TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\left\lfloor \frac{x}{\sqrt{\pi}} \right\rfloor$$

CHUYÊN ĐỀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 8)

TRUNG ĐOÀN HOÀNG SA – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

CHỦ ĐẠO: KẾT HỢP SỬ DỤNG PHÉP THẾ, CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẨN PHỤ (TIẾP THEO)
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

- **PHỐI HỢP PHÉP THẾ, CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẨN PHỤ.**
- **SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ.**
- **SỬ DỤNG KẾT HỢP ĐÁNH GIÁ – BẤT ĐẲNG THỨC.**
- **TỔNG HỢP CÁC PHÉP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA XUÂN 2015

"Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em"

(*Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh*).

"Mai này, khi anh lấy vợ, có quan tâm em gái này suốt đời được không…"

(*04.2014 – Việt An*).

[*Tài liệu dành tặng riêng em, Việt An yêu thương của anh, nhân dịp Mùa thi 2015*]

CHUYÊN ĐỀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 8)

TRUNG ĐOÀN HOÀNG SA – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

Trong khuôn khổ Toán học sơ cấp nói chung và Đại số phổ thông nói riêng, hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp là dạng toán cơ bản nhưng thú vị, có phạm vi trải rộng, phong phú, liên hệ chặt chẽ với nhiều bộ phận khác của toán học sơ cấp cũng như toán học hiện đại.

Tại Việt Nam, hệ phương trình, nội dung hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp là một bộ phận hữu cơ, quan trọng, được phổ biến giảng dạy chính thức trong chương trình sách giáo khoa Toán các lớp 9, 10, 11, 12 song song với các khối lượng kiến thức liên quan. Đây cũng là kiến thức phổ biến xuất hiện trong các kỳ thi kiểm tra kiến thức thường niên, kỳ thi chọn học sinh giỏi toán các cấp trên toàn quốc, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT và trong kỳ thi tuyển sinh đại học – cao đẳng hàng năm, một kỳ thi đầy cam go, kịch tính và bất ngờ, nó lại là một câu rất được quan tâm của các bạn học sinh, phụ huynh, các thầy cô, giới chuyên môn và đông đảo bạn đọc yêu Toán.

Yêu cầu của dạng toán khá đa dạng, đa chiều, mục tiêu tìm các ẩn thỏa mãn một tính chất nào đó nên để thao tác dạng toán này, các bạn học sinh cần liên kết, phối hợp, tổng hợp các kiến thức được học về phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, như vậy nó đòi hỏi năng lực tư duy của thí sinh rất cao. Tuy nhiên "Trăm hay không hay bằng tay quen", các phương pháp cơ bản đã được được các thế hệ đi trước đúc kết và tận tụy cho thế hệ tương lai, các bạn hoàn toàn đủ khả năng kế thừa, phát huy và sáng tạo không ngừng, chuẩn bị đủ hành trang nắm bắt khoa học kỹ thuật, đưa đất nước ngày càng vững bền, phồn vinh, và hiển nhiên những bài toán trong các kỳ thi nhất định không thể là rào cản, mà là cơ hội thử sức, cơ hội khẳng định kiến thức, minh chứng sáng ngời cho tinh thần học tập, tinh thần ái quốc !

Các phương pháp giải và biện luận hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tạp được luyện tập một cách đều đặn, bài bản và hệ thống sẽ rất hữu ích, không chỉ trong bộ môn Toán mà còn phục vụ đắc lực cho các môn khoa học tự nhiên khác như hóa học, vật lý, sinh học,...Tiếp theo các Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn (Phần 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), tài liệu chủ yếu giới thiệu đến quý bạn đọc Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn ở cấp độ cao, trình bày chi tiết các thí dụ điển hình về hệ giải được nhờ sử dụng tổng hợp các phép thế, phép cộng đại số, đại lượng liên hợp, sử dụng đồng bộ tính chất đơn điệu hàm số có chặn miền giá trị, các phép ước lượng – đánh giá – bất đẳng thức phần tiếp theo. Đây là nội dung có mức độ khó tương đối, đòi hỏi các bạn độc giả cần có kiến thức vững chắc về các phép giải phương trình chứa căn, kỹ năng biến đổi đại số và tư duy chiều sâu bất đẳng thức.

Các thao tác tính toán và kỹ năng trình bày cơ bản đối với phương trình, hệ phương trình xin không nhắc lại.

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức, hằng đẳng thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).
5. Kỹ năng giải hệ phương trình cơ bản và hệ phương trình đối xứng, hệ phương trình đồng bậc, hệ phương trình chứa căn thông thường.
6. Kỹ thuật đặt ẩn phụ, sử dụng đại lượng liên hợp, biến đổi tương đương.
7. Kiến thức nền tảng về ước lượng – đánh giá, hàm số - đồ thị, bất đẳng thức – cực trị.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ (1-x)\sqrt{1+y^3}+(1+y)\sqrt{1-x^3}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $y\ge -1; x\le 1$.

Ta có $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1 \\ y^2\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0 \\ 1-y\ge 0 \end{cases} \quad (*)$.

Với điều kiện trên thì $(1+x)\sqrt{1+y^3}\ge 0; (1-y)\sqrt{1-x^3}\ge 0 \Rightarrow (1+x)\sqrt{1+y^3}+(1-y)\sqrt{1-x^3}\ge 0$.

Do đó hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} (1+x)\sqrt{1+y^3}=0 & (1) \\ (1-y)\sqrt{1-x^3}=0 & (2) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Rõ ràng từ (1) thu được $x=-1; y=0 \vee x=0; y=-1$, đều không thỏa mãn (2).
Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Nhận xét.
Mấu chốt của bài toán là tìm ra điều kiện (*). Từ đó dễ dàng quan sát được đặc tính không âm của vế trái phương trình thứ hai của hệ ban đầu.

Các bạn chú ý đánh giá quen thuộc $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1 \\ y^2\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0 \\ 1-y\ge 0 \end{cases} \quad (*)$.

Tuy nhiên các dấu đẳng thức không xảy ra, nên hệ đề bài vô nghiệm.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=1, \\ (2-x)\sqrt{2-x}+3(3+y)(y+1)^4=1 \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\le 2$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\begin{cases} x^2\le 1 \\ (y+1)^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -1\le y+1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -2\le y\le 0 \end{cases}$

Để ý rằng

$$-1\le x\le 1 \Rightarrow 2-x\ge 1 \Rightarrow (2-x)\sqrt{2-x}\ge 1$$
$$-2\le y\le 0 \Rightarrow 3(3+y)(y+1)^4\ge 0$$

Do đó $(2-x)\sqrt{2-x}+3(3+y)(y+1)^4\ge 1$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1; y=-1$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=1, \\ (x+2)\sqrt{x+1}+(2+y)\sqrt{1-2y}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -1; y \le \frac{1}{2}$. Từ $x^2+4y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 1 \\ 4y^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)\sqrt{x+1} \ge 0 \\ (2+y)\sqrt{1-2y} \ge 0 \end{cases}$

Do đó $(x+2)\sqrt{x+1}+(2+y)\sqrt{1-2y} \ge 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+1=0 \\ 1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Cặp giá trị này không thỏa mãn hệ ban đầu. Kết luận vô nghiệm.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=1, \\ \sqrt{4-x}+6(x+y+5)\sqrt{y^3+1}=2. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \le 4; y \ge -1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\begin{cases} (x+1)^2 \le 1 \\ (y+1)^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x+1 \le 1 \\ -1 \le y+1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ -2 \le y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x} \ge 2 \\ x+y+5>0 \end{cases}$

Do đó $\sqrt{4-x}+6(x+y+5)\sqrt{y^3+1} \ge 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$.

Nhận xét.

Mở đầu các thí dụ giới thiệu tài liệu, tác giả sẽ đào sâu các bài toán ở mức độ đơn giản nhất với hệ hai phương trình, trong đó một phương trình của hệ có dạng hữu tỷ, khuynh hướng chủ yếu tìm điều kiện, tìm miền giá trị các ẩn theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai hay phân tích hằng đẳng thức. Phương trình chứa căn còn lại của hệ rất đa dạng, hình thức càng phức tạp bao nhiêu, càng khó quan sát để đánh giá bấy nhiêu, trước hết xin đề cập đến các ước lượng thuần túy, đánh giá đơn giản, chưa sử dụng các tính chất hàm số, bất đẳng thức, cực trị.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2x+y^2+1=2y, \\ (x^2+1)\sqrt{4-x^3}+y^3-3y=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 \le 4$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \le 1 \\ (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x+1 \le 1 \\ -1 \le y-1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $(x^2+1)\sqrt{4-x^3}+(y-1)^2(y+2)=2 \quad (1)$.

Rõ ràng với điều kiện trên thì $(x^2+1)\sqrt{4-x^3} \ge 2; (y-1)^2(y+2) \ge 0 \Rightarrow (x^2+1)\sqrt{4-x^3}+(y-1)^2(y+2) \ge 2$.

Khi đó (1) có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $(x;y)=(0;1)$.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2+8y+1=2x. \\ (y^2+2y+2)\sqrt{12-x}+(y+1)^4(x+2)\sqrt{x+6}=3. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-6 \le x \le 12$. Phương trình thứ nhất biến đổi về

$$(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \le 4 \\ 4(y+1)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x-1 \le 2 \\ -1 \le y+1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ -2 \le y \le 0 \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \left[(y+1)^2+1\right]\sqrt{12-x} \ge 1.3 = 3, \forall x \in [-1;3] \\ (y+1)^4 (x+2)\sqrt{x+6} \ge 0, \forall x \in [-1;3] \end{cases} \Rightarrow \left[(y+1)^2+1\right]\sqrt{12-x} + (y+1)^4 (x+2)\sqrt{x+6} \ge 3$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

Thử lại vào hệ ban đầu, nghiệm đúng, kết luận nghiệm duy nhất $(x;y) = (3;-1)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán 6, để chặn miền giá trị của các biến, ngoài phương cách sử dụng hằng đẳng thức có thể sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai theo từng ẩn x hoặc y

- *Tìm miền giá trị của biến y thông qua phương trình bậc hai ẩn x :* $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y + 1 = 0 \quad (1)$.

  Biệt thức $\Delta' = 1 - (4y^2 + 8y + 1) = -4y(y+2)$.

  Điều kiện có nghiệm x là $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -4y(y+2) \ge 0 \Leftrightarrow 4y(y+2) \le 0 \Leftrightarrow -2 \le y \le 0$.
- *Tìm miền giá trị của biến x thông qua phương trình bậc hai ẩn y :* $4y^2 + 8y + x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2)$.

  Biệt thức $\Delta' = 16 - 4(x^2 - 2x + 1) = -4x^2 + 8x + 12 = -4(x+1)(x-3)$.

  Điều kiện có nghiệm y là $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -4(x+1)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow 4(x+1)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.

Bài toán 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 36, \\ (3-x)\sqrt{x^2-4x+5} + 17y(4-x)\sqrt{y-2} = 1. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}; y \ge 2$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\begin{cases} 4(x+1)^2 \le 36 \\ 9(y-2)^2 \le 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \le 9 \\ (y-2)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x+1 \le 3 \\ -2 \le y-2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

Vậy ta có $x \in [-4;2], y \in [2;4]$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(3-x)\sqrt{(x-2)^2+1} + 17y(4-x)\sqrt{y-2} = 1 \quad (1).$$

Rõ ràng $\begin{cases} (3-x)\sqrt{(x-2)^2+1} \ge 1.1 = 1, \forall x \in [-4;2] \\ 17y(4-x)\sqrt{y-2} \ge 0, \forall y \in [2;4], \forall x \in [-4;2] \end{cases} \Rightarrow (3-x)\sqrt{(x-2)^2+1} + 17y(4-x)\sqrt{y-2} \ge 1$.

Do đó (1) có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Thử lại trực tiếp, thỏa mãn hệ đề bài. Kết luận tập nghiệm $S = \{(2;2)\}$.

Bài toán 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x + 9y^2 = 3, \\ (x^4 - 4x + 4)\sqrt{17-x} + 6y^2(2y+5) = 4. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \le 17$. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi trở thành

$$(x+1)^2+9y^2=4\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2\le 4\\ 9x^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x+1\le 2\\ -\dfrac{2}{3}\le y\le\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ -\dfrac{2}{3}\le y\le\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Dễ thấy $x^4-4x+4=x^4-2x^2+1+2x^2-4x+2+1=\left(x^2-1\right)^2+2\left(x-1\right)^2+1\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\begin{cases}\left(x^4-4x+4\right)\sqrt{17-x}\ge 4,\forall x\in[-3;1]\\ 6y^2\left(2y+5\right)\ge 0,\forall y\in\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]\end{cases}\Rightarrow\left(x^4-4x+4\right)\sqrt{17-x}+6y^2\left(2y+5\right)\ge 4$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra, hay $x=1;y=0$.
Cặp giá trị này thỏa mãn hệ ban đầu nên là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài toán 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+4\left(y^2-x\right)=5,\\ 6\left(4-y^2\right)\sqrt{x-4}=17y^2\left(x+2\right)\sqrt{4-y}+24.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 4;y\le 4$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về $(x-2)^2+4y^2=9\Rightarrow\begin{cases}(x-2)^2\le 9\\ 4y^2\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x-2\le 3\\ y^2\le\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 5\\ -\dfrac{3}{2}\le y\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy ta thu được điều kiện $x\in[4;5],y\le\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. Để ý rằng

$$0<4-y^2\le 4,\forall y\le\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right];\sqrt{x-4}\le 1,\forall x\in[4;5]\Rightarrow 6\left(4-y^2\right)\sqrt{x-4}\le 24$$

$$17y^2\left(x+2\right)\sqrt{4-y}\ge 0,\forall x\in[4;5],\forall y\le\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\Rightarrow 17y\left(x+2\right)\sqrt{4-y}+24\ge 24$$

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases}y=0\\ x=5\end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $(x;y)=(5;0)$.

Bài toán 10. Trích lược câu 3, Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Khối A và khối A1; Đề chính thức; Kỳ thi tuyển sinh năm 2012.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2-9x-9x+22=y^3+3y^2-9y,\\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x;y\in\mathbb{R}$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x^3-3x^2+3x-1-12x+12=y^3+3y^2+3y+1-12y-12\\ x^2-x+\dfrac{1}{4}+y^2+y+\dfrac{1}{4}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1) & (1)\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1 & (2)\end{cases}$$

Chú ý rằng $(2) \Rightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \le 1 \\ \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right| \le 1 \\ \left|y+\frac{1}{2}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x-\frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y+\frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \le y \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x-1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y+1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t; t \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$ thì $f'(t)=3t^2-4<0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$, hàm số liên tục, nghịch biến.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1) \Leftrightarrow x-1=y+1 \Leftrightarrow x=y+2$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$4x^2-8x+3=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow (x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có hai cặp nghiệm.

Nhận xét.

Để giải quyết bài toán trên, các bạn học sinh cần nhận ra sự đồng điệu giữa hai ẩn x và y trong phương trình thứ nhất, cố gắng thêm bớt tạo ra sự tương đồng hàm số kiểu $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$. Tuy nhiên để có được điều này thì các hàm số cần đơn điệu (cùng đồng biến hoặc nghịch biến trên một miền xác định). Kết quả của chúng ta thu được hàm số không cho phép điều đó $f(t)=t^3-12t$!

Tuy nhiên nếu để ý một chút, từ phương trình thứ hai của hệ có thể suy ra miền giá trị của x và y, ngoài cách phân tích bình phương như lời giải trên đây, các bạn hoàn toàn có thể sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai như sau

- *Viết lại phương trình bậc hai dạng ẩn x, tham số y:* $x^2-x+y^2+y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \Delta=-4y^2-4y+3$.

  Điều kiện có nghiệm $-4y^2-4y+3 \ge 0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-3 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.

- *Viết lại phương trình bậc hai dạng ẩn y, tham số x:* $y^2+y+x^2-x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \Delta=-4x^2+4x+3$.

  Điều kiện có nghiệm $-4x^2+4x+3 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$.

Bài toán 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+3x^2+3y^2=48(x-y)+100, \\ x(x-2)+y(y+2)=2. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x;y \in \mathbb{R}$. Phương trình thứ hai của hệ biến đổi về

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \le 4 \\ (y-1)^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \le 2 \\ |y+1| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x-1 \le 2 \\ -2 \le y+1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x+1 \le 4 \\ -4 \le y-1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow x+1; y-1 \in [-4;4].$$

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$x^3+3x^2+3x+1-51x-51=y^3-3y^2+3y-1-51y+51$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3-51(x+1)=(y-1)^3-51(y-1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-51t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=3t^2-51=3(t^2-17)<0, \forall t \in [-4;4]$.

Hàm số trên liên tục và nghịch biến trên miền $[-4;4]$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1)=f(y-1) \Leftrightarrow x+1=y-1 \Leftrightarrow x=y-2.$$

Phương trình thứ hai trở thành $(y-3)^2+(y+1)^2=4 \Leftrightarrow 2y^2-4y+6=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=-2$ (Vô nghiệm).

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-14)}{\sqrt{x+2}+4} = \dfrac{(y+3)(y-13)}{\sqrt{y+3}+4}, \\ x^2+9y^2 = 2(x+3y+1). \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -2; y\ge -3$. Phương trình thứ hai của hệ biến đổi về

$$x^2+9y^2-2x-6y=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+9y^2-6y+1=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(3y-1)^2=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2\le 4 \\ (3y-1)^2\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|\le 2 \\ |3y-1|\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x-1\le 2 \\ -2\le 3y-1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 3 \\ -1\le 3y\le 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 3 \\ -\dfrac{1}{3}\le y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2\le 5 \\ y+3\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le \sqrt{x+2}\le \sqrt{5} \\ 0\le \sqrt{y+3}\le 2 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+2)\left(\sqrt{x+2}-4\right)=(y+3)\left(\sqrt{y+3}-4\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+2}-4(x+2)=(y+3)\sqrt{y+3}-4(y+3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^3-4(x+2)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-4(y+3) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-4t^2; t\in\left[0;\sqrt{5}\right] \Rightarrow f'(t)=3t^2-8t=t(3t-8)\le 0, \forall t\in\left[0;\sqrt{5}\right]$.

Suy ra hàm số liên tục và nghịch biến trên miền $\left[0;\sqrt{5}\right]$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{y+3}\Leftrightarrow x+2=y+3\Leftrightarrow x-1=y.$$

Thay thế vào phương trình thứ hai lại có

$$\begin{cases} y^2+(3y-1)^2=4 \\ -\dfrac{1}{3}\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2-6y-3=0 \\ -\dfrac{1}{3}\le y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow y\in\left\{\dfrac{3-\sqrt{39}}{10};\dfrac{3+\sqrt{39}}{10}\right\}.$$

Từ đây đi đến các nghiệm của hệ $(x;y)=\left(\dfrac{13-\sqrt{39}}{10};\dfrac{3-\sqrt{39}}{10}\right),\left(\dfrac{13+\sqrt{39}}{10};\dfrac{3+\sqrt{39}}{10}\right)$.

Nhận xét.

Bài toán số 12, dạng thức hàm số của phương trình còn lại đã tăng cấp so với motip phương trình đa thức bậc ba hai ẩn của hệ phương trình câu 3, Đề thi tuyển sinh đại học Khối A và khối A1 ; Kỳ thi tuyển sinh năm 2012. Các căn thức đã được huy động và bản chất đã được ẩn giấu đi thông qua các phép biến đổi đại lượng liên hợp, và hàm số cần xét đơn điệu nghịch biến trên một miền hạn hẹp, không những điều kiện từ phương trình thứ hai, mà còn lồng ghép cả điều kiện không âm của ẩn hàm căn thức, bắt buộc cần xét điều kiện các biến dựa vào phương trình thứ hai của hệ (có thể dựa vào phân tích hằng đẳng thức hoặc điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai như đã đề cập), tác giả mong muốn các bạn độc giả hết sức lưu ý.

Bài toán 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4(x+3)\sqrt{x+3}=4(y+1)\sqrt{y+1}+15(x-y)+30, \\ x^2+y^2+2(2x+3y)=-4. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -3; y\ge -1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$x^2+4x+4+y^2+6y+9=9 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=9$$
$$\Rightarrow \begin{cases}(x+2)^2\le 9\\(y+3)^2\le 9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x+2|\le 3\\|y+3|\le 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3\le x+2\le 3\\-3\le y+3\le 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-5\le x\le 1\\-6\le y\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le \sqrt{x+3}\le 2\\0\le \sqrt{y+1}\le 1\end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$4(x+3)\sqrt{x+3}-15(x+3)=4(y+1)\sqrt{y+1}-15(y+1)$$
$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+3}\right)^3-15(x+3)=4\left(\sqrt{y+1}\right)^3-15(y+1) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=4t^3-15t^2; t\in[0;2] \Rightarrow f'(t)=12t^2-30t=6t(2t-5)\le 0, \forall t\in[0;2]$.

Suy ra hàm số liên tục và nghịch biến trên miền $[0;2]$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x+3=y+1 \Leftrightarrow x+2=y.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta có $y^2+(y+3)^2=9 \Leftrightarrow 2y^2+6y=0 \Leftrightarrow y(y+3)=0 \Leftrightarrow y\in\{-3;0\}$.

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $y=0; x=-2$.

Bài toán 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2(1-x-y),\\10y+5x+30+(y-x)\sqrt{y-x}=3(y+2)\sqrt{3y+6}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge x; y\ge -2$. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$x^2+y^2+2(x+y)=2 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1=4$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^2\le 4\\(y+1)^2\le 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x+1|\le 2\\|y+1|\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\le x+1\le 2\\-2\le y+1\le 2\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}-3\le x\le 1\\-3\le y\le 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le -x\le 3\\-9\le 3y\le 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4\le y-x\le 4\\-3\le 3y+6\le 9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\le \sqrt{y-x}\le 2\\0\le \sqrt{3y+6}\le 3\end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(y-x)\sqrt{y-x}-5(y-x)=3(y+2)\sqrt{3y+6}-5(3y+6)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-x}\right)^3-5(x-y)=\left(\sqrt{3y+6}\right)^3-5(3y+6) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-5t^2; t\in[0;3] \Rightarrow f'(t)=3t^2-10t=t(3t-10)<0, \forall t\in[0;3]$.

Suy ra hàm số liên tục và nghịch biến trên miền $[0;3]$. Do đó

$$f\left(\sqrt{y-x}\right)=f\left(\sqrt{3y+6}\right) \Leftrightarrow \sqrt{y-x}=\sqrt{3y+6} \Leftrightarrow y-x=3y+6 \Leftrightarrow -x=2y+6.$$

Phương trình thứ nhất của hệ lại trở thành

$$\begin{cases}(-2y-6+1)^2+(y+1)^2=4\\y\ge -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2y+5)^2+(y+1)^2=4\\y\ge -2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}5y^2+22y+22=0\\y\ge -2\end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{-11+\sqrt{11}}{5} \Rightarrow x=-\frac{8+2\sqrt{11}}{5}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 14, vẫn xoay quanh motip tìm điều kiện nghiệm của các biến x và y tương tự các bài toán mở đầu tài liệu. Không quá khó các bạn đều biến đổi quy về dạng tương đồng hàm số

$$f(u)=f(v);u=\sqrt{y-x};v=\sqrt{3y+6}.$$

Tuy nhiên đã có sự hiện diện của ẩn hàm căn thức mức độ phức tạp hơn, nó chứa đồng thời hai ẩn x và y, chắc chắn không ít bạn học sinh tỏ ra lúng túng.

