x+2}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+x+11}=5x+1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+1\ge 0\\ 9\left(2x^2+x+1\right)=25x^2+10x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{5}\\ 7x^2+x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{5}\\ x\in\left\{-\dfrac{8}{7};1\right\}\end{cases}\Rightarrow x=1$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left\{1\right\}$.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}\ge 2x+\sqrt{x^2-x+1} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+x+1>0;x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\ge 2x\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\ge 2x$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\le 0 \qquad [*]$$

Xét các trường hợp xảy ra

- Với $x=0$ thì [*] nghiệm đúng.
- Với $x>0\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}>\sqrt{1}+\sqrt{x^2-x+1}>1$, [*] vô nghiệm.
- Với $x<0$ thì $[*]\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}<1-\sqrt{x^2-x+1}$.

Dễ thấy $1-\left(x^2-x+1\right)>0 \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow 0<x<1 \Rightarrow 1-\sqrt{x^2-x+1}<0, \forall x<0$.

Như vậy trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận bất phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 68. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2+5x+12>0; 2x^2+3x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-5$ thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\neq -5 \Rightarrow \sqrt{2x^2+5x+12}\neq\sqrt{2x^2+3x+2}$. Biến đổi

$$\frac{2x+10}{\sqrt{2x^2+5x+12}-\sqrt{2x^2+3x+2}}=x+5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ \sqrt{2x^2+5x+12}-\sqrt{2x^2+3x+2}=2 \quad (*) \end{array}\right.$$

Kết hợp (*) và phương trình đề bài ta có

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+5x+12}-\sqrt{2x^2+3x+2}=2 \\ \sqrt{2x^2+5x+12}+\sqrt{2x^2+3x+2}=x+5 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+3x+2}=x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ 4\left(2x^2+3x+2\right)=x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ \left(x+1\right)\left(7x-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{-1;\frac{1}{7}\right\}$$

Vậy phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=-5; x=-1; x=\frac{1}{7}$.

Bài toán 69. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x-2}=3x-x^2-2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2$. Xét $x=2$ là một nghiệm của phương trình đề bài. Với $x>2$, biến đổi

$$\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}}=-\left(x^2-3x+2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(x-2\right)\left(x-1\right)=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=-1 & (2) \end{array}\right.$$

Dễ thấy (1) vô nghiệm trong trường hợp $x>2$; (2) vô nghiệm hiển nhiên.

Kết luận tập nghiệm $S=\left\{2\right\}$.

Bài toán 70. Giải phương trình $2\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}=4x+1-x^2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$. Phương trình đã cho biến đổi về

$$\frac{4x-x^2+1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}}=4x+1-x^2 \Leftrightarrow \left(4x+1-x^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+1=0 & (1) \\ 2\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=1 & (2) \end{array}\right.$$

- $\left(1\right) \Leftrightarrow x\in\left\{2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right\}$.
- Nhận thấy $x\geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}\geq 2 \Rightarrow \left(2\right)$ vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đề bài có nghiệm $x=2+\sqrt{3}$.

Bài toán 71. Giải bất phương trình $1+\sqrt{x^2+1}\ge x+\sqrt{x^2+x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x+1)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0\\ x\le -1\end{array}\right.\qquad (D)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$1-x\ge\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 1-x\ge\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}+1\right)\le 0\quad [1].$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}+1>0,\forall x\in D$ nên [1] tương đương $x-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1$.

Kết hợp (D) thu được tập nghiệm của bài toán là $S=(-\infty;-1]\cup[0;1]$.

Bài toán 72. Giải bất phương trình $x^2+\sqrt{x^2+1}\ge x+\sqrt{x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+4\sqrt{x^2+1}\ge 4x+4\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4(x^2+1)+4\sqrt{x^2+1}+1\ge 4(x+1)+4\sqrt{x+1}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sqrt{x^2+1}+1\right)^2\ge\left(2\sqrt{x+1}+1\right)^2\Leftrightarrow\left|2\sqrt{x^2+1}+1\right|\ge\left|2\sqrt{x+1}+1\right|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}+1\ge 2\sqrt{x+1}+1\Leftrightarrow x^2+1\ge x+1\Leftrightarrow x(x-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ x\le 0\end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm $S=[-1;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-x+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\ge 0\Leftrightarrow x^2-x+\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}\ge 0\Leftrightarrow x(x-1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}\right)\ge 0\quad (*).$$

Rõ ràng $1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}\ge 0,\forall x\ge -1$ nên $(*)\Leftrightarrow x(x-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ x\le 0\end{array}\right.$

Kết luận nghiệm $S=[-1;0]\cup[1;+\infty)$.

Bài toán 73. Giải phương trình $\sqrt{2+3x}-\sqrt{5+2x+x^2}=x^2-x+3\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{-x^2+x-3}{\sqrt{5+2x+x^2}+\sqrt{2+3x}}=x^2-x+3\Leftrightarrow (x^2-x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{5+2x+x^2}+\sqrt{2+3x}}+1\right)=0.$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{5+2x+x^2}+\sqrt{2+3x}}+1>0,\forall x\ge -\frac{2}{3}$ và phương trình $x^2-x+3=0$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 74. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+7}=\sqrt{x^2+2x+5}+x+2\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+3x+7>0; x^2+2x+5>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2+2x+5}=x+2\Leftrightarrow\frac{x+2}{\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+2x+5}}=x+2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ \sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+2x+5}=1\qquad[1]\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq 2\Rightarrow\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+2x+5}>2$, suy ra [1] vô nghiệm.

Vậy phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Bài toán 75. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=x+5\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x+7>0; x^2+x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.

Từ phương trình suy ra $x>-5$. Do đó ta biến đổi liên hợp

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}-\sqrt{x^2+x+2}}=x+5\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+7}-\sqrt{x^2+x+2}=1\qquad(1).$$

Kết hợp (1) với phương trình đề bài thu được

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+7}-\sqrt{x^2+x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=x+5\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{x^2+2x+7}=x+6$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -6\\ 4x^2+8x+28=x^2+12x+36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -6\\ 3x^2-4x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2+2\sqrt{7}}{3};\frac{2-2\sqrt{7}}{3}\right\}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 76. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}=x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$0=x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x^2+x+\frac{x^2+x}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}+1\right)=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1;x=0$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 77. Giải phương trình $7\sqrt{4x^2+5x-1}-14\sqrt{x^2-3x+3}=17x-13\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^2+5x-1\geq 0\\ x^2-3x+3\geq 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{49\left(4x^2+5x-1\right)-196\left(x^2-3x+3\right)}{7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}}=17x-13\Leftrightarrow\frac{49(17x-13)}{7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}}=17x-13$$

$$\Leftrightarrow(17x-13)\left(7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}-49\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}17x-13=0\\ 7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}=49\end{array}\right.\qquad(1)$$

Xét các trường hợp

- $17x-13=0 \Leftrightarrow x=\frac{13}{17}$.
- Kết hợp (1) và phương trình ban đầu thu được

$$14\sqrt{4x^2+5x-1}=17x+36 \Leftrightarrow \begin{cases} 17x+36\ge 0 \\ 196\left(4x^2+5x-1\right)=\left(17x+36\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{2;-\frac{746}{495}\right\}.$$

Đối chiếu với điều kiện thu được nghiệm $x=-\frac{746}{495};x=\frac{13}{17};x=2$.

Bài toán 78. Giải phương trình $\sqrt{36x^2-63x+27}=15-27x+2\sqrt{9x^2-9x+3} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 36x^2-63x+27\ge 0 \\ 9x^2-9x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le \frac{3}{4} \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{36x^2-63x+27}-2\sqrt{9x^2-9x+3}=15-27x \qquad (1)$$

Sử dụng đẳng thức liên hợp ta có

$$\frac{-27x+15}{\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}}=15-27x$$

$$\Leftrightarrow \left(15-27x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15-27x=0 \\ \sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}=1 \qquad (2) \end{array}\right.$$

Với $15-27x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{9}$. Kết hợp hai phương trình (1) và (2) ta thu được

$$2\sqrt{36x^2-63x+27}=16-27x \Leftrightarrow \begin{cases} 16-27x\ge 0 \\ 4\left(36x^2-63x+27\right)=729x^2-864x+256 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{16}{27} \\ 585x^2-612x+148=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{16}{27} \\ x\in\left\{\frac{2}{3};\frac{74}{195}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{74}{195}$$

Đối chiếu với điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{74}{195};x=\frac{5}{9}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{x^2+3x+1}+(x-1)^2=0$.
2. $\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{2x^2+3x+1}+1=2x$.
3. $\sqrt{3x^2+x+2}-\sqrt{x^2+5x+2}+7\left(2x^2-4x\right)=0$.
4. $\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{x^2+4x+1}+x^2-3x+2=0$.
5. $2\sqrt{x^2+x+1}+3x^2+x+1=\sqrt{x^2+3x+1}$.
6. $\sqrt{2x^2+x+2}+\sqrt{x^2+3x+5}+x^2=2x+3$.
7. $\sqrt{5x^2+x+1}+4x^2=2x+\sqrt{x^2+3x+1}$.
8. $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+3x+1}+x^2+2x+1=0$.
9. $\sqrt{2x^2+7x+1}+x(x+4)=\sqrt{x^2+3x+1}$.
10. $\sqrt{6x^2-x-1}-\sqrt{x-2}=6x^2-2x+1$.
11. $\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{3x-1}+4x^2-3x+4>0$.
12. $\sqrt{5x^2-x+4}>\sqrt{x^2+4}+4x^2-x$.
13. $\sqrt{6x^2+3x+1}>\sqrt{6x^2+1}-3x$.
14. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-2}-3x+4>0$.
15. $\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}+x-1>0$.
16. $\sqrt{2x^2-3x+10}+\sqrt{2x^2-5x+4}=x+3$.
17. $\sqrt{9x^2-x+1}-\sqrt{7x^2-x+4}+2x^2-3\le 0$.
18. $\sqrt{10x^2-3x+2}-\sqrt{5x^2-x+1}+5x^2-2x+1<0$.
19. $\sqrt{4x^2+3x}\ge\sqrt{3x^2+2x}-x^2-x$.
20. $\sqrt{x^2-x-5}-\sqrt{x-2}+x\left(x^2-2x-3\right)\ge 0$.
21. $\sqrt{11x^2-x}-\sqrt{6x-4}+x\left(11x^2-7x+4\right)\le 0$.
22. $\sqrt{5x^2-4x}-\sqrt{x-2}+5x^2-5x+2=0$.
23. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-2}-3x+4\le 0$.
24. $\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{3x-2}+x\left(x^2-6x+2\right)<0$.
25. $\sqrt{8x^2-x-1}-\sqrt{5x-1}+x\left(8x^2-6x\right)\le 0$.
26. $\sqrt{x^2-4x+3}-2\sqrt{x-1}+x^2-8x+5\ge 0$.
27. $\sqrt{5x^2-4x+3}-\sqrt{x-1}+5x^2-5x+4=0$.
28. $\sqrt{2x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-3}+x^2-3x+5=0$.
29. $\sqrt{6x^2-4x+1}-\sqrt{x}+6x^2-5x+1=0$.
30. $\sqrt{x^2+3x+6}=\sqrt{x^2+x+2}+x+4$.
31. $\sqrt{x^2+2x+9}>\sqrt{x^2+x+3}+x+6$.
32. $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{5x}=x^2-5x+4$.

Bài toán 79. Trích lược bài 2.1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Khối THPT Chuyên Toán – Tin học; Trường ĐHKHTN; Đại học Quốc gia Hà Nội; Kỳ thi tuyển sinh năm học 2000 – 2001.

Giải phương trình $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x-\frac{1}{x}\ge 0;2x-\frac{5}{x}\ge 0;x\ne 0 \qquad [*]$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4}{x}-x=\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\left(\frac{4}{x}-x\right)\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)=x-\frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{x}-x\right)\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right)=0 \qquad [1]$$

Dễ dàng nhận thấy $\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1>0,\forall x$ thỏa mãn [*]. Do đó ta có $[1]\Leftrightarrow\frac{4}{x}-x=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện đi đến tập hợp nghiệm $S=\{2\}$.

Bài toán 80. Giải phương trình $x+\sqrt{2x}=\frac{1}{x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x}-\sqrt{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-x\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)=\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}+1\right)=0 \qquad (1)$$

Nhận xét rằng $\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}+1>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$. Từ đây kết luận $S=\{1\}$.

Bài toán 81. Giải phương trình $\frac{2}{x}+\sqrt{x-\frac{3}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x-\frac{3}{x}\ge 0;2x-\frac{5}{x}\ge 0\\x\ne 0\end{array}\right.$

Nhận xét rằng hệ $2x-\frac{5}{x}=x-\frac{3}{x}=0$ vô nghiệm nên $\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{3}{x}}>0$. Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{2x-\frac{5}{x}}-\sqrt{x-\frac{3}{x}}+x-\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x-\frac{2}{x}}{\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{3}{x}}}+x-\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{3}{x}}+1\right)=0.$$

Rõ ràng $\sqrt{2x-\frac{5}{x}}+\sqrt{x-\frac{3}{x}}+1>0$, do đó ta thu được $x^2=2\Rightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. Kết luận nghiệm $x=-\sqrt{2}$.

Bài toán 82. Giải phương trình $\sqrt{3x-\frac{2}{x}}-\sqrt{2x-\frac{1}{x}}+x-\frac{1}{x}=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $3x-\frac{2}{x}\geq 0;2x-\frac{1}{x}\geq 0 \ \ (D)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3x-\frac{2}{x}}+\sqrt{2x-\frac{1}{x}}}+x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x-\frac{2}{x}}+\sqrt{2x-\frac{1}{x}}}+1\right)=0.$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{3x-\frac{2}{x}}+\sqrt{2x-\frac{1}{x}}}+1>0,\forall x\in D$ nên ta được $x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x\in\left\{-1;1\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 83. Giải phương trình $\sqrt{2x}-\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{x^2-3}{x}=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-\frac{3}{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{3}{x}}}+\frac{x^2-3}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-3}{x}.\left(\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{3}{x}}}+1\right)=0.$$

Nhận xét rằng $\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\frac{3}{x}}}+1>0,\forall x>0$ nên ta thu được $x^2-3=0\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 84. Giải phương trình $\sqrt{2x+\frac{1}{x}}+x+\frac{1}{x}=\sqrt{x}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x}+x+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}+x+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}+1\right)=0$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{2x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}+1>0$ nên thu được $x+\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^2=-1\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 85. Giải bất phương trình $\dfrac{2x^2-13x+38}{\sqrt{2x^2-10x+44}+\sqrt{3x+6}}\le 4-x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2-10x+44}+\sqrt{3x+6}\right)\left(\sqrt{2x^2-10x+44}-\sqrt{3x+6}\right)}{\sqrt{2x^2-10x+44}+\sqrt{3x+6}}\le 4-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-10x+44}-\sqrt{3x+6}\le 4-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2-8x+16\right)+2\left(3x+6\right)}\le \sqrt{3x+6}+4-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left[\left(x-4\right)^2+3x+6\right]}\le \sqrt{3x+6}+4-x \qquad (*)$$

Đặt $\sqrt{3x+6}=u;4-x=v$ ta thu được

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{2\left(u^2+v^2\right)}\le u+v\Leftrightarrow \begin{cases}u+v\ge 0\\ 2\left(u^2+v^2\right)\le u^2+2uv+v^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}u+v\ge 0\\ \left(u-v\right)^2\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v\ge 0\\ u=v\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 4\\ \sqrt{3x+6}=4-x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 4\\ 3x+6=x^2-8x+16\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 4\\ x^2-11x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận bất phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 86. Giải phương trình $7\sqrt{4x^2+5x-1}-14\sqrt{x^2-3x+3}=17x-13 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^2+5x-1\ge 0\\ x^2-3x+3\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{49\left(4x^2+5x-1\right)-196\left(x^2-3x+3\right)}{7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}}=17x-13$$

$$\Leftrightarrow \frac{49\left(17x-13\right)}{7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}}=17x-13$$

$$\Leftrightarrow \left(17x-13\right)\left(7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}-49\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}17x-13=0\\ 7\sqrt{4x^2+5x-1}+14\sqrt{x^2-3x+3}=49 \qquad (1)\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $17x-13=0\Leftrightarrow x=\dfrac{13}{17}$.
- Kết hợp (1) và phương trình ban đầu thu được

$$14\sqrt{4x^2+5x-1}=17x+36\Leftrightarrow \begin{cases}17x+36\ge 0\\ 196\left(4x^2+5x-1\right)=\left(17x+36\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{2;-\frac{746}{495}\right\}.$$

Đối chiếu với điều kiện thu được nghiệm $x=-\dfrac{746}{495};x=\dfrac{13}{17};x=2$.

Bài toán 87. Giải phương trình $\sqrt{36x^2-63x+27}=15-27x+2\sqrt{9x^2-9x+3} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}36x^2-63x+27\geq 0\\9x^2-9x+3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\x\leq\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{36x^2-63x+27}-2\sqrt{9x^2-9x+3}=15-27x \quad (1).$$

Sử dụng đẳng thức liên hợp ta có

$$\frac{-27x+15}{\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}}=15-27x$$

$$\Leftrightarrow(15-27x)\left(\frac{1}{\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}15-27x=0\\\sqrt{36x^2-63x+27}+2\sqrt{9x^2-9x+3}=1 \quad (2)\end{array}\right.$$

Với $15-27x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{9}$. Kết hợp hai phương trình (1) và (2) ta thu được

$$2\sqrt{36x^2-63x+27}=16-27x\Leftrightarrow\begin{cases}16-27x\geq 0\\4\left(36x^2-63x+27\right)=729x^2-864x+256\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{16}{27}\\585x^2-612x+148=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{16}{27}\\x\in\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{74}{195}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{74}{195}$$

Đối chiếu với điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{74}{195};x=\dfrac{5}{9}$.

Bài toán 88. Giải phương trình $1+\sqrt{x^2+2}=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$1-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}+\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+2}+x^2\right)=0 \quad (1)$$

Để ý rằng $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+2}+x^2>0,\forall x\geq -2$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 89. Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{4x+1}=\dfrac{3}{x^3}+\sqrt{x^2+x+1} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{4} \le x \ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{4x+1} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x^3} = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^4 + \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x+1}\right) = 0 \quad (1)$$

Để ý rằng $x^4 + \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x+1} > 0, \forall x \ge -\frac{1}{4}$ nên (1) nhận nghiệm duy nhất $x=3$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 90. Giải phương trình $2+\sqrt{2x^2+x+1} = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \le x \ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2 - \frac{1}{x} + \left(\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{2x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} + \frac{2x^2-x}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(x^2 + \sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=1 \\ \sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2x+1} = -x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 91. Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \sqrt{x+5} = \frac{1}{x} + \sqrt{2x+4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-2 \le x \ne 0 \quad (D)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sqrt{2x+4} - \sqrt{x+5} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2} = \frac{x-1}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+5}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+5}} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad (*)$$

Nhận xét rằng $\frac{1}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+5}} + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (D)$ nên $(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất, $S = \{1\}$.

Bài toán 92. Giải phương trình $\frac{3}{x^2} + \sqrt{x^2-x+1} = \frac{6}{x^3} + \sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}+\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow\frac{3x-6}{x^3}+\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{3}{x^3}+\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(x^4+3\sqrt{x^2-x+1}+3\sqrt{x+1}\right)=0\quad(1)$$

Chú ý rằng $x^4+3\sqrt{x^2-x+1}+3\sqrt{x+1}>0,\forall x\ge -1$.

Do đó (1) trở thành $x-2=0\Leftrightarrow x=2$. Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $x=2$.

Bài toán 93. Giải phương trình $\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\sqrt{2x^2+3x+5}=\sqrt{x^2+5}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+3}{3x}+\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+5}=0\Leftrightarrow\frac{x+3}{3x}+\frac{x^2+3x}{\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+3)\left(\frac{1}{3x}+\frac{x}{\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+5}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ \sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+5}=-3x^2\quad(1)\end{array}\right.$$

Dễ nhận thấy phương trình (1) vô nghiệm nên thu được nghiệm duy nhất $x=-3$.

Bài toán 94. Giải phương trình $5+\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{3x+4}+\frac{10}{x}\quad(x\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{4}{3}\le x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5-\frac{10}{x}+\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{3x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{5(x-2)}{x}+\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{5}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{3x+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ 5\sqrt{x^2+x+4}+5\sqrt{3x+4}+x^2=0\end{array}\right.$$

Dễ thấy $5\sqrt{x^2+x+4}+5\sqrt{3x+4}+x^2=0>0$ với $-\frac{4}{3}\le x\neq 0$ nên ta có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 95. Giải phương trình $\frac{1}{x^2}+\sqrt{x+2}=\frac{1}{x}+\sqrt{2x+1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-0,5\le x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\frac{1-x}{x^2}=\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x^2}\right)=0\quad(1).$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x^2}>0,\forall x\ge-\frac{1}{2}$ và $x\ne0$ nên (1) trở thành $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có duy nhất nghiệm.