"Em đi xa quá, em đi xa anh quá"

(*Chắc ai đó sẽ về - Sơn Tùng MTP*)

Để đánh giá ẩn hàm $u=\sqrt{y-x}$ *có thể diễn đạt đại khái, hiểu nôm na kiểu như một người đứng im, một người cứ di chuyển ra xa (hoặc hai người đi về hai con đường đối lập nhau) thì khoảng cách hai người ngày càng lớn, cứ cảm thấy càng xa cách.*

Giả dụ xét điều kiện $\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow 0\le x+y\le 4$ *là trường hợp đơn giản khi hai biến đồng bộ đi cùng hướng.*

Một câu hỏi đặt ra là trong trường hợp đó thì miền giá trị của các ẩn hàm đa dạng sẽ như thế nà, thí dụ

$$x-y;x-2y;y-x;3x-2y+1;x^2-y+2;y^2+x+3;...$$

Khi mà hai biến x và y trong căn thức chia rẽ hai bên chiến tuyến ? Khá đơn giản, chú ý thực hiện nhân hai vế bất phương trình với một số âm thì bất phương trình đổi chiều

- $\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le -x\le 0\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow -2\le y-x\le 2.$
- $\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ -2\le -y\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ -4\le -2y\le 0\end{cases}\Rightarrow -4\le x-2y\le 2.$

Và nhiều hơn nữa, chúng ta có thể thực hiện tăng cường phức tạp hóa ẩn hàm, bằng cách sử dụng các phép biến đổi liên hợp, hằng đẳng thức, nâng bậc đa thức phía trong căn, thậm chí có thể lồng ghép khảo sát hàm số bắt buộc với biểu thức dưới dấu căn trong một số trường hợp khả thi, sẽ thu được những bài toán thú vị.

Bài toán 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(5x^2+x+y^2)+y^2=2x(xy+y+2),\\ (3x+7)\sqrt{3x+1}=(x-y+9)\sqrt{x-y+3}+9\left(x+\dfrac{1}{2}y-1\right).\end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x-y+3\ge 0;x\ge -\frac{1}{3}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+1)(5x^2-2xy-4x+y^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ 5x^2-2xy-4x+y^2=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Loại trường hợp $x=-1$. Ta nhận xét

$$(1)\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+x^2-2xy+y^2=1\Leftrightarrow(2x-1)^2+(x-y)^2=1\Rightarrow\begin{cases}(2x-1)^2\le 1\\ (x-y)^2\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-1|\le 1\\ |x-y|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 2x-1\le 1\\ -1\le x-y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 2\le x-y+3\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le\sqrt{3x+1}\le 2\\ \sqrt{2}\le\sqrt{x-y+3}\le 2\end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2(3x+7)\sqrt{3x+1}=2(x-y+9)\sqrt{x-y+3}+18x+9y-18$$
$$\Leftrightarrow 2(3x+7)\sqrt{3x+1}-27x-9=2(x-y+9)\sqrt{x-y+3}-9x+9y-27$$
$$\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{3x+1}-9(3x+1)+12\sqrt{3x+1}$$
$$=2(x-y+3)\sqrt{x-y+3}-9(x-y+3)+12\sqrt{x-y+3}\quad(2)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-9t^2+12t; t\in[1;2]\Rightarrow f'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)\le 0,\forall t\in[1;2]$.

Như vậy hàm số liên tục và nghịch biến trên miền $[1;2]$ nên

$$(2)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3x+1}\right)=f\left(\sqrt{x-y+3}\right)\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x-y+3}\Leftrightarrow 3x+1=x-y+3\Leftrightarrow y=2-2x.$$

Phương trình thứ (1) khi đó lại trở thành

$$5x^2-2xy-4x+y^2=0\Leftrightarrow 5x^2-2x(2-2x)-4x+(2-2x)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-4x+4x^2-4x+4x^2-8x+4=0\Leftrightarrow 13x^2-16x+4=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{8+2\sqrt{3}}{13};\frac{8-2\sqrt{3}}{13}\right\}$$

Từ đây đi đến các nghiệm của hệ $(x;y)=\left(\frac{8+2\sqrt{3}}{13};\frac{10-4\sqrt{3}}{13}\right),\left(\frac{8-2\sqrt{3}}{13};\frac{10+4\sqrt{3}}{13}\right)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán 15, không quá khó để khai thác nhân tử phương trình thứ nhất của hệ, các bạn lưu ý phương trình hai ẩn nếu có một nghiệm hằng số cố định với một ẩn, giả dụ $x=-2; x=1; y=1; y=2;\ldots$ với mọi giá trị của ẩn còn lại, chúng ta có thể tính trực tiếp được nó bằng cách gán giá trị nguyên bất kỳ và thao tác giải phương trình.

Phương trình thứ nhất có dạng $x(5x^2+x+y^2)+y^2=2x(xy+y+2)$. Có hai phương án nghiệm cố định

- *Rõ ràng tìm nghiệm cố định ẩn y dễ dàng hơn vì chỉ cần giải phương trình bậc hai ẩn y.*
  Xét $x=1\Rightarrow 1(5+1+y^2)+y^2=2(1.y+y+2)\Leftrightarrow 2y^2-4y+2=0\Leftrightarrow 2(y-1)^2=0\Leftrightarrow y=1$.
  Tuy nhiên khi đó với nghiệm cố định $y=1\Rightarrow x(5x^2+x+1)\ne 2x(x+1+2)$ (Loại).
- *Chuyển hướng tìm nghiệm cố định ẩn x, bắt buộc giải phương trình bậc ba ẩn x. Xét*

$$y=1\Rightarrow x(5x^2+x+1)+1=2x(x+3)\Leftrightarrow 5x^3-x^2-5x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(5x-1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;1;\frac{1}{5}\right\}$$

  Loại trường hợp $x=1$ đã xét ở trên.
  Với $x=-1\Rightarrow -1(5-1+y^2)+y^2\equiv -2(-y+y+2)$.
  Với $x=\frac{1}{5}\Rightarrow \frac{1}{5}\left(5.\frac{1}{25}+\frac{1}{5}+y\right)\ne\frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}y+y+2\right)$.

Sử dụng chiêu trò này các bạn công phá được nhân tử phương trình thứ nhất, tuy nhiên xin lưu ý nó chỉ phù hợp khi có các nghiệm cố định hằng số với một ẩn (trường hợp nhân tử nhị thức hai ẩn không khả thi).

Ta có phân tích $(x+1)(5x^2-2xy-4x+y^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ 5x^2-2xy-4x+y^2=0\quad(1)\end{array}\right.$

Trường hợp $x=-1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên bị loại ngay lập tức. Thực ra nó là một tấm nhiễu điều phủ lên phương trình thứ nhất, mục đích ẩn giấu và gây lạc hướng và tạo ra sự hưng phấn nhất thời cho các bạn học sinh có tâm lý nóng vội. Điểm mấu chốt nằm ở phương trình (1) hệ quả. Một số bạn đọc có xu hướng sử dụng phương pháp thay thế với phương trình (1) nhưng rất tiếc điều này quá phức tạp, chẳng lẽ thế theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai ẩn x (tương ứng y), chướng ngại vật đã được thiết lập nhằm chặn đứng bước đi của các đội quân vô tổ chức, thiếu tinh thần.

Vẫn theo motip cũ, thực hiện chặn miền giá trị của các ẩn x và y theo điều kiện nghiệm phương trình bậc hai, hoặc hằng đẳng thức phương trình (1), trường hợp này có một cấp độ khác vì hiện diện ẩn hàm hai biến khó chịu $\sqrt{x-y+3}$ cố thủ tại phương trình thứ hai, nên quy chiếu theo hằng đẳng thức sẽ tỏ ra tối ưu hơn

$$(1)\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+x^2-2xy+y^2=1\Leftrightarrow (2x-1)^2+(x-y)^2=1\Rightarrow\begin{cases}(2x-1)^2\le 1\\(x-y)^2\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| \le 1 \\ |x-y| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 2x-1 \le 1 \\ -1 \le x-y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2 \le x-y+3 \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \sqrt{3x+1} \le 2 \\ \sqrt{2} \le \sqrt{x-y+3} \le 2 \end{cases}$$

Sở dĩ cần thực hiện miền giá trị chặt như vậy vì phương trình hai có dạng hàm số

$$f(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t; t \in [1;2] \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2) \le 0, \forall t \in [1;2].$$

Thao tác quy về hàm số tác giả xin không nhắc lại. Vì hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$, *dễ thấy đa phần các ẩn hàm ta thường làm cho nó bị chặn trên, chặn dưới, hoặc bị chặn (ít khi chạy trên hai khoảng rời nhau).*

Trường hợp đơn giản là các biến thỏa mãn $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow u;v \in [1;2]$.

Do đó chúng ta dự định chặn miền giá trị các ẩn sao cho $\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 < m \le v \le n < 2 \end{cases} \Rightarrow u;v \in [1;2]$.

Đặc biệt có một số tình huống xảy ra các miền $\begin{cases} m \le u \le n \\ p \le v \le q \\ m \le p; n \le q \end{cases} \Rightarrow u;v \in [m;q]$, *ở đây ẩn hàm u và v tùy ý.*

Sau khi đã tiến bước về dạng hàm số, nếu hàm số đó không đơn điệu trên tập số thực hay miền xác định cơ bản (miền xác định ban đầu) thì bắt buộc phải liên tưởng tới thao tác chặn miền giá trị chặt cho các ẩn hàm, sử dụng triệt để các dữ kiện của hai phương trình, kết hợp tổng hòa các kiến thức đánh giá, bất đẳng thức để vượt qua cao điểm quyết định đó.

Bài toán 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 21 + (2x-y-8)\sqrt{2x-y+1} = 6(x-y) + (y-1)\sqrt{y+8}, \\ 2(x^2+y) + y^2 = 2xy + 2x + 1. \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x - y + 1 \ge 0; y + 8 \ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$4x^2 + 4y + 2y^2 = 4xy + 4x + 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 - 2(2x-y) + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow (2x-y-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} (2x-y-1)^2 \le 4 \\ (y+1)^2 \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x-y-1| \le 2 \\ |y+1| \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le 2x-y-1 \le 2 \\ -2 \le y+1 \le 2 \end{cases}$$

Suy ra nhận xét

$$\begin{cases} 0 \le 2x-y+1 \le 4 \\ 5 \le y+8 \le 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt{2x-y+1} \le 2 \\ \sqrt{5} \le \sqrt{y+8} \le 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x-y+1}; \sqrt{y+8} \in [0;3].$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$21 + (2x-y-8)\sqrt{2x-y+1} = 6(x-y) + (y-1)\sqrt{y+8}$$

$$(2x-y+1)\sqrt{2x-y+1} - 3(2x-y+1) - 9\sqrt{2x-y+1} = (y+8)\sqrt{y+8} - 3(y+8) - 9\sqrt{y+8}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y+1}\right)^3 - 3\left(\sqrt{2x-y+1}\right)^2 - 9\sqrt{2x-y+1} = \left(\sqrt{y+8}\right)^3 - 3\left(\sqrt{y+8}\right)^2 - 9\sqrt{y+8} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 - 9t; t \in [0;3]$ ta có $f'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3) \le 0; \forall t \in [0;3]$.

Hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $[0;3]$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-y+1}\right) = f\left(\sqrt{y+8}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y+1} = \sqrt{y+8} \Leftrightarrow 2x-y+1 = y+8 \Leftrightarrow 2x = 2y+7.$$

Khi đó $(2x-y-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow (y+6)^2 + (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2y^2 + 14y + 33 = 0; \Delta < 0$ (Vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(3x-2y+13)\sqrt{3x-2y+4}=2(2x+3)\sqrt{4x-3}+6(7-x-2y),\\ 2x^2-4xy+4y^2+7=8y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x-2y+4\ge 0; x\ge\frac{3}{4}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2-4xy+4y^2+4(x-2y)+4+x^2-4x+4=1\Leftrightarrow(x-2y+2)^2+(x-2)^2=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-2y+2)^2\le 1\\(x-2)^2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2y+2|\le 1\\|x-2|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\-1\le x-2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\1\le x\le 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\2\le 2x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le 3x-2y+2\le 7\\2\le x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le 3x-2y+4\le 9\\1\le 4x-3\le 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}\le\sqrt{3x-2y+4}\le 3\\1\le\sqrt{4x-3}\le 3\end{cases}$$

Dẫn đến $\sqrt{3x-2y+4};\sqrt{4x-3}\in[1;3]$. Mặt khác, phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$(3x-2y+4)\sqrt{3x-2y+4}-6(3x-2y+4)+9\sqrt{3x-2y+4}$$
$$=(4x-3)\sqrt{4x-3}-6(4x-3)+9\sqrt{4x-3}\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-6t^2+9t;t\in[1;3]\,f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)\le 0;\forall t\in[1;3]$.

Suy ra hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $[1;3]$. Ta thu được

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3x-2y+4}\right)=f\left(\sqrt{4x-3}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3x-2y+4}=\sqrt{4x-3}$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y+4=4x-3\Leftrightarrow 2y=7-x$$

Lúc đó

$$(x-2y+2)^2+(x-2)^2=1\Leftrightarrow(2x-5)^2+(x-2)^2=1$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-24x+28=0\Leftrightarrow x\in\left\{2;\frac{14}{5}\right\}\Rightarrow(x;y)=\left(2;\frac{5}{2}\right),\left(\frac{14}{5};\frac{21}{10}\right)$$

Kết luận hệ phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Lớp bài toán hệ phương trình chứa 2 ẩn hàm căn thức, trong đó ít nhất một ẩn hàm chứa đồng thời hai biến x và y, thao tác chặn miền giá trị cho nó khó khăn hơn với ẩn hàm một biến. Áp dụng nhận xét tại bài toán số 14, bài toán 16 và 17 chúng ta vẫn thực hiện tương tự, thiết lập tổng bình phương và đánh giá chặn, nhân thêm hằng số và công từng vế các bất đẳng thức

$$(x-2y+2)^2+(x-2)^2=1\Rightarrow\begin{cases}(x-2y+2)^2\le 1\\(x-2)^2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2y+2|\le 1\\|x-2|\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\-1\le x-2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-2y+2\le 1\\2\le 2x\le 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le 3x-2y+2\le 7\\2\le x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le 3x-2y+4\le 9\\1\le 4x-3\le 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}\le\sqrt{3x-2y+4}\le 3\\1\le\sqrt{4x-3}\le 3\end{cases}$$

Thiết nghĩ thiết lập tổng các bình phương không phải là phương cách duy nhất, dù nó là tối ưu. Chúng ta không thể cứ bó buộc mãi trong khuôn khổ khó khăn đó được, bởi đôi khi găm bình phương cũng không dễ dàng gì. Nếu sử dụng điều kiện nghiệm của phương trình bậc hai $2x^2-4xy+4y^2+7=8y$ thì sẽ như thế nào, chúng ta cùng thử nghiệm với bài toán 17 theo phương án thủ công này

❖ *Phương trình bậc hai theo ẩn x:* $2x^2-4xy+4y^2-8y+7=0$

Biệt thức $\Delta'=4y^2-2\left(4y^2-8y+7\right)=-4y^2+16y-14$.

Điều kiện nghiệm $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 4y^2-16y+14\le 0\Rightarrow 1,2<y<3$.

❖ *Phương trình bậc hai theo ẩn y:* $4y^2-4y(x+2)+2x^2+7=0$.

Biệt thức $\Delta'=4\left(x^2+4x+4\right)-4\left(2x^2+7\right)=-4x^2+16x-12$.

Điều kiện nghiệm $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 4x^2-16x+12\le 0\Leftrightarrow 4(x-1)(x-3)\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

❖ *Xuất phát từ* $1\le x\le 3\Rightarrow 1\le 4x-3\le 9\Rightarrow 1\le\sqrt{4x-3}\le 3$, *xử lý xong ẩn hàm đơn giản. Tiếp tục*

$$\begin{cases}1,2<y<3\\1\le x\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<-y<-1,2\\3\le 3x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<-2y<-2,4\\3\le 3x\le 9\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3\le 3x-2y\le 7\Rightarrow 1\le 3x-2y+4\le 10,6\Rightarrow 1\le\sqrt{3x-2y+4}\le\sqrt{10,6}$$

Mà $\sqrt{10,6}>\sqrt{9}=3$ *do đó sẽ không có điểm tựa chắc chắn* $\sqrt{3x-2y+4}\le 3$. *Thất bại.*

Rõ ràng sử dụng điều kiện nghiệm phương trình bậc hai cho chính xác miền giá trị của từng biến, tuy nhiên khi mà hai biến chúng ràng buộc với nhau thì điều này lại dẫn đến chặn miền không chặt chẽ, phạm vi rộng, thậm chí phản tác dụng, làm cho hàm số phía sau đơn điệu một cách "lung lay, mờ ảo", chưa kể có một số bạn hoang tưởng theo kiểu $10,6\approx 9$, *dẫn đến đánh bài cùn, làm liều ăn nhiều nữa cơ. Thông qua đây, có thể thấy một bài toán nhỏ rút ra nhiều bài học lớn, liên hệ một chút trong cuộc sống, trong tình yêu, chúng ta không nên quá để ý, soi mói, chặt chẽ, chi ly, cứng nhắc, giáo điều, ngược lại cần nhẹ nhàng, tình cảm, bình tĩnh, khoan dung mới tạo ra sự cân bằng, hòa thuận, gắn bó lâu dài, có thể lấy dẫn chứng câu tục ngữ "Lạt mềm buộc chặt" trong kho tàng văn học Việt Nam.*

Bài toán 18.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y+10)\sqrt{x+y+4}+9x+9y+\dfrac{27}{2}=(3x-3y+13)\sqrt{3x-3y+7},\\2x^2+5y^2+2(x+y-xy)=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x+y+4\ge 0;3x-3y+7\ge 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2x^2-2xy+5y^2+2(x+y)=0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+2(x+y)+1+x^2-4xy+4y^2=1$$

$$(x+y+1)^2+(x-2y)^2=1\Rightarrow\begin{cases}(x+y+1)^2\le 1\\(x-2y)^2\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+y+1|\le 1\\|x-2y|\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x+y+1\le 1\\-1\le x-2y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x+y\le 0\\-2\le 2x-4y\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\le x+y+4\le 4\\-4\le 3x-3y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\le x+y+4\le 4\\3\le 3x-3y+7\le 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\le\sqrt{x+y+4}\le 2\\\sqrt{3}\le\sqrt{3x-3y+7}\le 3\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+y+4};\sqrt{3x-3y+7}\in[1;2]$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2(x+y+10)\sqrt{x+y+4}+9(2x+2y+3)=2(3x-3y+13)\sqrt{3x-3y+7}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y+4)\sqrt{x+y+4}-9(x+y+4)+12\sqrt{x+y+4}$$

$$=2(3x-3y+7)\sqrt{3x-3y+7}-9(3x-3y+7)+12\sqrt{3x-3y+7}\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-9t^2+12t;t\in[1;2]\Rightarrow f'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)\le 0,\forall t\in[1;2]$.

Như vậy hàm số liên tục và nghịch biến trên miền $[1;2]$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y+4}\right)=f\left(\sqrt{3x-3y+7}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+y+4}=\sqrt{3x-3y+7}$$

$$\Leftrightarrow x+y+4=3x-3y+7\Leftrightarrow 2x=4y-3$$

Khi đó

$$2x^2-2xy+5y^2+2x+2y=0\Leftrightarrow 4x^2-4xy+10y^2+4x+4y=0$$
$$\Leftrightarrow (4y-3)^2-2y(4y-3)+10y^2+4y+2(4y-3)=0\Leftrightarrow 18y^2-6y+3=0,\Delta<0$$

Phương trình ẩn y ở trên vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

Bài toán 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-2y+3)\sqrt{x-2y+3}+9(x+y-1)=(4x+y)\sqrt{4x+y},\\ 2x^2-2xy+5y^2+2x+2y=0.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2-4xy+4y^2+x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=1\Leftrightarrow (x-2y)^2+(x+y+1)^2=1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(x-2y)^2\le 1\\ (x+y+1)^2\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-2y|\le 1\\ |x+y+1|\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x-2y\le 1\\ -1\le x+y+1\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x-2y\le 1\\ -2\le x+y\le 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2\le x-2y+3\le 4\\ -6\le 3x+3y\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\le x-2y+3\le 4\\ -4\le 4x+y\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sqrt{x-2y+3}\le 2\\ 0\le\sqrt{4x+y}\le 2\end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$(x-2y+3)\sqrt{x-2y+3}-3(x-2y+3)=(4x+y)\sqrt{4x+y}-3(4x+y)$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2y+3}\right)^3-3\left(\sqrt{x-2y+3}\right)^2=\left(\sqrt{4x+y}\right)^3-3\left(\sqrt{4x+y}\right)^2\quad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2;t\in[0;2]\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)\le 0,\forall t\in[0;2]$.

Hàm số đang xét nghịch biến và liên tục trên miền $[0;2]$ nên

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-2y+3}\right)=f\left(\sqrt{4x+y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x-2y+3}=\sqrt{4x+y}\Leftrightarrow x-2y+3=4x+y\Leftrightarrow x+y=1.$$

Lúc này $(x-2y)^2+(x+y+1)^2=1\Leftrightarrow (1-3y)^2=-3$ (Vô nghiệm). Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2(x-y+26)\sqrt{x-y+8}+15(x^2+y-3)=2(x^2+x+23)\sqrt{x^2+x+5},\\ 2x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2-2xy+y^2+2x-2y+1+x^2-4x+4=4\Leftrightarrow (x-y+1)^2+(x-2)^2=4$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(x-y+1)^2\le 4\\ (x-2)^2\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-y+1|\le 2\\ |x-2|\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x-y+1\le 2\\ -2\le x-2\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x-y\le 1\\ 0\le x\le 4\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}6\le x-y+8\le 9\\ 5\le x^2+x+5\le 25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{6}\le\sqrt{x-y+8}\le 3\\ \sqrt{5}\le\sqrt{x^2+x+5}\le 5\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x-y+8};\sqrt{x^2+x+5}\in[2;3]$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$2(x-y+8)\sqrt{x-y+8}-15(x-y+8)+36\sqrt{x-y+8}$$
$$=2(x^2+x+5)\sqrt{x^2+x+5}-15(x^2+x+5)+36\sqrt{x^2+x+5}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-15t^2+36t;t\in[2;3]\Rightarrow f'(t)=6t^2-30t+36=6(t-2)(t-3)\le 0;\forall x\in[2;3]$.

Vậy hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $[2;3]$. Suy ra

$$f\left(\sqrt{x-y+8}\right)=f\left(\sqrt{x^2+x+5}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x-y+8}=\sqrt{x^2+x+5}\Leftrightarrow x-y+8=x^2+x+5\Leftrightarrow y=3-x^2.$$

Khi đó phương trình thứ hai lại trở thành

$$2x^2-2x\left(3-x^2\right)+x^4-6x^2+9-2x-6+2x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3-2x^2-8x+10=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2+2x^3-8x+9=0\quad(1)$$

Ta có $f(x)=2x^3-8x+9;x\in[0;4]$. Do đó $f'(x)=6x^2-8;f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

Khảo sát hàm số ta thu được $f(0)=9;f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=9-\frac{32}{3\sqrt{3}};f(4)=105\Rightarrow\underset{x\in[0;4]}{Min}f(x)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=9-\frac{32}{3\sqrt{3}}>0$.

Do vậy $\left(x^2-1\right)^2+2x^3-8x+9>0,\forall x\in[0;4]$, phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Ngoài phương pháp xây dựng miền giá trị các ẩn thông qua phương trình bậc hai, các bạn có thể sử dụng một dạng tương tự đơn giản hơn, mà không thông qua biến đổi, đó là phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, cụ thể là tổng của các giá trị tuyệt đối. Chú ý rằng

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|+\ldots+|A_n|=k;k>0\Rightarrow\begin{cases}|A_1|\le k\\|A_2|\le k\\\ldots\end{cases}$$

Kết hợp biến đổi dạng tương đồng hàm số của phương trình còn lại, kết hợp chia trường hợp giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thu được lời giải bài toán.

Bài toán 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x-1|+|y-1|=1,\\2(x+1)\sqrt{x+1}+9\left(y^2+y-x+1\right)=2\left(y^2+y+2\right)\sqrt{y^2+y+2}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge-1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$|x-1|+|y-1|=1\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\le1\\|y-1|\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x-1\le1\\-1\le y-1\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le2\\0\le y\le2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\le x+1\le3\\2\le y^2+y+2\le8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le\sqrt{x+1}\le\sqrt{3}\\\sqrt{2}\le\sqrt{y^2+y+2}\le\sqrt{8}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+1};\sqrt{y^2+y+2}\in(0;3]$$

Phương trình thứ hai trở thành

$$2(x+1)\sqrt{x+1}-9(x+1)=2\left(y^2+y+2\right)\sqrt{y^2+y+2}-9\left(y^2+y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow2\left(\sqrt{x+1}\right)^3-9\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2\left(\sqrt{y^2+y+2}\right)^3-9\left(\sqrt{y^2+y+2}\right)^2$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-9t^2;t\in(0;3]\Rightarrow f'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)<0,\forall t\in(0;3]$.

Dẫn đến hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $(0;3]$. Ta thu được

$$f\left(\sqrt{x+1}\right)=f\left(\sqrt{y^2+y+2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{y^2+y+2}\Leftrightarrow x-1=y^2+y.$$

Phương trình thứ nhất khi đó lại trở thành

$$\left|y^2+y\right|+\left|y-1\right|=1\Leftrightarrow y^2+y+\left|y-1\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le y\le 2\\ y^2+y+1-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}0\le y<1\\ y^2+y+1-y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\le y\le 2\\ y^2+y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}0\le y<1\\ y^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow y=0.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=1;y=0$.

Bài toán 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3x+3y=2,\\ x^2+\left|y-1\right|=1.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Phương trình thứ hai của hệ ta suy ra

$$x^2+\left|y-1\right|=1\Rightarrow\begin{cases}x^2\le 1\\ \left|y-1\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y-1\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x+1\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow x+1;y\in\left[0;2\right].$$

Phương trình thứ nhất biến đổi $x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3=y^3-3y^2\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)^2=y^3-3y^2$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-3t^2;t\in\left[0;2\right]\Rightarrow f'\left(t\right)=3t^2-6t=3t\left(t-2\right)<0,\forall t\in\left[0;2\right]$.

Hàm số trên liên tục và nghịch biến trên miền $\left[0;2\right]$ nên thu được $f\left(x+1\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow x+1=y$.

Phương trình thứ hai trở thành $x^2+\left|x\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+x-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2-x-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Từ đây đi đến hệ có hai nghiệm.

Bài toán 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+9y^2+21y=y^3+51x+117,\\ \left|x-2\right|+\left|y-1\right|=2.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Phương trình thứ hai suy ra

$$\left|x-2\right|+\left|y-1\right|=2\Rightarrow\begin{cases}\left|x+2\right|\le 2\\ \left|y-1\right|\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x-2\le 2\\ -2\le y-1\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 4\\ -1\le y\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\le x+1\le 5\\ -3\le y-2\le 1\end{cases}\Rightarrow x+1;y-2\in\left[-3;5\right]$$

Phương trình thứ nhất lại tương đương

$$x^3-51x-47=y^3-9y^2-21y+70$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3-45x-45=y^3-6y^2+12y-8-3y^2+12y-12-45y+90$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)^2-45\left(x+1\right)=\left(y-2\right)^3-3\left(y-2\right)^2-45\left(y-2\right)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-3t^2-45t;t\in\left[-3;5\right]\Rightarrow f'\left(t\right)=3t^2-6t-45=3\left(t+3\right)\left(t-5\right)\le 0,\forall t\in\left[-3;5\right]$.

Hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $\left[-3;5\right]$. Ta thu được

$$f\left(x+1\right)=f\left(y-2\right)\Leftrightarrow x+1=y-2\Leftrightarrow y-1=x+2.$$

Phương trình thứ hai trở thành $\left|x-2\right|+\left|x+2\right|=2\Leftrightarrow\left|x+2\right|+\left|2-x\right|=2$.

Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\ge|a+b|\Rightarrow|x+2|+|2-x|\ge|x+2+2-x|=4>2$, phương trình ẩn x vô nghiệm.
Kết luận bài toán đã cho vô nghiệm.

Bài toán 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2|x+1|+3|y-1|=6,\\(x-1)\left(2\sqrt{x-1}-3\right)=(y-2)\left(2\sqrt{y-2}-3\right).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge1;y\ge1$. Phương trình thứ nhất của hệ suy ra

$$2|x+1|+3|y-1|=6\Rightarrow\begin{cases}2|x+1|\le6\\3|y-1|\le6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x+1|\le3\\|y-1|\le2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le x+1\le3\\-2\le y-1\le2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5\le x-1\le1\\-3\le y-2\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sqrt{x-1}\le1\\0\le\sqrt{y-2}\le1\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x-1};\sqrt{y-2}\in[0;1]$$

Phương trình thứ hai biến đổi về

$$2(x+1)\sqrt{x+1}-3(x+1)=2(y-2)\sqrt{y-2}-3(y-2)$$

$$\Leftrightarrow2\left(\sqrt{x+1}\right)^3-3\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2\left(\sqrt{y-2}\right)^3-3\left(\sqrt{y-2}\right)^2$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2;t\in[0;1]\Rightarrow f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)\le0$.
Hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $[0;1]$ nên ta có

$$f\left(\sqrt{x-1}\right)=f\left(\sqrt{y-2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow x-1=y-2\Rightarrow y-1=x.$$

Lúc đó lại có $\begin{cases}x\ge1\\2|x+1|+3|y-1|=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\2|x+1|+3|x|=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\2x+2+3x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge1\\5x=4\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.
Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left|\sqrt{1-x}-1\right|+y=1,\\(x+3)\sqrt{x+3}=(y+1)\sqrt{y+1}+3x-3y+6.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $-3\le x\le1;y\ge-1$.
Từ phương trình thứ nhất ta có $y=1-\left|\sqrt{1-x}-1\right|\le1\Rightarrow0\le\sqrt{y+1}\le\sqrt{2}$.
Mặt khác $x\le1\Rightarrow\sqrt{x+3}\le2\Rightarrow0\le\sqrt{x+3}\le2\Rightarrow\sqrt{y+1};\sqrt{x+3}\in[0;2]$.
Phương trình thứ hai biến đổi về

$$(x+3)\sqrt{x+3}-3(x+3)=(y+1)\sqrt{y+1}-3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)^3-3\left(\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{y+1}\right)^3-3\left(\sqrt{y+1}\right)^2$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2;t\in[0;2]\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)\le0,\forall t\in[0;2]$.
Hàm số trên liên tục và nghịch biến trên miền đang xét, suy ra

$$f\left(\sqrt{x+3}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x+3=y+1\Leftrightarrow y=x+2.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành $\left|\sqrt{1-x}-1\right|+x+2=1\Leftrightarrow\left|\sqrt{1-x}-1\right|+x+1=0$.

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases}\sqrt{1-x}\ge 1\\ \sqrt{1-x}=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
- $\begin{cases}\sqrt{1-x}<1\\ \sqrt{1-x}=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x+2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<-1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x\sqrt{x}+3(y-x)=2(y-1)\sqrt{y-1}+3,\\ |2x-3|+(y-1)^2=1\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 1$. Phương trình thứ hai của hệ suy ra

$$|2x-3|+(y-1)^2=1\Rightarrow\begin{cases}|2x-3|\le 1\\ |y-1|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le 2x-3\le 1\\ -1\le y-1\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\le x\le 4\\ -1\le y-1\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sqrt{x}\le 2\\ 0\le\sqrt{y-1}\le 1\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x};\sqrt{y-1}\in[0;1]$$

Phương trình thứ nhất biến đổi về

$$2x\sqrt{x}-3x=2(y-1)\sqrt{y-1}-3(y-1)\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}\right)^3-3\left(\sqrt{x}\right)^2=2\left(\sqrt{y-1}\right)^3-3\left(\sqrt{y-1}\right)^2.$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2;t\in[0;1]\Rightarrow f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)\le 0$.

Hàm số đang xét liên tục và nghịch biến trên miền $[0;1]$nên ta có $f\left(\sqrt{x}\right)=f\left(\sqrt{y-1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x=y-1$.

Thu được $|2x-3|+x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x\ge 3\\ x^2+2x-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\ x^2+2x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\\ \begin{cases}2x<3\\ x^2-2x+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x<3\\ x^2-2x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$

Kết luận hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 27. Trích lược câu 3, Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Khối A và khối A1; Đề thi chính thức, Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam; Kỳ thi tuyển sinh năm 2013.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y,\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2+2x(y-1)+y^2-2y+1=4y\Leftrightarrow(x-y+1)^2=4y\Rightarrow 4y\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+\sqrt[4]{y^4}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+1+1}+\sqrt[4]{y^4+1-1}\quad[*].$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t-1},t\ge 1$ thì $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(t-1)^3}}>0,\forall t>1$. Hàm số đồng biến với $t\ge 1$.

Dễ thấy $[*] \Leftrightarrow f(x) = f(y^4+1) \Leftrightarrow x = y^4+1$. Thay thế vào phương trình thứ hai thu được

$$\left(y^4+y\right)^2 = 4y \Leftrightarrow y\left(y^7+2y^4+y-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ g(y)=y^7+2y^4+y-4=0 \end{array}\right.$$

Để ý rằng $g'(y) = 7y^6+8y^3+1>0, \forall y \geq 0 \Rightarrow g(y)$ đồng biến, liên tục với $y \geq 0$. Hơn nữa $g(1)=0 \Rightarrow y=1$.

Từ đây ta thu được hai nghiệm $(x;y) = (1;0),(2;1)$.

Nhận xét.

Đây là năm thứ hai dạng toán hệ phương trình sử dụng tính chất đơn điệu hàm số xuất hiện trong câu 3, kỳ thi tuyển sinh Đại học môn Toán chính thức (không kể câu 5 Phân loại thí sinh trong Đề thi tuyển sinh môn Toán Đại học khối A năm 2010). Mức độ miền giá trị của biến cũng tương tự bài toán 1, Đề thi tuyển sinh khối A năm 2012, tuy nhiên hình thức vô tỷ của phương trình thứ nhất khiến nhiều bạn thí sinh tỏ ra lúng túng, e ngại, khó nhìn nhận, chống phá. Khả năng tư duy linh hoạt, kết nối kiến thức là trọng tâm, song hành với nó kỹ năng tính toán cẩn thận, chính xác được xây dựng ngay từ những bài toán nhỏ như thế này. Trong cuộc sống, thành bại là điều thường thấy, nhưng không vì thế mà chúng ta nản chí, chùn bước, trái lại cần lạc quan, tin tưởng, cố gắng giữ lấy lề, mạnh dạn, táo bạo, thẳng thắn bảo vệ chân lý, làm chủ một phần bầu trời khoa học!

Ngoài cách phân tích bình phương như trên, các bạn có thể coi phương trình thứ hai có dạng ẩn x, tham số y

$$x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0.$$

Biệt thức $\Delta' = y^2-2y+1-\left(y^2-6y+1\right)=4y$ *và điều kiện có nghiệm* $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Bài toán 28. Trích lược câu 8, Thử sức trước kỳ thi Đại học 2015, Đề số 2, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam; Số 449, Tháng 11 năm 2014.

Tác giả Phạm Trọng Thư – Giáo viên trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Tỉnh Đồng Tháp.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x-2}-\sqrt{y^4+5}=y, \\ x^2+2x(y-2)+y^2-8y+4=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2+2x(y-2)+y^2-4y+4=4y \Leftrightarrow (x+y-2)^2=4y \Rightarrow y\geq 0.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-2+5}=\sqrt[4]{y^4}+\sqrt{y^4+5} \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^4+5}; t\geq 0 \Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}}>0, \forall t\geq 0$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t \geq 0$. Ta thu được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[4]{x-2}\right)=f(y) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2}=y \Leftrightarrow y^4+x=2$$

$$\Rightarrow \left(y^4+y\right)^2=4y \Leftrightarrow y\left[y\left(y^3+1\right)^2-4\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ g(y)=y\left(y^3+1\right)^2=4 \quad (1) \end{array}\right.$$

Hàm số $g(y)$ liên tục và đồng biến với $y\geq 0 \Rightarrow g(y)=g(1) \Leftrightarrow y=1$.

Kết luận hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)=(2;0),(3;1)$.

Bài toán 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3+12x^2+9x+1=(2-y)\sqrt{2y-1}, \\ 2x^2+5x+3+\sqrt{-2y^2+3y-1}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2y-1\ge 0 \\ -2y^2+3y-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le y\le 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương $(2x+3)(x+1)=-\sqrt{-2y^2+3y-1}\le 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}\le x\le -1$.

Suy ra $-\frac{1}{2}x+1\le 0 \Rightarrow (x+1)^2\le \frac{1}{4}$ và $0\le 2y-1\le 1 \Rightarrow -1\le -\sqrt{2y-1}\le 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$8x^3+24x^2+18x+2=(4-2y)\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow (2x+2)^3-3(2x+2)=(1-2y)\sqrt{2y-1}+3\sqrt{2y-1}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[-1;1]$ ta có đạo hàm $f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)\ge 0,\forall t\in[-1;1]$.

Dẫn đến hàm số liên tục, đồng biến trên miền $[-1;1]$.

Thu được $f(2x+2)=f\left(-\sqrt{2y-1}\right) \Leftrightarrow 2x+2=-\sqrt{2y-1}$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$\left(1-\sqrt{2y-1}\right).\frac{-\sqrt{2y-1}}{2}=-\sqrt{(2y-1)(1-y)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2y-1}=0 \\ 1=\sqrt{2y-1}+2\sqrt{1-y} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y-1=0 \\ 1=2y-1+4-4y+4\sqrt{(2y-1)(1-y)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y=1 \\ y-1=2\sqrt{(2y-1)(1-y)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y=1 \\ \begin{cases} y\ge 1 \\ 1\le 2y\le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow (x;y)=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};1\right)$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x,y)=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};1\right)$.

Bài toán 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2=3x+2, \\ x^2+\sqrt{1-x^2}+2=3\sqrt{2y-y^2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1\le x\le 1; 0\le y\le 2$.

Từ điều kiện ta có $x+1\in[0;2], y\in[0;2]$. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành

$$x^3+3x^2+3x+1-3x^2-6x-3=y^3-3y^2 \Leftrightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=y^3-3y^2 \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2 \Rightarrow f'(t)=t^2(t-3)<0,\forall t\in[0;2]$. Hàm số nghịch biến, liên tục trên $[0;2]$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow x+1=y$. Thay thế vào phương trình thứ hai của hệ

$$x^2+2=2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4+4x^2+4=4-4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2+8)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1.$$

Cặp giá trị này nghiệm đúng hệ ban đầu, kết luận $S=\{(0;1)\}$.

Nhận xét.

Hai bài toán 29 và 30 mở màn cho lớp bài toán hệ phương trình vô tỷ giải được chỉ thông qua sử dụng tính chất đơn điệu hàm số đơn thuần $f(u)=f(v)$, trong đó thao tác đánh giá dấu đạo hàm có độ khó diễn tiến theo xu hướng "vừa tăng, vừa giảm". Cụ thể giảm mức độ chặn miền giá trị biến, giảm từ phương trình bậc hai xuống điều kiện xác định đơn giản, tuy nhiên mức độ phức tạp gia tăng do chứa căn thức ở biểu thức chốt chặn.

Các bạn lưu ý tài liệu này không đề cập đến lớp hệ phương trình có định hướng.

1. *Phân tích phương trình thứ nhất, tìm quan hệ hai ẩn.*
2. *Thay thế vào phương trình còn lại và sử dụng công cụ hàm số (phương trình một ẩn).*

Trọng tâm tài liệu là sử dụng tính chất đơn điệu đơn thuần hoặc khảo sát hàm số, tìm giá trị lớn nhất – giá trị lớn nhất có sử dụng chặn miền giá trị biến, tổng hòa các kiến thức đại số, lượng giác, bất đẳng thức,...Điều này đòi hỏi các bạn độc giả cần tỉnh táo, nhạy bén, tìm điều kiện chính xác cho bài toán để có những đánh giá ngắn ngọn nhất, tối ưu nhất.

Bài toán 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+1=2\sqrt{x-1}, \\ y^3+12x^2=8x^3+3y+2. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ $y-1=x-1-2\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow y-1=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\ge 0 \Rightarrow y\ge 1$.

Từ đây dẫn đến $y\ge 1; 2x-1\ge 1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$\begin{aligned} & y^3-3y=8x^3-12x^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & y^3-3y=8x^3-12x^2+6x-1-3(2x-1) \\ \Leftrightarrow\ & y^3-3y=(2x-1)^3-3(2x-1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t; t\ge 1$ thì $f'(t)=3t^2-3=3\left(t^2-1\right)\ge 0, \forall t\ge 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét. Thu được $f(y)=f(2x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$.

Phương trình thứ nhất lại trở thành

$$2-x=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ x^2-4x+4=4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x^2-8x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4-2\sqrt{2}.$$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(4-2\sqrt{2}; 7-4\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y-2=\sqrt{x^3+x-2}, \\ (3x-4)\sqrt{3x-2}=(y-3)\sqrt{y-1}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+x-2\ge 0 \\ 3x-2\ge 0 \\ y-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất $y-2=\sqrt{x^3+x-2}\ge 0\Rightarrow y\ge 2\Rightarrow \sqrt{y-1}\ge 1$. Đồng thời $x\ge 1\Rightarrow \sqrt{3x-2}\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} & (3x-2)\sqrt{3x-2}-2\sqrt{3x-2}=(y-1)\sqrt{y-1}-2\sqrt{y-1} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sqrt{3x-2}\right)^3-2\sqrt{3x-2}=\left(\sqrt{y-1}\right)^3-2\sqrt{y-1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t; t\ge 1$ ta có đạo hàm $f'(t)=3t^2-2>0, \forall t\ge 1$.

Như vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên miền đang xét.

Thu được $f\left(\sqrt{3x-2}\right)=f\left(\sqrt{y-1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow 3x-2=y-1\Leftrightarrow y=3x-1$.

Với điều kiện $x\ge 1$, phương trình thứ nhất khi đó trở thành

$$3x-3=\sqrt{x^3+x-2} \Leftrightarrow 9(x-1)^2=(x-1)(x^2+x+2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 9x-9=x^2+x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-8x+11=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{1;4-\sqrt{5};4+\sqrt{5}\right\}$$

Dẫn đến hệ có các nghiệm $(x;y)=(1;2),\left(4-\sqrt{5};11-3\sqrt{5}\right),\left(4+\sqrt{5};11+3\sqrt{5}\right)$.

Nhận xét.

Để xây dựng các bài toán hệ phương trình dạng tương tự cũng không quá khó.

- *Bài toán số 32 các bạn có thể để ý phép đánh giá miền giá trị $y-2=\sqrt{x^3+x-2}\ge 0 \Rightarrow y\ge 2 \Rightarrow \sqrt{y-1}\ge 1$, là hoàn toàn tự nhiên, tương ứng bước ngoặt đầu tiên, cơ bản khi chúng ta thực hiện bình phương hai vế. Đồng thời phương trình thứ hai của hệ có dạng tương đồng hàm số $f(u)=f(v)$ dễ dàng thiết lập. Chú ý rằng các căn thức ẩn hàm $u=\sqrt{3x-2};v=\sqrt{y-1}$ độc lập với riêng lẻ từng biến nên thao tác đánh giá ẩn hàm là hết sức thuận lợi, nó sẽ rất phức tạp nếu chứa hai biến.*
- *Bài toán số 31 không nằm ngoài phạm vi chặn miền giá trị nhưng có một số yếu tố gây khó khăn. Cụ thể là dựa trên nền tảng điều kiện xác định, ta tạm yên tâm với $x\ge 1$, khi manh nha tấn công phương trình thứ nhất, ý tưởng đơn giản nhất là suy ra $x-y+1\ge 0$ như bài toán 32, tuy nhiên do có hai biến tham gia nên không tiếp cận được ẩn y, không toàn diện.*
- *Ý tưởng tạo bạo hơn đối với bài toán 31 là sử dụng biến đổi tương đương (bình phương hai vế), mức độ xấu nhất là phương trình bậc hai tổng quát hai ẩn với một trong hai ẩn x hoặc y trở thành tham số. Cụ thể*

$$\begin{cases} x-y+1\ge 0 \\ x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1\ge 0 \\ x^2-2x(y+1)+y^2-2y+5=0 \end{cases}$$

Phương trình bậc hai ẩn x, tham số y có biệt thức $\Delta'=y^2+2y+1-\left(y^2-2y+5\right)=4y-4$.

Điều kiện có nghiệm là $\Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 4y-4\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$. Thành công.

- *Một phương hướng khác là $y-1=x-1-2\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow y-1=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\ge 0 \Rightarrow y\ge 1$.*

  Đây là ngụ ý ban đầu của tác giả, cũng chính là cơ sở cho lời giải phía trên. Tuy nhiên để đảm bảo yếu tố tự nhiên, chắc chắn các bạn độc giả nên thực hiện tập kết hai biến về hai biến chiến tuyến

$$x-y+1=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow y=x+1-2\sqrt{x-1}.$$

  Thực hiện đặt ẩn phụ $\sqrt{x-1}=t;t\ge 0 \Rightarrow x=t^2+1$, dẫn đến biểu diễn

$$y=t^2+1+1-2t=t^2-2t+2=f(t).$$

  Hàm số ẩn t này có nhiều cách đánh giá, dùng hằng đẳng thức hoặc khảo sát hàm số bậc hai – parabol, đều là những kỹ năng cơ bản. Trong trường hợp hàm số có dạng tổng quát bậc hai hoặc bậc ba, phương án tối ưu là nên sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số

$$f(t)=at^3+bt^2+ct$$

$$f(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

Bài toán 33. Trích lược câu 3, Thử sức trước kỳ thi Đại học 2015, Đề số 2; Năm học 2013 – 2014; Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam; Số 436, Tháng 10 năm 2013.

Tác giả: Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An.

Giáo viên Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa Thăng Long, Tp.Hồ Chí Minh.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3-3x+(y-1)\sqrt{2y+1}=0, \\ 2x^2+x+\sqrt{-y(2y+1)}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \le y \le 0$. Từ điều kiện ta có $-\frac{1}{2} \le y \le 0 \Rightarrow 0 \le \sqrt{2y+1} \le 1$. Từ phương trình thứ hai của hệ

$$2x^2 + x = -\sqrt{-y(2y+1)} \le 0 \Rightarrow x(2x+1) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le -2x \le 1.$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$-8x^3 + 6x = (2y-2)\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow (-2x)^3 - 3(-2x) = (2y+1)\sqrt{2y+1} - 3\sqrt{2y+1} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t; t \in [0;1] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2-1) \le 0, \forall t \in [0;1]$.