Bài toán 96. Giải phương trình $\frac{2}{x^4}+\sqrt{4x+11}=\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^2+4x+9}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{11}{4}\le x\ne0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\sqrt{x^2+4x+9}-\sqrt{4x+11}\Leftrightarrow\frac{2-x^2}{x^4}=\frac{x^2-2}{\sqrt{x^2+4x+9}+\sqrt{4x+11}}$$

$$\Leftrightarrow(x^2-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+9}+\sqrt{4x+11}}+\frac{1}{x^4}\right)=0$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+9}+\sqrt{4x+11}}+\frac{1}{x^4}>0,\forall x$ thỏa mãn $-\frac{11}{4}\le x\ne0$.

Do đó đi đến $x^2-2=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. Đối chiếu điều kiện thu được hai nghiệm đã nêu.

Bài toán 97. Giải phương trình $1+\sqrt{2x^2+4x+4}=\frac{2}{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x+5}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Vì $2x^2+4x+4=x^2+(x+2)^2>0;x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0,x\in\mathbb{R}$ suy ra điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x^2+4x+4}-\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{2}{x^2+1}-1\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{1}{x^2+1}\right)=0\qquad[1]$$

Để ý rằng $\frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{1}{x^2+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó [1] trở thành $x^2-1=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$.

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x=-1;x=1$.

Bài toán 98. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+6}+\frac{2}{x-1}+1=\sqrt{4x+7}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{4x+7}+\frac{x+1}{x-1}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+4x+6}-\sqrt{4x+7}+\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{4x+7}}+\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow(x^2-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{4x+7}}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+6}+\sqrt{4x+7}}+\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$ với x thuộc tập xác định nên ta có $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 99. Giải bất phương trình $\sqrt{5x^2+x+7}+\dfrac{x-2}{x-1}>\sqrt{4x^2+4x+5}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x^2+x+7}-\sqrt{4x^2+4x+5}+\frac{x-2}{x-1}>0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+x+7}-\sqrt{4x^2+4x+5}+\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5x^2+x+7}+\sqrt{4x^2+4x+5}}+\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{5x^2+x+7}+\sqrt{4x^2+4x+5}}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]>0 \qquad (1)$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{5x^2+x+7}+\sqrt{4x^2+4x+5}}+\dfrac{1}{(x-1)^2},\forall x\neq 1$ nên $(1)\Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$

Kết luận bất phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$

Bài toán 100. Giải bất phương trình $1+\sqrt{x+1}\leq 4x^2+\sqrt{3x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2-1+\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)+\frac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1+\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)\geq 0 \qquad (1)$$

Nhận xét $2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}>0,\forall x\geq 0$ nên (1) tương đương $2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp $x\geq 0$ ta có tập nghiệm $S=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 101. Giải bất phương trình $\dfrac{x}{2\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{2\sqrt{x-2}}=\frac{x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x-2}\end{array}\right. \qquad (*)$$

- Loại trường hợp $x=0$.
- Dễ thấy $\sqrt{3x+1}>\sqrt{x-2};\sqrt{2x+1}>\sqrt{x-2},\forall x>2 \Rightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}>2\sqrt{x-2}$. Vậy (*) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 102. Giải bất phương trình $9x^2+2\sqrt{x}>1+\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$9x^2-1+2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}>0 \Leftrightarrow (3x-1)(3x+1)+\frac{4x-(x+1)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(3x+1+\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right)>0 \qquad (1)$$

Dễ thấy $3x+1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}>0,\forall x\geq 0$ nên (1) tương đương $3x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Kết luận bất phương trình ban đầu có nghiệm $x>\dfrac{1}{3}$.

Bài toán 103. Giải bất phương trình $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}=\sqrt{2x+1}-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}=\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{2x+9}=\sqrt{2x+1}+1 \qquad [1] \end{array}\right.$$

Ta có $[1] \Leftrightarrow 2x+9=2x+2+2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 7=2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2x+1=\dfrac{49}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{45}{8}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{45}{8}\right\}$.

Bài toán 104. Giải phương trình $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x+1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+3} \qquad (1) \end{array}\right.$$

- ✓ Loại nghiệm $x=-1$.
- ✓ $(1) \Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{x^2+5x+6}=2x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5x+6}=1 \Leftrightarrow x^2+5x+\dfrac{23}{4}=0 \qquad (2)$.

  Dễ thấy với $x>0$ thì $x^2+5x+\dfrac{23}{4}>0$ hay (2) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 105. Giải phương trình $\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-x+1=0 & (1)\\ \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x} & (2)\end{array}\right.$$

- Phương trình (1) vô nghiệm.
- $(2)\Leftrightarrow x^2+x+1=x^2+x+1+2\sqrt{x\left(x^2+1\right)}\Leftrightarrow\sqrt{x\left(x^2+1\right)}=0\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x=0$.

Bài toán 106. Giải phương trình $\dfrac{x^2-x-3}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+4}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2-x-3}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{x^2-x-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+4}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-x-3=0 & [1]\\ \sqrt{x^2+9}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+4} & [2]\end{array}\right.$$

- $[1]\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.
- $[2]\Leftrightarrow x^2+9=x^2+x+5+2\sqrt{x^3+4x^2+x+4}\Leftrightarrow 4-x=2\sqrt{x^3+4x^2+x+4}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\ x^2-8x+16=4\left(x^3+4x^2+x+4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\ 4x^3+15x^2+12x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4\\ x\left(4x^2+15x+12\right)=0\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{-15+\sqrt{33}}{8};\frac{-15-\sqrt{33}}{8}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{-15+\sqrt{33}}{8};\dfrac{-15-\sqrt{33}}{8}\right\}$.

Bài toán 107. Giải phương trình $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}}=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x-1}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}}=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x-1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2+x+1=0 & (1)\\ \sqrt{x^2+2x+6}=\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x-1} & (2)\end{array}\right.$$

- Dễ thấy (1) vô nghiệm do $\Delta<0$.
- $(2)\Leftrightarrow x^2+2x+6=x^2+5x-1+2\sqrt{2x^3+5x^2-3x}\Leftrightarrow 7-3x=2\sqrt{2x^3+5x^2-3x}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7\ge 3x\\ 9x^2-42x+49=4\left(2x^3+5x^2-3x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\ge 3x\\ 8x^3+11x^2+30x-49=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7\ge 3x\\ (x-1)\left(8x^2+19x+49\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\ge 3x\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ 8x^2+19x+49=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 108. Giải bất phương trình $\sqrt{4x+\frac{3}{x}}+\frac{3}{x^3}\ge\sqrt{x+\frac{6}{x}}+\frac{3}{x^5}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Nhận xét $\sqrt{4x+\frac{3}{x}}+\sqrt{x+\frac{6}{x}}>0,\forall x>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+\frac{3}{x}}-\sqrt{x+\frac{6}{x}}+\frac{1}{x^4}\left(3x-\frac{3}{x}\right)\ge0\Leftrightarrow\frac{3x-\frac{3}{x}}{\sqrt{4x+\frac{3}{x}}+\sqrt{x+\frac{6}{x}}}+\frac{1}{x^4}\left(3x-\frac{3}{x}\right)\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-\frac{3}{x}\right)\left[1+\frac{1}{x^4}\left(\sqrt{4x+\frac{3}{x}}+\sqrt{x+\frac{6}{x}}\right)\right]\ge0\qquad(1)$$

Chú ý với $x>0$ thì $1+\frac{1}{x^4}\left(\sqrt{4x+\frac{3}{x}}+\sqrt{x+\frac{6}{x}}\right)>0$; suy ra $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge1$. Kết luận nghiệm $x\ge1$.

Bài toán 109. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}+x+\frac{2}{x}=\sqrt{3x-1}+3$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x-1}+\frac{x^2-3x+2}{x}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{x^2-3x+2}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{1;2\}\\\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{x}=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{x}>0,\forall x\ge\frac{1}{3}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm hai nghiệm $x=1;x=2$.

Bài toán 110. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x-1}+x\sqrt{x}>3\sqrt{x}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{7x-1}+(x-3)\sqrt{x}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{7x-1}}+(x-3)\sqrt{x}>0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{7x-1}}+\sqrt{x}\right)>0\qquad(1)$$

Ta thấy $\frac{x}{\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{7x-1}}+\sqrt{x}>0,\forall x\ge\frac{1}{3}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-3>0\Leftrightarrow x>3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>3$.

Bài toán 111. Giải phương trình $\sqrt{2x-\frac{1}{x}}+x\sqrt{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2-1\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-\frac{1}{x}}-\sqrt{x}+x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x-\frac{1}{x}}-\sqrt{x}+\sqrt{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2x-\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)\left[\sqrt{x\left(2x-\frac{1}{x}\right)}+x\right]=0$$

Rõ ràng $\sqrt{x\left(2x-\frac{1}{x}\right)}+x>0,\forall x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên ta thu được $x^2-1=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 112. Giải bất phương trình $16x^3+\sqrt{5x-2}>\sqrt{x-1}+x\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$16x^3-x+\sqrt{5x-2}-\sqrt{x-1}>0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-1)(4x+1)+\frac{4x-1}{\sqrt{5x-2}+\sqrt{x-1}}>0$$

$$\Leftrightarrow(4x-1)\left(4x^2+x+\frac{1}{\sqrt{5x-2}+\sqrt{x-1}}\right)>0\quad(1)$$

Rõ ràng $4x-1>0;4x^2+x+\frac{1}{\sqrt{5x-2}+\sqrt{x-1}}>0,\forall x\ge 1$ nên (1) nghiệm đúng. Vậy bài toán có nghiệm $x\ge 1$.

Bài toán 113. Giải bất phương trình $x^3+2\sqrt{x}>1+\sqrt{3x+\frac{1}{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x}-\sqrt{3x+\frac{1}{x}}+x^3-1>0\Leftrightarrow\frac{x-\frac{1}{x}}{2\sqrt{x}+\sqrt{3x+\frac{1}{x}}}+(x-1)(x^2+x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}+x\sqrt{3x+\frac{1}{x}}}+x^2+x+1\right)>0\quad(1)$$

Ta thấy $\frac{1}{2x\sqrt{x}+x\sqrt{3x+\frac{1}{x}}}+x^2+x+1>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1\Rightarrow S=(1;+\infty)$.

Bài toán 114. Giải bất phương trình $\sqrt{6x+2}-\sqrt{5x+1}+x^3+1>0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{6}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+1}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{5x+1}}+(x+1)(x^2-x+1)>0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{5x+1}}+x^2-x+1\right)>0 \quad (1)$$

Ta thấy $x+1>0;\frac{1}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{5x+1}}+x^2-x+1=\frac{1}{\sqrt{6x+2}+\sqrt{5x+1}}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\ge -\frac{1}{6}$.

Do đó (1) nghiệm đúng với $x\ge -\frac{1}{6}$ dẫn đến nghiệm $x\ge -\frac{1}{6}$.

Bài toán 115. Giải bất phương trình $x+\sqrt{3x+\frac{1}{x}}>1+\frac{3}{x+1}+\sqrt{2x+\frac{5}{x}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-\sqrt{2x+\frac{5}{x}}+x-1-\frac{3}{x+1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+\frac{1}{x}}-\sqrt{2x+\frac{5}{x}}+\frac{x^2-4}{x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-\frac{4}{x}}{\sqrt{3x+\frac{1}{x}}+\sqrt{2x+\frac{5}{x}}}+\frac{x^2-4}{x+1}>0 \Leftrightarrow (x^2-4)\left[\frac{1}{x\left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}+\sqrt{2x+\frac{5}{x}}\right)}+\frac{1}{x+1}\right]>0 \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{x\left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}+\sqrt{2x+\frac{5}{x}}\right)}+\frac{1}{x+1}>0,\forall x>0; x+2>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2\Rightarrow S=(2;+\infty)$.

Bài toán 116. Giải bất phương trình $3x+\sqrt{4x-\frac{3}{x}}>\frac{1}{x}+\sqrt{x-\frac{2}{x}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{4x^2-3}{x}\ge 0;\frac{x^2-2}{x}\ge 0; x\ne 0 \quad (D)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x-\frac{3}{x}}-\sqrt{x-\frac{2}{x}}+3x-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{3x-\frac{1}{x}}{\sqrt{4x-\frac{3}{x}}+\sqrt{x-\frac{2}{x}}}+3x-\frac{1}{x}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\sqrt{4x-\frac{3}{x}}+\sqrt{x-\frac{2}{x}}\right)>0 \quad (1)$$

Ta thấy $1+\sqrt{4x-\frac{3}{x}}+\sqrt{x-\frac{2}{x}}>0,\forall x\in D$ nên thu được $(1)\Leftrightarrow 3x-\frac{1}{x}>0$. Kết hợp với hệ điều kiện (D) ta được

$$\frac{4x^2-3}{x}\ge 0;\frac{x^2-2}{x}\ge 0;x\ne 0;\frac{3x^2-1}{x}>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x<0\vee x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\sqrt{2}\le x<0\vee x\ge\sqrt{2}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\le x<0\vee x\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{\sqrt{3}}\le x<0\\x\ge\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow S=\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$$

Bài toán 117. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}+x-2=0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x-2\ge 0\\x^3+x\ge 0\end{cases}\quad(D)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+x-2=0\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+1\right)=0.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+1>0,\forall x\in D$ nên ta thu được $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 118. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x+3}-\sqrt{x^3+x+4}+x^3-1>0\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+2x+3\ge 0;x^3+x+4\ge 0\quad(D)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^3+2x+3}+\sqrt{x^3+x+4}}+(x-1)(x^2+x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2x+3}+\sqrt{x^3+x+4}}+x^2+x+1\right)>0\quad(1)$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x^3+2x+3}+\sqrt{x^3+x+4}}+x^2+x+1=\frac{1}{\sqrt{x^3+2x+3}+\sqrt{x^3+x+4}}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in D$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$, khi đó (D) được nghiệm đúng. Vậy bài toán có nghiệm $x>1$.

Nhận xét.

Đối với bất phương trình, thông thường chúng ta phải xử lý chặt chẽ điều kiện các căn thức trước khi bắt tay vào biến đổi tương đương, chưa kể đôi khi điều kiện xác định lại là chìa khóa mở ra cánh cửa lời giải. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, các bạn có thể đặt điều kiện căn hình thức, giải được nghiệm của bất phương trình hệ quả, sử dụng nghiệm này phản biện trở lại điều kiện và kết luận nghiệm chính thức.

Bài toán 119. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+3x+4}-\sqrt{2x+6}+x-1>0\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+3x+4\ge 0\\2x+6\ge 0\end{cases}\quad(D)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+x-2}{\sqrt{x^3+3x+4}+\sqrt{2x+6}}+x-1>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{\sqrt{x^3+3x+4}+\sqrt{2x+6}}+x-1>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^3+3x+4}+\sqrt{2x+6}}+1\right)>0 \quad (1)$$

Dễ thấy $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^3+3x+4}+\sqrt{2x+6}}+1>0,\forall x\in D$.

Thế thì $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$, lúc này hệ (D) thỏa mãn. Kết luận $S=(1;+\infty)$.

Bài toán 120. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+4x-1}-1>-x^3+\sqrt{x+3} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+4x-1\ge 0\\ x+3\ge 0\end{cases} \quad (D)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+4x-1}-\sqrt{x+3}+x^3-1>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+3x-4}{\sqrt{x^3+4x-1}+\sqrt{x+3}}+x^3-1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{\sqrt{x^3+4x-1}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(x^2+x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+4x-1}+\sqrt{x+3}}+x^2+x+1\right)>0 \quad (1)$$

Dễ nhận thấy $x^2+x+4>x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$, dẫn đến

$$\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+4x-1}+\sqrt{x+3}}+x^2+x+1>0,\forall x\in D.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$, hệ (D) thỏa mãn. Kết luận $S=(1;+\infty)$.

Bài toán 121. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}+x(x-2)>0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x-2\ge 0\\ x^3+x\ge 0\end{cases} \quad (D)\Rightarrow \begin{cases}x(x^2+2)\ge 2\\ x(x2+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+x(x-2)>0\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+x\right)>0 \quad (1).$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+x>0,\forall x>0$ nên thu được $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x\ge 2$.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $x^4+\sqrt{x^3+x-1}>8x+\sqrt{x+7}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện tạm thời $\begin{cases} x^3+x-1\ge 0 \\ x\ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+1\right)\ge 1 \\ x\ge -7 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x+7}+x^4-8x>0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x^3-8}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x+7}}+x\left(x^3-8\right)>0 \\ & \Leftrightarrow \left(x^3-8\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x+7}}+x\right)>0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x+7}}+x>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x^3>8\Leftrightarrow x>2$.

Khi đó điều kiện xác định được nghiệm đúng. Kết luận bất phương trình có nghiệm $x>2$.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x-1}+5x^2>5x+\sqrt{x+1} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+2x-1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+2\right)\ge 1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+2x-1}-\sqrt{x+1}+5x^2-5x>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+x-2}{\sqrt{x^3+2x-1}+\sqrt{x+1}}+5x\left(x-1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)}{\sqrt{x^3+2x-1}+\sqrt{x+1}}+x\left(x-1\right)>0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+2x-1}+\sqrt{x+1}}+5x\right)>0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+2x-1}+\sqrt{x+1}}+5x>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Lúc đó hệ điều kiện được thỏa mãn hoàn toàn. Kết luận nghiệm $S=\left(1;+\infty\right)$.

Nhận xét.

Từ bài toán 121, cũng giống như các bài toán trước đó, vì điều kiện xác định chặt chẽ tìm được quá khó khăn định hướng chúng ta sử dụng điều kiện hình thức (điều kiện lỏng, tạm thời), giải bất phương trình hệ quả và phản biện điều kiện tạm thời. Tuy nhiên, chông gai đã bắt đầu xuất hiện, nguyên do biểu thức hệ quả cần đánh giá có chứa nhị thức bậc nhất với dấu không xác định. Để triệt phá được mối nguy hiểm này, cần quay trở lại chú ý điều kiện hình thức

- *Bài toán 121:* $\begin{cases} x^3+2x-2\ge 0 \\ x^3+x\ge 0 \end{cases} (D)\Rightarrow \begin{cases} x\left(x^2+2\right)\ge 2 \\ x\left(x2+1\right)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x>0$.
- *Bài toán 122:* $\begin{cases} x^3+x-1\ge 0 \\ x\ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+1\right)\ge 1 \\ x\ge -7 \end{cases} \Rightarrow x>0$.
- *Bài toán 123*: $\begin{cases} x^3+2x-1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+2\right)\ge 1 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Có lẽ đông đảo các bạn độc giả đều biết bất phương trình là đỉnh cao của phương trình, do đó để xử lý trọn vẹn được nó, nếu chỉ có trong tay các phương pháp giải phương trình, cho dù thành thạo kỹ năng biến đổi thì vẫn chưa đủ, cần có tư duy phản biện, liên hệ và khả năng tìm tòi, phát triển đối với từng tình huống riêng biệt.

Bài toán 124. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x-1}+x(1+x)>2+\sqrt{x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^3+x-1\ge 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x}+x^2+x-2>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x}+(x-1)(x+2)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x}}+(x-1)(x+2)>0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x}}+x+2\right)>0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x}}+x+2>0, \forall x\ge 0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=(1;+\infty)$.