Hàm số liên tục và nghịch biến trên miền đang xét dẫn đến

$$(1) \Leftrightarrow f(-2x) = f\left(\sqrt{2y+1}\right) \Leftrightarrow -2x = \sqrt{2y+1} \Leftrightarrow y = \frac{4x^2-1}{2}.$$

Phương trình thứ hai trở thành

$$2x^2 + x - x\sqrt{2-8x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x+1 = \sqrt{2-8x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \\ 4x^2 + 4x + 1 = 2 - 8x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \\ 12x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2};0\right] \\ x \in \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right\} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2};0\right\} \Rightarrow (x;y) = \left(0;-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};0\right)$$

Kết luận hệ đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 34. Trích lược câu II.2; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hải Dương; Năm học 2012 – 2013.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)}, \\ 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y \ge 1; x \ge 1$. Phương trình thứ hai của hệ dẫn đến $\sqrt{y-1} = 1 + \sqrt{x-1} \ge 1$.

Biến đổi phương trình thứ nhất $x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - 3\sqrt{y-1} \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t; t \ge 1 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2-1) \ge 0, \forall t \ge 1$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét, thu được $(*) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{y-1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$.

Phương trình thứ hai lại trở thành $1 + \sqrt{x-1} = x \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (x-1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1;2\}$.

Kết luận hệ có hai nghiệm $(x;y) = (1;2),(2;5)$.

Bài toán 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x(x^2-2)}{y+1} = (y-1)\sqrt{y^2+1}, \\ x^3 + 2x = \sqrt{y^2+1} + 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y \neq -1$. Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$x^3 + 2x - 2 = \sqrt{y^2+1} \geq 1, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^3 + 2x - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 2x = (y^2-1)\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x^3 - 2x = (y^2+1)\sqrt{y^2+1} - 2\sqrt{y^2+1} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t; t \geq 1 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2 > 0, \forall t \geq 1$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t \geq 1$. Thu được $(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{y^2+1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2+1}$.

Thay thế vào phương trình thứ hai

$$x^3 + 2x = x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] \geq 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x = 1; y = 0$.

Bài toán 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y+3} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+3}, \\ x^3 + 3(x+y) + 1 = \sqrt{(y+2x+1)^3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1; y + 2x + 1 \geq 0; y \geq -3$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\sqrt{y+3} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+3} \geq 0 + \sqrt{4} = 2, \forall x \geq 1 \Rightarrow y + 3 \geq 4 \Leftrightarrow y \geq 1$.

Kết hợp $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y + 2x + 1 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 2 \\ \sqrt{y+2x+1} \geq 2 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x^2 + 2x + 1) = \sqrt{(y+2x+1)^3} - 3(y+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 3(x+1)^2 = \sqrt{(y+2x+1)^3} - 2(y+2x+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2; t \geq 2 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \geq 0, \forall t \geq 2$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t \geq 2$ nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\sqrt{y+2x+1}\right) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{y+2x+1} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = y + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1; y = 1$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 36 có hai ẩn hàm khó nhận biết nuôi giấu trong phương trình thứ hai của hệ. Vấn đề phát hiện ẩn hàm này đã được trình bày trong tài liệu Hệ phương trình chứa căn thức phần thứ 5. Ẩn hàm thứ nhất tạm thời chưa thể khai phá, không quá khó để nhận ra ẩn hàm thứ hai $v = \sqrt{y+2x+1}$*, vấn đề tiếp theo là xây dựng dạng tương đồng hàm số* $f(u) = f(v)$ *như thế nào, và điều này có khả thi hay không, đối với bài toán trên.*

Các bạn độc giả cần phân biệt rõ ràng hai trường hợp xảy ra, manh nha cho các bước biến đổi có lý

- $(y + 2x + m)\sqrt{y+2x+1}, (m \neq 1)$.
- $\sqrt{(y+2y+1)^3} = (y+2x+1)\sqrt{y+2x+1}$

Trường hợp thứ nhất $(y+2x+m)\sqrt{y+2x+1},(m\neq 1)$ *khi đó vế phải phương trình chúng ta khai triển ra có dạng*

$$(y+2x+1)\sqrt{y+2x+1}+(m-1)\sqrt{y+2x+1}.$$

Điều này khẳng định hàm số gốc tối thiểu có dạng $f(t)=at^3+bt^2+ct$, *trong đó* $ac\neq 0$. *Hệ số b có thể tồn tại hoặc không, nếu có thì hàm số sẽ càng phức tạp, vì* bt^2 *không chứa căn nên người thiết lập bài toán sẽ sử dụng thêm bớt làm cho nó ẩn giấu đi rất dễ dàng.*

Trường hợp thứ hai, chính là bài toán số 41, đảm bảo chắc chắn hàm số $f(t)=at^3+bt^2,(c=0)$, *điều này sẽ tăng cường tốc độ cho các thao tác lập luận của các bạn. Thiết lập hàm số với* $a=1$

$$x^3+3x+3y+1=\sqrt{(y+2x+1)^3}\Leftrightarrow (x+m)^3+b(x+m)^2=\sqrt{(y+2x+1)^3}+b(y+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2m+3xm+m^3+bx^2+2bxm+bm^2-b(y+2x+1)=\sqrt{(y+2x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow x^3+(3m+b)x^2+(3m+2bm-2b)x-by+m^3+bm^2-b=\sqrt{(y+2x+1)^3}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases}3m+b=3\\ -b=3\\ 3m+2bm-2b=3\\ m^3+bm^2-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3\\ m=1\end{cases}\Rightarrow (x+1)^3-3(x+1)^2=\sqrt{(y+2x+1)^3}-2(y+2x+1)\quad (*)$.

Bài toán 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy+(3-x)\sqrt{2-x}=x^2+3y-3x,\\ 4(y-x+1)\sqrt{y-x+1}+4(2x-5)\sqrt{5-2x}+12=3x+3y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y-x+1\geq 0;x\leq 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(3-x)\sqrt{2-x}=x(x-y)+3(y-x)\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{2-x}=(x-3)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(y-x-\sqrt{2-x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ y-x-\sqrt{2-x}=0\end{array}\right.\Rightarrow y-x=\sqrt{2-x}$$

Với $y-x=\sqrt{2-x}\Rightarrow y-x\geq 0$. Kết hợp $\begin{cases}x\leq 2\\ y-x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{5-2x}\geq 1\\ \sqrt{y-x+1}\geq 1\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$4(y-x+1)\sqrt{y-x+1}-3y+3x-3+15-6x=4(5-2x)\sqrt{5-2x}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y-x+1}\right)^3-3(y-x+1)=4\left(\sqrt{5-2x}\right)^3-3(5-2x)\quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=4t^3-3t^2;t\geq 1\Rightarrow f'(t)=12t^2-6t=6t(2t-1)>0,\forall t\geq 1$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét, dẫn đến

$$f\left(\sqrt{y-x+1}\right)=f\left(\sqrt{5-2x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{y-x+1}=\sqrt{5-2x}\Leftrightarrow y-x+1=5-2x\Leftrightarrow y=4-x.$$

Khi đó

$$y-x=\sqrt{5-2x}\Leftrightarrow 4-2x=\sqrt{5-2x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ 4x^2-16x+16=5-2x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ 4x^2-14x+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x\in\left\{\dfrac{7-\sqrt5}{4};\dfrac{7+\sqrt5}{4}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7-\sqrt5}{4}\Rightarrow y=\frac{9+\sqrt5}{4}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=\frac{7-\sqrt{5}}{4}; y=\frac{9+\sqrt{5}}{4}$.

Bài toán 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-1}=2\sqrt{y}+\sqrt{2y+1},\\ \sqrt{(x+2)^3}-3x=\sqrt{(y+4)^3}-3y-6.\end{cases}$ $\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1; y\ge 0$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\sqrt{x-1}=2\sqrt{y}+\sqrt{2y+1}\ge 1\Rightarrow x-1\ge 1\Leftrightarrow x\ge 2$.

Kết hợp $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}\ge 2\\ \sqrt{y+4}\ge 2\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\sqrt{(x+2)^3}-3(x+2)=\sqrt{(y+4)^3}-3(y+4)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2; t\ge 2\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)\ge 0,\forall t\ge 2$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên thu được

$$f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\sqrt{y+4}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=\sqrt{y+4}\Leftrightarrow x+2=y+4\Leftrightarrow x=y+2.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt{y+1}=2\sqrt{y}+\sqrt{2y+1}\quad (*)$.

Để ý rằng $\sqrt{y+1}\le\sqrt{2y+1}\le 2\sqrt{y}+\sqrt{2y+1},\forall y\ge 0$.

Dẫn đến (*) có nghiệm khi $y=0\Rightarrow x=2\Rightarrow (x;y)=(2;0)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài toán 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4(x+2)\sqrt{x+2}=4(y+1)\sqrt{y+1}+9x-9y+9,\\ \sqrt{5x-1}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}.\end{cases}$ $\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{5}; y\ge 2$. Từ phương trình thứ hai của hệ

$$\sqrt{5x-1}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}\ge\sqrt{2+2}=2,\forall y\ge 2\Rightarrow 5x-1\ge 4\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Do đó $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+2}\ge\sqrt{3}\\ \sqrt{y+1}\ge\sqrt{3}\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$4(x+2)\sqrt{x+2}-9(x+2)=4(y+1)\sqrt{y+1}-9(y+1)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+2}\right)^3-9(x+2)=4\left(\sqrt{y+1}\right)^3-9(y+1)\quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=4t^3-9t^2; t\ge\sqrt{3}$ ta có $f'(t)=12t^2-18t=6t(2t-3)>0,\forall t\ge\sqrt{3}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên thu được hệ thức

$$f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x+2=y+1\Leftrightarrow x+1=y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{5y-6}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}\Leftrightarrow 5y-6=2y+2\sqrt{y^2-4}$$

$$\Leftrightarrow 3y-6=2\sqrt{y^2-4}\Leftrightarrow 9(y-2)^2=4(y-2)(y+2)$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left[9(y-2)-4(y+2)\right]=0\Leftrightarrow (y-2)(5y-26)=0\Leftrightarrow y\in\left\{2;\frac{26}{5}\right\}$$

Từ đây dẫn đến hệ có hai nghiệm $(x;y)=(1;2),\left(\frac{21}{5};\frac{26}{5}\right)$.

Nhận xét.

Thông qua 39 bài toán mở đầu tài liệu, có lẽ nhiều bạn độc giả đã định hình rõ ràng hướng đi đánh giá miền giá trị của các biến trong hệ phương trình. Một câu hỏi đặt ra là làm thế nào để xây dựng các bài toán tương tự, vì một điều băn khoăn là phương trình chốt chặn (T) *của chúng ta (phương trình phục vụ đánh giá ẩn) có hai vai trò*

- *Đánh giá ẩn.*
- *Giải nghiệm.*

Vai trò thứ nhất thì có thể muôn hình vạn trạng, đa chiều, ở đây tác giả tạm dừng chân với phương trình bậc hai tổng quát và phương trình chứa căn bậc hai (hai ẩn cơ bản) trong phạm vi biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa, bậc trong căn cao nhất là bậc nhất hoặc quy (T) *về một trong các dạng đặc thù*

$$\sum\sqrt{f_i(x)}=\sum\sqrt{g_i(x)} \text{ với } \sum f_i(x)=\sum g_i(x)$$
$$\sum\sqrt{f_i(x)}=\sum\sqrt{g_i(x)} \text{ với } \prod\sqrt{f_i(x)}=\prod\sqrt{g_i(x)}.$$

Sỡ dĩ như vậy vì khi thiết lập hàm số, tìm được mối liên hệ giữa hai ẩn, thay thế ngược lại phương trình (T) *thì thao tác giải nghiệm trở nên đơn giản và khả thi. Trong các trang tiếp theo tác giả sẽ giới thiệu các bài toán với căn bậc ba, dựa trên cơ sở phương trình* (T) *giải bằng ẩn phụ đưa về hệ phương trình.*

Nhân dịp này tôi cũng xin chia sẻ một kinh nghiệm trong việc xây dựng hàm số tại phương trình còn lại (A)*, lấy điển hình bài toán số 39 nhé. Các bước đại khái như sau*

- *Lựa chọn nhị thức cho phương trình* (T), $\sqrt{ax+b}=\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}\ge\sqrt{2+2}=2,\forall y\ge 2\Rightarrow ax+b\ge 4$.
  Dấu đẳng thức xảy ra khi $y=2$.
- *Thành thử lấy nghiệm đẹp* $y=2;x=1\Rightarrow ax+b\equiv 5x-1\vee 6x-2\vee 7x-3\ldots$ *Như vậy ta thu được* $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}$
- *Trên đây lưu ý chỉ cần cố ý "giả vờ" nghiệm đẹp* $y=2;x=1$ *mà thôi, vì sau khi thiết lập được quan hệ hàm số đối với phương trình* (A)*, đặc biệt lại có dạng nhị thức bậc nhất 2 ẩn* $mx=ny+p$*, thay thế vào phương trình* (T) *chúng ta luôn luôn giải được, một khi ván đã đóng thuyền, lúc đó còn quan tâm gì đến nghiệm xấu hay đẹp làm gì nữa, nghiệm xấu thì càng giấu được bản chất, chống phá mò nghiệm, điển hình phi vụ 39 có cặp nghiệm "ngoài giá thú" mà vẫn thỏa mãn hệ ban đầu đó thôi,* $(x;y)=\left(\frac{21}{5};\frac{26}{5}\right)$.
- *Bước tiếp theo là lựa chọn dạng thức hàm số, tính chất đơn điệu là đồng biến vì miền giá trị của chúng ta khá cơ bản* $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 2\end{cases}$*, thay vì độ phức tạp* $\begin{cases}\alpha_1\le x\le\alpha_2\\ \beta_1\le y\le\beta_2\end{cases}$ *thường dùng cho trường hợp đơn điệu nghịch biến.*
- *Nói tới vấn đề hàm số lại có nhiều dạng, có thể dạng đa thức, phân thức hoặc chứa cả hàm siêu việt, nhưng thôi để an toàn nên sử dụng hàm số đa thức, đảm bảo luôn liên tục, dự kiến ẩn hàm là sẽ là hai căn thức nhỏ xíu, sau khi triển khai sẽ xuất hiện quan hệ bậc nhất* $mx=ny+p$*, nếu không thì xôi hỏng bỏng không. Các phương án được xem xét bao gồm*

$$\text{Ẩn hàm}\left[\begin{array}{l}u=\sqrt{a_1x+b_1y+c_1};v=\sqrt{a_2x+b_2y+c_2}\\ u=\sqrt{a_1x^2+b_1y+c_1};v=\sqrt{a_2x^2+b_2y+c_2}\\ u=\sqrt{a_1x+b_1y^2+c_1};v=\sqrt{a_2x+b_2y^2+c_2}\end{array}\right.$$

$$\text{Hàm số}\left[\begin{array}{l}f(t)=at^2+bt+ct\\ f(t)=at^3+bt^2+ct+d\\ f(t)=at^4+bt^3+ct^2+dt+e\\ \ldots\end{array}\right.$$

❖ *Bài toán 39 tác giả lựa chọn* $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} \ge \sqrt{3} \\ \sqrt{y+1} \ge \sqrt{3} \end{cases}$

Hiển nhiên con số $\sqrt{3}$ *là một số vô tỷ, lẻ tóe loe, nhưng chúng ta không nhất thiết xây dựng hàm số có đạo hàm phải chứa nó. Lựa chọn biểu thức đạo hàm* $f'(t) = t(t-k)$ *với* $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = k$*. Dễ thấy rằng nếu có điều kiện* $0 < k < \sqrt{3}$ *thì* $f'(t) = t(t-k) > 0, \forall t \ge \sqrt{3} > k > 0$*, theo lý thuyết dấu của nhị thức bậc nhất, phạm vi chương trình Đại số lớp 10 THPT. Hàm số lập tức đồng biến.*

❖ *Chọn ngay* $k = 1,5 = \frac{3}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow f'(t) = t\left(t - \frac{3}{2}\right)$*, phá hữu tỷ đưa về* $f'(t) = t(2t-3) = 2t^2 - 3t$*. Khi đó lấy nguyên hàm ngược trở lại, hiện nguyên hình hàm số gốc* $\int (2t^2 - 3t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + C$*. Tất nhiên không nên đèo bồng thêm hằng số C vì tất yếu hai vế của (A) đều có C sẽ xảy ra triệt tiêu hoàn toàn. Tiếp tục phá hữu tỷ, lấy hàm số dạng đa thức hệ số nguyên* $f(t) = 6\left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right) = 4t^3 - 9t^2$.

❖ *Triển khai phá tung hỏa mù theo hai ẩn hàm* $u = \sqrt{x+2}; v = \sqrt{y+1}$*, tức là biến đổi ngược lời giải*

$$4(x+2)\sqrt{x+2} = 4(y+1)\sqrt{y+1} + 9x - 9y + 9$$
$$\Leftarrow 4(x+2)\sqrt{x+2} - 9(x+2) = 4(y+1)\sqrt{y+1} - 9(y+1)$$
$$\Leftarrow 4\left(\sqrt{x+2}\right)^3 - 9(x+2) = 4\left(\sqrt{y+1}\right)^3 - 9(y+1) \quad (*)$$

Ghép các phương trình (T), (A) *kiến lập được đề bài theo đúng ý đồ tùy ý.*

Trên đây tác giả mạo muội sử dụng một số ngôn từ nhạy cảm "giả vờ", "ngoài giá thú", "ván đã đóng thuyền", "đèo bồng",...toàn những ngôn từ trong tình yêu và hôn nhân, gia đình...Thực ra đây chỉ là lồng ghép chủ ý trong quá trình thiết lập một bài toán nhỏ, một bài toán vô tri vô giác, có đôi chút nét đẹp ẩn chứa trong tư duy phản biện. Nhưng, trong cuộc sống, trong tình yêu, gia đình và những thứ thân thương, chúng ta không nên làm thế, không được làm thế, dù trong suy nghĩ, vì bất cứ lý do gì, như những mánh khóe trên kia, hãy sống chân thành, có trách nhiệm, nghĩa vụ, không chối bỏ, vụ lợi, luôn luôn giữ vững và cháy bỏng tình cảm, chủ kiến vẹn toàn, trong sáng, thủy chung, đúng đạo lý làm người, đúng phong tục, tập quán của tổ tiên, của đất nước Việt Nam nghìn năm văn hiến. Ôi, tản mạn mất rồi, chết mất thôi.

Bài toán 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y+1)\sqrt{x+y+1} = 2x - 4y + (3y+1)\sqrt{3y+1}, \\ \sqrt[3]{x-1} = \sqrt{y-1} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $y \ge 1; x + y + 1 \ge 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{y-1} + 1 \ge 1 \Rightarrow x - 1 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Dẫn đến $\begin{cases} x + y + 1 \ge 4 \\ 3y + 1 \ge 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y+1} \ge 2 \\ \sqrt{3y+1} \ge 2 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y+1)\sqrt{x+y+1} - 2(x+y+1) = (3y+1)\sqrt{3y+1} - 2(3y+1)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y+1}\right)^3 - 2(x+y+1) = \left(\sqrt{3y+1}\right)^3 - 2(3y+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2; t \ge 2 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 4t = t(3t-4) > 0, \forall t \ge 2$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên ta được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y+1}\right) = f\left(\sqrt{3y+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y+1} = \sqrt{3y+1} \Leftrightarrow x+y+1 = 3y+1 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành $\sqrt[3]{2y-1} = \sqrt{y-1}+1$.

Đặt $\sqrt[3]{2y-1} = a; \sqrt{y-1} = b \Rightarrow a^3 - 2b^2 = 2y-1-2(y-1) = 1$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = b+1 \\ a^3 - 2b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-1 \\ a^3 - 2\left(a^2-2a+1\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-1 \\ (a-1)\left(a^2-a+3\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (1;2).$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(2x+2y+9)\sqrt{x+y} + 15(y-x+1) = 2(4y+11)\sqrt{2y+1}, \\ \sqrt[3]{3y+5} = \sqrt{x-2}+2. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 2; x+y \ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ dẫn đến $\sqrt[3]{3y+5} = \sqrt{x-2}+2 \ge 2 \Rightarrow 3y+5 \ge 8 \Leftrightarrow 3y \ge 3 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Do đó kết hợp $\begin{cases} y \ge 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+1 \ge 3 \\ x+y \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2y+1} \ge \sqrt{3} \\ \sqrt{x+y} \ge \sqrt{3} \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$4\sqrt{(x+y)^3} + +18\sqrt{x+y} + 15y - 15x + 15 = 4\sqrt{(2y+1)^3} + 18\sqrt{2y+1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x+y)^3} - 15(x+y) + 18\sqrt{x+y} = 4\sqrt{(2y+1)^3} - 15(2y+1) + 18\sqrt{2y+1} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = 4t^3 - 15t^2 + 18t; t \ge \sqrt{3}$ ta có $f'(t) = 12t^2 - 30t + 18 = 6\left(2t^2-5t+3\right) = 6(t-1)(2t-3) > 0, \forall t \ge \sqrt{3}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t \ge \sqrt{3}$. Ta có hệ thức

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y}\right) = f\left(\sqrt{2y+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x+y = 2y+1 \Leftrightarrow x = y+1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt[3]{3x+2} = \sqrt{x-2}+2$.

Đặt $\sqrt{x-2} = u, u \ge 0 \Rightarrow x = u^2+2$ thì

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3u^2+8} = u+2 \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2+8 = u^3+6u^2+12u+8 \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+3u^2+12u = 0 \\ u \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2+3u+12\right) = 0 \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2; y = 1$.

Bài toán 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x-15}{4x-2y-15}.\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-y+3}, \\ \sqrt[3]{2-y^3} = 2\sqrt{x-1}+1 \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1; 2x-y+3 \ge 0; 4x-2y-15 \ne 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $\sqrt[3]{2-y^3} = 2\sqrt{x-1}+1 \ge 1 \Rightarrow 2-y^3 \ge 1 \Leftrightarrow y^3 \le 1 \Leftrightarrow y \le 1 \le x$.

Kết hợp đồng thời $\begin{cases} y \le 1 \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y \ge -2 \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3 \ge 4 \\ x+3 \ge 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-y+3} \ge 2 \\ \sqrt{x+3} \ge 2 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$(2x-15)\sqrt{x+3}=(4x-2y+15)\sqrt{2x-y+3}$$
$$\Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{x+3}-21\sqrt{x+3}=2(2x-y+3)\sqrt{2x-y+3}-21\sqrt{2x-y+3}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+3}\right)^3-21\sqrt{x+3}=2\left(\sqrt{2x-y+3}\right)^3-21\sqrt{2x-y+3}\quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-21t;t\ge 2\Rightarrow f'(t)=6t^2-21=3(2t^2-7)>0,\forall t\ge 2$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét, dẫn đến

$$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right)=f\left(\sqrt{2x-y+3}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=\sqrt{2x-y+3}$$
$$\Leftrightarrow x+3=2x-y+3\Leftrightarrow x=y\Rightarrow x=1;y=1$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{(3x-y+2)^3}+3y=3x+\sqrt{(2x+2)^3},\\ \sqrt[3]{2-y^2}=\sqrt[4]{x}+\sqrt{x-1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1;3x-y+2\ge 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $\sqrt[3]{2-y^2}=\sqrt[4]{x}+\sqrt{x-1}\ge 1\Rightarrow 2-y^2\ge 1\Leftrightarrow y^2\le 1\Leftrightarrow -1\le y\le 1$.

Kết hợp $\begin{cases}-1\le y\le 1\\ x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y+2\ge 4\\ 2x+2\ge 4\end{cases}\Rightarrow \sqrt{3x-y+2}\ge 2;\sqrt{2x+2}\ge 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $\sqrt{(3x-y+2)^3}-3(3x-y+2)=\sqrt{(2x+2)^3}-3(2x+2)\quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2;t\ge 2\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)\ge 0,\forall t\ge 2$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên thu được

$$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{3x-y+2}\right)=f\left(\sqrt{2x+2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3x-y+2}=\sqrt{2x+2}\Leftrightarrow 3x-y+2=2x+2\Leftrightarrow x=y.$$

Khi đó $\begin{cases}x\ge 1\\ x=y\le 1\end{cases}\Rightarrow x=y=1$. Hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{y-1}=\sqrt{x-2}+1,\\ x^3+3x^2-5x+8y+1=(x^2+2y+1)\sqrt{x^2+2y+1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình thứ nhất của hệ dẫn đến $\sqrt[3]{y-1}=\sqrt{x-2}+1\ge 1\Rightarrow y-1\ge 1\Leftrightarrow y\ge 2$.

Kết hợp $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2y+1\ge 9\\ x+1\ge 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+1}\ge 3\\ x+1\ge 3\end{cases}$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$x^3+3x^2+3x+1-4(x^2+2x+1)+4(x^2+2y+1)=(x^2+2y+1)\sqrt{x^2+2y+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^3-4(x+1)^2=(x^2+2y+1)\sqrt{x^2+2y+1}-4(x^2+2y+1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-4t^2;t\ge 3\Rightarrow f'(t)=3t^2-8t=t(3t-8)>0,\forall t\ge 3$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên ta được

$$f(x+1)=f\left(\sqrt{x^2+2y+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2+2y+1}\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+2y+1\Leftrightarrow x=y.$$

Thay thế vào phương trình thứ nhất lại có $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x-2}+1$. Đặt $\sqrt{x-2}=u,u\ge 0\Rightarrow x=u^2+2$.

Suy ra $\begin{cases}\sqrt[3]{u^2+1}=u+1\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+1=u^3+3u^2+3u+1\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+2u^2+3u=0\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\left(u^2+2u+3\right)=0\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow u=0$.

Từ đây ta có nghiệm duy nhất $x=2;y=2$.

Bài toán 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{y+7}=\sqrt{x-1}+2,\\ 27x^3+27x^2-21x+30y+1=\sqrt{\left(9x^2+6y+1\right)^3}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ dẫn đến $\sqrt[3]{y+7}=\sqrt{x-1}+2\ge 2,\forall x\ge 1\Rightarrow y+7\ge 8\Leftrightarrow y\ge 1$.

Kết hợp đồng thời $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+1\ge 4\\ 9x^2+6y+1\ge 16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+1\ge 4\\ \sqrt{9x^2+6y+1}\ge 4\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$27x^3-18x^2-21x-4+5\left(9x^2+6y+1\right)=\sqrt{\left(9x^2+6y+1\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3+27x^2+9x+1-5\left(9x^2+6x+1\right)=\sqrt{\left(9x^2+6y+1\right)^3}-5\left(9x^2+6y+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+1\right)^3-5\left(3x+1\right)^2=\sqrt{\left(9x^2+6y+1\right)^3}-5\left(9x^2+6y+1\right)\quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-5t^2;t\ge 4\Rightarrow f'(t)=3t^2-10t=t(3t-10)>0,\forall t\ge 4$.

Hàm số đã cho liên tục và đồng biến trên miền đang xét, suy ra

$$(*)\Leftrightarrow f(3x+1)=f\left(\sqrt{9x^2+6y+1}\right)\Leftrightarrow 3x+1=\sqrt{9x^2+6y+1}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+6x+1=9x^2+6y+1\Leftrightarrow x=y$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x-1}+2$. Đặt $\sqrt{x-1}=u,u\ge 0\Rightarrow x=u^2+1$.

Ta có hệ $\begin{cases}\sqrt[3]{u^2+8}=u+2\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+8=u^3+6u^2+12u+8\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+5u^2+12u=0\\ u\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow u=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{2-y}+2\sqrt{1-x}=1,\\ (2-x)\sqrt{2-x}+x+y=2+y\sqrt{y}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\le 1;y\ge 0$. Xuất phát từ phương trình thứ nhất của hệ

$$\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2-y}=1-2\sqrt{1-x}\le 1\Leftrightarrow 2-y\le 1\Leftrightarrow y\ge 1.$$

Kết hợp $\begin{cases}y\ge 1\\ x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ 2-x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{y}\ge 1\\ \sqrt{2-x}\ge 1\end{cases}$

Phương trình thứ hai biến đổi về $(2-x)\sqrt{2-x}-(2-x)=y\sqrt{y}-y\quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-t^2;t\ge 1\Rightarrow f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)>0,\forall t\ge 1$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t\ge 1$ nên $(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=\sqrt{y}\Leftrightarrow 2-x=y$.

Phương trình thứ nhất khi đó trở thành $\sqrt[3]{x}+2\sqrt{1-x}=1$. Đặt $\sqrt[3]{x}=a;\sqrt{1-x}=b,b\ge 0\Rightarrow a^3+b^2=1$.
Kết hợp $a+2b=1$ dẫn đến hệ

$$\begin{cases}a+2b=1\\a^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\a^3+\left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\4a^3+a^2-2a-3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a-1)\left(4a^2+5a+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\4a^2+5a+3=0;\Delta<0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 47. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{2-y}+\sqrt{x-1}=1,\\x+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=y+\dfrac{1}{\sqrt{2y-1}}.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1;y>\dfrac{1}{2}$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\sqrt[3]{2-y}=1-\sqrt{x-1}\le 1\Rightarrow 2-y\le 1\Leftrightarrow y\ge 1$.

Kết hợp $\begin{cases}y\ge 1\\x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x-1}\ge 1\\\sqrt{2y-1}\ge 1\end{cases}$

Phương trình thứ hai biến đổi $2x+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}=2y+\dfrac{2}{\sqrt{2y-1}}\Leftrightarrow 2x-1+\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}=2y-1+\dfrac{2}{\sqrt{2y-1}}\quad(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\dfrac{2}{t};t\ge 1\Rightarrow f'(t)=2t-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2\left(t^3-1\right)}{t^2}\ge 0,\forall t\ge 1$. Hàm số đồng biến trên miền $t\ge 1$ nên

$$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-1}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow 2x-1=2y-1\Leftrightarrow x=y.$$

Phương trình thứ nhất trở thành $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.
Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a;\sqrt{x-1}=b\ (b\ge 0)\Rightarrow a^3+b^2=1$. Phương trình đã cho trở thành $a=1-b$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases}a=1-b\\a^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\a^3+a^2-2a=0\end{cases}\Rightarrow a(a-1)(a+2)=0\Leftrightarrow a\in\{0;1;-2\}\Leftrightarrow x\in\{2;1;10\}.$$

Kết luận hệ có các cặp nghiệm $(x;y)=(1;1),(2;2),(10;10)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 47, nhìn thoáng qua phương trình thứ hai của hệ, một số bạn độc giả vội vàng kết luận hai biến bằng nhau là thiếu cơ sở, nguyên do nếu không có đánh giá $t\ge 1$ thì hàm số thu được không hoàn toàn đơn điệu trên một miền. Yếu tố đánh giá chặn miền giá trị các biến trong tương đồng hàm số là vô cùng quan trọng, bài toán này ngoài phương án trên các bạn có thể sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời như sau

$$x+\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=y+\frac{1}{\sqrt{2y-1}}\Leftrightarrow x-y=\frac{1}{\sqrt{2y-1}}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow x-y=\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2y-1}}{\sqrt{2x-1}.\sqrt{2y-1}}\Leftrightarrow x-y=\frac{2(x-y)}{\sqrt{2x-1}.\sqrt{2y-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\\sqrt{2x-1}.\sqrt{2y-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}\right)=2\end{array}\right.$$

Xử lý phương trình hai ẩn $\sqrt{2x-1}.\sqrt{2y-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}\right)=2$ *khá đơn giản sở dĩ*

$$\sqrt{2x-1}.\sqrt{2y-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}\right)\geq 2 \text{ với } \begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}\geq 1 \\ \sqrt{2y-1}\geq 1 \end{cases}$$

Tuy nhiên nếu đằng thằng xông pha, không có đánh giá thì sẽ khó tìm ra lối thoát.

Bài toán 48. Trích lược câu 4; Đề thi đề nghị Olympic 30 tháng 4 (Dành cho các tỉnh Miền Trung – Tây Nguyên – Nam Bộ); Môn Toán; Khối 10; Lần thứ 17; Năm 2011; Đơn vị trường THPT Chuyên Hùng Vương; Tỉnh Gia Lai.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x+2=\sqrt{y^3+3y^2}, \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 2 \\ y^2(y+3)\geq 0 \\ y(y+8)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ y=0\vee y\geq -3 \\ y\geq 0\vee y\leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Kết hợp $\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 1 \\ y+3\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}\geq 1 \\ \sqrt{y+3}\geq \sqrt{3}>1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3-3x^2+3x-1-3x+3=y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=(y+3)\sqrt{y+3}-3\sqrt{y+3} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t; t\geq 1 \Rightarrow f'(t)=3t^2-3\geq 0, \forall t\geq 1$.

Vậy hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét. Dẫn đến

$$(*) \Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right) \Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3} \Leftrightarrow x^2-2x+1=y+3 \Leftrightarrow y=x^2-2x-2.$$

Thay thế vào phương trình thứ hai ta có

$$3\sqrt{x-2}=\sqrt{x^4-4x^3+8x^2-8x-12} \Leftrightarrow x^4-8x^3+8x^2-17x+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^3-x^2+5x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^3-x^2+5x-2=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=x^3-x^2+5x-2=0; x\geq 2$ ta có $g'(x)=3x^2-2x+5>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số này liên tục và đồng biến trên toàn trục số thực nên $\underset{x\geq 2}{Min}\, g(x)=g(2)=12>0$.

Phương trình (1) vô nghiệm nên hệ có nghiệm duy nhất $x=3; y=1$.

Bài toán 49. Trích lược câu 1, Đề thi đề nghị Olympic 30 tháng 4 (các tỉnh Miền Trung – Tây Nguyên – Nam Bộ) Môn Toán; Khối 10; Lần thứ 18; Năm 2012; Đơn vị trường THPT Chuyên Trần Hưng Đạo; Tỉnh Bình Thuận.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-12x-y^3+6y^2-16=0, \\ 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}=0. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4-x^2\geq 0 \\ y(4-y)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq 4 \end{cases}$

Từ điều kiện $\begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x+2\leq 4 \\ 0\leq y\leq 4 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x^3+6x^2+12x+8-6\left(x^2+4x+4\right)=y^3-6y^2$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^3-6(x+2)^2=y^3-6y^2 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-6t^2; t\in[0;4] \Rightarrow f'(t)=3t^2-12t=3t(t-4)\le 0, \forall t\in[0;4]$.

Như vậy hàm số đã cho liên tục và nghịch biến trên $[0;4]$. Ta thu được $(*) \Leftrightarrow f(x+2)=f(y) \Leftrightarrow x+2=y$.

Thế vào phương trình thứ hai ta có

$$4x^2+6=3\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 16x^4+48x^2+36=36-9x^2$$
$$\Leftrightarrow 16x^4+57x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(16x^2+57\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x=0; y=2$.

Bài toán 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{3y^2-5}=\sqrt{x-2}+1,\\ \left(x+y^2-3\right)\sqrt{x+y^2+5}=(2x-3)\sqrt{2x+5}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2; x+y^2-5\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất $\sqrt[3]{3y^2-5}=\sqrt{x-2}+1\ge 1 \Rightarrow 3y^2-5\ge 1 \Leftrightarrow 3y^2\ge 6 \Leftrightarrow y^2\ge 2$.

Kết hợp $\begin{cases}x\ge 2\\ y^2\ge 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+5\ge 9\\ y^2+x+5\ge 9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2x+5}\ge 3\\ \sqrt{y^2+x+5}\ge 3\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$\left(x+y^2+5-8\right)\sqrt{x+y^2+5}=(2x+5-8)\sqrt{2x+5}$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y^2+5\right)\sqrt{x+y^2+5}-8\sqrt{x+y^2-5}=(2x+5)\sqrt{2x+5}-8\sqrt{2x+5} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-8t; t\ge 3 \Rightarrow f'(t)=3t^2-8>0, \forall t\ge 3$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét. Thu được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y^2+5}\right)=f\left(\sqrt{2x+5}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y^2+5}=\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow x+y^2+5=2x+5 \Leftrightarrow y^2=x.$$

Thay thế vào phương trình thứ nhất lại có $\sqrt[3]{3x-5}=\sqrt{x-2}+1$. Đặt $\sqrt{x-2}=t, t\ge 0 \Rightarrow x=t^2+2$.

Ta có

$$\sqrt[3]{3\left(t^2+2\right)-5}=t+1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3t^2+1}=t+1 \Leftrightarrow 3t^2+1=t^3+3t^2+3t+1$$
$$\Leftrightarrow t^3+3t=0 \Leftrightarrow t\left(t^2+3\right)=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$$

Dẫn đến hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=\left(2;-\sqrt{3}\right),\left(2;\sqrt{2}\right)$.

Bài toán 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x(2-x)}+\sqrt{1-y^2}=\dfrac{9+x^2}{4},\\ x^4+32y^2+64\sqrt{1-y^2}=16\left(y^4+2x+1\right).\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-1\le y\le 1\\ 0\le x\le 2\end{cases}$

Ta có $0\le\sqrt{1-y^2}\le 1$ và từ điều kiện dẫn đến $0\le\dfrac{x}{2}\le 1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\frac{x^4}{16}+2y^2+4\sqrt{1-y^2}=y^4+2x+1 \Leftrightarrow \frac{x^4}{16}-2x=y^4-2y^2+1-4\sqrt{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{16}-2x=\left(1-y^2\right)^2-4\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^4-4.\frac{x}{2}=\left(\sqrt{1-y^2}\right)^4-4\sqrt{1-y^2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^4-4t;t\le 1 \Rightarrow f'(t)=4t^3-4=4\left(t^3-1\right)\le 0,\forall t\le 1$.

Hàm số này liên tục và nghịch biến trên miền đang xét.

Thu được $(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\sqrt{1-y^2}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\sqrt{1-y^2}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$2\sqrt{x(2-x)}-\frac{x}{2}=\frac{9+x^2}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{x(2-x)}=\frac{x^2+2x+9}{4}=\frac{(x-1)^2+8}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân thì $2\sqrt{x(2-x)}\le x+2-x=2$.

Ngoài ra $\frac{(x-1)^2+8}{4}\ge\frac{8}{4}=2$ nên dẫn đến $\begin{cases}x=2-x\\x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow \sqrt{1-y^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2=\frac{3}{4} \Rightarrow y\in\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $(x;y)=\left(1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài toán 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+1-\sqrt{y}\right)\sqrt{x^2+1}=3\left(y-\sqrt{y}\right),\\ y^2-y=x^2+1-\sqrt{x^2+1}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 0$. Nhận xét phương trình thứ hai

$$y^2-y=x^2+1-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y(y-1)=\frac{x^4+x^2}{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y\ge 1\\y\le 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y\ge 1\\y=0\end{array}\right.$$

Rõ ràng $\sqrt{x^2+1}\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$ và $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Với $y\ge 1$, xét hàm số $f(t)=t^2-t;t\ge 1 \Rightarrow f'(t)=2t-1>0,\forall t\ge 1$.

Hàm số đang xét liên tục và đồng biến trên miền đang xét.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương $f(y)=f\left(\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1}$.

Thay thế vào phương trình đầu tiên, đặt $\sqrt{y}=t;t\ge 1$ thì

$$\left(y^2-\sqrt{y}\right)y=3\left(y-\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow y^2y-y\sqrt{y}-3y+3\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow t^6-t^3-3t^2+3t=0 \Leftrightarrow t\left(t^5-t^2-3t+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)^2\left(t^3+2t^2+3t+3\right)=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow y=1;x=0$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=0;y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 52 này tác giả nghĩ rằng đa số các bạn độc giả đều quan sát thấy sự tương đồng hàm số tại phương trình thứ hai $f(t)=t^2-t$. Tuy nhiên đạo hàm của nó $f(t)=t^2-t \Rightarrow f'(t)=2t-1$ chưa xác định dấu rõ ràng. Để ý thêm một chút có thể thấy hiển nhiên $\sqrt{x^2+1}\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nhưng ẩn hàm y lại không đồng bộ vì miền chặn yếu (điều kiện xác định) $y\ge 0$. Nhưng lại có $t^2-t=t(t-1)\ge 0,\forall t\ge 1$ do vận dụng đặc tính $\sqrt{x^2+1}\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó *dẫn đến tình trạng $y^2 - y \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1 \vee y \le 0$, kết hợp $y \ge 0$ chẳng phải $y \ge 1 \vee y = 0$ hay sao, và tiếp tục lập luận mở ra cánh cửa lời giải. Lưu ý đối với trường hợp tổng quát các bạn nên đặt $\sqrt{x^2+1} = t, t \ge 1$ chẳng hạn, độc lập ẩn về hai chiến tuyến, đánh giá $g(t) = at^2 + bt + c; t \ge 1$.*

Sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức như trên cũng là một phương cách hay, độc đáo, thú vị

$$y^2 - y = x^2 + 1 - \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y(y-1) = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}} \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y \ge 1 \\ y \le 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y \ge 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Bài toán 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{x}, \\ 2(x+1)\sqrt{x+1} = 2(y+2)\sqrt{y+2} + 3x - 3y - 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}; y \ge 1$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - \sqrt{x} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x}} = \sqrt{y-1} \Rightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Kết hợp $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \ge \sqrt{2} > 1 \\ \sqrt{y+2} \ge \sqrt{3} > 1 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2(x+1)\sqrt{x+1} - 3(x+1) = 2(y+2)\sqrt{y+2} - 3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 3(x+1) = 2\left(\sqrt{y+2}\right)^3 - 3(y+2) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2; t > 1 \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1) > 0, \forall t > 1$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left(\sqrt{y+2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow x + 1 = y + 2 \Leftrightarrow x - 2 = y - 1.$$

Phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x - 2 + 2\sqrt{x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-2)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 4x^2 - 8x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}; y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét.

Sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức tìm miền giá trị biến là một cách đánh giá đơn giản, thuần túy, trên thực tế nó vẫn là biến đổi tương đương, chỉ sử dụng kiến thức căn thức sơ đẳng trong chương trình Đại số lớp 9 THCS, thiết nghĩ nó không quá khó để đông đảo các bạn áp dụng.

Xét riêng trường hợp bài toán số 53, có thể lập luận nhẹ nhàng hơn như sau

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x} = \sqrt{y-1} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} \ge \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 1 \ge x \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Bài toán 54. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2} = \sqrt{2y-1} - \sqrt{y}, \\ x^2 + 4y + 3\sqrt{2y-1} = y^2 + 2x + 3\sqrt{x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 2; y \ge \frac{1}{2}$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $0 \le \sqrt{x-2} = \sqrt{2y-1} - \sqrt{y} = \dfrac{y-1}{\sqrt{2y-1}+\sqrt{y}} \Rightarrow y-1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Kết hợp $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \ge 1 \\ \sqrt{2y-1} \ge 1 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2 - 2x + 1 - 3\sqrt{x-1} = 4y^2 - 4y + 1 - 3\sqrt{2y-1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3\sqrt{x-1} = (2y-1)^2 - 3\sqrt{2y-1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 3t; t \ge 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 3 > 0, \forall t \ge 1$.

Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên miền $t \ge 1$. Dẫn đến hệ quả

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x-1}\right) = f\left(\sqrt{2y-1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x-1 = 2y-1 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Chú ý xét $x = 2y; y \ge 1$.

Khi đó, phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{2y-2} = \sqrt{2y-1} - \sqrt{y} \Leftrightarrow 2y-2 = 3y-1-2\sqrt{y(2y-1)} \Leftrightarrow y+1 = 2\sqrt{y(2y-1)}$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 4y(2y-1) \Leftrightarrow 7y^2 - 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(7y+1) = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{-\frac{1}{7}; 1\right\}$$

Đối chiếu, kết luận nghiệm $x = 2; y = 1$.

Bài toán 55. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-2} = \sqrt{x} + \sqrt{3y-6}, \\ \dfrac{\sqrt{x+y}}{2}(x+y-11) = (x-5)\sqrt{2x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 1; y \ge 2$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x} = \sqrt{3y-6} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{2x-2}+\sqrt{x}} = \sqrt{3y-6} \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$.

Kết hợp các điều kiện $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \ge 4 \\ 2x+1 \ge 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} \ge 2 \\ \sqrt{2x+1} \ge \sqrt{5} > 2 \end{cases}$

Phương trình thứ hai tương đương

$$\sqrt{x+y}(x+y-11) = (2x-10)\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)\sqrt{x+y} - 11\sqrt{x+y} = (2x+1)\sqrt{2x+1} - 11\sqrt{2x+1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 11t; t \ge 2 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 11 > 0, \forall t \ge 2$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên miền $t \ge 2$. Thu được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y}\right) = f\left(\sqrt{2x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x+y = 2x+1 \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay thế trở lại phương trình thứ nhất ta có

$$\sqrt{2x-2} - \sqrt{x} = \sqrt{3x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2-2\sqrt{x(2x-2)} = 3x-3 \\ x \ge 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x(2x-2)} = 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x \in \varnothing \\ x \ge 2 \end{cases}$$

Kết luận hệ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 56. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{y^2-1},\\ \left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-\dfrac{1}{2}}=\left(y^2-2\right)\sqrt{y^2-\dfrac{1}{2}}.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y^2\ge 1\\ 2x^2\ge 1\\ x^2+2x\ge 0\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ y^2\ge 1\end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{y^2-1}\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x+1}}=\sqrt{y^2-1}\ge 0\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x\ge 1$.

Kết hợp $\begin{cases}x\ge 1\\ y^2\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2x^2-1}\ge 1\\ \sqrt{2y^2-1}\ge 1\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\left(x^2-2\right)\sqrt{2x^2-1}=\left(y^2-2\right)\sqrt{2y^2-1}\Leftrightarrow\left(2x^2-4\right)\sqrt{2x^2-1}=\left(2y^2-4\right)\sqrt{2y^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-1\right)\sqrt{2x^2-1}-3\sqrt{2x^2-1}=\left(2y^2-1\right)\sqrt{2y^2-1}-3\sqrt{2y^2-1}\quad(*)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-3t;t\ge 1\Rightarrow f'\left(t\right)=3t^2-3>0,\forall t\ge 1$.

Hàm số đang xét liên tục và đồng biến trên miền tương ứng. Thu được hệ quả

$$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x^2-1}\right)=f\left(\sqrt{2y^2-1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{2y^2-1}\Leftrightarrow x^2=y^2.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^2+2x=x^2+2x+2\sqrt{2x+1}.\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2};-1;1\right\}.$$

Kết hợp $x\ge 1$ta có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(1;-1\right)$.