Bài toán 125. Giải bất phương trình $x^5+\sqrt{x^3+5x-4}\ge x+\sqrt{x+1}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+5x-4\ge 0 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+5)\ge 4 \\ x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+5x-4}-\sqrt{x+1}+x(x^4-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+4x-5}{\sqrt{x^3+5x-4}+\sqrt{x+1}}+x(x^2-1)(x^2+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+5x+5)}{\sqrt{x^3+5x-4}+\sqrt{x+1}}+x(x^2-1)(x^2+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x^2+5x+5}{\sqrt{x^3+5x-4}+\sqrt{x+1}}+x(x+1)(x^2+1)\right]\ge 0 \quad (1)$$

Dễ thấy rằng $\frac{x^2+5x+5}{\sqrt{x^3+5x-4}+\sqrt{x+1}}+x(x+1)(x^2+1)>0, \forall x>0$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$. Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 126. Giải bất phương trình $\sqrt{x^5+5x-2}-\sqrt{x+3}+(x-1)(x^3+1)\ge 0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^5+5x-2\ge 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^4+5)\ge 2 \\ x\ge -3 \end{cases} \Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^5+4x-5}{\sqrt{x^5+5x-2}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(x^3+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+5)}{\sqrt{x^5+5x-2}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(x^3+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x^4+x^3+x^2+x+5}{\sqrt{x^5+5x-2}+\sqrt{x+3}}+x^3+1\right]\geq 0 \quad (1).$$

Nhận xét $\frac{x^4+x^3+x^2+x+5}{\sqrt{x^5+5x-2}+\sqrt{x+3}}+x^3+1>0,\forall x>0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\leq\sqrt{5}\left(x^2+8x-9\right) \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+3-4x}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}\leq\sqrt{5}(x-1)(x+9)\Leftrightarrow (x-1)\left[\sqrt{5}(x+9)+\frac{3}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}\right]\geq 0 \qquad (1).$$

Dễ thấy $\sqrt{5}(x+9)+\frac{3}{\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}>0,\forall x\geq 0$ nên (1) tương đương $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Kết luận bất phương trình đề bài có nghiệm $x\geq 1$.

Bài toán 128. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}+2x^2-5x+2>0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện tạm thời $\begin{cases} x^3+2x-2\geq 0 \\ x\left(x^2+1\right)\geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}+(2x-1)(x-2)>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+(2x-1)(x-2)>0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+2x-1\right)>0 \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-2;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}<0\Rightarrow x^3+2x-2<0,\forall x\leq\frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy tối thiểu phải có $x>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+2x-1>0$. Dẫn đến $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=(1;+\infty)$.

Bài toán 129. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+8x-5}+3x^2+2\geq\sqrt{x+3}+5x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện tạm thời $\begin{cases} x^3+8x-5\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+8x-5}-\sqrt{x+3}+3x^2-5x+2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+8x-5}-\sqrt{x+3}+(x-1)(3x-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3+7x-8}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(3x-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+8)}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(3x-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+8}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+3x-2\right)\ge 0 \quad (1)$$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+8x-5; x\in\mathbb{R} \Leftarrow f'(x)=3x^2+8>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nếu $x\le\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{82}{27}<0\Rightarrow x^3+8x-5<0, \forall x\le\frac{2}{3}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy ta có tối thiểu $x>\frac{2}{3}$ dẫn đến $\frac{x^2+x+8}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+3x-2>0, \forall x>\frac{2}{3}$.

Thế thì (1) tương đương $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$, thỏa mãn điều kiện xác định.

Kết luận bất phương trình đề bài có nghiệm $x\ge 1$.

Nhận xét.

Các bài toán số 128 và 129 có các điều kiện tạm thời (điều kiện lỏng)

$$\text{Bài toán 128:}\begin{cases}x^3+2x-2\ge 0\\ x(x^2+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+2)\ge 2\\ x(x^2+1)\ge 0\end{cases}\Rightarrow x>0 \ \text{(X)}.$$

$$\text{Bài toán 129:}\begin{cases}x^3+8x-5\ge 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+8)\ge 5\\ x\ge -3\end{cases}\Rightarrow x>0 \ \text{(Y)}.$$

Song song với nó biểu thức hệ quả (T) cần đánh giá không hề "còm"

$$T_{128}=\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+2x-1$$
$$T_{129}=\frac{x^2+x+8}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+3x-2$$

Rõ ràng việc tìm chính xác điều kiện chính xác là khó khăn, ngay cả việc để ý được (X) và (Y) đã là một đột phá, tuy nhiên nếu dùng (X) và (Y) chiến đấu với T_{128},T_{129} thì chẳng khác nào đang lấy "trứng chọi đá". Tình huống xấu này đặt ra một yêu cầu mới, đòi hỏi phải đánh giá điều kiện xác định một cách "khắt khe" hơn nữa, "mạnh" hơn nữa, bằng mọi giá phải "đạp bằng" được T_{128},T_{129}.

Nếu để ý một chút các bạn có thể thấy chúng ta "có thể" dự đoán $x>\frac{1}{2}$ đối với bài toán 128 thông qua khởi tạo

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}<0 \text{ với } f(x)=x^3+2x-2; x\in\mathbb{R}.$$

Phép đặt biểu thức dưới dạng hàm số như thế này cũng gợi ý cho ta sử dụng ý tưởng hàm số, và cực kỳ may mắn khi hàm số dự kiến là hàm số đồng biến với các thông số đẹp mắt

$$f(x)=x^3+2x-2; x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=3x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$$
$$x\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}<0\Rightarrow x^3+2x-2<0, \forall x\le\frac{1}{2}$$

Với bài toán 129 chúng ta cũng lập luận tương tự.

Một câu hỏi đặt ra là liệu có thể làm trội (làm mạnh) các biểu thức hệ quả T hay không, câu trả lời là hoàn toàn có thể, chỉ cần thông qua $f(x)=x^3+2x-2;x\in\mathbb{R}$ *với những khởi tạo không thỏa mãn điều kiện xác định, nghĩa là chọn* α *sao cho* $f(x)=x^3+2x-2<0,\forall x<\alpha$.

Thử nghiệm với α *tăng dần*

$$x\le\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{10}{27}<0\Rightarrow x^3+2x-2<0,\forall x\le\frac{2}{3}$$

$$x\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{5}{64}<0\Rightarrow x^3+2x-2<0,\forall x\le\frac{3}{4}$$

$$x\le\frac{10}{13}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{10}{13}\right)<0\Rightarrow x^3+2x-2<0,\forall x\le\frac{10}{13}$$

Thực ra các bạn chỉ cần lựa chọn α *hữu tỷ với* $\alpha\le 0,77$, *vì chúng ta đều biết bấm máy tính bỏ túi giải phương trình bậc ba* $f(x)=x^3+2x-2=0\Leftrightarrow x\approx 0,77$, *dù nghiệm chỉ là tương đối nhưng vẫn có quan sát*

$$f(x)=x^3+2x-2\ge 0\Rightarrow x\le 0,77$$

$$f(x)=x^3+2x-2>0\Rightarrow x<0,77$$

Tổng hợp một loạt quá trình trên đi đến xây dựng các biểu thức T "mạnh hơn" đối với T_{128}

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+n(3x-2);n>0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+k(4x-3);k>0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+l(13x-10);l>0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+m(7x-5);m>0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x^3+x}}+p(13x-9);p>0$$

Bài toán 130. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+3x-2}+x^2(x+4)\ge\sqrt{x+1}+4x+1\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện tạm thời $\begin{cases}x^3+3x\ge 2\\x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+3)\ge 2\\x\ge -1\end{cases}\Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{x^3+3x-2}-\sqrt{x+1}+x^3+4x^2-4x-1\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^3+2x-3}{\sqrt{x^3+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(x^2+5x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^3+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(x^2+5x+1)\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^3+3x-2}+\sqrt{x+1}}+x^2+5x+1\right)\ge 0$$

Nhận xét $\dfrac{x^2+x+3}{\sqrt{x^3+3x-2}+\sqrt{x+1}}+x^2+5x+1>0,\forall x>0$.

Do đó thu được $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$, thỏa mãn điều kiện xác định. Kết luận bất phương trình đề bài có nghiệm $x\ge 1$.

Bài toán 131. Giải bất phương trình $x^3+9x^2+7+\sqrt{x^3+7x-5}\ge 17x+\sqrt{x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+7x-5\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+7x-5}-\sqrt{x+2}+x^3+9x^2-17x+7\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3+6x-7}{\sqrt{x^3+7x-5}+\sqrt{x+2}}+(x-1)(x^2+10x-7)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+7)}{\sqrt{x^3+7x-5}+\sqrt{x+2}}+(x-1)(x^2+10x-7)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+7x-5}+\sqrt{x+2}}+x^2+10x-7\right)\ge 0\quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3+7x-5;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=3x^2+7>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x\le\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{27}<0\Rightarrow f(x)<0,\forall x\le\frac{2}{3}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Do đó phải có tối thiểu $x>\frac{2}{3}$.

Xét hàm số $g(x)=x^2+10x-7;x>\frac{2}{3}\Rightarrow g'(x)=2x+10>0,\forall x>\frac{2}{3}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $g(x)>g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}>0\Rightarrow x^2+10x-7>0,\forall x>\frac{2}{3}$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x^3+7x-5}+\sqrt{x+2}}+x^2+10x-7>0,\forall x>\frac{2}{3}$, dẫn đến $(1)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 132. Giải bất phương trình $\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+x^3+2x^2+1\ge 4x\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^5+3x-2\ge 0;x+1\ge 0$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+x^3+2x^2-4x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+(x-1)(x^2+3x-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^5+2x-3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(x^2+3x-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(x^2+3x-1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+x^2+3x-1\right)\ge 0\quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^5+3x-2;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=5x^4+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x \le \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{32} < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \le \frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy ta có tối thiểu $x > \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 3x - 1; x > \frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 2x + 3 > 0, \forall x > \frac{1}{2}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét dẫn đến $g(x) > g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 > 0, \forall x > \frac{1}{2}$.

Tổng hợp lại thu được $\frac{x^2 + x + 3}{\sqrt{x^5 + 3x - 2} + \sqrt{x+1}} + x^2 + 3x - 1 > 0, \forall x > \frac{1}{2}$; dẫn đến $(1) \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Nhận xét.

Hai bài toán 131 và 132 tiếp tục phát triển cho lớp bài toán sử dụng đại lượng liên hợp, có kết hợp phong cách "tiền trảm hậu tấu" lồng ghép đánh giá biểu thức hệ quả T có chứa tam thức bậc hai phía ngoài căn

$$T_{131} = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 7x - 5} + \sqrt{x+2}} + x^2 + 10x - 7.$$

Điều kiện lỏng (tạm thời) là tất yếu, điều kiện "chặt chẽ" hơn một chút là $x > 0$ có lẽ cũng nhiều bạn đọc dự đoán được. Một số bạn xuất phát từ $x > 0$ để "hy vọng" được tính chất đơn điệu, cụ thể là đồng biến từ hàm số tam thức bậc hai phía sau $g(x) = x^2 + 10x - 7$, tuy nhiên "rủi ro" lại xảy ra khi đối thủ phía sau "nặng ký", đó là số 7, chỉ dùng $x > 0$ thì số 7 chẳng sứt mẻ gì.

Chúng ta sẽ rất may mắn nếu được bố trí số thực dương như bài toán 130 với $g(x) = x^2 + 5x + 1$, điều này dẫn đến các bạn có thể tham khảo các đơn vị nhẹ hơn T_{131} dưới dạng $g(x) = x^2 + 10x + k, k \ge 0$.

Vấn đề đặt ra là "làm mạnh" hơn nữa điều kiện xác định $\begin{cases} x^3 + 7x - 5 \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \end{cases}$

Phải tìm ra số hữu tỷ α sao cho $g(x) = x^2 + 10x - 7 > 0, \forall x > \alpha$ đồng thời khi đó $f(x) = x^3 + 7x - 5 < 0, \forall x \le \alpha$.

Trong quá trình này lưu ý $f(x) = x^3 + 7x - 5 < 0, \forall x \le \alpha$ khác với $f(x) = x^3 + 7x - 5 > 0, \forall x > \alpha$, vì nếu thế thì α hoặc là nghiệm chính xác điều kiện mất rồi. Số hữu tỷ α như đã trình bày trước đây, được coi là điều kiện tối thiểu đối với điều kiện xác định.

Điều này dựa trên tư duy phản chứng, có thể không chắc chắn 100% rằng $f(x) = x^3 + 7x - 5 > 0, \forall x > \alpha$ nhưng nếu để xảy ra $f(x) = x^3 + 7x - 5 < 0, \forall x \le \alpha$ thì là một sự vô lý, vi phạm điều kiện xác định, điều này dẫn đến điều kiện tối thiểu $x > \alpha$, và đây là đòn bẩy đi đến $g(x) = x^2 + 10x - 7 > 0, \forall x > \alpha$.

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 + 7x - 5 = 0 \Leftrightarrow x \approx 0,67$, do đó mình sẽ dự trù chọn số hữu tỷ α bé hơn 0,67 một chút, rõ ràng khi đó $f(x) = x^3 + 7x - 5 < 0, \forall x \le \alpha$, chỉ cần xử lý vế còn lại. Để ý thấy rằng $\alpha = \frac{2}{3}$ thì $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} > 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 7 > 0, \forall x > \frac{2}{3}$.

Từ đây, kết hợp tính đồng biến của các hàm số $g(x); f(x)$ và lập luận logic ta thu được lời giải bài toán 131 như đã trình bày. Hoàn toàn tương tự với bài toán 132, tuy có khác biệt do số $\alpha = \frac{1}{2}$ phải thử nghiệm, tác giả không thể tìm nghiệm chính xác phương trình bậc 5 với máy tính bỏ túi Casio fx 500MS!

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\sqrt{x^7+6x-4}+x^3+11x^2+7\ge 19x+\sqrt{x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^7+6x-4\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^7+6x-4}-\sqrt{x+2}+x^3+11x^2-19x+7\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^7+6x-4}-\sqrt{x+2}+(x-1)(x^2+12x-7)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^7+5x-6}{\sqrt{x^7+6x-4}+\sqrt{x+2}}+(x-1)(x^2+12x-7)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+6)}{\sqrt{x^7+6x-4}+\sqrt{x+2}}+(x-1)(x^2+12x-7)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+6}{\sqrt{x^7+6x-4}+\sqrt{x+2}}+x^2+12x-7\right)\ge 0\quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^7+6x-4; x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=7x^6+6>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x\le\frac{7}{12}\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{7}{12}\right)=\left(\frac{7}{12}\right)^7-\frac{1}{2}<0\Rightarrow f(x)<0,\forall x\le\frac{7}{12}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Do đó ta có tối thiểu $x>\frac{7}{12}\Rightarrow g(x)=x^2+12x-7>0,\forall x>\frac{7}{12}$.

Vậy $\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+6}{\sqrt{x^7+6x-4}+\sqrt{x+2}}+x^2+12x-7>0,\forall x>\frac{7}{12}$, $(1)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+4x-3}+12x^3+4\ge 13x^2+3x+\sqrt{x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+4x-3\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+4x-3}-\sqrt{x+1}+12x^3-13x^2-3x+4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+3x-4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(12x^2-x-4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+(x-1)(12x^2-x-4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}}+12x^2-x-4\right)\ge 0\quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3+4x-3; x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=3x^2+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x \le \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) \le f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0 \Rightarrow f(x) \le \frac{2}{3}, \forall x \le \frac{2}{3}$, mâu thuẫn điều kiện xác định.

Vậy ta phải có tối thiểu $x > \frac{2}{3}$.

Xét hàm số $g(x) = 12x^2 - x - 4; g'(x) = 24x - 1 > 0, \forall x > \frac{2}{3}$.

Hàm số này liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $g(x) \ge g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow 12x^2 - x - 4 > 0, \forall x > \frac{2}{3}$.

Tổng hợp ta có $\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}} + 12x^2 - x - 4 > 0, \forall x > \frac{2}{3}$, dẫn đến $(1) \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Bài toán 135. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+4x-3} + 1 > \frac{1}{3x-2} + \sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + 4x - 3 \ge 0 \\ x \ge -1; x \ne \frac{2}{3} \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+4x-3} - \sqrt{x+1} + 1 - \frac{1}{3x-2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3+3x-4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}} + \frac{3x-3}{3x-2} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}} + \frac{3(x-1)}{3x-2} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}} + \frac{3}{3x-2}\right) \ge 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 4x - 3; x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x \le \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) \le f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{27} < 0 \Rightarrow f(x) \le \frac{2}{3}, \forall x \le \frac{2}{3}$, mâu thuẫn điều kiện xác định.

Vậy ta phải có tối thiểu $x > \frac{2}{3}$, dẫn đến $\frac{x^2+x+4}{\sqrt{x^3+8x-5}+\sqrt{x+3}} + \frac{3}{3x-2} > 0, \forall x > \frac{2}{3}$.

Thế thì $(1) \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Bài toán 136. Giải bất phương trình $\sqrt{x^5+3x-2} + \frac{x^2+x-1}{2x-1} \ge 1 + \sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^5 + 3x - 2 \ge 0; x + 1 \ge 0; x \ne \frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+\frac{x^2+x-1-(2x-1)}{2x-1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^5+2x-3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x(x-1)}{2x-1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x(x-1)}{2x-1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{2x-1}\right)\geq 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^5+3x-2;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=5x^4+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.
Nếu $x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{32}<0\Rightarrow f(x)<0,\forall x\leq\frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy ta có tối thiểu $x>\frac{1}{2}$ dẫn đến $\frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+\frac{x}{2x-1}>0,\forall x>\frac{1}{2}$.

Thế thì $(1)\Leftrightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 137. Giải bất phương trình $\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+2x^3+2\geq 2x^2+x+\frac{1}{x}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^5+3x-2\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^4+3)\geq 2\\ x\geq -1\end{cases}\Rightarrow x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x\left(\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}\right)+2x^4-2x^3-x^2+2x-1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}\right)+(x-1)(2x^3-x+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x.\frac{x^5+2x-3}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(2x^3-x+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x^2+x+3)}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+(x-1)(2x^3-x+1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x(x^2+x+3)}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+2x^3-x+1\right)\geq 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x)=x^5+3x-2;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=5x^4+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.
Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.
Nếu $x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{32}<0\Rightarrow f(x)<0,\forall x\leq\frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy ta có tối thiểu $x>\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $g(x)=2x^3-x+1;x>\frac{1}{2}\Rightarrow g'(x)=6x^2-1>0,\forall x>\frac{1}{2}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét dẫn đến $g\left(x\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}>0\Rightarrow 2x^3-x+1>0,\forall x>\frac{1}{2}$.

Tổng hợp lại thu được $\frac{x\left(x^2+x+3\right)}{\sqrt{x^5+3x-2}+\sqrt{x+1}}+2x^3-x+1>0,\forall x>\frac{1}{2}$; dẫn đến $\left(1\right)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=\left[1;+\infty\right)$.

Bài toán 138. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+6x-4}+3x^4+2x+1\ge\sqrt{x+2}+x\left(3x^2+2x+3\right)\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+6x-4\ge 0\\ x\ge -2\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+6x-4}-\sqrt{x+2}+3x^4-3x^3-2x^2+3x-1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3+6x-4}-\sqrt{x+2}+\left(x-1\right)\left(3x^3-2x+1\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^3+5x-6}{\sqrt{x^3+6x-4}+\sqrt{x+2}}+\left(x-1\right)\left(3x^3-2x+1\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+6\right)}{\sqrt{x^3+6x-4}+\sqrt{x+2}}+\left(x-1\right)\left(3x^3-2x+1\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(\frac{x^2+x+6}{\sqrt{x^3+6x-4}+\sqrt{x+2}}+3x^3-2x+1\right)\ge 0\quad\left(1\right)$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3+6x-4;x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2+6>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Nếu $x\le\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0\Rightarrow f\left(x\right)<0,\forall x\le\frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy ta có tối thiểu $x>\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=3x^3-2x+1;x>\frac{1}{2}\Rightarrow g'\left(x\right)=9x^2-2>0,\forall x>\frac{1}{2}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét dẫn đến $g\left(x\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}>0\Rightarrow 3x^3-2x+1>0,\forall x>\frac{1}{2}$.

Tổng hợp lại ta có $\frac{x^2+x+6}{\sqrt{x^3+6x-4}+\sqrt{x+2}}+3x^3-2x+1>0,\forall x>\frac{1}{2}$; dẫn đến $\left(1\right)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Lúc này điều kiện xác định được thỏa mãn nên ta có nghiệm $S=\left[1;+\infty\right)$.

Nhận xét.