Bài toán 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}+1=3y,\\ \dfrac{x+y+1}{2y+1}=\dfrac{\sqrt{2y+1}-2}{\sqrt{x+y+1}-2}.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{4};2y+1\ne 0\\ 0\le x+y+1\ne 4\end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $3y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}+\ge\sqrt{2.\dfrac{3}{4}-1}+1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1\Rightarrow y\ge\dfrac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$.

Kết hợp $y\ge\dfrac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}};x\ge\dfrac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y+1}>\sqrt{2,32}\\ \sqrt{2y+1}>\sqrt{2,13}\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương $\left(x+y+1\right)\left(\sqrt{x+y+1}-2\right)=\left(2y+1\right)\left(\sqrt{2y+1}-2\right)\quad(*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2(t-2)=t^3-2t^2;t \Rightarrow f'(t)=3t^2-4t=t(3t-4)>0,\forall t>\sqrt{2,13}$.

Như vậy hàm số liên tục và đồng biến trên miền $t>\sqrt{2,13}$ nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+y+1}\right)=f\left(\sqrt{2y+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y+1}=\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow x+y+1=2y+1 \Leftrightarrow x=y.$$

Phương trình thứ nhất trở thành

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}=3x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+2\sqrt{4x-3}=6x-2$$
$$\Leftrightarrow 2x-1-2\sqrt{2x-1}+1+4x-3-2\sqrt{4x-3}+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{4x-3}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x-1}=1\\ \sqrt{4x-3}=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Các bạn có thể sử dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân với điểm rơi để xử lý phương trình hệ quả ẩn x thu được như sau

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3} \le \frac{2x-1+1}{2}+\frac{4x-3+1}{2}=\frac{6x-2}{2}=3x-1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2x-1=4x-3=1 \Leftrightarrow x=1$.

Bài toán 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x+2+3xy(y-x)=3y\left(3y^2+4y-1\right),\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=\sqrt{2y-1}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1; y\ge \frac{1}{2}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $\dfrac{x-y-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}}=\sqrt{2y-1}\ge 0 \Rightarrow x-y\ge 1$.

Kết hợp đồng thời $\begin{cases}x-y\ge 1\\ y\ge 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y\ge 1\\ 2y+1>1\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3-3x+2+3xy(y-x)=3y\left(3y^2+4y-1\right)$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2y+3xy^2+3y=9y^3+12y^2+3x-2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-3(x-y)=8y^3+12y^2+6y+1-3(2y+1)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^3-3(x-y)=(2y+1)^3-3(2y+1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t;t\ge 1 \Rightarrow f'(t)=3t^2-3\ge 0,\forall t\ge 1$.

Hàm số đang xét liên tục và đồng biến trên miền $t\ge 1$. Hệ quả

$$(*) \Leftrightarrow f(x-y)=f(2y+1) \Leftrightarrow x-y=2y+1 \Leftrightarrow x=3y+1.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \sqrt{3y}=\sqrt{y}+\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 3y=3y-1+2\sqrt{y(2y-1)}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{y(2y-1)}=1 \Leftrightarrow 2y^2-y-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow y\in\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện $y\ge \frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1+\sqrt{3}}{4}; x=\frac{3\sqrt{3}+7}{4}$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

Nhận xét.

Thoáng qua bài toán 58, quan sát phương trình thứ nhất dễ thấy sẽ xuất hiện hai ẩn hàm đều không chứa căn thức, trong đó chắc chắn có ẩn hàm chứa hai biến x và y. Biến đổi một chút các bạn dễ dàng đưa về dạng hàm số

$$(x-y)^3-3(x-y)=(2y+1)^3-3(2y+1)\quad (*).$$

Rõ ràng do điều kiện $x\ge 1; y\ge \frac{1}{2}$, hai biến cùng phe cánh với nhau nên sử dụng nền tảng này thiết lập các đánh giá cho đại lượng $x-y$ là bất khả thi. Trong trường hợp này khéo léo sử dụng đại lượng liên hợp, thực ra là điều kiện tiên quyết có nghiệm của phương trình thứ hai chúng ta lại có con đường thuận lợi, tưởng chừng không thể

$$\frac{x-y-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}}=\sqrt{2y-1}\ge 0\Rightarrow x-y\ge 1.$$

Bài toán 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)\sqrt{x+3}-(y+1)\sqrt{y+1}=\dfrac{9}{2}(x-y)+9,\\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{y+1}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-1\le x\le 1; y\ge -1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow y+1=2+2\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y-1=2\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}y-1\ge 0\\ y-1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\ y\le 3\end{cases}$$

Kết hợp $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 1\le y\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\le x+3\le 4\\ 2\le y+1\le 4\end{cases}\Rightarrow \sqrt{x+3};\sqrt{y+1}\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$2(x+3)\sqrt{x+3}-2(y+1)\sqrt{y+1}=9x-9y+18$$
$$\Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{x+3}-9(x+3)=2(y+1)\sqrt{y+1}-9(y+1)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+3}\right)^3-9(x+3)=2\left(\sqrt{y+1}\right)^3-9(y+1)\quad (*)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-9t^2; t\in\left[\sqrt{2};2\right]$ ta có $f'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)<0,\forall t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Dẫn đến hàm số liên tục, nghịch biến trên miền đang xét.

Thu được $f\left(\sqrt{x+3}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x+3=y+1\Leftrightarrow y=x+2$. Khi đó

$$y+1=2+2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{1-x^2}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+2x+1=4-4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 5x^2+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-1;\frac{3}{5}\right\}$$

Kết luận hệ có hai nghiệm $(x;y)=(-1;1),\left(-\frac{3}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Nhận xét.

Các bạn độc giả dễ thấy toàn bộ các bài toán từ 52 đến 60 đều sử dụng kỹ thuật liên hợp – trục căn thức đối với một trong hai phương trình của hệ, phục vụ chặn miền giá trị của các biến, dẫn đến sự đơn điệu của hàm số trên một miền. Ngoài ra để khai thác và nâng cao, phát triển đặc tính chặn miền ẩn hàm có thể sử dụng liên hợp phức tạp hơn, đánh giá – bất đẳng thức, ẩn phụ,…vấn đề này sẽ được đề cập sau.

Quý độc giả lưu ý đối với công cụ đạo hàm – hàm số, ngoài tính chất đơn điệu $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$, chúng ta còn có thể tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua khảo sát sự biến thiên hoặc đồ thị hàm số. Dưới đây là một lớp bài toán mới đại diện cho nhận xét trên, hy vọng các bạn tiếp cận một cách tốt nhất.

Bài toán 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+3)\sqrt{y} = 1, \\ x^3 + y^3 - 4x^2 + 3y^2 + 5x + 35y + 34 = 0. \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $y \geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có $(x+1)^2 = 1 - (y+3)\sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow |x+1| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $x^3 - 4x^2 + 5x + y^3 + 3y^2 + 35y + 34 = 0 \Leftrightarrow f(x) + g(y) = -34$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ trên miền $[-2;0]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{5}{3}\right\}$.

Trên miền $[-2;0]$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến, liên tục, do đó $\underset{x\in[-2;0]}{Min} f(x) = f(-2) = -34$.

Xét hàm số $g(y) = y^3 + 3y^2 + 35y; y \geq 0$, dễ thấy ngay hàm số đồng biến nên $\underset{y\geq 0}{Min}\, g(y) = g(0) = 0$.

Như vậy $Min\left[f(x) + g(x)\right] = -34$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = -2; y = 1$.

Cặp giá trị này không thỏa mãn hệ ban đầu, kết luận bài toán vô nghiệm.

Nhận xét.
Mấu chốt là công việc chặn miền giá trị của ẩn hàm, cũng không quá khó, tương tự đánh giá tổng bình phương

$$(y+3)\sqrt{y} \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 - (y+3)\sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow |x+1| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0.$$

Tuy nhiên phương trình thứ hai không có dạng tương đồng hàm số $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Thực tế nó có dạng tổng hai hàm số độc lập với từng biến $x^3 - 4x^2 + 5x + y^3 + 3y^2 + 35y = 5 \Leftrightarrow f(x) + g(y) = 5$.

Một điều may mắn vì đây chính là điều kiện đẳng thức khi các hàm số đạt giá trị lớn nhất với miền tương ứng

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x; x \in [-2;0] \Rightarrow \underset{x\in[-2;0]}{Max} f(x) = f(-2) = -34$$

$$g(y) = y^3 + 3y^2 + 35y; y \geq 0 \Rightarrow \underset{y\geq 0}{Max}\, g(y) = g(1) = 39$$

Bài toán 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+4} + 1 = y^3 + 2y, \\ y^3 + x^2 + x + 2 = 2x\sqrt{x} + 3y. \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+4} - 2 = y^3 + 2y - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}+2} = (y-1)(y^2+y+3)$$

$$\Rightarrow (y-1)(y^2+y+3) \geq 0 \Leftrightarrow y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

Phương trình thứ hai tương đương $y^3 - 3y + 2 + x^2 + x - 2x\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow f(y) + g(x) = 0$.

Xét hàm số $f(y) = y^3 - 3y + 2; y \geq 1$ thì $f'(y) = 3y^2 - 3 \geq 0, \forall y \geq 1 \Rightarrow f(y)$ liên tục, đồng biến.

Dẫn đến $f(y) \geq f(1) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + x - 2x\sqrt{x}; x \geq 0 \Rightarrow g'(x) = 2x + 1 - 3\sqrt{x}$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}; 1\right\}$.

Khảo sát sự biến thiên hàm này với miền đang xét ta có $g(0) = 0; g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}; g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$.

Vậy $f(y)+g(x)\ge 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} y=1 \\ x\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(0;1),(1;1)$.

Thử lại thu được nghiệm của hệ là $(x;y)=(0;1)$.

Nhận xét.

Bài toán này ngoài thao tác sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức

$$\sqrt{x^2+4}-2=y^3+2y-3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}+2}=(y-1)\left(y^2+y+3\right).$$

Hoàn toàn có thể đánh giá thuần túy $y^3+2y=\sqrt{x^2+4}+1\ge\sqrt{4}+1=3\Leftrightarrow(y-1)\left(y^2+y+3\right)\ge 0$.

Ngoài ra các bạn học sinh nhỏ tuổi có thể không nhất thiết sử dụng công cụ hàm số

$$y^3-3y+x^2+x-2x\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow y^3-3y+2+x\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0\Leftrightarrow(y-1)^2(y+2)+x\left(\sqrt{x}-1\right)^2=0.$$

Rõ ràng $\begin{cases} (y-1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\ge 1 \\ x\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0,\forall x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow (y-1)^2(y+2)+x\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$.

Bài toán 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2-2}=\sqrt{3x-2}+(y-1)^2\sqrt{2y-1}, \\ x^3+x^2+(x+7)\sqrt{x}+\sqrt{2xy}=11. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x^2\ge 2; x\ge 0 \\ 3x-2\ge 0 \\ 2y-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ y\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2-2}-\sqrt{3x-2}=(y-1)^2\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow\frac{3x(x-1)}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3x-2}}=(y-1)^2\sqrt{2y-1}.$$

Vì $(y-1)^2\sqrt{2y-1}\ge 0,\forall y\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{3x(x-1)}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3x-2}}\ge 0\Leftrightarrow 3x(x-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Rightarrow x\ge 1$. Khi đó $x^3+x^2+(x+7)\sqrt{x}+\sqrt{2xy}\ge 1+1+8.1+\sqrt{2.1.\dfrac{1}{2}}=11$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x=1; y=\dfrac{1}{2} \\ (y-1)^2\sqrt{2y-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=\dfrac{1}{2}$ (Thỏa mãn hệ ban đầu).

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=1; y=\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 63. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3y+1}=\sqrt{2y+2}+x^2, \\ 3y^3-4y^2+x^3+5\sqrt{x-1}+6\sqrt{x}=6. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1; y\ge -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $\dfrac{y-1}{\sqrt{3y+1}+\sqrt{2y+2}}=x^2\geq 0\Rightarrow y-1\geq 0\Leftrightarrow y\geq 1$.

Phương trình thứ hai tương đương $\left(3y^3-4y^2\right)+\left(x^3+5\sqrt{x-1}+6\sqrt{x}\right)=6\Leftrightarrow f\left(y\right)+g\left(x\right)=6$.

Xét hàm số $f\left(y\right)=3y^3-4y^2;y\geq 1$ ta có $f'\left(y\right)=9y^2-8y>0,\forall y\geq 1$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3+5\sqrt{x-1}+6\sqrt{x};x\geq 1$ ta có $g'\left(x\right)=3x^2+\dfrac{5}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}>0,\forall x>1$.

Hai hàm số liên tục đồng biến trên miền tương ứng dẫn đến $f\left(y\right)+g\left(x\right)\geq f\left(1\right)+g\left(1\right)=-1+7=6$.

Thử lại nghiệm không thỏa mãn, hệ vô nghiệm.

Bài toán 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4\left(x-y\right)^2+\sqrt{3\left(x-y\right)}=\sqrt{x-y+1}+1,\\ y^3+2y^2+x\sqrt{y}+5y=\dfrac{19}{2}.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định $x-y\geq 0$. Đặt $x-y=t$ thì phương trình thứ nhất trở thành

$$4t^2+\sqrt{3t}=\sqrt{t+1}+1\Leftrightarrow 4t^2-1+\sqrt{3t}-\sqrt{t+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2t-1\right)\left(2t+1\right)+\frac{2t-1}{\sqrt{3t}+\sqrt{t+1}}=0\Leftrightarrow \left(2t-1\right)\left(2t+1+\frac{1}{\sqrt{3t}+\sqrt{t+1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y+\frac{1}{2}$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $y^3+2y^2+x\sqrt{y}+5y=\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow y^3+2y^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{y}+5y=\dfrac{19}{2}$.

Xét hàm số $f\left(y\right)=y^3+2y^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{y}+5y$, hàm số liên tục và đồng biến.

Lại có $f\left(1\right)=\dfrac{19}{2}\Rightarrow y=1;x=\dfrac{3}{2}$. Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{3}{2};1\right)$.

Nhận xét.

Bài toán này không quá khó nhận thấy phương trình thứ nhất có dạng phương trình vô tỷ một biến số $x-y=t$, giải bằng phương pháp sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức. Thay thế vào phương trình thứ hai thu được hàm số một biến y, liên tục và đồng biến cơ bản.

Bài toán 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+7}=\left(y^3+1\right)\sqrt{y-1}+8,\\ \left(x-1\right)^3+3y^3+\sqrt{y}+5=x+8y.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $y\geq 1;x\geq -2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+3}-2+2\left(\sqrt{x+7}-3\right)=\left(y^3+1\right)\sqrt{y-1}\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt{x+7}+3}=\left(y^3+1\right)\sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right]=\left(y^3+1\right)\sqrt{y-1}\geq 0\Rightarrow x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $x^3-3x^2+2x+3y^3-8y+\sqrt{y}+4=0\Leftrightarrow f\left(x\right)+g\left(y\right)=0$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2x;x\geq 2$ ta có $f'\left(x\right)=3x^2-6x+2>0,\forall x\geq 2$.

Dễ thấy hàm số đồng biến liên tục nên $\underset{x\ge 2}{Min}\, f(x)=f(2)=0$.

Xét hàm số $g(y)=3y^3-8y+\sqrt{y}+4; y\ge 0$ ta có $g'(y)=9y^2-8+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}>0,\forall y\ge 1$.

Hàm số này cũng liên tục, đồng biến suy ra $\underset{y\ge 1}{Min}\, g(x)=g(1)=0$

Tóm lại ta thu được $Min\left[f(x)+g(y)\right]=0$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2; y=1$.

Cặp giá trị này thỏa mãn hệ đề bài nên là nghiệm duy nhất của hệ.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 65 này, cả hai hình thức của các phương trình một và hai đều phức tạp, tỏ ra khá bất lợi cho chúng ta. Tuy nhiên một số bạn học sinh quen thuộc với kỹ thuật liên hợp – trục căn thức trong phương trình vô tỷ có thể dễ dàng nhận ra cách phá đề, chỉ cần chú ý rằng $(y^3+1)\sqrt{y-1}\ge 0,\forall y\ge 1$ sẽ tìm miền giá trị của biến x chặt hơn so với $x\ge -2$.

Nhiều bạn học sinh vội vàng xét ngay các hàm số độc lập $f(x),g(y)$ sẽ gặp phải trở ngại dấu đạo hàm không xác định $f'(x)=3x^2-6x+2; x\ge -2$?. Ngoài ra các bạn có thể giải bất phương trình sau để tìm ra $x\ge 2$

$$\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+7}\ge 8\Leftrightarrow 5x+30+4\sqrt{x^2+9x+14}\ge 64$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+9x+14}\ge 34-5x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}34-5x\le 0\\ \begin{cases}16(x^2+9x+14)\ge 25x2-340x+1156\\ 5x\le 34\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{34}{5}\\ \begin{cases}5x\le 34\\ 9x^2-484x+932\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{34}{5}\\ \begin{cases}5x\le 34\\ 2\le x\le\dfrac{466}{9}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{34}{5}\\ 2\le x\le\dfrac{34}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ge 2$$

Hoặc có thể xét hàm số đồng biến $g(x)=\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+7}; g(2)=8; g(x)\ge g(2)\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bài toán 66, trích lược Đề thi chọn Đội tuyển dự thi HSG Quốc gia Môn Toán; Trường THPT Chuyên ĐHSP, Trực thuộc Đại học Sư phạm Hà Nội; Năm học 2010 – 2011.

Bài toán 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)=18,\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x;y\in\mathbb{R}$.

Coi phương trình thứ hai của hệ lần lượt là phương trình bậc hai ẩn *x* và ẩn *y*, ta có

$$\begin{cases}x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0 & (1)\\ y^2-(x-6)y+x^2-7x+14=0 & (2)\end{cases}$$

Điều kiện có nghiệm của hai phương trình trên là $\begin{cases}\Delta_1=-3y^2+10y-7\ge 0\\ \Delta_2=-3x^2+16x-20\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le y\le\dfrac{7}{3}\\ 2\le x\le\dfrac{10}{3}\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=2t^2-3t+4; t\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(t)=4t-3; f'(t)>0\Leftrightarrow t>\dfrac{3}{4}$.

Do đó các hàm số $f(x)=2x^2-3x+4; x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$ và $f(y)=2y^2-3y+4; y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]$ đều liên tục, đồng biến.

Suy ra $f(x).f(y)\geq f(2).f(1)=6.3=18$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2; y=1$. Hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Đối với bài toán 66 này, việc phân tích bình phương phương trình hai đã trở nên khó khăn (không phải thực hiện được), nếu có nó tương tự việc tìm giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai hai ẩn x và y. Rõ ràng chúng ta chọn phương án ít chông gai hơn, sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai ẩn x và ẩn y lần lượt. Sau khi xử lý triệt để miền giá trị của x và y, để ý sự tương đồng giữa hai biểu thức ở phương trình thứ nhất. Trường hợp hai biểu thức khác nhau, các bạn vẫn hoàn toàn có thể sử dụng kiến thức hàm số hoặc các kỹ năng khác của bất đẳng thức để tìm ra $x=2; y=1$.

Giả dụ phương trình thứ nhất có dạng $\left(x^2+4x+6\right)\left(y^3+2\right)=54$ *hay thậm chí có dạng khủng bố đại khái như*

$$\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(y^7+3y+3\right)=105;\left(x^4+x+1\right)\left(y^9+y\right)=38.$$

Chúng ta vẫn sử dụng tích hai hàm đồng biến $f(x).g(y)$ *để thu được* $x=2; y=1$.

Bài toán 67. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3\left(x^3-y^3\right)+20x^2+2xy+5y^2+39x=100,\\ x^2+y^2+xy+4=4y+3x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x;y\in\mathbb{R}$. Coi phương trình thứ hai của hệ lần lượt là phương trình bậc hai ẩn *x* và ẩn *y*, ta có

$$x^2+x(y-3)+y^2-4y+4=0$$
$$y^2+y(x-4)+x^2-3x+4=0$$

Các điều kiện có nghiệm là

$$\Delta_1\geq 0;\Delta_2\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}-3y^2+10y-7\geq 0\\ -3x^2+4x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\leq y\leq\frac{7}{3}\\ 0\leq x\leq\frac{4}{3}\end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$3x^3-3y^3+20x^2+2\left(4y+3x-4-x^2-y^2\right)+5y^2+39x=100$$
$$\Leftrightarrow\left(3x^3+18x^2+45x\right)-3y^3+3y^2+8y=108\Leftrightarrow f(x)+g(y)=108$$

Xét hàm số $f(x)=3x^3+18x^2+45; x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ thì $f'(x)=9x^2+36x+45>0,\forall x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Hàm số liên tục, đồng biến trên miền đó nên $\underset{x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]}{Max} f(x)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{892}{9}$.

Xét hàm số $g(y)=-3y^3+3y^2+8y; y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]$ thì $g'(y)=-9y^2+6y+8; g'(y)=0\Leftrightarrow y\in\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\}$.

Trên miền $y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]\Rightarrow\underset{y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]}{Max} g(y)=g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{80}{9}$, suy ra $Max\left[f(x)+g(y)\right]=108$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{4}{3}$. Thử lại, kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=\frac{4}{3}$.

Nhận xét.

Bài toán 3, điều kiện phương trình bậc hai của hai ẩn x, y có lẽ đã trở nên quen thuộc. Tuy nhiên phương trình thứ nhất của hệ có hình thức khá mù mịt, nhằng nhịt, khó chịu, nguyên do tích xy dính vào nhau, muốn sử dụng hàm số thông thường chúng ta thường cô lập hai biến, xét theo cùng một tương đồng hàm hoặc hai hàm khác nhau, nhưng đòi hỏi phải đồng bộ để đạt được dấu đẳng thức. Chú ý một chút phương trình thứ hai có thể sử dụng phép thế $xy = 4y + 3x - 4 - x^2 - y^2$, *từ đó suy ra*

$$3x^3 - 3y^3 + 20x^2 + 2\left(4y + 3x - 4 - x^2 - y^2\right) + 5y^2 + 39x = 100$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^3 + 18x^2 + 45x\right) - 3y^3 + 3y^2 + 8y = 108 \Leftrightarrow f\left(x\right) + g\left(y\right) = 108$$

Bài toán 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - \sqrt{x} = 7\sqrt{1-y^2}, \\ 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1 = \left(y^3 - 1\right)\sqrt{4-y}. \end{cases} \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x-1 \ge 0; x \ge 0 \\ y^2 \le 1; 4-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0,5 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ suy ra $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}} = 7\sqrt{1-y^2} \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1; x \ge 1 \Rightarrow f'\left(x\right) = 8x^3 - 12x^2 + 2x + 2$.

Ta có $f'\left(x\right) = 2\left(x-1\right)\left(4x^2 - 2x - 1\right) = 2\left(x-1\right)\left[\left(x-1\right)\left(4x+2\right)+1\right] \ge 0, \forall x \ge 1$.

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $\underset{x \ge 1}{Min} f\left(x\right) = f\left(1\right) = 0$.