Chúng ta 4 phương pháp giải phương trình, bất phương trình chủ đạo bao gồm: Biến đổi tương đương; Sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời; Đặt ẩn phụ (đa dạng); Sử dụng đánh giá – bất đẳng thức – hàm số. Mỗi bài toán có thể nằm trọn vẹn trong phương pháp nào đó, tuy nhiên một bài toán hay và sâu sắc là kết hợp nhiều phương pháp, giải được bằng nhiều phương án và đòi hỏi hàm lượng tư duy cao cũng như kỹ năng trình bày thành thạo, logic, linh hoạt. Lớp bài toán trên các bạn có thể phát triển và nâng cao, khi thay thế biểu thức hệ quả bằng các phân thức, đa thức bậc cao hoặc căn thức, có kèm theo sử dụng chặn miền giá trị phản biện cộng tác tính chất đơn điệu hàm số. Tác giả chúc quý độc giả có nhiều phát hiện mới và thú vị hơn nữa.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $\frac{4}{x}+5\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+5\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.
2. $x+x\sqrt{2x}=\frac{1}{x}+x\sqrt{x+\frac{1}{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.
3. $\frac{2}{x}+4\sqrt{x-\frac{3}{x}}=x+4\sqrt{2x-\frac{5}{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.
4. $5\sqrt{3x-\frac{2}{x}}-5\sqrt{2x-\frac{1}{x}}+x-\frac{1}{x}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
5. $6\sqrt{2x}-6\sqrt{x+\frac{3}{x}}+5.\frac{x^2-3}{x}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
6. $(x+3)\sqrt{2x+\frac{1}{x}}+x+\frac{1}{x}=(x+3)\sqrt{x}\quad (x\in\mathbb{R})$.
7. $x+5+\sqrt{x^2+2}=\frac{6}{x}+\sqrt{x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.
8. $\frac{1}{x^2}+6\sqrt{4x+1}=\frac{3}{x^3}+6\sqrt{x^2+x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.
9. $2+5\sqrt{2x^2+x+1}=5\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x}\quad (x\in\mathbb{R})$.
10. $\frac{1}{x^2}+2(x+2)\sqrt{x+5}=\frac{1}{x}+2\sqrt{2(x+2)^3}\quad (x\in\mathbb{R})$.
11. $\frac{3}{x^2}+5\sqrt{x^2-x+1}=\frac{6}{x^3}+5\sqrt{x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.
12. $\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+7\sqrt{2x^2+3x+5}=7\sqrt{x^2+5}\quad (x\in\mathbb{R})$.
13. $5+10\sqrt{x^2+x+4}=10\sqrt{3x+4}+\frac{10}{x}\quad (x\in\mathbb{R})$.
14. $\frac{11}{x^2}+\sqrt{x+2}=\frac{11}{x}+\sqrt{2x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.
15. $1+6\sqrt{2x^2+4x+4}=\frac{2}{x^2+1}+6\sqrt{x^2+4x+5}\quad (x\in\mathbb{R})$.
16. $8\sqrt{x^2+4x+6}+\frac{2}{x-1}+1=8\sqrt{4x+7}\quad (x\in\mathbb{R})$.
17. $\sqrt{5x^2+x+7}+5.\frac{x-2}{x-1}>\sqrt{4x^2+4x+5}\quad (x\in\mathbb{R})$.
18. $1+10\sqrt{x+1}\le 4x^2+10\sqrt{3x}\quad (x\in\mathbb{R})$.
19. $\frac{x}{2\sqrt{x-2}}=4\sqrt{3x+1}-4\sqrt{2x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.
20. $18x^2+2\sqrt{x}>2+\sqrt{x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.
21. $\frac{4x}{\sqrt{2x+9}}=\sqrt{2x+1}-1\quad (x\in\mathbb{R})$.

22. $\dfrac{x+1}{3\sqrt{x}}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

23. $\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x-3}+2}=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

24. $\dfrac{x^2-x-3}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+4}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

25. $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+6}}=\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x-1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

26. $5\sqrt{4x+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{3}{x^3}\geq 5\sqrt{x+\dfrac{6}{x}}+\dfrac{3}{x^5}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

27. $\sqrt{x^2+1}+2x+\dfrac{4}{x}=\sqrt{3x-1}+6\qquad (x\in\mathbb{R})$.

28. $\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x-1}+4x\sqrt{x}>12\sqrt{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

29. $\sqrt{2x-\dfrac{1}{x}}+x\sqrt{x+3}=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

30. $16x^3+(x+1)\sqrt{5x-2}>(x+1)\sqrt{x-1}+x\qquad (x\in\mathbb{R})$.

31. $4x^3+2\sqrt{x}>4+\sqrt{3x+\dfrac{1}{x}}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

32. $4\sqrt{6x+2}-4\sqrt{5x+1}+x^3+1>0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

33. $\sqrt{3x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{2x+\dfrac{5}{x}}+2x-2-\dfrac{6}{x+1}>0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

34. $6x+\sqrt{4x-\dfrac{3}{x}}>\dfrac{2}{x}+\sqrt{x-\dfrac{2}{x}}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

35. $\sqrt{x^3+2x-3}-\sqrt{x^3+x}+x-3=0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

36. $\sqrt{x^3+2x+3}-\sqrt{x^3+x+4}+5x^3>5\qquad (x\in\mathbb{R})$.

37. $6\sqrt{x^3+3x+4}+x>6\sqrt{2x+6}+1\qquad (x\in\mathbb{R})$.

38. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}}{x}+7(x-2)>0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

39. $x^4+5\sqrt{x^3+x-1}>8x+5\sqrt{x+7}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

40. $\left(\sqrt{x^3+2x-1}-\sqrt{x+1}\right).\dfrac{x+3}{x+4}+5x^2>5x\qquad (x\in\mathbb{R})$.

41. $\sqrt{x^3+x-1}+3x(1+x)>6+\sqrt{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

42. $x^5+\dfrac{6\sqrt{x^3+5x-4}}{x}\geq x+\dfrac{6\sqrt{x+1}}{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

43. $\dfrac{8}{x}.\left(\sqrt{x^5+5x-2}-\sqrt{x+3}\right)+(x-1)(x^3+1)\geq 0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

44. $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}-\sqrt{2x}+9\leq x(x+8)\qquad (x\in\mathbb{R})$.

45. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x^3+x}}{(4x-3)\sqrt{2}}+3x^2-7x+2>0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

46. $\sqrt{x^3+8x-5}+3x^3-5x^2+2x\geq\sqrt{x+3} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

47. $\sqrt{x^3+8x-5}+3x^2-4x+1\geq\sqrt{x+3} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

48. $\dfrac{\sqrt{x^3+3x-2}-\sqrt{x+1}}{2x-1}+x^3+4x^2\geq 2x+3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

49. $\dfrac{\sqrt{x^3+3x-2}-\sqrt{x+1}}{2x-1}+x^3-x^2+4x-4\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

50. $\sqrt{x^3+3x-2}+x^4+x\geq x^3+1+\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

51. $\dfrac{\sqrt{x^3+7x-5}-\sqrt{x+2}}{1+x^3}+x^3+9x^2-16x+6\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

52. $x^3+(x-2)(2x-1)+\sqrt{x^3+7x-5}\geq\sqrt{x+2} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

53. $4x^4-4x^3-2x^2+3x-1+\sqrt{x^5+3x-2}>\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

54. $\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+(x-1)\left(4x-\sqrt{3}\right)>0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

55. $x^4+3x^2+1\sqrt{x^5+3x-2}\geq x^3+4x+\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

56. $x^3+12x++\dfrac{\sqrt{x^7+6x-4}-\sqrt{x+2}+7}{x}\geq x^2+19 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

57. $\sqrt{x^7+6x-4}+12x^4-12x^3+12x^2-23x+11\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

58. $\sqrt{x^3+4x-3}+x^4-x^3+2x^2-5x+3\geq\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

59. $\sqrt{x^3+4x-3}-\sqrt{x+1}+2-\dfrac{2}{2x-1}>0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

60. $\sqrt{x^3+4x-3}-\sqrt{x+1}+\dfrac{4x^2-5x+1}{3x-2}>1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

61. $\sqrt{x^5+3x-2}+2x^2+2\geq 3x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

62. $\sqrt{x^3+6x-4}-\sqrt{x+2}+10x^4-10x^3-2x^2+2x\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

63. $\sqrt{x^3+6x-4}+18x^4-18x^3-2x^2+x+1\geq\sqrt{2+x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

64. $\dfrac{\sqrt{x^3+6x-4}-\sqrt{x+2}}{x}+x^3+2x\geq x^2+2+\dfrac{1}{x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

65. $\sqrt{x^5+3x-2}-\sqrt{x+1}+\dfrac{x^4-x^3}{2x-1}\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

66. $\dfrac{\sqrt{x^3+3x-5}-\sqrt{2x+5}-4}{x}+x^3-2x^2-2x+6\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

67. $\sqrt{x^3+3x-5}-\sqrt{2x+5}+\dfrac{4x^3-9x^2+4}{3x-1}\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

68. $\dfrac{\sqrt{x^3+3x-5}-\sqrt{2x+5}}{x}+3x^4-6x^3-2x+4\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Rõ ràng $\sqrt{1+x^2}+x\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow 5x+5\sqrt{1+x^2}=2\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow 5x=-3\sqrt{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\25x^2=9x^2+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\16x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x\in\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$2\left(x^2+1\right)-2x\sqrt{x^2+1}=5\Leftrightarrow 2x^2-3=2x\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2-3\right)x\geq 0\\4x^4-12x^2+9=4x^2\left(x^2+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2-3\right)x\geq 0\\16x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2-3\right)x\geq 0\\x\in\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{3}{4}$.

Bài toán 140. Giải phương trình $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{16+x^2}}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$x\sqrt{x^2+16}+x^2+16=40\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}=24-x^2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(24-x^2\right)x>0\\x^2\left(x^2+16\right)=x^4-48x^2+576\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(24-x^2\right)x>0\\64x^2=576\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm $x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện kiện $x\in\mathbb{R}$. Rõ ràng $\sqrt{x^2+16}\neq x,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{16}{\sqrt{x^2+16}-x}=\frac{40}{\sqrt{16+x^2}}\Leftrightarrow 2\sqrt{16+x^2}=5\sqrt{16+x^2}-5x$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{16+x^2}=5x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\9.16+9x^2=25x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=9\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm $x=3$.

Bài toán 141. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+9}-2x=\dfrac{9}{2\sqrt{4x^2+9}}$ trên tập hợp số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực.

Rõ ràng $\sqrt{4x^2+9}-2x\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9}{\sqrt{4x^2+9}+2x}=\frac{9}{2\sqrt{4x^2+9}}\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+9}+2x=2\sqrt{4x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{4x^2+9}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\4x^2=4x^2+9\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 142. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2\sqrt{4x^2+4x+3}}+2x+1$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Rõ ràng $\sqrt{4x^2+4x+3}+2x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2+x+\frac{3}{4}}-2x-1=\frac{3}{2\sqrt{4x^2+4x+3}}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x+1}=\frac{3}{2\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+4x+3}+2x+1=2\sqrt{4x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{4x^2+4x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\geq 0\\4x^2+4x+1=4x^2+4x+3\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 143. Giải phương trình $\sqrt{9x^2+6x+4}=\frac{3}{2\sqrt{9x^2+6x+4}+x+1}+3x+1$ trên tập hợp số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực.

Rõ ràng $\sqrt{9x^2+6x+4}+3x+1\neq 0$ nên phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{9x^2+6x+4}-3x-1=\frac{3}{2\sqrt{9x^2+6x+4}+x+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{9x^2+6x+4}+3x+1}=\frac{3}{2\sqrt{9x^2+6x+4}+x+1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+6x+4}+3x+1=2\sqrt{9x^2+6x+4}+x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x=\sqrt{9x^2+6x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\5x^2+6x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 144. Trích lược bài toán T3/205; Đề ra kỳ này; Số 205; Tháng 7 năm 1994; Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tác giả: Lê Quốc Hán – Giảng viên Khoa Toán – Tin học; Trường ĐHSP Vinh; Tỉnh Nghệ An.

Giải phương trình $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-1\leq x\leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}.\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{1-x}+1=2\sqrt{1+x}+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x}+1\end{array}\right.\quad[*]$$

Ta có

$$[*] \Leftrightarrow 1-x=4x+4+4\sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow -5x-4=4\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{5} \\ 25x^2+40x+16=16x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{4}{5} \\ 25x^2+24x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{24}{25}$$

Đối chiếu điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{24}{25};0\right\}$.

Bài toán 145. Trích lược câu I.2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên ĐHKHTN; ĐHQG Hà Nội; Kỳ thi tuyển sinh năm học 2012 – 2013.

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-4\le x\le 4$.

Nhận xét $x=0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Với $x\ne 0$ có biến đổi

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}.\left(\sqrt{4-x}+2\right)=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{4-x}+2=2\left(\sqrt{x+4}+2\right) \qquad (*) \end{array}\right.$$

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4-x}=2\sqrt{x+4}+2 \Leftrightarrow 4-x=4x+16+8\sqrt{x+4}+4 \Leftrightarrow 8\sqrt{x+4}=-5x-16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x-16\ge 0 \\ 64(x+4)=25x^2+160x+256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{16}{5} \\ 25x^2+96x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{96}{25}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Bài toán 146. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+2x-5\right)=x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}.\left(\sqrt{x+1}+2x-5\right)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x+1}+2x-5=\sqrt{x+1}+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện đi đến kết luận nghiệm $x=0; x=3$.

Bài toán 147. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+4x+1\right)=x \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -9$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}.\left(\sqrt{x+9}+4x+1\right)=x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x+9}+4x+1=\sqrt{x+9}+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 148. Giải phương trình $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+x^2-x+1\right)=2x$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}.\left(\sqrt{2x+1}+x^2-x+1\right)=2x$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{2x+1}+x^2-x+1=\sqrt{2x+1}+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x(x-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x=0;x=1$.

Nhận xét.

Đối với các bài toán từ 144 đến 148, các bạn chú ý sử dụng đại lượng liên hợp theo quy trình

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right).f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.f(x)=g(x).$$

Không nên sử dụng đại lượng liên hợp theo quy trình $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right).f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (*).

Khi đó, với (*) thì chúng phải xem xét kỹ lưỡng $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ này trước khi bố trí nó phía dưới mẫu thức. Đa số với trường hợp mẫu thức hiệu, cần xét trường hợp mẫu thức bằng 0 tức là $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, thử trực tiếp vào phương trình đề bài, rõ ràng điều này khiến cho lời giải thêm "dài dòng" không cần thiết, vô tình làm quá trình biến đổi của mình thêm phần "rắc rối".

Bài toán 149. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(3x-\sqrt{x+4}\right)=x\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}.\left(3x-\sqrt{x+4}\right)=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3x-\sqrt{x+4}=\sqrt{x+4}+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3x-2=2\sqrt{x+4}\end{array}\right.\quad(1)$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge 2\\ 9x^2-12x+4=4x+16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge 2\\ 9x^2-16x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{8+2\sqrt{43}}{9}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=0;x=\dfrac{8+2\sqrt{43}}{9}$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\left(\sqrt{3x+16}-4\right)\left(2\sqrt{3x+16}+x+2\right)=3x\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{16}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x}{\sqrt{3x+16}+4}.\left(2\sqrt{3x+16}+x+2\right)=3x$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2\sqrt{3x+16}+x+2=\sqrt{3x+16}+4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{3x+16}=2-x\quad[1]\end{array}\right.$$

Rõ ràng $[1]\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ 3x+16=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x^2-7x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=\dfrac{7-\sqrt{97}}{2}$.

Bài toán 151. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+25}-5\right)\left(\sqrt{x+25}+x^2-3x\right)=x \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -25$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+25}+5}.\left(\sqrt{x+25}+x^2+4x\right)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sqrt{x+25}+x^2+4x=\sqrt{x+25}+5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+4x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\in\left\{-5;1\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{-5;0;1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được $S=\left\{-5;0;1\right\}$.

Bài toán 152. Giải phương trình $\left(2x+1\right)\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2x+1\right)\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+3}=0 \\ 2x+1=\sqrt{x^2+3}-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2+3}=-x & (1) \\ 3x+1=\sqrt{x^2+3} & (2) \end{array}\right.$$

- $\left(1\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 0x^2=3 \end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $\left(2\right)\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 9x^2+6x+1=x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3} \\ 4x^2+3x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 153. Giải phương trình $\left(x+2\right)\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=9 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định x thực. Rõ ràng $\sqrt{x^2+9}\ne x,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x+2\right).\frac{9}{\sqrt{x^2+9}-x}=9 \Leftrightarrow x+2=\sqrt{x^2+9}-x \Leftrightarrow 2x+2=\sqrt{x^2+9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 4x^2+8x+4=x^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 3x^2+8x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-4+\sqrt{31}}{3}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=\dfrac{-4+\sqrt{31}}{3}$.

Bài toán 154. Giải phương trình $x\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x-1\right)=1 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện x thực.

Nhận xét $\sqrt{x^2+2x+3}+x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}=1\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}+x+1=2x\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+2x+3=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 4x=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 155. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+4x+5}+2x=\frac{4}{x+3}-1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -3$.

Rõ ràng $\sqrt{4x^2+4x+5}\neq 2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^2+4x+5}+2x+1=\frac{4}{x+3}\Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x+1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow (x+3).\frac{4}{\sqrt{4x^2+4x+5}-2x-1}=4\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+4x+5}-2x-1=x+3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+4x+5}=3x+4\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4\geq 0 \\ 4x^2+4x+5=9x^2+12x+16\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{4}{3} \\ 5x^2+8x+11=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 156. Giải bất phương trình $x^2\geq \frac{x-4}{2}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}\geq x-4\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2\geq x-4\Leftrightarrow 2\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)\geq x-4$$

$$\Leftrightarrow x+8\geq 4\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2+16x+64\geq 16x+16\Leftrightarrow x^2-8x+48\geq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

Nhận thấy $x+8+4\sqrt{x+1}\geq 0,\forall x\geq -1$ nên [1] nghiệm đúng với $x\geq -1$. Kết luận nghiệm $x\geq -1$.

Bài toán 157. Trích lược câu II.1; Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Khối A và B; Đề thi chính thức; Trường Đại học Sư phạm Vinh; Tỉnh Nghệ An; Kỳ thi tuyển sinh năm 2001.

Giải bất phương trình $\frac{x^2}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}>x-4 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}>x-4\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2>x-4$$

$$\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{1+x}+1>x-4\Leftrightarrow 3>\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 9>x+1\Leftrightarrow x<8$$

Đối chiếu điều kiện ta suy ra nghiệm $-1\leq x<8$.

Bài toán 158. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2} > x+10$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện $-4 \le x \ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2} > x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}+2\right)^2 > x+10$$

$$\Leftrightarrow x+8+4\sqrt{x+4} > x+10 \Leftrightarrow 4\sqrt{x+4} > 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+4} > 1 \Leftrightarrow 4x+16 > 1 \Leftrightarrow x > -\frac{15}{4}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được $-\dfrac{15}{4} < x \ne 0$.

Bài toán 159. Giải phương trình $\dfrac{10x^2}{\left(\sqrt{5x+1}-1\right)^2} > x+2$ trên tập hợp số thực.

Lời giải.
Điều kiện $-\dfrac{1}{5} \le x \ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{10}{25}.\frac{\left(\sqrt{5x+1}+1\right)^2\left(\sqrt{5x+1}-1\right)^2}{\left(\sqrt{5x+1}-1\right)^2} > x+2 \Leftrightarrow \frac{2}{5}.\left(\sqrt{5x+1}+1\right)^2 > x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(5x+2+2\sqrt{5x+1}\right) > 5x+10 \Leftrightarrow 2\sqrt{5x+1} > 6-5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-5x<0 \\ \begin{cases} 6-5x \ge 0 \\ 20x+4 > 25x^2-60x+36 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x>6 \\ \begin{cases} 5x \le 6 \\ 25x^2-80x+32<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x>6 \\ \dfrac{40-20\sqrt{2}}{25} < x \le \dfrac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > \frac{40-20\sqrt{2}}{25}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x > \dfrac{40-20\sqrt{2}}{25}$.

Bài toán 160. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x+25}-5\right)^2} - 49 > x$ trên tập hợp số thực.

Lời giải.
Điều kiện $-25 \le x \ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{x+25}-5\right)^2} > x+49 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x+25}-5\right)^2\left(\sqrt{x+25}+5\right)^2}{\left(\sqrt{x+25}-5\right)^2} > x+49$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+25}+5\right)^2 > x+49 \Leftrightarrow x+50+10\sqrt{x+25} > x+49 \Leftrightarrow 10\sqrt{x+25} > -1 \quad (1)$$

Rõ ràng (1) luôn đúng với mọi $-25 \le x \ne 0$. Kết luận nghiệm $-25 \le x \ne 0$

Bài toán 161. Giải phương trình $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x>0\\x\le -1\end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{x^2-\left(x^2+x\right)}-\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x^2-\left(x^2+x\right)}=\frac{3}{x}\Leftrightarrow 4x-4\sqrt{x^2+x}-x-\sqrt{x^2+x}=-3$$

$$\Leftrightarrow 3x+3=5\sqrt{x^2+x}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\9\left(x+1\right)^2=5x\left(x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\\left(x+1\right)\left(4x+9\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=-1$.

Bài toán 162. Giải phương trình $\dfrac{5}{x-\sqrt{x^2-5}}-\dfrac{5}{x+\sqrt{x^2-5}}=4\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2\ge 5\\\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-5}\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\ge 5\\x^2-\left(x^2-5\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow |x|\ge\sqrt{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5\left(x+\sqrt{x^2-5}\right)}{x^2-\left(x^2-5\right)}-\frac{5\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)}{x^2-\left(x^2-5\right)}=4\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{x^2-5}}{5}=4\Leftrightarrow \sqrt{x^2-5}=2\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=3\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\{-3;3\}$.

Bài toán 163. Giải phương trình $\dfrac{6}{x+\sqrt{x^2+6}}-\dfrac{6}{\sqrt{x^2+6}-x}=x^2-3$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{6\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)}{-6}-\frac{6\left(\sqrt{x^2+6}+x\right)}{6}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+6}-x-\left(\sqrt{x^2+6}+x\right)=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x\in\{-3;1\}$$

Kết luận phương trình có hai nghiệm.

Bài toán 164. Giải phương trình $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}-3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}+3}=x-7$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^2}-\frac{x^3\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2}=x-7$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)-x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)=x-7$$

$$\Leftrightarrow -6x=x-7 \Leftrightarrow 7x=7 \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 165. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+x}=x+3 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Rõ ràng $\sqrt{x^2+1}+x\neq 0, \sqrt{x^2+1}-x\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+1}+x+2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=x+3 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}=2x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3\geq 0\\ 9x^2+9=4x^2+12x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{3}{2}\\ 5x^2-12x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{3}{2}\\ x\in\left\{0;\dfrac{12}{5}\right\}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{0;\dfrac{12}{5}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 166. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}+\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=x+2$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^2+1}+2x+\sqrt{4x^2+1}-2x=x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+1}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases}x+2\geq 0\\ 16x^2+4=x^2+4x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ 15x^2-4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ x\left(15x-4\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{0;\dfrac{4}{15}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 167. Giải phương trình $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+25}+5}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=\sqrt{x^2+25}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Rõ ràng $\sqrt{x^2+4}+x\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+25}-5\right)}{x^2}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=\sqrt{x^2+25}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+25}-5+\sqrt{x^2+4}+x=\sqrt{x^2+25} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5-x\geq 0\\ x^2+4=x^2-10x+25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 5\\ 10x=21\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{21}{10}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{21}{10}$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}-x}+\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+9}-2x}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}-x}{9}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{9}+\frac{\sqrt{4x^2+9}+2x}{9}=\frac{\sqrt{x^2+9}-x}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{9}+\frac{\sqrt{4x^2+9}+2x}{9}=0\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+9}=-4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 4x^2+9=16x^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 12x^2=9 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 169. Giải phương trình $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}+4}-\dfrac{4}{\sqrt{9x^2+4}+3x}=\sqrt{x^2+16}+x \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2}-\frac{4\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)}{4}=\sqrt{x^2+16}+x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}+4-\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)=\sqrt{x^2+16}+x$$

$$\Leftrightarrow 2x+4=\sqrt{9x^2+4}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ge -4 \\ 4x^2+16x+16=9x^2+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 5x^2-16x-12=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{8+\sqrt{31}}{5};\frac{8-\sqrt{31}}{5}\right\}$$

Kết luận phương trình có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 170. Giải phương trình $\dfrac{5x+15}{2+\sqrt{1-x}}+\dfrac{x+8}{3-\sqrt{1-x}}=x+8 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-8\le x\ne 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5\left(2-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)}{2+\sqrt{1-x}}+\frac{\left(3-\sqrt{1-x}\right)\left(3+\sqrt{1-x}\right)}{3-\sqrt{1-x}}=x+8$$

$$\Leftrightarrow 5\left(2-\sqrt{1-x}\right)+\left(3+\sqrt{1-x}\right)=x+8\Leftrightarrow 4\sqrt{1-x}=5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ 16-16x=x^2-10x+25 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ x^2+6x+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ (x+3)^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-3$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Bài toán 171. Giải phương trình $\dfrac{9(x+3)}{2+\sqrt{1-x}}+\dfrac{x+8}{3-\sqrt{1-x}}=x+8 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-8\le x\ne 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{9\left(2+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x}\right)}{2+\sqrt{1-x}}+\frac{\left(3+\sqrt{1-x}\right)\left(3-\sqrt{1-x}\right)}{3-\sqrt{1-x}}=x+8$$

$$9\left(2-\sqrt{1-x}\right)+\left(3+\sqrt{1-x}\right)=x+8 \Leftrightarrow 13-x=8\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 18 \\ x^2-26x+169=64-64x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 18 \\ (x+3)(x+35)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-35;-3\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=-35; x=-3$.

Bài toán 172. Giải phương trình $\dfrac{x+3}{2-\sqrt{1-x}}+\dfrac{7(8+x)}{3+\sqrt{1-x}}=13+x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3\ne x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(2+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x}\right)}{2-\sqrt{1-x}}+\frac{7\left(3+\sqrt{1-x}\right)\left(3-\sqrt{1-x}\right)}{3+\sqrt{1-x}}=13+x$$

$$\Leftrightarrow 2+\sqrt{1-x}+7\left(3-\sqrt{1-x}\right)=13+x \Leftrightarrow 6\sqrt{1-x}=10-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ 36-36x=x^2-20x+100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ x^2+16x+64=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 10 \\ (x+8)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-8$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=-8$.

Bài toán 173. Giải phương trình $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1}+\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}+3}=x-\sqrt{x+3}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3}-1+\sqrt{x+3}-3=x-\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ 9x+27=x^2+8x+16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x^2-x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1+\sqrt{45}}{2};\frac{1-\sqrt{45}}{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện kết luận phương trình có hai nghiệm.

Bài toán 174. Giải phương trình $\dfrac{x-13}{\sqrt{x+3}+4}-\dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}}=x$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -3; x\ne -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3}-4+1+\sqrt{x+3}=x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}=x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 4x+12=x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-3;1\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{5}{4\sqrt{x^2+1}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
2. $\sqrt{9+x^2}-x=\dfrac{9}{4\sqrt{x^2+9}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
3. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{50}{\sqrt{16+x^2}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
4. $\sqrt{4x^2+9}-2x=\dfrac{9}{4\sqrt{4x^2+9}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
5. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=4x \quad (x\in\mathbb{R})$.
6. $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(4\sqrt{x+1}+5x-5\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
7. $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(3\sqrt{x+1}+4x-1\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
8. $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(6\sqrt{x+1}+x-1\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
9. $\left(\sqrt{x+49}-7\right)\left(\sqrt{x+9}+4x^3+1\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
10. $\left(\sqrt{x+16}-4\right)\left(\sqrt{x+16}+4x^2+x+1\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
11. $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(7x-\sqrt{x+4}\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
12. $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(3x-1-\sqrt{x+4}\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
13. $\left(\sqrt{3x+49}-7\right)\left(2\sqrt{3x+49}+3x+2\right)=3x \quad (x\in\mathbb{R})$.
14. $\left(\sqrt{x+25}-5\right)\left(\sqrt{x+25}+7x^2-3x\right)=x \quad (x\in\mathbb{R})$.
15. $(2x+1)\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=9 \quad (x\in\mathbb{R})$.
16. $(x+2)\left(x+\sqrt{x^2+25}\right)=25 \quad (x\in\mathbb{R})$.
17. $\dfrac{12}{x+\sqrt{x^2+6}}-\dfrac{12}{\sqrt{x^2+6}-x}=x^2-3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
18. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}-3}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}+3}=4x-13 \quad (x\in\mathbb{R})$.
19. $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}-x}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}+x}=x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
20. $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}+\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=6x+\sqrt{4x^2+1}+2 \quad (x\in\mathbb{R})$.
21. $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x+36}+6\right)^2}>x-4 \quad (x\in\mathbb{R})$.
22. $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)^2}>2x+10 \quad (x\in\mathbb{R})$.

23. $\dfrac{25x^2}{\left(\sqrt{5x+1}-1\right)^2} > x+2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

24. $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x+49}-7\right)^2} - 49 > x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

25. $\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right) = 3x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

26. $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right) = 2x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

27. $\sqrt{x+1} = \dfrac{2x}{\sqrt{5-x}+1} + 1 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

28. $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+6x^2-x+1\right) = 2x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

29. $\left(\sqrt{3x+1}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+x^2-6x+1\right) = 3x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

30. $x\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x-1\right) = \dfrac{1}{2} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

31. $\sqrt{4x^2+4x+7}+2x = \dfrac{4}{x+3} - 1 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

32. $x^2 \ge \dfrac{x-4}{2}\left(\sqrt{x+9}+3\right)^2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

33. $\dfrac{9}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{4}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

34. $\dfrac{3}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{2}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

35. $\dfrac{10}{x-\sqrt{x^2-5}} - \dfrac{15}{x+\sqrt{x^2-5}} = 4 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

36. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+25}+5} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = 2x+\sqrt{x^2+25} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

37. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}-x} + \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+9}-2x} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3x}{9} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

38. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}+4} - \dfrac{4}{\sqrt{9x^2+4}+3x} = \sqrt{x^2+16}+x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

39. $\dfrac{9(x+3)}{2+\sqrt{1-x}} + \dfrac{x+8}{3-\sqrt{1-x}} = 3x+8 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

40. $\dfrac{x+3}{2-\sqrt{1-x}} + \dfrac{7(8+x)}{3+\sqrt{1-x}} = 13+4x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

41. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1} + \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}+3} = x+1-\sqrt{x+3} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

42. $\dfrac{x-13}{\sqrt{x+3}+4} - \dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}} = x+\dfrac{1}{2} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

43. $\dfrac{x-13}{\sqrt{x+3}+4} - \dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}} = 4x-\dfrac{2}{3} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Bài toán 175. Giải phương trình $\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+4}+1 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+4}-1+\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x+4}+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=3\Leftrightarrow x+1=9\Leftrightarrow x=8$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 176. Giải phương trình $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}+2}+\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\sqrt{x+5}+x$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+5}-2+\sqrt{x+5}+3=\sqrt{x+5}+x\Leftrightarrow \sqrt{x+5}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x+5=x^2+2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2+x-4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất.

Bài toán 177. Giải phương trình $\dfrac{x-13}{\sqrt{x+3}+4}+\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}=2\sqrt{x+3}-6$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3}-4+\sqrt{x+2}-3=2\sqrt{x+3}-6\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+1=\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+3}=x+2\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}=-2\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 178. Giải phương trình $\dfrac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2}+\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x+2}+1}=2\sqrt{3x+2} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+1}-2+\sqrt{3x+2}-1=2\sqrt{3x+2}\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=\sqrt{3x+2}+3$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=3x+11+6\sqrt{3x+2}\Leftrightarrow -x-10=6\sqrt{3x+2} \qquad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 179. Giải phương trình $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+1}+\dfrac{8x^2}{\sqrt{4x^2+1}+1}=2\sqrt{4x^2+1}+x$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+2}-1+2\left(\sqrt{4x^2+1}-1\right)=2\sqrt{4x^2+1}+x\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2}=x+3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x^2+2=x^2+6x+9 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 6x=-7 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{7}{6}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 180. Giải phương trình $\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\dfrac{x^3+7}{\sqrt{x^3+8}+1}=\sqrt{x^3+3}+3x-4 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\sqrt[3]{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+3}-3+\sqrt{x^3+8}-1=\sqrt{x^3+3}+3x-4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+8}=3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^3-9x^2+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ (x-1)(x^2-8x-8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{1;4+2\sqrt{6}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 181. Giải phương trình $\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}}+\dfrac{2x}{3-\sqrt{9-2x}}=5+2\sqrt{9-2x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\ne x\le 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2+\sqrt{4-x}+3+\sqrt{9-x}=5+2\sqrt{9-2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=\sqrt{9-2x} \Leftrightarrow 4-x=9-2x \Leftrightarrow x=5$$

Đối chiếu điều kiện ta thấy không thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 182. Giải phương trình $\dfrac{x+4}{4-\sqrt{5-x}}-\dfrac{x-6}{2-\sqrt{10-x}}=x+\sqrt{5-x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1\ne x\le 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4+\sqrt{5-x}-\left(2+\sqrt{10-x}\right)=x+\sqrt{5-x} \Leftrightarrow 2-x=\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x^2-4x+4=10-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x^2-3x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+4}+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
2. $\frac{x+1}{\sqrt{x+5}+2}+\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\sqrt{x+5}+x \quad (x\in\mathbb{R})$.
3. $\frac{x-13}{\sqrt{x+3}+4}+\frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}=2\sqrt{x+3}+x-6 \quad (x\in\mathbb{R})$.
4. $\frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2}+\frac{3x+1}{\sqrt{3x+2}+1}=3x+2\sqrt{3x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
5. $\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+1}+\frac{8x^2}{\sqrt{4x^2+1}+1}=2\sqrt{4x^2+1}+x \quad (x\in\mathbb{R})$.
6. $\frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{x^3+7}{\sqrt{x^3+8}+1}=\sqrt{x^3+3}+4x-5 \quad (x\in\mathbb{R})$.
7. $\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}+\frac{2x}{3-\sqrt{9-2x}}=5x+2\sqrt{9-2x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
8. $\frac{x+4}{4-\sqrt{5-x}}-\frac{x-6}{2-\sqrt{10-x}}=\frac{x}{2}+\sqrt{5-x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
9. $\frac{x+3}{2-\sqrt{1-x}}+\frac{x+7}{3-\sqrt{2+x}}=\sqrt{2+x}+2 \quad (x\in\mathbb{R})$.
10. $\frac{x+7}{3-\sqrt{2-x}}+\frac{x+3}{2-\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
11. $\frac{x+11}{4-\sqrt{5-x}}+\frac{x+1}{3-\sqrt{8-x}}=\sqrt{8-x}+\frac{1}{2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
12. $\frac{x-3}{2-\sqrt{7-x}}+\frac{x-6}{3+\sqrt{x+3}}=3-\sqrt{x+3} \quad (x\in\mathbb{R})$.
13. $\frac{x-5}{3+\sqrt{x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}>\sqrt{x+6}+x+1 \quad (x\in\mathbb{R})$.
14. $\frac{x-10}{4+\sqrt{x+6}}+\frac{x+4}{\sqrt{x+8}+2}\le\sqrt{x+8}+x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
15. $\frac{2x-1}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{3x-1}{\sqrt{3x+3}+2}\ge\sqrt{3x+3}+x+1 \quad (x\in\mathbb{R})$.
16. $\frac{3x-2}{\sqrt{3x+2}+2}+\frac{3x}{\sqrt{3x+4}+2}<\sqrt{3x+4}+x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$.
17. $\frac{5x-1}{\sqrt{5x+3}+2}+\frac{5x-3}{\sqrt{5x+6}+3}\le\sqrt{5x+6}+x+4 \quad (x\in\mathbb{R})$.
18. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{3x+1}{\sqrt{3x+5}+2}<\sqrt{x}-2 \quad (x\in\mathbb{R})$.
19. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{3x-4}{\sqrt{3x+5}+3}<\sqrt{x}-x-1 \quad (x\in\mathbb{R})$.
20. $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}+\frac{6x-3}{\sqrt{6x+1}+2}\le x+\sqrt{6x+1}+\frac{1}{2} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Bài toán 183. Giải phương trình $\left(x-1\right)\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x-1\right)\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\sqrt{x+1}+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}\right)=0\qquad[1]$$

Nhận thấy $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}>0,\forall x\ge -1$ nên $[1]\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện đi đến tập nghiệm $S=\left\{1\right\}$.

Bài toán 184. Trích lược câu II.2; Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Khối B; Đề thi dự bị số 1; Kỳ thi tuyển sinh năm 2008; Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam.

Giải phương trình $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0\qquad(1)\end{array}\right.$$

Dễ nhận thấy $\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}>0,\forall x\ge\frac{5}{3}$ và kết hợp điều kiện thu được $x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{10x+1}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}$$
$$\Leftrightarrow 12x-1+2\sqrt{10x+1}.\sqrt{2x-2}=12x-1+2\sqrt{9x+4}.\sqrt{3x-5}$$
$$\Leftrightarrow 20x^2-18x-2=27x^2-33x-20\Leftrightarrow 7x^2-15x-18=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{6}{7};3\right\}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm $x=3$.

Bài toán 185. Giải phương trình $\sqrt{5x+2}-\sqrt{2x}=\frac{3x+2}{\sqrt{5x}+\sqrt{2x+2}}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x+2}{\sqrt{5x+2}+\sqrt{2x}}=\frac{3x+2}{\sqrt{5x}+\sqrt{2x+2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+2=0\\ \sqrt{5x+2}+\sqrt{2x}=\sqrt{5x}+\sqrt{2x+2}\qquad(1)\end{array}\right.$$

- ✓ $3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.
- ✓ $(1) \Leftrightarrow 7x+2+2\sqrt{2x(5x+2)}=7x+2+2\sqrt{5x(2x+2)} \Leftrightarrow 10x^2+4x=10x^2+10x \Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 186. Giải phương trình $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{5}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}=0$$
$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)=\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}$$

Kết hợp với giả thiết đề bài ta thu được

$$5\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}+6\sqrt{x}=2\sqrt{x+4}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}+3\sqrt{x}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow 4x+4+9x+12\sqrt{x^2+x}=x+4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+x=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=0$.

Bài toán 187. Trích lược câu I.2; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi dự bị; Trường THPT Chuyên ĐHKHTN; ĐHQG Hà Nội; Kỳ thi tuyển sinh năm học 2011 – 2012.

Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{4x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{5x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x}=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}}+\frac{1-x}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}\right)}+\frac{1-x}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x}}=0$$
$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x}}\right]=0 \quad (1)$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}.\sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x}}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 188. Giải phương trình $2+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+3} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+5}-2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{2x+5}-2\right)\ge 0\\ 2x+9-2\sqrt{(x+6)(x+3)}=2x+9-4\sqrt{2x+5}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x+5}\ge 2\\ \sqrt{(x+6)(x+3)}=2\sqrt{2x+5}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x+5\ge 4\\ x^2+9x+18=8x+20\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x^2+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ (x-1)(x+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}+\sqrt{x+3}-2=0\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=0\quad (1)$$

Để ý rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}>0,\forall x\ge -\dfrac{5}{2}$. Do đó (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm.

Bài toán 189. Giải phương trình $\dfrac{3x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{5-2x}}=\dfrac{5x-7}{\sqrt{2x}-\sqrt{7-3x}}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ne 1;x\ne \dfrac{7}{5}$ và $0\le x\le \dfrac{7}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{2x}+\sqrt{7-3x}$$
$$\Leftrightarrow x+2+5-2x+2\sqrt{(x+2)(5-2x)}=2x+7-3x+2\sqrt{2x(7-3x)}$$
$$\Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{-2x^2+x+10}=7-x+2\sqrt{14x-6x^2}$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+x+10=14x-6x^2\Leftrightarrow 4x^2-13x+10=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5}{4};2\right\}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $0\le x\le \dfrac{7}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{5-2x}=\sqrt{2x}+\sqrt{7-3x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{5-2x}-\sqrt{7-3x}=\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5-2x-(7-3x)}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{7-3x}}=\frac{2x-(x+2)}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{5-2x}+\sqrt{7-3x}}=\frac{x-2}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{5-2x}+\sqrt{7-3x}=\sqrt{2x}+\sqrt{x+2} \quad (1) \end{array}\right.$$

Kết hợp (1) và phương trình ban đầu thu được

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-3x}=\sqrt{7-3x}-\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{7-3x} \Leftrightarrow x+2=7-3x \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x=2; x=\frac{5}{4}$.

Bài toán 190. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x+2}} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\geq 0; x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2} \qquad (x\in\mathbb{R})$

Với $x\neq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3}\neq\sqrt{3x+1}; 2\sqrt{x}\neq\sqrt{2x+2}$. Ta có biến đổi

$$\frac{x+3-(3x+1)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}=\frac{4x-(2x+2)}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x+2}} \Leftrightarrow \frac{2-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x+2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+2}-2\sqrt{x} \quad (1) \end{array}\right.$$

Kết hợp (1) với đề bài thu được $2\sqrt{x+3}=2\sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x+3=2x+2 \Leftrightarrow x=1$. Giá trị này bị loại.

Vậy bài toán có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\geq 0; x\neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2} \qquad (x\in\mathbb{R})$

Khi đó ta có nhận xét

$$\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+2}}.\frac{3x-3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}=\frac{3(x-1)^2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+2}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)}>0.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3x+1+2x+2-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)}=4x+x+3-4\sqrt{x(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+8x+2}=\sqrt{4x^2+12x} \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy bài toán có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 191. Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+3}+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x+4+2\sqrt{x^2+4x}=2x+4+2\sqrt{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;3\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=3$.