Mặt khác $y \in \left[-1;1\right] \Rightarrow y^3 \le 1 \Rightarrow \left(y^3 - 1\right)\sqrt{4-y} \le 0$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} x = 1 \\ y^3 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Ngoài phương án sử dụng hàm số với đa thức bậc bốn biến x, các bạn có thể sử dụng phân tích thuần túy như sau

$$f\left(x\right) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x - 1 = \left(x-1\right)^2\left(2x^2 - 1\right) \ge 0, \forall x \ge 1$$

Bài toán 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^3-1} = \sqrt{9-x} + 2y^3\sqrt{y-1}, \\ x^3 - 5x^2 + 8x + 2\left(y+3\right)\sqrt{2y-1} = 12. \end{cases} \quad \left(x; y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 \ge 1; 9-x \ge 0 \\ y-1 \ge 0; 2y-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 9 \\ y \ge 1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $\sqrt{x^3-1} - \sqrt{9-x} = 2y^3\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \dfrac{x^3 + x - 10}{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{1-x}} = 2y^3\sqrt{y-1}$.

Vì $2y^3\sqrt{y-1} \ge 0, \forall y \ge 1 \Rightarrow x^3 + x - 10 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) \ge 0 \Leftrightarrow x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\left(x^3 - 5x^2 + 8x\right) + 2\left(y+3\right)\sqrt{2y-1} = 12 \Leftrightarrow f\left(x\right) + g\left(y\right) = 12$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 5x^2 + 8x; x \in \left[2;9\right]$ ta có $f'\left(x\right) = 3x^2 - 10x + 8 = 3\left(x-2\right)\left(3x-4\right) \ge 0, \forall x \in \left[2;9\right]$.

Hàm số này liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $\underset{x \in [2;9]}{Min} f\left(x\right) = f\left(2\right) = 4$.

Xét hàm số $g(y)=2(y+3)\sqrt{2y-1}; y\ge 1$ là hàm liên tục, đồng biến nên $\underset{y\ge 1}{Min}\, g(y)=g(1)=2.4=8$.

Do đó phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=2; y=1$.
Cặp giá trị này thỏa mãn hệ nên là nghiệm duy nhất của hệ.

Nhận xét.

Ngoài công cụ hàm số với đa thức bậc ba ẩn x các bạn đọc nhỏ tuổi có thể sử dụng phân tích

$$x^3-5x^2+8x+2(y+3)\sqrt{2y-1}=12$$
$$\Leftrightarrow x^3-5x^2+8x-4+2(y+3)\sqrt{2y-1}=8$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)+2(y+3)\sqrt{2y-1}=8$$

Chú ý thêm rằng $\begin{cases}(x-2)^2(x-1)\ge 0\\ 2(y+3)\sqrt{2y-1}\ge 2.4=8\end{cases}$

Bài toán 70. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5-x}=\sqrt{x+3}+5y\sqrt{2-y},\\ 17x+6y+(y+1)\sqrt{3y-2}+(x^3+x+31)\sqrt{x+8}=117.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}5-x\ge 0; x+3\ge 0; x+8\ge 0\\ 2-y\ge 0; 3y-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{3}\le y\le 2\\ -3\le x\le 5\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{5-x}-\sqrt{x+3}=5y\sqrt{2-y}\Leftrightarrow\frac{2-2x}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}}=5y\sqrt{2-y}.$$

Vì $5y\sqrt{2-y}\ge 0,\forall y\in\left[\dfrac{2}{3};2\right]\Rightarrow 2-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$. Như vậy $x\in[-3;1]; y\in\left[\dfrac{2}{3};2\right]$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\left[6y+(y+1)\sqrt{3y-2}\right]+\left[17x+(x^3+x+31)\sqrt{x+8}\right]=117\Leftrightarrow f(y)+g(x)=117.$$

Xét hàm số $f(y)=6y+(y+1)\sqrt{3y-2}; y\in\left[\dfrac{2}{3};2\right]$ và hàm số $g(x)=17x+(x^3+x+31)\sqrt{x+8}; x\in[-3;1]$.

Dễ thấy các hàm đơn lẻ $6y; y+1; \sqrt{3y-2}$ và $17x; x^3+x+31; \sqrt{x+8}$ đều là các hàm số đồng biến, liên tục trên từng miền tương ứng với hai biến x, y. Các hàm ban đầu là tổ hợp tổng – tích các hàm đồng biến nên đều đồng biến, hơn nữa đều nhận giá trị dương trên miền xác định.

Dẫn đến $\underset{y\in\left[\frac{2}{3};3\right]}{Max} f(y)=f(2)=18; \underset{x\in[-3;1]}{Max}\, g(x)=g(1)=99$.

Khi đó $f(x)+g(y)\le \underset{y\in\left[\frac{2}{3};3\right]}{Max} f(y)+\underset{x\in[-3;1]}{Max}\, g(x)=18+99=117$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu cực trị xảy ra đồng thời, tức là $x=1; y=2$ (Thỏa mãn hệ).

Bài toán 71. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+4x+13=5x^2+y^3+3y\sqrt{y-1},\\ 17(2x+3)\sqrt[4]{x-1}+6x^2+y^3+y^2=2(4y+1).\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1; x\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành

$$2x^3-5x^2+4x+13=y^3+3y\sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow y^3+3y\sqrt{y-1}=2x^3-5x^2+4x-1+14=(x-1)^2(2x-1)+14\geq 14$$
$$\Leftrightarrow y^3-8+3y\sqrt{y-1}-6\geq 0\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+4)+\frac{3(y^3-y^2-4)}{y\sqrt{y-1}+2}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (y-2)\left[y^2+2y+4+\frac{3(y^2+y+2)}{y\sqrt{y-1}+2}\right]\geq 0\Rightarrow y-2\geq 0\Leftrightarrow y\geq 2$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với
$$17(2x+3)\sqrt[4]{x-1}+6x^2+y^3+y^2=2(4y+1)$$
$$\Leftrightarrow 17(2x+3)\sqrt[4]{x-1}+6x^2+y^3+y^2-8y=2\Leftrightarrow f(x)+g(y)=2$$

Xét hàm số $f(x)=17(2x+3)\sqrt[4]{x-1}+6x^2\geq f(1)=6$.

Xét hàm số $g(y)=y^3+y^2-8y; y\geq 2$ ta có $g'(y)=3y^2+2y-8>0,\forall y\geq 2$ nên hàm số đồng biến, liên tục.

Suy ra $g(y)\geq g(2)=-4\Rightarrow f(x)+g(y)\geq 6-4=2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $y=2;x=1$.

Thử lại ta thu được nghiệm duy nhất của hệ.

Nhận xét.

Bài toán 71 có mức độ khó nhỉnh hơn một chút so với các bài toán trước, không sử dụng đại lượng liên hợp liên hợp đơn thuần, tác giả mạo muội sử dụng đặc tính không âm của các biểu thức $(f(x))^2 g(x)$ trong đó $g(x)>0$ với điều kiện căn thức của bài toán. Để tìm điều kiện của biến y, ngoài lời giải như trên có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số như sau

$$2x^3-5x^2+4x+13=y^3+3y\sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow g(y)=y^3+3y\sqrt{y-1}=2x^3-5x^2+4x-1=f(x)$$

Dễ thấy các hàm $f(x),g(y)$ đều đồng biến với điều kiện $y\geq 1;x\geq 1$ nên

$$f(x)\geq f(1)=14\Rightarrow g(y)=y^3+3y\sqrt{y-1}\geq 14=g(2)\Rightarrow y\geq 2.$$

Bài toán 72. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-1}=\sqrt{3-x}+(2x-1)(x-y)^2,\\ x(2x^2-11x+20)+\sqrt{y^2-4y+5}=13.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1\leq x\leq 3$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với
$$\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=(2x-1)(x-y)^2\Leftrightarrow \frac{2x-4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}=(2x-1)(x-y)^2.$$

Rõ ràng $(2x-1)(x-y)^2\geq 0,\forall x\in[1;3],\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow \dfrac{2x-4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}\geq 0\Leftrightarrow 2x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với
$$2x^3-11x^2+20x+\sqrt{y^2-4y+4+1}=13\Leftrightarrow 2x^3-11x^2+20x+\sqrt{(y-2)^2+1}=13.$$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-11x^2+20x; x\in[2;3]$ ta có $f'(x)=6x^2-22x+20=(x-2)(5x-3)\geq 0,\forall x\in[2;3]$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $\underset{x\in[2;3]}{Min} f(x)=f(2)=12$.

Hơn nữa $\sqrt{(y-2)^2+1}\geq 1\Leftrightarrow 2x^3-11x^2+20x+\sqrt{(y-2)^2+1}\geq 12+1=13$.

Do đó phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=y=2$.

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

- *Bước ngoặt quyết định hướng đi của các hệ phương trình trong lớp bài toán này là sử dụng đại lượng liên hợp – chặn miền giá trị, thông thường chúng ta thường cô lập biến theo hướng $F(x)=G(y)$, từ đó đánh giá cực trị $F(x)\vee G(y)$ để bật ngược trở lại tìm được miền giá trị biến còn lại. Tuy nhiên bài toán 72 không còn đơn giản như thế nữa, khi việc cô lập biến là không thể, hoàn toàn các bạn có thể thay thế các hàm $F(x)=G(y)$ bởi $F(x;y)=G(x;y)$, thậm chí còn phức tạp hơn nữa $F(x;y;z;...)=G(x;y;z;...)$, đối với hệ không mẫu mực nhiều ẩn.*
- *Lưu ý có thể sử dụng biến đổi thuần túy thay cho phương án đạo hàm – hàm số*

$$2x^3-11x^2+20x+\sqrt{y^2-4y+5}=13$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-11x^2+20x-12+\sqrt{y^2-4y+4+1}=1$$
$$\Leftrightarrow (2x-3)(x-2)^2+\sqrt{(y-2)^2+1}=1$$

Chú ý tiếp tục $2x-3>0,\forall x\ge 2\Rightarrow (2x-3)(x-2)^2\ge 0,\forall x\ge 2$.

Bài toán 73. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{6-x}+2=y^3+y+\sqrt{x+2},\\ (y^2+1)\sqrt{y^3-1}-4xy+4y^2=x^3-8x^2+16x-12.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+2\ge 0;6-x\ge 0\\ y^3-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 6\\ y\ge 1\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}=y^3+y-2\Leftrightarrow \frac{4-2x}{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}}=y^3+y-2.$$

Xét hàm số $f(y)=y^3+y-2;y\ge 1$ ta có $f'(y)=3y^2+1>0,\forall y\in\mathbb{R}$ nên hàm liên tục, đồng biến.

Dẫn đến $\underset{y\ge 1}{Min}\, f(y)=f(1)=0\Rightarrow \frac{4-2x}{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}}\ge 0\Leftrightarrow 4-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2\Rightarrow x\in[-2;2]$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$(y^2+1)\sqrt{y^3-1}+x^2-4xy+4y^2=x^3-7x^2+16x-12$$
$$\Leftrightarrow (y^2+1)\sqrt{y^3-1}+(x-2y)^2=x^3-7x^2+16x-12\quad (1)$$

Xét hàm số $g(x)=x^3-7x^2+16x-12;x\in[-2;2]$.

Ta có $g'(x)=3x^2-14x+16=(x-2)(3x-8)>0,\forall x\in[-2;2]$ vì $\begin{cases}x-2<0\\ 3x-8<0\end{cases}\forall x\in[-2;2]$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền $[-2;2]\Rightarrow \underset{x\in[-2;2]}{Max}\, g(x)=g(2)=0$.

Trong khi đó $(y^2+1)\sqrt{y^3-1}+(x-2y)^2\ge 0,\forall y\ge 1;\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi các dấu cực trị xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}y^3-1=0\\ x-2y=0\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Các bạn độc giả nhỏ tuổi dù chưa có trong tay công cụ đạo hàm – hàm số hoàn toàn có thể xử lý các bài toán tương tự bằng cách sử dụng phân tích nhân tử thuần túy

- *Thay thế khảo sát* $f(y)=y^3+y-2; y\ge 1$ *bởi* $y^3+y-2=(y-1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\ge 1$.
- *Thay thế khảo sát* $g(x)=x^3-7x^2+16x-12; x\in[-2;2]$ *bằng*

$$(y^2+1)\sqrt{y^3-1}+x^2-4xy+4y^2=x^3-7x^2+16x-12$$
$$\Leftrightarrow (y^2+1)\sqrt{y^3-1}+x^2-4xy+4y^2=(x-2)^2(x-3)$$

Chú ý $\begin{cases}(y^2+1)\sqrt{y^3-1}+(x-2y)^2\ge 0,\forall y\ge 1; x\in\mathbb{R}\\ (x-2)^2(x-3)\le 0;\forall x\in[-2;2]\end{cases}$

Bài toán 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}=1+17(x-y)^2\sqrt{y-1},\\ x^3+2x^2-6x+(y^3+y^2-4y+7)\sqrt{2x-1}=2.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{1}{2}\le x\le 2; y\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}=1+17(x-y)^2\sqrt{y-1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-2+1-\sqrt{2-x}=17(x-y)^2\sqrt{y-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=17(x-y)^2\sqrt{y-1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}\right)=17(x-y)^2\sqrt{y-1}$$

Ta có $17(x-y)^2\sqrt{y-1}\ge 0,\forall y\ge 1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2-x}}>0,\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x^2-6x; x\in[1;2]\Rightarrow f'(x)=3x^2+4x-6>0,\forall x\in[1;2]$.

Hàm này liên tục và đồng biến trên miền $[1;2]\Rightarrow f(x)\ge \underset{x\ge 1}{Min}\, f(x)=f(1)=-3$.

Xét hàm số $g(y)=y^3+y^2-4y; y\ge 1\Rightarrow g'(y)=3y^2+2y-4>0,\forall y\ge 1$.

Hàm này liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên $g(y)\ge \underset{y\le 1}{Min}\, g(y)=g(1)=5>0$.

Lại có $\sqrt{2x-1}\ge 1,\forall x\ge 1\Rightarrow x^3+2x^2-6x+(y^3+y^2-4y)\sqrt{2x-1}\ge -3+5=2$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x=y=1$, hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Có thể nhận thấy bài toán 74 thoạt tiên có vẻ "dễ thở" hơn so với các bài toán trước vì hầu như bạn đọc nào cũng quan sát thấy biểu thức liên hợp được bố trí sẵn với phương trình đầu tiên

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}=1+17(x-y)^2\sqrt{y-1}.$$

Xông pha chúng ta đánh giá liên hoàn $1+17(x-y)^2\sqrt{y-1}\ge 1\Rightarrow \dfrac{2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}\ge 1$.

Tuy nhiên đến đây xuất hiện tâm lý "mừng hụt" vì bình thường sử dụng $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}\ge 0$ *cơ mà.*

Tinh tế một chút có thể nhận thấy ngay việc giải bất phương trình $\frac{2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}\ge 1\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\ge 1$.

Tiếp tục biến đổi

$$\sqrt{x+3}\ge 1+\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x+3\ge 3-x+2\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x\ge \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge 1\vee x\le -2 \end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$$

Ngoài ra có thể triệt tiêu số 1 bằng cách sử dụng liên hợp hằng số tương tự lời giải phía trên.

Bài toán 75. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=y^3-3y+4, \\ x^3+y^3+(y+1)x^2+2\sqrt{y-1}=(2y^2-3)x+5. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1;y\ge\frac{2}{3}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{2x-1}-1+\sqrt{3x-2}-1=y^3-3y+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}=(y-1)^2(y+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=(y-1)^2(y+2)$$

Để ý rằng $(y-1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\ge 1$ và $\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}>0,\forall x\ge\frac{2}{3}$ nên dẫn đến $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2y-2xy^2+y^3+x^3+x^2+3x+2\sqrt{y-1}=5$$

$$\Leftrightarrow y(x-y)^2+2\sqrt{y-1}+(x^3+x^2+3x)=5$$

Ta có $y(x-y)^2\ge 0;\sqrt{y-1}\ge 0,\forall y\ge 1\Rightarrow y(x-y)^2+2\sqrt{y-1}\ge 0$.

Hàm số $f(x)=x^3+x^2+3x;x\ge 1$ là hàm liên tục, đồng biến vì $f'(x)=3x^2+2x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)\ge f(1)=5$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là $\begin{cases} x-y=0 \\ y-1=0;x=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 75 này đã có cô lập hai hàm số tại phương trình đầu tiên của hệ, chúng ta thực hiện đánh giá ngay lập tức. Ngoài phương án sử dụng liên hợp hằng số như trên

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=y^3-3y+4\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-1+\sqrt{3x-2}-1=y^3-3y+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}=(y-1)^2(y+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=(y-1)^2(y+2)$$

Các bạn có thể sử dụng phân tích thuần túy để thu được hàm ẩn x lớn hơn bằng 2.

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=y^3-3y+2+2=(y-1)^2(y+2)+2\ge 2.$$

Đến đây có thể giải bất phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}\ge 2$ *hoặc xét hàm số đều khả thi, nhanh chóng.*

Xét hàm $t(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2};3x\ge 2$ *là hàm đồng biến nên* $t(x)\ge t(1)=2\Leftrightarrow x\ge 1$.

Bài toán 76. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x^3-7}{\sqrt{x^3+3}+\sqrt{10-x^3}}+\sqrt{1-y^2}=0, \\ 2x^3+2x^2y+xy^2+3x+15\sqrt{y^2+1}=3x^2+2xy+17. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} -3\le x^3\le 10 \\ 1-y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt[3]{3}\le x\le \sqrt[3]{10} \\ -1\le y\le 1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+3}-\sqrt{10-x^3}+\sqrt{1-y^2}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3+3}-2\right)+\left(3-\sqrt{10-x^3}\right)=1-\sqrt{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{x^3-1}{3+\sqrt{10-x^3}}=\frac{y^2}{1+\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{1}{3+\sqrt{10-x^3}}\right)=\frac{y^2}{1+\sqrt{1-y^2}} \quad (1)$$

Ta có $\dfrac{y^2}{1+\sqrt{1-y^2}}\ge 0,\forall y\in\mathbb{R};\dfrac{1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\dfrac{1}{3+\sqrt{10-x^3}}>0$ nên từ (1) ta có $x^3-1\ge 0\Leftrightarrow x^3\ge 1\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2x^3+2x^2y+xy^2-3x^2-2xy+3x+15\sqrt{y^2+1}=17$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2y+xy^2-2x^2-2xy+x+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+2xy+y^2-2x-2y+1\right)+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17$$

$$\Leftrightarrow x\left(x+y-1\right)^2+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17 \quad (2)$$

Xét hàm $f(x)=x^3-x^2+2x;x\ge 1\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số liên tục, đồng biến trên toàn trục số nên $f(x)\ge \underset{x\ge 1}{Min}\, f(x)=f(1)=2$.

Mặt khác $\begin{cases} x(x+y-1)^2\ge 0,\forall x\ge 1 \\ \sqrt{y^2+1}\ge 1,\forall y\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x(x+y-1)^2+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}\ge 0+2+15.1=17$.

Phương trình (2) có nghiệm khi các dấu cực trị xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} x(x+y-1)^2=0 \\ x=1;y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Thử lại thỏa mãn hệ ban đầu, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

- *Với motip tương tự, khi các hàm phục vụ chốt chặn đã phơi bày, hoàn toàn có thể giải bất phương trình cơ bản, mặc dù có vất vả hơn*

$$\sqrt{x^3+3}-\sqrt{10-x^3}+\sqrt{1-y^2}=0\Leftrightarrow \sqrt{10-x^3}-\sqrt{x^3+3}=\sqrt{1-y^2}\le 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{10-x^3}\le \sqrt{x^3+3}+1\Leftrightarrow 10-x^3\le x^3+4+2\sqrt{x^3+3}\Leftrightarrow 3-x^3\le \sqrt{x^3+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x^3\le 0 \\ \begin{cases} 3-x^3\ge 0 \\ x^6-6x^3+9\le x^3+3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3\ge 3 \\ \begin{cases} x^3\le 3 \\ x^6-7x^3+6\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3\ge 3 \\ 1\le x^3\le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^3\ge 1\Leftrightarrow x\ge 1$$

- *Một chú ý khác là trải dọc các bài toán 73 đến 76, các phương trình phụ của hệ ban đầu không còn đơn giản như trước, tức là không còn dạng hàm số độc lập để chúng ta thao tác $f(x)+g(y)=k$, bao gồm việc* *tìm cực trị của các hàm $f(x), g(y)$, cho dù $f(x), g(y)$ có là tổ hợp tổng - tích của các hàm đơn điệu với từng biến. Phạm vi mới của các bài toán trên là hàm số liên kết, tức là hàm số đơn điệu là tổ hợp tổng – tích của các hàm đơn điệu với hai biến khác nhau.*

- *Cụ thể là bài toán số 74 với hàm tổng cộng $x^3+2x^2-6x+\left(y^3+y^2-4y+7\right)\sqrt{2x-1}=2$. Các hệ phương trình 73, 75, 76 mức độ cao hơn khi đã được bố trí lồng ghép đại lượng không âm hai biến $M(x;y)$.*
- *Bài toán số 73 có $M_{73}(x;y)=(x-2y)^2$.*

$$\left(y^2+1\right)\sqrt{y^3-1}-4xy+4y^2=x^3-8x^2+16x-12$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2+1\right)\sqrt{y^3-1}+x^2-4xy+4y^2=x^3-7x^2+16x-12$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2+1\right)\sqrt{y^3-1}+(x-2y)^2=x^3-7x^2+16x-12 \quad (*)$$

- *Bài toán số 75 có $M_{75}(x;y)=y(x-y)^2$.*

$$x^3+y^3+(y+1)x^2+2\sqrt{y-1}=\left(2y^2-3\right)x+5$$
$$\Leftrightarrow x^2y-2xy^2+y^3+x^3+x^2+3x+2\sqrt{y-1}=5$$
$$\Leftrightarrow y(x-y)^2+2\sqrt{y-1}+\left(x^3+x^2+3x\right)=5 \quad (*)$$

- *Bài toán số 76 có $M_{76}(x;y)=x(x+y-1)^2$*

$$2x^3+2x^2y+xy^2-3x^2-2xy+3x+15\sqrt{y^2+1}=17$$
$$\Leftrightarrow x^3+2x^2y+xy^2-2x^2-2xy+x+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2+2xy+y^2-2x-2y+1\right)+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17$$
$$\Leftrightarrow x(x+y-1)^2+x^3-x^2+2x+15\sqrt{y^2+1}=17 \quad (*)$$

Bài toán 77. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+3)^3+(2y-1)\sqrt{y-1}+y=3x+8, \\ (x+y)^2(y+2)+y(2x+2y+5)=x\left(x^2-7\right).\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ đã cho tương đương với

$$(x+y)^2(y+2)+2y(x+y)+4(x+y)+y+2=x^3-3x+2$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2(y+2)+2(x+y)(y+2)+y+2=x^3-3x+2$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2(y+2)=x^3-3x+2$$

Dễ thấy $(x+y+1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\ge 1\Rightarrow x^3-3x+2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge -2\end{array}\right.$

Xét $x=1$ thì $(2y-1)\sqrt{y-1}=-53$ (Vô nghiệm).

Xét $x\ge -2$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$x^3+9x^2+24x+19+y+(2y-1)\sqrt{y-1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2(x+5)+(2y-1)\sqrt{y-1}+y-1=0 \quad (1)$$

Để ý rằng $(x+2)^2(x+5)+(2y-1)\sqrt{y-1}+y-1\ge 0,\forall x\ge -2;\forall y\ge 1$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là $x=-2; y=1$.
Cặp số $x=-2; y=1$ thỏa mãn hệ nên là nghiệm duy nhất của bài toán.

Nhận xét.