Bài toán 192. Giải phương trình $\dfrac{2x+4}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}}=\dfrac{6x+2}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{1-x}}\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{5x+3}+\sqrt{1-x}$$
$$\Leftrightarrow 4x+4+2\sqrt{x(3x+4)}=4x+4+2\sqrt{(5x+3)(1-x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x}=\sqrt{-5x^2+2x+3}\Leftrightarrow 3x^2+4x=-5x^2+2x+3$$
$$\Leftrightarrow 8x^2+2x-3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4};x=\frac{1}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=0,5$.

Bài toán 193. Giải phương trình $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+5}}-\sqrt{7x+1}=\sqrt{7-4x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{7}\le x\le\frac{7}{4};x\ne 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{7x+1}+\sqrt{7-4x}$$
$$\Leftrightarrow 3x+8+2\sqrt{(2x+3)(x+5)}=3x+8+2\sqrt{(7x+1)(7-4x)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+13x+18}=\sqrt{-28x^2+45x+7}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+13x+18=-28x^2+45x+7\Leftrightarrow 30x^2-32x+9=0\qquad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta<0$. Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 194. Giải phương trình $\dfrac{3-x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x}=\sqrt{4x-1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2}{3}\le x\ne 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}+\sqrt{4x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2x+1+3x-2+2\sqrt{(2x+1)(3x-2)}=5x-1+2\sqrt{x(4x-1)}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-x-2}=\sqrt{4x^2-x}\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 195. Giải phương trình $\dfrac{3-3x}{\sqrt{x}-\sqrt{4x+3}}=\sqrt{2(x+1)}+\sqrt{3x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}+\sqrt{4x+3}=\sqrt{2(x+1)}+\sqrt{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow 5x+3+2\sqrt{x(4x+3)}=4x+3+2\sqrt{2(x+1)(3x+1)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+3x=2(3x^2+4x+1)\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$$

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 196. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x}-\sqrt{2x-1}}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x}+\sqrt{2x-1}$.

Ngoài ra phương trình còn tương đương $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x}-\sqrt{2x-1}$.

Kết hợp lại ta thu được $2\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x}\Leftrightarrow x+2=2x\Leftrightarrow x=2$.

Vậy ta thu được nghiệm duy nhất $x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}\qquad(2)$.

Rõ ràng điều kiện cần để (2) có nghiệm là hai vế cùng dấu, nghĩa là

$$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}}.\frac{x-1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\ge 0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$$

Lúc này $(2)\Leftrightarrow 3x+1-2\sqrt{2x^2+3x-2}=3x+1-2\sqrt{2x^2+2x}\Leftrightarrow 2x^2+3x-2=2x^2+2x\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 197. Giải phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x+1}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge-\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}}=\frac{4}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+1}}\Rightarrow\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+1}\quad(1).$$

Kết hợp (1) và đề bài ta có hệ tạm thời $\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+1}\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x+1}\end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $2\sqrt{x+6}=2\sqrt{2x+5}\Leftrightarrow x+6=2x+5\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge-\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}>0,\forall x\ge-\dfrac{1}{2}$. Do đó ta được $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6} \quad (1)$

Nhận xét (1) nghiệm đúng với $x=1$.

Với $x>1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}<\sqrt{2x+1} \\ \sqrt{2x+5}>\sqrt{x+6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}<0 \\ \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}>0 \end{cases}$, suy ra (1) vô nghiệm.

Với $x<1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}>\sqrt{2x+1} \\ \sqrt{2x+5}<\sqrt{x+6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}>0 \\ \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}<0 \end{cases}$, suy ra (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}\right) \ge 0 \\ 3x+7-2\sqrt{2x^2+13x+6}=3x+7-2\sqrt{2x^2+9x+10} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}\right) \ge 0 \\ 2x^2+13x+6=2x^2+9x+10 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 198. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\dfrac{3}{\sqrt{x+8}}=1+\sqrt{3x+2} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+2}=1-\frac{3}{\sqrt{x+8}} \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}}=\frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x+8}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}}=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+8}+3\right)\sqrt{x+8}}$$
$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+8}+3\right)\sqrt{x+8}}\right]=0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+8}+3\right)\sqrt{x+8}}>0, \forall x \ge -\dfrac{2}{3}$ nên (1) có duy nhất nghiệm $x=1$.

Kết hợp điều kiện, đi đến phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 199. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=3x+\sqrt{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}=3x-\sqrt{x+8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}=\frac{9x^2-x-8}{3x+\sqrt{x+8}}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}+\frac{9x+8}{3x+\sqrt{x+8}}\right]=0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}+\frac{9x+8}{3x+\sqrt{x+8}}>0,\forall x\ge 0$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 200. Giải phương trình $2+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{x+2}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+3}-2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{(2x+1)(x+2)}}=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+2)}}=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+2)}}\right]=0 \quad (1)$$

Nhận xét rằng $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+2)}}>0,\forall x>-\frac{1}{2}$ nên (1) nhận nghiệm duy nhất $x=1$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 201. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{3x+2}-1}=\sqrt{2x+5}+\frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1<x\ne -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+2}+1=\sqrt{2x+5}+\frac{2}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow \sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+5}}=\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+5}}=\frac{3-x}{\left(2+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x+1}}$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+1}\right)=0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+5}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+1}>0,\forall x>-1$ nên (1) có duy nhất nghiệm $x=3$.
Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 202. Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+1}=\sqrt{3x-1}+1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}=1-\frac{3}{\sqrt{x+2}+1} \Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}=\frac{x-2}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}\right]=0 \quad (1)$$

Dễ nhận thấy $\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}>0,\forall x \ge \frac{1}{3}$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=2$.

Bài toán 203. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x-3} \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}=\frac{x-4}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}\right)=0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}}>0,\forall x \ge \frac{3}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1} \quad (2)$.

Nhận xét $(2) \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}}=\frac{2x-2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}} \Rightarrow 2x-2>0 \Leftrightarrow x>1$.

Do đó

$$(2) \Leftrightarrow 4x-2\sqrt{4x^2-9}=4x-2\sqrt{3x^2+2x-1} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-9}=\sqrt{3x^2+2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-9=3x^2+2x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x \in \{-2;4\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=4$.

Bài toán 204. Giải phương trình $x\sqrt{\frac{2}{2x+1}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1} \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x\sqrt{\frac{2}{2x+1}}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{2}{2x+1}}=\frac{2x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{2(2x+1)}=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}\quad(1)\end{array}\right.$$

Ta có $(1)\Leftrightarrow 4x+2=4x+2+2\sqrt{(3x+1)(x+1)}\Leftrightarrow(3x+1)(x+1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;-\frac{1}{3}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=-\frac{1}{3}$.

Bài toán 205. Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{5x+2}+1}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x+2}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge-\frac{2}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+1}{\sqrt{5x+2}+1}=\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{5x+2}+1}=\frac{x+1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+1}}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{5x+2}+1=\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+1}\quad(1)\end{array}\right.$$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 5x+3+2\sqrt{5x+3}=5x+3+2\sqrt{6x^2+7x+2}\Leftrightarrow\sqrt{5x+3}=\sqrt{6x^2+7x+2}$$
$$\Leftrightarrow 5x+3=6x^2+7x+2\Leftrightarrow 6x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-1+\sqrt{7}}{6};\frac{-1-\sqrt{7}}{6}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=\frac{\sqrt{7}-1}{6}$.

Bài toán 206. Giải bất phương trình $\frac{x-3}{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}}\ge\frac{3x-5}{\sqrt{3x-4}-1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{2};x\ne3;x\ne\frac{5}{3}$. Bất phương trình đã cho biến đổi về

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\ge\sqrt{3x-4}+1\Leftrightarrow 3x-3+2\sqrt{2x^2-3x}\ge 3x-3+2\sqrt{3x-4}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-3x\ge 3x-4\Leftrightarrow 2x^2-6x+4\ge0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge2\\ x\le1\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x\ge2$.

Bài toán 207. Giải bất phương trình $\frac{1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}}\le\frac{2x-5}{\sqrt{4x-6}+2}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge1,5$. Bất phương trình tương đương với

$$\frac{2-2x}{\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}}\le\frac{4x-10}{\sqrt{4x-6}+2}\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}\le\sqrt{4x-6}-2.$$

Ta có $\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}=\frac{2-2x}{\sqrt{x}+\sqrt{3x-2}}<0,\forall x\ge\frac{3}{2}$. Xét các trường hợp xảy ra

- Với $\sqrt{4x-6}-2\ge 0 \Leftrightarrow 4x-6\ge 4 \Leftrightarrow x\ge \frac{5}{2}$. Bất phương trình nghiệm đúng với $x\ge \frac{5}{2}$.
- Với $\sqrt{4x-6}-2\le 0 \Leftrightarrow 4x-6\le 4 \Leftrightarrow x\le \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\le x\le \frac{5}{2}$.

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{4x-6}-2\right)^2 \Leftrightarrow 4x-2-2\sqrt{3x^2-2x}\ge 4x-2-4\sqrt{4x-6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x}\le 2\sqrt{4x-6} \Leftrightarrow 3x^2-2x\le 16x-24 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24\le 0 \Leftrightarrow 2\le x\le 4$$

Thu được nghiệm trường hợp này là $2\le x\le \frac{5}{2}$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge \frac{3}{2}$.

Bài toán 208. Giải bất phương trình $\dfrac{x+5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}} < \dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}<\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}$.

Nhận xét $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}=\dfrac{x+5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}}>0,\forall x\ge 0$ và $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}}>0,\forall x\ge 0$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)^2<\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x+5-2\sqrt{2x^2+5x}<3x+5-2\sqrt{2x^2+7x+6}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+7x+6<2x^2+5x \Leftrightarrow 2x+6<0 \Leftrightarrow x<-3$$

Kết hợp điều kiện đi đến bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 209. Giải bất phương trình $\dfrac{2x+3}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1}}-\dfrac{9}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+6}}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}-\sqrt{2x+6}\le 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-3}\le \sqrt{x+1}+\sqrt{2x+6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+2}-\sqrt{x+1}\le \sqrt{2(x+3)}-\sqrt{2x-3} \qquad (1)$$

Ta có $\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+1}=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1}}>0,\forall x\ge \frac{3}{2}$ và $\sqrt{2(x+3)}-\sqrt{2x-3}=\dfrac{9}{\sqrt{2(x+3)}+\sqrt{2x-3}}>0,\forall x\ge \frac{3}{2}$.

Do đó (1) biến đổi về

$$\left(\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+1}\right)^2\le\left(\sqrt{2(x+3)}-\sqrt{2x-3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x+3-2\sqrt{3x^2+5x+2}\le 4x+3-2\sqrt{2(2x^2+3x-9)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+6x-18\le 3x^2+5x+2 \Leftrightarrow x^2+x-20\le 0 \Leftrightarrow -5\le x\le 4$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $S=\left[\frac{3}{2};4\right]$.

Bài toán 210. Giải phương trình $\sqrt{2x+5}+1=\dfrac{x+10}{\sqrt{x+7}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+5}+1=\frac{3}{\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+7}\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}+1-\frac{3}{\sqrt{x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}+\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+7}}=0\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}}+\frac{x-2}{\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}}+\frac{1}{\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}\right)=0$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}>0,\forall x\ge -\dfrac{5}{2}$ nên thu được $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 211. Giải phương trình $\sqrt{2x+7}+1=\sqrt{x+8}+\dfrac{3}{\sqrt{2x+7}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{7}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}+1-\frac{3}{\sqrt{2x+7}}=0\Leftrightarrow \sqrt{2x+7}-\sqrt{x+8}+\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{2x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}}+\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\sqrt{2x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}}+\frac{2}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\sqrt{2x+7}}\right)=0$$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+8}}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\sqrt{2x+7}}>0,\forall x\ge -\dfrac{7}{2}$ nên thu được $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 212. Giải phương trình $\sqrt{8x+2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{4x+3}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{8x+2}+\frac{1}{2}=\sqrt{4x+3}+\frac{1}{\sqrt{4x+3}}\Leftrightarrow \sqrt{8x+2}-\sqrt{4x+3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x+2}-\sqrt{4x+3}+\frac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{4x+3}}=0\Leftrightarrow \frac{4x-1}{\sqrt{8x+2}+\sqrt{4x+3}}+\frac{4x-1}{2\sqrt{4x+3}\left(\sqrt{4x+3}+2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (4x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{8x+2}+\sqrt{4x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{4x+3}\left(\sqrt{4x+3}+2\right)}\right)=0 \quad (1).$$

Rõ ràng $4x-1=0 \Leftrightarrow 4x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$. Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{4}$.

Bài toán 213. Giải phương trình $x\sqrt{2x-1}+1=\frac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x+4}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-1}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+4x+3}{x\sqrt{x+4}} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\frac{1}{x}=\sqrt{x+4}+\frac{3}{x\sqrt{x+4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x\sqrt{x+4}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}+\frac{\sqrt{x+4}-3}{x\sqrt{x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}}+\frac{x-5}{x\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}\right)=0 \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}>0,\forall x\ge\frac{1}{2}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài toán 214. Giải phương trình $\sqrt{4x-3}+\frac{1}{2x+3}\ge\frac{4\left(x^2+3x+3\right)}{\sqrt{(2x+3)^3}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x-3}+\frac{1}{2x+3}\ge\frac{4x^2+12x+12}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3}+\frac{1}{2x+3}\ge\sqrt{2x+3}+\frac{3}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}+\frac{1}{2x+3}-\frac{3}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}+\frac{\sqrt{2x+3}-3}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}}+\frac{2x-6}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}\right]\ge 0 \quad (1)$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}}+\frac{1}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}>0,\forall x\ge\frac{3}{4}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 3$.

Bài toán 215. Giải phương trình $\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{4x+9} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{8}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x+8}-\sqrt{4x+9}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}=0\Leftrightarrow \sqrt{5x+8}-\sqrt{4x+9}+\frac{\sqrt{x+3}-2}{2\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{5x+8}+\sqrt{4x+9}}+\frac{x-1}{2\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{5x+8}+\sqrt{4x+9}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right]=0 \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{5x+8}+\sqrt{4x+9}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}>0,\forall x\ge -\frac{8}{5}$ nên thu được $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 216. Giải phương trình $(2x-2)\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+2}=0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-1)\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x+3}+\frac{2x-1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}}\right)=0 \quad (1)$$

Ta thấy $\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+3}}>0,\forall x\ge -\frac{2}{3}$ nên $(1)\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta đi đến nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 217. Giải bất phương trình $\sqrt{10x-1}+\frac{1}{x}\ge\frac{5x^2+4x+3}{x\sqrt{5x+4}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{10}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{10x-1}+\frac{1}{x}\ge\sqrt{5x+4}+\frac{3}{x\sqrt{5x+4}}\Leftrightarrow\sqrt{10x-1}-\sqrt{5x+4}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x\sqrt{5x+4}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{10x-1}-\sqrt{5x+4}+\frac{\sqrt{5x+4}-3}{x\sqrt{5x+4}}\ge 0\Leftrightarrow\frac{5x-5}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{5x+4}}+\frac{5x-5}{x\sqrt{5x+4}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{5x+4}}+\frac{1}{x\sqrt{5x+4}}\right)\ge 0 \quad (1)$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{10x-1}+\sqrt{5x+4}}+\frac{1}{x\sqrt{5x+4}}\ge 0$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Do đó bất phương trình ban đầu có nghiệm $x\ge 1$.

Bài toán 218. Giải phương trình $x^3\sqrt{7x+2}=\sqrt{6x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{2}{7}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^3-1\right)\sqrt{7x+2}+\sqrt{7x+2}-\sqrt{6x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)\sqrt{7x+2}+\frac{x-1}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{6x+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\left(x^2+x+1\right)\sqrt{7x+2}+\frac{1}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{6x+3}}\right]=0$$

Dễ thấy $\left(x^2+x+1\right)\sqrt{7x+2}+\frac{1}{\sqrt{7x+2}+\sqrt{6x+3}}>0,\forall x\ge -\frac{2}{7}$ nên ta được $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 219. Giải phương trình $x^3\sqrt{3x+5}=8\sqrt{2x+7}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^3-8\right)\sqrt{3x+5}+8\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x+7}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-8\right)\sqrt{3x+5}+8.\frac{x-2}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+7}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left[\left(x^2+2x+4\right)\sqrt{3x+5}+\frac{8}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+7}}\right]=0 \quad (1)$$

Ta có $\left(x^2+2x+4\right)\sqrt{3x+5}+\frac{8}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x+7}}>0,\forall x\ge -\frac{5}{3}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 220. Giải phương trình $x\sqrt{\frac{3}{x+2}}=\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+1}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x\sqrt{\frac{3}{x+2}}=\frac{3x}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{3(x+2)}=\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+1}\quad(1)\end{array}\right.$$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 3x+6=7x+2+2\sqrt{10x^2+7x+1}\Leftrightarrow -2x+2=\sqrt{10x^2+7x+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ 4x^2-8x+4=10x^2+7x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ 6x^2+15x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-15+3\sqrt{33}}{12};\frac{-15-3\sqrt{33}}{12}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 221. Giải phương trình $1+\sqrt[4]{x+3}=x+\sqrt{2x}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{x+3}-\sqrt{2x}=x-1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+3}-2x}{\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{2x}}=x-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+3-4x^2}{\left(\sqrt{x+3}+2x\right)\left(\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{2x}\right)}=x-1$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{4x+3}{\left(\sqrt{x+3}+2x\right)\left(\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{2x}\right)}+1\right]=0\quad(1)$$

Ta có $\frac{4x+3}{\left(\sqrt{x+3}+2x\right)\left(\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{2x}\right)}+1>0,\forall x\ge 0$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 222. Giải phương trình $x+\sqrt{3x}=1+\sqrt[4]{x+8}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+\sqrt{3x}-\sqrt[4]{x+8}=0\Leftrightarrow x-1+\frac{3x-\sqrt{x+8}}{\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{9x^2-x-8}{\left(3x+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{(x-1)(9x+8)}{\left(3x+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[1+\frac{9x+8}{\left(3x+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}\right]=0\quad(1)$$

Rõ ràng $1+\frac{9x+8}{\left(3x+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}>0,\forall x\ge 0$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 223. Giải phương trình $x+\sqrt{2x}=2+\sqrt[4]{x+14}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x-2+\sqrt{2x}-\sqrt[4]{x+14}=0 \Leftrightarrow x-2+\frac{2x-\sqrt{x+14}}{2x+\sqrt[4]{x+14}}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2+\frac{4x^2-x-14}{\left(2x+\sqrt{x+14}\right)\left(2x+\sqrt[4]{x+14}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2+\frac{(x-2)(4x+7)}{\left(2x+\sqrt{x+14}\right)\left(2x+\sqrt[4]{x+14}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[1+\frac{4x+7}{\left(2x+\sqrt{x+14}\right)\left(2x+\sqrt[4]{x+14}\right)}\right]=0 \quad (1)$$

Ta có $1+\dfrac{4x+7}{\left(2x+\sqrt{x+14}\right)\left(2x+\sqrt[4]{x+14}\right)}>0, \forall x \ge 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=2$.

Bài toán 224. Giải bất phương trình $2x+\sqrt{4x+1}>1+\sqrt[4]{8x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{4}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1+\sqrt{4x+1}-\sqrt[4]{8x+5}>0 \Leftrightarrow 2x-1+\frac{4x+1-\sqrt{8x+5}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt[4]{8x+5}}>0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+\frac{16x^2-4}{\left(4x+1+\sqrt{8x+5}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt[4]{8x+5}\right)}>0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+\frac{4(2x-1)(2x+1)}{\left(4x+1+\sqrt{8x+5}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt[4]{8x+5}\right)}>0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left[1+\frac{4(2x+1)}{\left(4x+1+\sqrt{8x+5}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt[4]{8x+5}\right)}\right]>0 \quad (1)$$

Rõ ràng $1+\dfrac{4(2x+1)}{\left(4x+1+\sqrt{8x+5}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt[4]{8x+5}\right)}>0, \forall x \ge -\dfrac{1}{4}$ nên $(1) \Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x>\dfrac{1}{2}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $(x-1)\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
2. $2\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=2\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{5x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{6x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{7x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{8x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{4x+3}=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}+\sqrt{5x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
6. $\sqrt{3x+6}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+4}+2 \quad (x\in\mathbb{R})$.
7. $\sqrt{7x+1}+\sqrt{2x}=\sqrt{6x+2}+\sqrt{x+1} \quad (x\in\mathbb{R})$.
8. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{5x}=\sqrt{7x+2}+\sqrt{4x+1} \quad (x\in\mathbb{R})$.
9. $\sqrt{2x+3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+15}}=1+\sqrt{3x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
10. $\sqrt{4x+5}+\dfrac{5}{\sqrt{x+24}}=1+\sqrt{5x+4} \quad (x\in\mathbb{R})$.
11. $\sqrt{x+3}+\dfrac{2}{\sqrt{x+3}}=1+\sqrt{2x+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
12. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=3x+\sqrt{2x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
13. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+15}=4x+\sqrt{2x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
14. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+24}=5x+\sqrt{2x} \quad (x\in\mathbb{R})$.
15. $4+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+15}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
16. $3+\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1+(x+2)\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
17. $\sqrt{3x+2}+1=\sqrt{2x+9}+\dfrac{3}{\sqrt{x+2}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
18. $\sqrt{4x+1}+1=\sqrt{3x+4}+\dfrac{3}{\sqrt{x+6}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
19. $3\sqrt{3x+2}+1=3\sqrt{2x+5}+\dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \quad (x\in\mathbb{R})$.
20. $3\sqrt{2x+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x+2}+1}=1+3\sqrt{3x-1} \quad (x\in\mathbb{R})$.
21. $\sqrt{4x+3}-\sqrt{5x+2}=1-\dfrac{4}{\sqrt{x}+3} \quad (x\in\mathbb{R})$.
22. $\sqrt{2x+4}-\sqrt{x+3}=1-\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+2} \quad (x\in\mathbb{R})$.
23. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-3} \quad (x\in\mathbb{R})$.

24. $x\sqrt{\dfrac{2}{2x+1}}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

25. $\dfrac{x-1}{\sqrt{5x+2}+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

26. $\sqrt{2x+14}+1=\dfrac{x+20}{\sqrt{x+15}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

27. $\sqrt{2x+23}=1+\dfrac{29+x}{\sqrt{x+24}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

28. $\sqrt{3x+33}+1=\dfrac{2x+40}{\sqrt{2(x+17)}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

29. $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+5}+\sqrt{\dfrac{4x+3}{3x+4}}-1=0\quad (x\in\mathbb{R})$.

30. $\sqrt{3x+4}+1=\sqrt{2x+5}+\sqrt{\dfrac{x+6}{2x+5}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

31. $\dfrac{3x}{\sqrt{5(x-1)}}=\sqrt{5x+1}-\sqrt{2x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

32. $1+\sqrt[4]{3x+1}=x+\sqrt{2x}\quad (x\in\mathbb{R})$.

33. $1+\sqrt[4]{2x+2}=x+\sqrt{2x}\quad (x\in\mathbb{R})$.

34. $x+\sqrt{3x}=1+\sqrt[4]{7x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

35. $x+\sqrt{2x}=2+\sqrt[4]{13x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

36. $2x+\sqrt{2x+2}>1+\sqrt[4]{8x+5}\quad (x\in\mathbb{R})$.

37. $(x^3-1)\sqrt{3x+6}=7\sqrt{2(x+4)}\quad (x\in\mathbb{R})$.

38. $x^3\sqrt{3x+8}=8\sqrt{2(x+5)}\quad (x\in\mathbb{R})$.

39. $x^3\sqrt{3x+15}=8\sqrt{17+2x}\quad (x\in\mathbb{R})$.

40. $(x^3+2)\sqrt{7x+2}=3\sqrt{6x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

41. $(x^3+5)\sqrt{7x+2}=6\sqrt{6x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

42. $\sqrt{10x-1}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}\geq\dfrac{9x^2+1}{3x\sqrt{x}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

43. $\sqrt{2x}+\dfrac{1}{x+1}\geq\dfrac{x^2+3x+4}{(x+1)\sqrt{x+2}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

44. $2(x+1)\sqrt{x+3}=3\sqrt{x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

45. $\sqrt{2x+7}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+11}{2\sqrt{x+8}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

46. $2\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2}=\sqrt{7x+1}+\dfrac{3}{2\sqrt{x+8}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

47. $\sqrt{2x+3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x+9}{\sqrt{x+6}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Bài toán 225. Giải phương trình $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-2\le x\le 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}\Leftrightarrow\frac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-2=0\\ \sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+4}\quad(1)\end{array}\right.$$

- Với $3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện $-2\le x\le 2$.
- $(1)\Leftrightarrow 2x+4+4(2-x)+4\sqrt{2(x+2)(2-x)}=x^2+4\Leftrightarrow 4\sqrt{2(x+2)(2-x)}=(x-2)(x+4)\quad(2)$.

  Dễ thấy (2) có nghiệm khi $(x-2)(x+4)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -4\end{array}\right.$, kết hợp điều kiện suy ra $x=2$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x\in\left\{\dfrac{3}{2};2\right\}$.

Bài toán 226. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Giả sử các căn thức đều xác định. Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-2x}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}\right)=0$$

Nhận xét $\dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}>0$. Suy ra $x=2$.

Thử lại trực tiếp suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 227. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=1$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Dễ thấy các biểu thức $\sqrt{x+3},\sqrt{x+2},\sqrt{x+1},\sqrt{x}$ đôi một khác nhau. Biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{x+3-(x+2)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x+2-(x+1)}+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow x+3=x+2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 228. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Giả sử các biểu thức trong bài toán đều xác định.

Ngoài ra $2x^2+2x+3>0, x^2-x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}>0$; $\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}}=\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}}\right)=0$$

Nhận thấy $\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{2x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x-2}+\sqrt{x^2-x+2}}>0$, suy ra chỉ xét $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Thử lại nghiệm trực tiếp thu được $S=\{-2\}$.

Bài toán 229. Giải bất phương trình $\frac{6x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}\le 3+\sqrt{x-x^2}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1; x\ne\frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}\le 3+\sqrt{x-x^2}\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\le 3+\sqrt{x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}-3\le\sqrt{x}.\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x}\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right)\le\sqrt{1-x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}-3\right)\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}.\frac{x+8}{\sqrt{1-x}+3}\le 0\Leftrightarrow -8\le x\le 1$$

Kết luận nghiệm $0\le x\le 1; x\ne\frac{1}{2}$.

Bài toán 230. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{3x^2+x-1}=\sqrt{x^2+4x-3}+\sqrt{2x^2+4x-3}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Giả sử các căn thức trong bài toán đều xác định.

Chú ý rằng các hệ $\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2+4x-3}=0; \sqrt{3x^2+x-1}=\sqrt{2x^2+4x-3}=0$ đều vô nghiệm.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{x^2+4x-3}+\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{2x^2+4x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}}+\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{3x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+4x-3}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+-1}+\sqrt{x^2+4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+4x-3}}\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{x^2+4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2+x-1}+\sqrt{2x^2+4x-3}}>0$, do đó ta có $(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x\in\{1;2\}$.

Thử lại trực tiếp thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 231. Giải phương trình $1+\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{2x^2+x+2}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x+4)\ge 0$.

- Xét trường hợp $x^2+4x=1 \Leftrightarrow x=-2+\sqrt{5}; x=-2-\sqrt{5}$ (Thỏa mãn bài toán).
- Xét $x^2+4x\ne 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+4x}-1\ne 0; \sqrt{2x^2+x+2}\ne\sqrt{x^2-3x+3}$. Biến đổi về dạng

$$\frac{x^2+4x-1}{\sqrt{x^2+4x}-1}=\frac{x^2+4x-1}{\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+4x}-1=\sqrt{2x^2+x+2}-\sqrt{x^2-3x+3} \qquad (1)$$

Kết hợp (1) với phương trình ban đầu thu được

$$2\sqrt{x^2+4x}=2\sqrt{2x^2+x+2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x\in\{1;2\}.$$

Đối chiếu các nghiệm với điều kiện thu được tập nghiệm $S=\{1;2;-2+\sqrt{5};-2-\sqrt{5}\}$.

Bài toán 232. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+2}+\sqrt{x^2+4} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+4}=\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4} \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+4}}=\frac{2x-2}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+4}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+4} \qquad (2)\end{array}\right.$$

Kết hợp (1) và (2) thu được $2\sqrt{x^2+2x+2}=2\sqrt{3x+2}\Leftrightarrow x^2+2x+2=3x+2\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0;x=1$.

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S=\{0;1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3x\ge -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x+4}\right)^2=\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x^2+4}\right)^2$$
$$x^2+3x+6+2\sqrt{x^2+2x+2}.\sqrt{x+4}=x^2+3x+6+2\sqrt{3x+2}.\sqrt{x^2+4}$$
$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+10x+8=3x^3+2x^2+12x+8$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-4x^2+2x=0\Leftrightarrow 2x(x-1)^2=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S=\{0;1\}$.

Bài toán 233. Giải phương trình $\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^3+3}+\sqrt{2x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x^3+x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3+3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3} \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3+3}}=\frac{x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3+3}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3} \quad (2)\end{array}\right.$$

Kết hợp hai phương trình (1) và (2) ta thu được

$$2\sqrt{x^3+x+1}=2\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x^3+x+1=2x+1\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến các nghiệm $x=0;x=1;x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x^3+x+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2x+4+2\sqrt{x^3+x+1}.\sqrt{x+3}=x^3+2x+4+2\sqrt{x^3+3}.\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^4+3x^3+x^2+4x+3=2x^4+x^3+6x+3$$
$$\Leftrightarrow x^4-2x^3-x^2+2x=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x-2)=0\Rightarrow x\in\{-1;0;1;2\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được ba nghiệm $x=0;x=1;x=2$.

Bài toán 234. Giải phương trình $(x+2)\left(\sqrt{2x^2+4x+6}+\sqrt{-2x-1}\right)=2x^2+6x+7 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^2+4x+6\ge 0 \\ -2x-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\le -\dfrac{1}{2}$.

Rõ ràng $2x^2+4x+6-(-2x-1)=2x^2+6x+7>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$x+2=\frac{2x^2+6x+7}{\sqrt{2x^2+4x+6}+\sqrt{-2x-1}}$$
$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+4x+6}-\sqrt{-2x-1}\Leftrightarrow x+2+\sqrt{-2x-1}=\sqrt{2x^2+4x+6}$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+2(x+2)\sqrt{-2x-1}-2x-1=2x^2+4x+6\Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{-2x-1}=x^2+2x+3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x^4+12x^3+46x^2+60x+25=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x+1)^2(x+5)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-5;-1\}$$

Đối chiếu điều kiện thấy hai giá trị đều thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 235. Giải phương trình $2x-3+\dfrac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x|\le\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Nhận xét rằng $\sqrt{3-2x^2}+x-2\ne 0,\forall |x|\le\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x-3+\frac{(3x-1)\left(\sqrt{3-2x^2}+x-2\right)}{-3x^2+4x-1}=0\Leftrightarrow 2x-3+\frac{\sqrt{3-2x^2}+x-2}{1-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-2x^2}=2x^2-6x+5\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x+5\ge 0\\ 3-2x^2=\left(2x^2-6x+5\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x+5\ge 0\\ 4x^4-24x^3+58x^2-60x+22=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x+5\ge 0\\ (x-1)^2\left(4x^2-6x+22\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp điều kiện đi đến nghiệm $x=1$.

Bài toán 236. Giải phương trình $\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{2x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=2x-\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}=\frac{3x^2-x-2}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}+\frac{3x+2}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}\right]=0$$

Để ý rằng $2x+\sqrt{x^2+x+2}=2x+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\ge 2.\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}+\frac{3x+2}{2x+\sqrt{x^2+x+2}}>0,\forall x\ge -\frac{1}{2}.$$

Do đó so với điều kiện, ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 237. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+3)(2x+1)}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}\right)\sqrt{(x+3)(2x+1)}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{1}{\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}\right)\sqrt{(x+3)(2x+1)}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3}}=0\quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng phương trình (1) vô nghiệm. Vậy phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=2$.

Bài toán 238. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x+3>0;x+4>0\\0\le x^2-2x+5\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{(2x+3)(x+4)}}=\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}\right)\sqrt{(2x+3)(x+4)}}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}\right)\sqrt{(2x+3)(x+4)}}+\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}\right]=0\quad (1)$$

Chú ý rằng

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}\right)\sqrt{(2x+3)(x+4)}}+\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+3}\right)\sqrt{(2x+3)(x+4)}}+\frac{(2x+1)^2+3}{4\left[\sqrt{(x-1)^2+4}-1\right]}>0,\forall x>-\frac{3}{2}$$

Do đó (1) có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 239. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}=(x-3)\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}}=(x-3)\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{(2x+1)(x+4)}}=\frac{(x-3)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2}+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3-x}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+4)}}=\frac{(x-3)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+2}+1}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+4)}}+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+1}=0\quad (1)\end{array}\right.$$

Dễ thấy $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)\sqrt{(2x+1)(x+4)}}+\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}+1}>0$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 240. Giải bất phương trình $\dfrac{2(x+2)}{\sqrt{2x+5}+1}+2(x+1)^2\ge\sqrt{x+6}+7\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{5}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+5}-1+2x^2+4x+2 \ge \sqrt{x+6}+7 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+6}+2\left(x^2+2x-3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+2(x-1)(x+3)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+2(x+3)\right]\ge 0 \quad (1)$$

Chú ý rằng $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+6}}+2(x+3)>0, \forall x \ge -\dfrac{5}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge 1$.

Bài toán 241. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}} \ge \dfrac{4}{x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \le x \le 3; x \ne 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{\left(\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}\right)^2}{3+3x-(3-x)} \ge \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow \dfrac{3+x+\sqrt{(3+3x)(3-x)}}{2x} \ge \dfrac{4}{x}$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- Với $0 < x \le 3$ ta thu được

$$3+x+\sqrt{(3+3x)(3-x)} \ge 8 \Leftrightarrow \sqrt{(3+3x)(3-x)} \ge 5-x$$
$$\Leftrightarrow -3x^2+6x+9 \ge x^2-10x+25 \Leftrightarrow 4x^2-16x+16\le 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

- Với $-1 \le x < 0$ ta thu được

$$3+x+\sqrt{(3+3x)(3-x)} \le 8 \Leftrightarrow \sqrt{(3+3x)(3-x)} \le 5-x$$
$$\Leftrightarrow -3x^2+6x+9 \le x^2-10x+25 \Leftrightarrow 4x^2-16x+16\ge 0 \Leftrightarrow 4(x-2)^2 \ge 0$$

  Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên nên trường hợp này nghiệm đúng.

Kết hợp lại ta có nghiệm $-1 \le x < 0 \vee x = 2$.

Bài toán 242. Giải phương trình $\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=4x-2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}}.\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=2(2x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ \sqrt{3x^2+7x+2}+4=2\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+2}\right) \end{array}\right. \quad (*)$$

- $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+2)}-2\sqrt{x+2}=2\sqrt{3x+1}-4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)=2\left(\sqrt{3x+1}-2\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=4 \\ x+2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$.

Bài toán 243. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+3}+1\right)=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}.\left(\sqrt{x^2+4x+3}+1\right)=2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+3}+1=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(x+3)}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+3}-1\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+3}-1\right)=\sqrt{x+3}-1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=1\\ \sqrt{x+1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x=0$.

Bài toán 244. Giải bất phương trình $\dfrac{2x\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}\right)}{\sqrt{2x+9}+3}+15<5\sqrt{2x+9} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{5}{3}$. Lúc này bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}\right)<5\left(\sqrt{2x+9}+3\right)\left(\sqrt{2x+9}-3\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}\right)<5.2x\Leftrightarrow \sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}<5$$
$$\Leftrightarrow 7x-8+2\sqrt{12x^2-29x+15}<25\Leftrightarrow 2\sqrt{12x^2-29x+15}<33-7x$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{5}{3}\le x<\frac{33}{7}\\ 4\left(12x^2-29x+15\right)<(33-7x)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{5}{3}\le x<\frac{33}{7}\\ x^2-346x+1029>0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{3}\le x<\frac{33}{7}\\ x>343\vee x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow \frac{5}{3}\le x<3$$

Vậy bất phương tình ban đầu có nghiệm là $\frac{5}{3}\le x<3$.

Bài toán 245. Giải bất phương trình $\left(1+x\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\le 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+1}+x>0,\forall x>0;\sqrt{x^2+1}+x>|x|+x=0,\forall x<0$. Như vậy $\sqrt{x^2+1}+x>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1+x\sqrt{x^2+1}\right).\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\le 1\Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{x^2+1}+x\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+1}\le x-1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\le 0\Leftrightarrow \frac{(x-1)x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\le 1$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\le 1$.

Bài toán 246. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=2x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Ta có $\sqrt{x+3}\ne\sqrt{x+1},\forall x\ge -1$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+\sqrt{x^2+4x+3}=\frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x^2+\sqrt{x^2+4x+3}=\frac{2x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)}{x+3-(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{x^2+4x+3}=x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow x^2-x\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}.\sqrt{x+3}-x\sqrt{x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-\sqrt{x+3}\right)+\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+1}\right)\left(x-\sqrt{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{x+1}\\x=\sqrt{x+3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=0\\x^2-x-3=0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2};x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Bài toán 247. Giải bất phương trình $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}>1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1\vee -1\le x<0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}-1>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}+\frac{1-x}{x}>0\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}-\frac{1}{x}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{x-\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)x}\right]>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}.\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x\right)<0\quad(1)$$

Rõ ràng $\dfrac{x-1}{x}\ge 0$ nên

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x-\frac{1}{x}}<x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge\sqrt{1-\frac{1}{x}}\\x-\frac{1}{x}<x^2-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\ge 0;x^2+\frac{1}{x}\ge 1\\x^2-x-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1>0\end{array}\right.\quad(2)$$

Chú ý kết hợp điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\-1\le x<0\end{array}\right.\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x}>1$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-x-2\sqrt{x^2-x}+1>0\\x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2>0\\x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-x\ne 1\\x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le x\ne\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận nghiệm $1\le x\ne\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 248. Trích lược câu I.1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên ĐHKHTN; ĐHQG Hà Nội; Kỳ thi tuyển sinh năm học 2011 – 2012.

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \quad (1)$.

Xét $0\le x<1\Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x}<\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$, (1) vô nghiệm.

Xét $x=1$ thì (1) nghiệm đúng. Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 249. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=1$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Rõ ràng $\sqrt{x+2}\ne\sqrt{x+1}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{x^2+3x+2}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{x+1}.\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{x+1}.\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x+2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=1\\ x+2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x\in\{-1;0\}$.

Bài toán 250. Giải phương trình $\left(\sqrt{x^2-x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)=-3$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Rõ ràng $\sqrt{x-2}\ne\sqrt{x+1},\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-x-2}+1=\frac{-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x^2-x-2}+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=\sqrt{x+1}.\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-2}-1\right)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1\\ \sqrt{x+1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=1\\ x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=0\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $x\ge 2$ ta thu được nghiệm $S=\{2\}$.

Bài toán 251. Giải phương trình $x\left(x-2\right)=\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x^3+1} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -1$. Xét trường hợp $x\in\{0;2\}$ thì phương trình nghiệm đúng.

$$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x\left(x-2\right)=0\Leftrightarrow x\in\{0;2\}.$$

Xét trường hợp $x\notin\{0;2\}$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}}=\sqrt{x^3+1}\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1}+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{x^2-x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x^2-x+1}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=1\\ x^2-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện $x \ge -1$ thu được nghiệm $S=\{0;1\}$.

Bài toán 252. Giải bất phương trình $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1} \le \sqrt{x^4-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x^3+x^2+x+1} \le \sqrt{x^4-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1} \le 1+\sqrt{x^4-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1} \le 1+\sqrt{x-1}.\sqrt{x^3+x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1 \le \sqrt{x^3+x^2+x+1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x^3+x^2+x+1}-1\right) \ge 0 \quad (1)$$

Từ $x \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x^3+x^2+x+1} \ge \sqrt{4} > 1$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$. Kết luận tập nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 253. Giải phương trình $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2+x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1}-1=\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+1}=1+\sqrt{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow x-1+x^2+x+1+2\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+x+1}=x^3-1+2\sqrt{x^3-1}+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+2\sqrt{x^3-1}=x^3+2\sqrt{x^3-1} \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x \in \{-1;0;2\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=2$.