Mấu chốt của bài toán 77 là biến đổi phương trình thứ nhất, điều này có thể manh nha từ việc chúng ta phán đoán cặp nghiệm $x=-2; y=1$ của hệ từ phương trình thứ hai. Kết hợp các kiến thức về bất đẳng thức AM – GM, từ đó đưa ra hướng đi thiết lập hạng tử $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\ge 0$ để thu được lời giải như trên.

Bài toán 78. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+3}=y\sqrt{10-x^2}+\sqrt{2-x}+1,\\ \left(y^3+6\right)\sqrt{y^3+y}+17x\sqrt[3]{x^3-2x+9}=34.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+3\ge 0;10-x^2\ge 0\\ 2-x\ge 0; y\left(y^2+1\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt[3]{3}\le x\le 2\\ y\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+3}-2+1-\sqrt{2-x}=y\sqrt{10-x^2}\Leftrightarrow\frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=y\sqrt{10-x^2}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}\right)=y\sqrt{10-x^2}$$

Ta có $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^3+3}+2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2-x}}>0,\forall x\in\left[-\sqrt[3]{3};2\right]; y\sqrt{10-x^2}\ge 0,\forall y\in\mathbb{R}$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow x\in[1;2]$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-2x+9; x\in[1;2]\Rightarrow f'(x)=3x^2-2>0,\forall x\in[1;2]$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên

$$f(x)\ge \underset{x\in[1;2]}{Min}\, f(x)=f(1)=8\Rightarrow\sqrt[3]{x^3-2x+9}\ge 2\Rightarrow 17x\sqrt[3]{x^3-2x+9}\ge 17.1.2=34.$$

Hơn nữa $\left(y^3+6\right)\sqrt{y^3+y}\ge 0,\forall y\ge 0\Rightarrow\left(y^3+6\right)\sqrt{y^3+y}+17x\sqrt[3]{x^3-2x+9}\ge 34$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=1; y=0$.

Bài toán 79. Giải hệ phương trình $\begin{cases}6\left(x^3-2x+2\right)\sqrt{x^3+3x}+17(y-1)^2\sqrt{3y-2}=12,\\ \sqrt{3x^5+1}=1997\sqrt[3]{y^3-3y+2}+\sqrt{3-2x}+1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\left(x^2+3\right)\ge 0;3x^5+1\ge 0\\ 3y-2\ge 0;3-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le\dfrac{3}{2}\\ y\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^5+1}-2+1-\sqrt{3-2x}=1997\sqrt[3]{y^3-3y+2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2-3}{\sqrt{3x^5+1}+2}+\frac{2x-2}{1+\sqrt{3-2x}}=1997\sqrt[3]{(y-1)^2(y+2)}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{3\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{\sqrt{3x^5+1}+2}+\frac{2}{1+\sqrt{3-2x}}\right]=1997\sqrt[3]{(y-1)^2(y+2)}\quad(1)$$

Ta thấy $(y-1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\ge \frac{2}{3}\Rightarrow 1997\sqrt[3]{(y-1)^2(y+2)}\ge 0$.

Hơn nữa $x^4+x^3+x^2+x+1>0,\forall x\in\left[0;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow \frac{3(x^4+x^3+x^2+x+1)}{\sqrt{3x^5+1}+2}+\frac{2}{1+\sqrt{3-2x}}>0,\forall x\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Do đó từ (1) thu được $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Xét đồng thời các hàm số

$$f(x)=x^3-2x+2;x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f'(x)=3x^2-2>0,\forall x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$$

$$g(x)=x^3+3x;x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow g'(x)=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Hai hàm số trên đều liên tục và đồng biến trên miền tương ứng.

Trong khi đó $h(x)=6(x^3-2x+2)\sqrt{x^3+3x}=6f(x)\sqrt{g(x)}$ là tổ hợp hai hàm đồng biến nên nó đồng biến, ngoài ra ta có $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow h(x)\ge \underset{x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]}{Min}\,h(x)=6f(1).g(1)=6.2=12$.

Thêm nữa $(y-1)^2\sqrt{3y-2}\ge 0,\forall y\ge\frac{2}{3}\Rightarrow 6(x^3-2x+2)\sqrt{x^3+3x}+17(y-1)^2\sqrt{y+4}\ge 12$.

Phương trình thứ nhất của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là $x=1;y=1$.

Bài toán 80. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^7+8}=\sqrt{2-x}+6(x-y)^2+2,\\ x^4+5y^2+13\sqrt{x(y^2+3)}+\sqrt{y-1}=2x^2y+17.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1;0\le x\le 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^7+8}-3+1-\sqrt{2-x}=6(x-y)^2\Leftrightarrow \frac{x^7-1}{\sqrt{x^7+8}+3}+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=6(x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x^7+8}+3}+\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}\right]=6(x-y)^2\quad (1)$$

Ta có $\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x^7+8}+3}+\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}>0,\forall x\ge 0;6(x-y)^2\ge 0,\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Từ (1) thu được $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow x\in[1;2]$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương

$$x^4-2x^2y+y^2+13\sqrt{x(y^2+3)}+\sqrt{y-1}+4y^2=17$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y)^2+13\sqrt{x(y^2+3)}+\sqrt{y-1}+4y^2=17\quad (2)$$

Rõ ràng $(x^2-y)^2\ge 0;13\sqrt{x(y^2+3)}+\sqrt{y-1}+4y^2\ge 13.1+0+4=17$.

Phương trình (2) có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là $x=y=1$.

Bài toán 81. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x^3+1}+(2y-1)\sqrt{3-2x}=y^2-2x+4,\\ (x+1)\sqrt{y^4+3}+(x+2)\sqrt{y^3-1}+y\sqrt{x^3+8}=7.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1;-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\le x\le \frac{3}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^3+1}-1-\sqrt{3-2x}=y^2-2y\sqrt{3-2x}+3-2x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^3+1}-2+1-\sqrt{3-2x}=\left(y-\sqrt{3-2x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^3-1\right)}{\sqrt{3x^3+1}+2}+\frac{2x-2}{1+\sqrt{3-2x}}=\left(y-\sqrt{3-2x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{3x^3+1}+2}+\frac{2}{1+\sqrt{3-2x}}\right]=\left(y-\sqrt{3-2x}\right)^2 \quad (1)$$

Ta có $\left(y-\sqrt{3-2x}\right)^2\ge 0;\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{3x^3+1}+2}+\frac{2}{1+\sqrt{3-2x}}>0,\forall y\in\mathbb{R};\forall x\in\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{3}{2}\right]$.

Từ (1) ta có $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\Rightarrow x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Khi đó $(x+1)\sqrt{y^4+3}+(x+2)\sqrt{y^3-1}+y\sqrt{x^3+8}\ge 2.2+0+1.3=7$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=y=1$.

Bài toán 82. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+(2y+1)\sqrt{2x-1}=y^2+2x+1,\\ \left(x^2+3y+1\right)\sqrt{y^3+3}+\left(y^3+3x+2\right)\sqrt{y+3}+\sqrt{y^3-1}=22.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2};y\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}-2=y^2-2y\sqrt{2x-1}+2x-1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-2+\sqrt{2x-1}-1=\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}=\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

Ta có $\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2\ge 0;\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}>0,\forall y\in\mathbb{R};\forall x\ge\frac{1}{2}$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó các hàm số con $x^2+3y+1;\sqrt{y^3+3};y^3+3x+2;\sqrt{y+3}$ đều là các hàm đồng biến.

Do $\sqrt{y^3-1}\ge 0$ nên $f(x;y)=\left(x^2+3y+1\right)\sqrt{y^3+3}+\left(y^3+3x+2\right)\sqrt{y+3}+\sqrt{y^3-1}\ge f(1;1)=22$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 83. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-3x^3+4x^2+3y=\left(2\sqrt{3y-2}+1\right)x+2.\\ (2y+1)\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x^3-2}=y^2+5x-2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{4}{5};y\ge\frac{2}{3}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{5x-4}-1+\sqrt{3x^3-2}-1=y^2-2y\sqrt{5x-4}+5x-4$$
$$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{3(x^3-1)}{\sqrt{3x^3-2}+1}=\left(y-\sqrt{5x-4}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{3x^3-2}+1}\right]=\left(y-\sqrt{5x-4}\right)^2$$

Ta có $\left(y-\sqrt{5x-4}\right)^2\ge 0;\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}+\frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{3x^3-2}+1}>0,\forall y\in\mathbb{R};\forall x\ge\frac{4}{5}$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{3y-2}+3y-2+x\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3y-2}\right)^2+x(x-1)^3=0 \quad (1).$$

Rõ ràng $\left(x-\sqrt{3y-2}\right)^2\ge 0;x(x-1)^3\ge 0;\forall x\ge 1;\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(x-\sqrt{3y-2}\right)^2+x(x-1)^3\ge 0$.

Do đó (1) có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, hay $\begin{cases}x=\sqrt{3y-2}\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Các bài toán 78, 80, 81, 82, 83 đều có dạng cô lập hàm số dạng phức tạp $F(x;y)=G(x;y)$, trong đó việc phát hiện biểu thức $G(x;y)$ không còn là điều đơn giản, yêu cầu bạn đọc hết sức chú ý và khéo léo tách ghép.

Bài toán 84. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2y+5)\sqrt{x^3+3}+\sqrt{4x-3}=x^3+y^2+2y+11,\\(x-1)^3\sqrt{4y-1}+(2x-1)\sqrt{2x^2-2x+1}=x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4};y\ge\frac{1}{4}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\left(\sqrt{x^3+3}-2\right)+\sqrt{4x-3}-1=y^2+2y+1-2(y+1)\sqrt{x^3+3}+x^3+3$$
$$\Leftrightarrow\frac{3(x^3-1)}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{4(x-1)}{\sqrt{4x-3}+1}=\left(y+1-\sqrt{x^3+3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{4}{\sqrt{4x-3}+1}\right]=\left(y+1-\sqrt{x^3+3}\right)^2$$

Ta có $\left(y+1-\sqrt{x^3+3}\right)^2\ge 0;\frac{3(x^2+x+1)}{\sqrt{x^3+3}+2}+\frac{4}{\sqrt{4x-3}+1}>0,\forall x\ge\frac{3}{4};\forall y\in\mathbb{R}$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(x-1)^3\sqrt{4y-1}+(2x-1)\sqrt{2x^2-2x+1}=x$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3\sqrt{4y-1}+(2x-1)\sqrt{(x-1)^2+x^2}=x \quad (1)$$

Khi đó $\begin{cases}(x-1)^3\sqrt{4y-1}\ge 0,\forall x\ge 1\\(2x-1)\sqrt{(x-1)^2+x^2}\ge(2-1).x=x,\forall x\ge 1\end{cases}\Rightarrow (x-1)^3\sqrt{4y-1}+(2x-1)\sqrt{(x-1)^2+x^2}\ge x$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases}(x-1)^3\sqrt{4y-1}=0\\(x-1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \vee (x;y)=\left(1;\frac{1}{4}\right)$.

Xét trường hợp $(x;y)=\left(1;\frac{1}{4}\right)$ không thỏa mãn hệ. Xét $x=1 \Rightarrow (y+1-2)^2=0 \Rightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 85. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2y+7)\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=y^2+x+19,\\\left(x+\sqrt{y}-2\right)\sqrt[3]{x^3+y^2-4y+4}=x\sqrt{y}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -\frac{1}{4}; y\geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$7\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\sqrt{4x+1}-3=y^2-2y\sqrt{x+2}+x+2$$
$$\Leftrightarrow \frac{7(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{4x-8}{\sqrt{4x+1}+3}=\left(y-\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{7}{\sqrt{x+2}+1}+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+3}\right)=\left(y-\sqrt{x+2}\right)^2$$

Ta có $\left(y-\sqrt{x+2}\right)^2\geq 0; \frac{7}{\sqrt{x+2}+1}+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+3}>0, \forall x\geq -\frac{1}{4}; \forall y\in\mathbb{R}$ nên $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Khi đó $\begin{cases}x+\sqrt{y}-2=x-2+\sqrt{y}\geq\sqrt{y}\\\sqrt[3]{x^3+y^2-4y+4}=\sqrt[3]{x^3+(y-2)^2}\geq\sqrt[3]{x^3}=x>0\end{cases} \Rightarrow \left(x+\sqrt{y}-2\right)\sqrt[3]{x^3+x^2-4x+4}\geq x\sqrt{y}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases}x-2=0\\y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=2; y=2$.

Bài toán 86. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(17+6y)\sqrt{x+8}+\sqrt{2x+7}=x+9y^2+62,\\\sqrt{5x^2-2x+2y^2-1}=2x-1997x\sqrt{y^3-1}.\end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\geq 1; 5x^2-2x+2y^2-1\geq 0; x\geq -\frac{7}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$17\left(\sqrt{x+8}-3\right)+\sqrt{2x+7}-3=9y^2-6y\sqrt{x+8}+x+8$$
$$\Leftrightarrow \frac{17(x-1)}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3}=\left(3y-\sqrt{x+8}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{17}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}\right)=\left(3y-\sqrt{x+8}\right)^2$$

Ta có $\left(3y-\sqrt{x+8}\right)^2\geq 0; \frac{17}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}>0, \forall x\geq -\frac{7}{2}; \forall y\geq 1$ nên thu được $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Phương trình thứ hai tương đương với $\sqrt{5x^2-2x+2y^2-1}+1997x\sqrt{y^3-1}=2x$.

Ta có $x\ge 1; y\ge 1 \Rightarrow \sqrt{5x^2-2x+2y^2-1}+1997x\sqrt{y^3-1}\ge\sqrt{5x^2-2x+1}=\sqrt{4x^2+(x-1)^2}\ge\sqrt{4x^2}=2x$.
Do đó phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=y=1$.

Bài toán 87. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5x+4}+(2y+3)\sqrt{x+3}=y^2+2y+x+9,\\ \sqrt{x^3+y^4+y^2-2y}+\sqrt{4y^2-4y+x}=y^2+|2y-1|.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện các căn thức xác định.
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{5x+4}-3+\sqrt{x+3}-2=y^2+2y+1-2(y+1)\sqrt{x+3}+x+3$$
$$\Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x+4}+3}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=\left(y+1-\sqrt{x+3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{5}{\sqrt{5x+4}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=\left(y+1-\sqrt{x+3}\right)^2$$

Ta có $\left(y+1-\sqrt{x+3}\right)^2\ge 0;\frac{5}{\sqrt{5x+4}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}>0,\forall x\ge-\frac{4}{5};\forall y\in\mathbb{R}$ nên dẫn đến $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó $\begin{cases}\sqrt{x^3+y^4+y^2-2y}\ge\sqrt{y^4+y^2-2y+1}=\sqrt{y^4+(y-1)^2}\ge\sqrt{y^4}=y^2\\ \sqrt{4y^2-4y+x}\ge\sqrt{4x^2-4y+1}=\sqrt{(2y-1)^2}=|2y-1|\end{cases}$

Suy ra $\sqrt{x^3+y^4+y^2-2y}+\sqrt{4y^2-4y+x}\ge y^2+|2y-1|$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\(y-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Đáp số nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 88. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y(x+y)^2+4y+1=4x^3-8x^2+4xy+4xy^2,\\ x(x-1)^3+2y^3+(y+4)\sqrt{2y-1}=y^2.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $y\ge\frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y(x+y)^2-4y(x+y)+4y=4x^3-8x^2+5x-1$$
$$\Leftrightarrow y(x+y)^2-4y(x+y)+4y=\left(4x^2-4x+1\right)(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y(x+y-2)^2=(2x-1)^2(x-1)$$

Rõ ràng $y(x+y-2)^2\ge 0,\forall y\ge\frac{1}{2}\Rightarrow(2x-1)^2(x-1)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x\ge 1\end{array}\right.$

- Xét trường hợp $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow y\in\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$. Loại $y=0$ và $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ không thỏa mãn hệ.
- Xét $x\ge 1\Rightarrow x(x-1)^3+2y^3+(y+4)\sqrt{2y-1}\ge 2y^3=2y^2.y\ge 2y^2.\frac{1}{2}=y^2$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} y(x+y-2)^2=0 \\ x=1; y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x;y\in\varnothing$.

Kết luận hệ vô nghiệm.

Bài toán 89. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-1)^3\sqrt{x^3+4}=5x^2(x-1), \\ (x+1)\sqrt{y^3-1}+(x^3-2x+6)\sqrt{2y^2-2y+1}=5y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1; x^3\ge -4$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ $(y-1)^3\sqrt{x^3+4}\ge 0,\forall y\ge 1\Rightarrow x^2(x-1)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x\ge 1 \end{array}\right.$

Xét trường hợp $x=0\Rightarrow (y-1)^3.2=0\Leftrightarrow y=1$, cặp số $(x;y)=(0;1)$ không thỏa mãn hệ.

Xét trường hợp $x\ge 1\Rightarrow (x+1)\sqrt{y^3-1}\ge 0,\forall y\ge 1;\forall x\ge 1$.

Bên cạnh đó $\sqrt{2y^2-2y+1}=\sqrt{y^2+(y^2-2y+1)}=\sqrt{y^2+(y-1)^2}\ge\sqrt{y^2}=y>0,\forall y\ge 1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-2x+6; x\ge 1\Rightarrow f'(x)=3x^2-2>0,\forall x\ge 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó thu được $f(x)\ge \underset{x\ge 1}{Min}\, f(x)=f(1)=5$ suy ra $(x+1)\sqrt{y^3-1}+(x^3-2x+6)\sqrt{2y^2-2y+1}\ge 0+5.y=5y$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} (x+1)\sqrt{y^3-1}=0 \\ y-1=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Thông thường trước đây sau khi chặn miền giá trị các biến thành công, khi làm việc với phương trình cuối cùng chúng ta đều tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của tổ hợp các hàm số (dạng độc lập và dạng liên kết), nhưng vẫn giữ vững tính chất thuần túy với một bên là hằng số

$$f(x;y)+g(x;y)+...=const.$$

Với công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số trong tay và các đánh giá cơ bản, thậm chí chỉ cần phân tích nhân tử, tách nhóm thích hợp, với chú ý điểm biên các giá trị nghiệm các bạn có thể hoàn toàn xử lý tốt phần lớn các bài toán tương tự.

So sánh với các bài toán trước, các bạn độc giả có thể thấy các bài toán 84, 85, 86, 87, 88, 89 đã nâng cấp độ hơn một bậc, sở dĩ dạng thức phức tạp hơn, khi vế phải không còn là hằng số

$$f(x;y)+g(x;y)+...\ge F(x;y)+G(x;y)+...$$

$$f(x;y)+g(x;y)+...\le F(x;y)+G(x;y)+...$$

Người ta thường nói

"...Tình mất vui lúc đã vẹn câu thề,
Đời chỉ đẹp khi hãy còn dang dở,
Thư viết đừng xong, thuyền trôi chớ đỗ,
Cho ngàn sau lơ lửng với ngàn xưa..."

(*Ngập ngừng – Hồ Dzếnh;1943*)

Đây là nguyên gốc của câu nói "Tình chỉ đẹp khi còn dang dở"...

Là một người quan niệm tình yêu đẹp là ngẫu hứng, vẹn toàn, son sắc, thủy chung, gắn bó tình nghĩa và trách nhiệm, nhưng tác giả chợt thấy những phép so sánh đánh giá lơ lửng trên cũng có phần đồng điệu, khi mà chúng ta sử dụng các dữ kiện và các bước chốt chặn lúc nào cũng một nửa, lúc nào cũng hờ hững, lúc thăng lúc giáng, không đường lối rõ ràng, không theo một quỹ đạo cố định, càng làm cho bài toán trở nên độc đáo, đẹp đẽ lạ kỳ, đòi hỏi ít nhiều sự khéo léo, tinh tế và một chút may mắn của người giải bài toán.

Bài toán 90. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^3-2y^3+10y^2+15x+2=4\left(3x^2+4y\right),\\ 6\sqrt{y}+17\sqrt{y^2-1}+19x^3=97x-72.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3x^3-12x^2+15x-6=2y^3-10y^2+16y-8$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-4x^2+5x-2\right)=2\left(y^3-5y^2+8y-4\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)=2\left(y-2\right)^2\left(y-1\right)$$

Chú ý rằng $2\left(y-2\right)^2\left(y-1\right)\ge 0,\forall y\ge 1\Rightarrow 3\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2\end{array}\right.$

- Xét trường hợp $x=1$ thì phương trình thứ hai trở thành $6\sqrt{y}+17\sqrt{y^2-1}=6$.
  Dễ thấy $6\sqrt{y}+17\sqrt{y^2-1}\ge 6,\forall y\ge 1\Rightarrow y=1$ là nghiệm duy nhất, khi đó $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.
- Xét trường hợp $x\ge 2$ thì phương trình thứ hai viết lại
  $$6\sqrt{y}+17\sqrt{y^2-1}+19x^3-97x+72=0\Leftrightarrow f\left(x\right)+g\left(y\right)=0.$$
  Xét hàm số $f\left(x\right)=19x^3-97x+72;x\ge 2$ ta có $f'\left(x\right)=57x^2-97>0,\forall x\ge 2$ nên hàm số đồng biến.
  Suy ra $f\left(x\right)\ge f\left(2\right)=30$, hơn nữa $g\left(y\right)=6\sqrt{y}+17\sqrt{y^2-1}\ge 6$ nên $f\left(x\right)+g\left(y\right)\ge 36>0$.
  Trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận hệ ban đầu có duy nhất nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài toán 91. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x^2+2y+1}+\left(x^2+y-4\right)\sqrt{y+3}=y^3+y^2-y-1,\\ y\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{2x^2+y^2-2x+1}=\dfrac{\left|x+y\right|}{\sqrt{2}}.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x+y-3\ge 0\\ x^2+2y+1\ge 0;y\ge -3\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\left(\sqrt{x^2+2y+1}-\sqrt{y+3}\right)+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{y+3}=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{2\left(x^2+y-2\right)}{\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt{y+3}}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{y+3}=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+y-2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt{y+3}}+\sqrt{y+3}\right)=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right)\quad(1)$$

Để ý rằng $2x+y-3\ge 0\Rightarrow x^2+y-2=2x+y-3+\left(x^2-2x+1\right)=2x+y-3+\left(x-1\right)^2\ge 0$.

Lại có $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt{y+3}}+\sqrt{y+3}>0$ nên từ (1) ta được $(y+1)^2(y-1)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y\ge 1 \end{array}\right.$

➢ Xét trường hợp $y=-1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y-2=0 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=\left(\sqrt{3};-1\right),\left(-\sqrt{3};-1\right)$.

Các cặp số trên không thỏa mãn $2x+y\ge 3$ nên đều bị loại.

➢ Xét trường hợp $y\ge 1$. Xuất phát $(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2\ge \dfrac{(x+y)^2}{2}$, dẫn đến

$$\sqrt{2x^2+y^2-2x+1}=\sqrt{x^2+y^2+(x-1)^2}\ge \sqrt{x^2+y^2}\ge \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}.$$

Mặt khác $y\ge 1 \Rightarrow y\sqrt{2x+y-3}\ge 0 \Rightarrow y\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{2x^2+y^2-2x+1}\ge \dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} (x-1)^2=0 \\ x-y=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Các bài toán từ 88 đến 90 các phép chặn miền giá trị diễn tiến thuận lợi, khi mà đánh giá được dựa trên bố trí hàm số một biến $f(x)=g(y)$. Phép đánh giá cực trị hàm số $f(x)\vee g(y)$ là dễ dàng, chỉ cần sử dụng các phéo biến đổi tương đương – phân tích nhân tử hoặc cao hơn