Bài toán 254. Giải phương trình $\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)=4$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}=1+\sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=1+\sqrt{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=\sqrt{x-2}.\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1=\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=1\\ \sqrt{x+2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 255. Giải phương trình $\sqrt{x^3+x^2+3x+3}-\sqrt{x^2+3}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{2x^2+2x}+\sqrt{2x}}$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+x^2+3x+3}-\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2+2x}-\sqrt{2x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+3x+3}+\sqrt{2x}=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+2x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}.\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x(x+1)}-\sqrt{2x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\sqrt{2x}\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=1\\ x^2+3=2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ (x-1)^2=-2\end{array}\right. \Rightarrow x=0$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 256. Giải phương trình $\dfrac{x^2-7x}{\sqrt{x^2-3x}-2\sqrt{x}}+8=4\sqrt{x-3}+x$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 3$.
Xét khả năng $x=7$, không thỏa mãn phương trình đã cho.
Xét trường hợp $3\le x\ne 7$, phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3x}+2\sqrt{x}=4\sqrt{x-3}+x-8 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}.\sqrt{x}-4\sqrt{x-3}=x-2\sqrt{x}-8$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x}-4\right)=\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+2-\sqrt{x-3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=4\\ \sqrt{x}+2=\sqrt{x-3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=16\\ x+4\sqrt{x}+4=x-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=16\\ 4\sqrt{x}=-7 \quad (*)\end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm. Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=16$.

Bài toán 257. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{x}=x+1$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x^2+2x}-(x+1)+(x-1)\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{2x^2+2x}+(x+1)}+(x-1)\sqrt{x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x}+x+1}+\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x}+x+1}+\sqrt{x}=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Ta thấy $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2x}+x+1}+\sqrt{x}>0,\forall x\ge 0$ nên (1) vô nghiệm. Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 258. Giải phương trình $1-\sqrt{2x^2-x+1}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$1-\sqrt{2x^2-x+1}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2-x+1}=\sqrt{x^2-x+1}-1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}-1+\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{x^2-x}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}\right)=0$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{x^2+1}}>0$ nên ta thu được $x^2-x=0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.
Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 259. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=1-\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x>-1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}+\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=1\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\sqrt{x+2}\left(1-\sqrt{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{x+1}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0x=1\\ x+1=1\end{array}\right.\Rightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 260. Giải phương trình $\frac{3x-3}{2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}=\frac{2}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x+3}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $0<x\neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{2}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=x\sqrt{x+3}-\sqrt{x+3}\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}\left(x-1\right)=\left(x-1\right)\sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(2-\sqrt{x^2+3x}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+3x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{1;-4\}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 261. Giải phương trình $\frac{x^2-x-8}{\sqrt{x^2+3x}-2\sqrt{x+2}}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x>0$ và $x^2-x-8\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}.\sqrt{x+3}-\sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}}+2\sqrt{x+2}-2x=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}}\left(x-\sqrt{x+2}\right)+2\left(\sqrt{x+2}-x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x+2} \\ \sqrt{x+3}=2\sqrt{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x+3=4x \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-1;1;2\}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm $x=1;x=2$.

Bài toán 262. Giải phương trình $\dfrac{4x^2-x-1}{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x}}=\dfrac{2x^2-3x-1}{\sqrt{2x^2-x}-\sqrt{2x+1}}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4x^2-x-1\ge 0 \\ 2x^2-3x-1\ge 0 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{x}.\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}.\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)=\sqrt{x}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-1}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1}=\sqrt{x} \\ \sqrt{2x-1}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Bài toán 263. Giải phương trình $\left(\sqrt{x^2-2x-8}+\sqrt{x^2-2x-6}\right)\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x-3}\right)=-2$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{-2}{\sqrt{x^2-2x-8}+\sqrt{x^2-2x-6}}=\sqrt{x-5}-\sqrt{x-3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-2x-6}=\sqrt{x-5}-\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-8}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-2x-6}+\sqrt{x-5}$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-8+x-3+2\sqrt{\left(x^2-2x-8\right)(x-3)}=x^2-2x-6+x-5+2\sqrt{\left(x^2-2x-6\right)(x-5)}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-11+2\sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=x^2-x-11+2\sqrt{x^3-7x^2+4x+30}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=\sqrt{x^3-7x^2+4x+30}$$
$$\Leftrightarrow x^3-5x^2-2x+24=x^3-7x^2+4x+30 \Leftrightarrow 2x^2+6x+6=0 \qquad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta = -12 < 0$. Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 264. Giải phương trình $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}+\sqrt{3x}-\sqrt[4]{x+8}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{3x-\sqrt{x+8}}{\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{9x^2-x-8}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+\frac{9x+8}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}\right]=0$$

Dễ thấy $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}}+\dfrac{9x+8}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x+8}\right)}>0,\forall x\ge 0$ nên ta có nghiệm $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 265. Giải phương trình $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{3x+1}$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}+2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{3x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}+2.\frac{x+1-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}+2.\frac{x^2-x}{\left(x+1+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{3x+1}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}+\frac{2x}{\left(x+1+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{3x+1}\right)}\right]=0 \quad (1)$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{2x}{\left(x+1+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{3x+1}\right)}>0,\forall x\ge 0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 266. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $0 \le x \le 1$. Phương trình đã cho tương đương với.

$$8\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x+8}+\sqrt{x} \quad (1).$$

Ta xét $x=1$ thì phương trình (1) nghiệm đúng.

Xét $0 \le x < 1 \Rightarrow \sqrt{x+8}+\sqrt{x} < \sqrt{9}+\sqrt{1}=4<4\left(\sqrt{1-x}+1\right)$, (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Bài toán 267. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x^3}+1\right)=3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $0\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+15}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x^3}+1\right)=3\left(\sqrt{x+15}+\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 15\left(\sqrt{1-x^3}+1\right)=3\left(\sqrt{x+15}+\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{1-x^3}+1\right)=\sqrt{x+15}+\sqrt{x}\quad (1)$$

Xét trường hợp $x=1$ thì (1) nghiệm đúng.

Xét trường hợp $0\le x<1\Rightarrow \sqrt{x+15}+\sqrt{x}<\sqrt{16}+\sqrt{1}=5<5\left(\sqrt{1-x^3}+1\right)$, (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 268. Giải phương trình $\left(2\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)=4\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $0\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\sqrt{1-x}+1\right).24=4\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow 6\left(2\sqrt{1-x}+1\right)=\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\quad (1).$$

Xét trường hợp $x=1$ thì (1) nghiệm đúng.

Xét trường hợp $0\le x<1\Rightarrow \sqrt{x+24}+\sqrt{x}<\sqrt{25}+\sqrt{1}=6<6\left(2\sqrt{1-x}+1\right)$, (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 269. Giải phương trình $\sqrt{4x+5}+(x-2)\sqrt{3x+6}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge -\frac{5}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}+(x-1)\sqrt{3x+6}=0\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}+(x-1)\sqrt{3x+6}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}+\sqrt{3x+6}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}+\sqrt{3x+6}=0\quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}+\sqrt{3x+6}=0>0,\forall x\ge -\frac{5}{4}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 270. Giải phương trình $\sqrt{7x+3}+(2x-3)\sqrt{6x+4}=0$ trên tập số thực.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge -\frac{3}{7}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{7x+3}-\sqrt{6x+4}+2(x-1)\sqrt{6x+4}=0\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{7x+3}+\sqrt{6x+4}}+2(x-1)\sqrt{6x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{7x+3}+\sqrt{6x+4}}+2\sqrt{6x+4}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{7x+3}+\sqrt{6x+4}}+2\sqrt{6x+4}=0\quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{7x+3}+\sqrt{6x+4}}+2\sqrt{6x+4}>0,\forall x\ge -\frac{3}{7}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 271. Giải phương trình $\sqrt{5x+6}+(x-2)\sqrt{4x+7}+x^3=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1,2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x+6}-\sqrt{4x+7}+(x-1)\sqrt{4x+7}+x^3-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{5x+6}+\sqrt{4x+7}}+(x-1)\sqrt{4x+7}+(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{1}{\sqrt{5x+6}+\sqrt{4x+7}}+\sqrt{4x+7}+x^2+x+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+6}+\sqrt{4x+7}}+\sqrt{4x+7}+x^2+x+1=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{5x+6}+\sqrt{4x+7}}+\sqrt{4x+7}+x^2+x+1>0,\forall x\ge -\dfrac{6}{5}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 272. Giải phương trình $\sqrt{4x+7}+(x^2+x-3)\sqrt{3x+8}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{7}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+7}-\sqrt{3x+8}+(x^2+x-2)\sqrt{3x+8}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+7}-\sqrt{3x+8}+(x-1)(x+2)\sqrt{3x+8}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+(x-1)(x+2)\sqrt{3x+8}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+(x+2)\sqrt{3x+8}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+(x+2)\sqrt{3x+8}=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+(x+2)\sqrt{3x+8}>0,\forall x\ge -\dfrac{7}{4}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 273. Giải bất phương trình $\sqrt{8x+1}+(x-2)\sqrt{7x+2}+2x-2>0$ trên tập số thực.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -0,125$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{8x+1}-\sqrt{7x+2}+(x-1)\sqrt{7x+2}+2(x-1)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{7x+2}}+(x-1)\sqrt{7x+2}+2(x-1)>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{7x+2}}+\sqrt{7x+2}+2\right)>0 \quad (1)$$

Ta thấy $\dfrac{1}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{7x+2}}+\sqrt{7x+2}+2>0,\forall x\ge -\dfrac{1}{8}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$.
Kết luận bất phương trình có nghiệm $x>1$.

Bài toán 274. Giải phương trình $\sqrt{4x+7}+\left(2x^2+4x-7\right)\sqrt{3x+8}=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{7}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+7}-\sqrt{3x+8}+2\left(x^2+2x-3\right)\sqrt{3x+8}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+7}-\sqrt{3x+8}+2\left(x-1\right)\left(x+3\right)\sqrt{3x+8}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+2\left(x-1\right)\left(x+3\right)\sqrt{3x+8}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+2\left(x+3\right)\sqrt{3x+8}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+2\left(x+3\right)\sqrt{3x+8} \quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\dfrac{1}{\sqrt{4x+7}+\sqrt{3x+8}}+2\left(x+3\right)\sqrt{3x+8}>0,\forall x\ge -\dfrac{7}{4}$ nên (1) vô nghiệm. Kết luận nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 275. Giải phương trình $\left(x^3-x^2\right)\sqrt{5x+5}=\sqrt{4x+7} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(\sqrt{5x+5}-\sqrt{4x+7}\right)+\left(x^3-x^2-4\right)\sqrt{5x+5}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4\left(x-2\right)}{\sqrt{5x+5}+\sqrt{4x+7}}+\left(x-2\right)\left(x^2+x+2\right)\sqrt{5x+5}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[\frac{1}{\sqrt{5x+5}+\sqrt{4x+7}}+\left(x^2+x+2\right)\sqrt{5x+5}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5x+5}+\sqrt{4x+7}}+\left(x^2+x+2\right)\sqrt{5x+5}=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng $x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{5x+5}+\sqrt{4x+7}}+\left(x^2+x+1\right)\sqrt{5x+5}>0,\forall x\ge -1$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 276. Giải phương trình $x\left(x-1\right)^2\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x+3} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(x^3-2x^2+x\right)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x+3}\\
&\Leftrightarrow \left(x^3-2x^2+x-2\right)\sqrt{3x+1}+2\sqrt{3x+1}-2\sqrt{2x+3}=0\\
&\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}\right)+\left(x^3-2x^2+x-2\right)\sqrt{3x+1}=0\\
&\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}\right)+\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)\sqrt{3x+1}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+3}}+\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)\sqrt{3x+1}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+3}}+\left(x^2+1\right)\sqrt{3x+1}\right]=0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+3}}+\left(x^2+1\right)\sqrt{3x+1}>0,\forall x\ge-\frac{1}{3}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 277. Giải phương trình $\sqrt{x+3}=\frac{1}{\left(x^2+20\right)\sqrt{1-x}+1}+\sqrt{x} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=\frac{1}{\left(x^2+20\right)\sqrt{1-x}+1}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\left(x^2+20\right)\sqrt{1-x}+1}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+20\right)\sqrt{1-x}+3=\sqrt{x+3}+\sqrt{x} \quad (1)$$

Ta có $0\le x<1\Rightarrow\sqrt{x+3}+\sqrt{x}<\sqrt{4}+\sqrt{1}=3<3\left(x^2+20\right)\sqrt{1-x}+3$, (1) vô nghiệm.

Xét trường hợp $x=1$ thì (1) nghiệm đúng. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời kết.

Thông qua 227 bài toán mở đầu thuộc Trung đoàn Trần Hưng Đạo, một điều chắc chắn rằng đa số quý bạn đọc đã hình dung được ý tưởng, phương cách xử lý bài toán phương trình, bất phương trình chứa căn thức bằng phép sử dụng đẳng thức liên hợp, trục căn mẫu thức và hệ phương trình tạm thời. Mức độ các bài toán vẫn dừng lại tại mức khởi điểm, với hình thức không quá phức tạp và lời giải đều thực hiện với trực tiếp với các căn, chỉ cần một chút tinh ý là có thể nhận ra dạng thức và thao tác dễ dàng. Đáng chú ý hơn cả là một số bài toán sử dụng liên hợp với mục đích ẩn giấu bản chất, sau khi liên hợp thành công chúng ta vẫn bắt buộc phải sử dụng các kỹ thuật khác như biến đổi tương đương, ẩn số phụ, hàm số hay thậm chí là các đánh giá, ước lượng, bất đẳng thức. Chính vì vậy phương pháp này được coi là công cụ đắc lực, là "tấm bình phong" bảo vệ cho các phương pháp khác, khiến cho bản chất bài toán không lộ liễu, đảm bảo được yếu tố "bí mật", đồng nghĩa với mức độ khó của bài toán tăng cường, phải vượt qua phép liên hợp mới "khai quật" được lời giải ngắn gọn. Lớp bài toán xây dựng thông qua phương pháp này, kết hợp với các phương pháp khác thực sự rất đa dạng và phong phú, vượt quá khuôn khổ của phiên hiệu Trần Hưng Đạo này nên tác giả xin được đề cập tại Lý thuyết sử dụng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời các phần cuối.

Lý thuyết phần 2 mang phiên hiệu Trung đoàn Trần Nhật Duật, tác giả trân trọng giới thiệu tới quý độc giả những kinh nghiệm nhỏ trong thao tác sử dụng đại lượng liên hợp với phương trình chứa căn thức, mức độ xác định một nghiệm (hữu tỷ và vô tỷ) của phương trình, làm ngược trở lại bằng phép liên hợp với hằng số, mục đích xuất hiện nhân tử đưa phương trình ban đầu về dạng tích, một dạng rất cơ bản mà hệ quả của nó phần lớn chúng ta đều biết cách giải.

Cuối cùng, tác giả mong muốn các bạn độc giả, các thầy cô giáo, các bạn học sinh hiểu, vận đúng, đánh giá kỹ thuật liên hợp trực tiếp trong thực tiễn học tập, thi cử và làm việc. Hy vọng các bạn trẻ yêu toán có nhiều phát hiện thú vị, xây dựng và phát triển kỹ thuật liên hợp lên một tầm cao hơn nữa, tăng cường kho tàng tri thức nhân loại và dẫn dắt thế hệ tương lai, phục vụ đất nước.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}=(x-3)\left(\sqrt{x^2+8}-2\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}\quad (x\in\mathbb{R})$.
2. $\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x+2}+1}+2x^2+4x-5\geq\sqrt{2x+3}\quad (x\in\mathbb{R})$.
3. $\dfrac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}}\geq\dfrac{8}{x}\quad (x\in\mathbb{R})$.
4. $\dfrac{x\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}\right)}{\sqrt{x+9}+3}+15<5\sqrt{x+9}\quad (x\in\mathbb{R})$.
5. $\dfrac{4x\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{4x-3}\right)}{\sqrt{4x+9}+3}+15<5\sqrt{4x+9}\quad (x\in\mathbb{R})$.
6. $\left(1+x\sqrt{x^2+9}\right)\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\leq 9\quad (x\in\mathbb{R})$.
7. $\left(1+x\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\leq 4\quad (x\in\mathbb{R})$.
8. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x+6}\right)=1\quad (x\in\mathbb{R})$.
9. $\sqrt{4x+5}+(3x-4)\sqrt{3(x+2)}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
10. $\sqrt{7x+3}+(4x-5)\sqrt{6x+4}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
11. $\sqrt{5x+6}+(5x-6)\sqrt{4x+7}+x^3-1=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
12. $\sqrt{5x+6}+\left(x^2+x-3\right)\sqrt{4x+7}+x^3=1\quad (x\in\mathbb{R})$.
13. $\sqrt{4x+7}+\left(3x^2+3x-7\right)\sqrt{3x+8}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
14. $\sqrt{8x+1}+(x-2)\sqrt{7x+2}+4(x-1)>0\quad (x\in\mathbb{R})$.
15. $\sqrt{4x+7}+\left(2x^2+6x-9\right)\sqrt{3x+8}=0\quad (x\in\mathbb{R})$.
16. $\sqrt{2x+4}-2.\dfrac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=\sqrt{x^2+4}-2\quad (x\in\mathbb{R})$.
17. $\sqrt{6x^2+x+1}+\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{6x^2+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.
18. $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=4\quad (x\in\mathbb{R})$.
19. $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=1\quad (x\in\mathbb{R})$.
20. $\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{4x^2+x+5}=2\sqrt{x+9}\quad (x\in\mathbb{R})$.
21. $3\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{3x^2+x-1}=3\sqrt{x^2+4x-3}+\sqrt{2x^2+4x-3}\quad (x\in\mathbb{R})$.
22. $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{2x+4}=\sqrt{4x+2}+\sqrt{x^2+4}\quad (x\in\mathbb{R})$.
23. $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{3x+9}=\sqrt{5x+7}+\sqrt{x^2+4}\quad (x\in\mathbb{R})$.
24. $\sqrt{x^3+x+2}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x^3+4}+\sqrt{2x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.
25. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+2}=2x-\sqrt{x^2+x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

26. $\dfrac{1}{\sqrt{4x+8}}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2+3}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+6}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

27. $\dfrac{1}{\sqrt{6x+7}}-\dfrac{1}{\sqrt{5x+8}}=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} \quad (x\in\mathbb{R})$.

28. $\sqrt{8x+1}+(3x-4)\sqrt{7x+2}+4x>4 \quad (x\in\mathbb{R})$.

29. $2\sqrt{4x+7}+\left(x^2+5x-8\right)\sqrt{3x+8}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

30. $4\sqrt{4x+7}+\left(x^3-2x\right)\sqrt{5x+5}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

31. $x\left(x^2-2x+3\right)\sqrt{3x+1}=6\sqrt{2x+3} \quad (x\in\mathbb{R})$.

32. $\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{3x+6} \quad (x\in\mathbb{R})$.

33. $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+4}\right)\left(1+\sqrt{x^2+9x+20}\right)=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

34. $\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+6}\right)\left(1+\sqrt{x^2+13x+42}\right)=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

35. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\dfrac{1}{2} \quad (x\in\mathbb{R})$.

36. $3\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

37. $\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+6}\right)\left(1+\sqrt{4x^2+26x+42}\right)=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

38. $\left(1+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}\right)=6 \quad (x\in\mathbb{R})$.

39. $\left(1+\sqrt{4x^2-1}\right)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

40. $\sqrt{2x^2+2x}+(x-1)\sqrt{2x-1}=x+1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

41. $\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)=3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

42. $\left(\sqrt{x+15}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x^5}+1\right)=3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

43. $\left(13\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)=4 \quad (x\in\mathbb{R})$.

44. $\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{1-x}+1\right)=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

45. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left[(x+5)\sqrt{1-x}+1\right]=1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

46. $\sqrt{5x+1}+\left(x^3+3x-5\right)\sqrt{4x+2}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

47. $\sqrt{x+3}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x}+1}+\sqrt{x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

48. $\sqrt{x+15}=\sqrt{x}+\dfrac{3}{1+(x+4)\sqrt{1-x}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

49. $\sqrt{x+15}=\sqrt{x}+\dfrac{3}{1+\left(x^3+4\right)\sqrt{1-x}} \quad (x\in\mathbb{R})$.

50. $\sqrt{x+24}-\sqrt{x}=\dfrac{4}{12\sqrt{1-x}+1} \quad (x\in\mathbb{R})$.

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.***
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.***
Lê Hoành Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. ***Tam thức bậc hai và ứng dụng.***

Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.

23. ***Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.***
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. ***23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.***
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. ***Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.***
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. ***Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. ***Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.***
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. ***Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.***
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuân
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. ***Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.***
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. ***9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. ***Tam thức bậc hai và ứng dụng.***
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
33. ***Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.***
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
34. ***Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.***
Doãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2013.
35. ***Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.***
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhỉ ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
37. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
38. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
39. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.***
40. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).***
41. ***Các tạp chí toán học*:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
42. ***Các diễn đàn toán học*:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
43. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twitter;...***

THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC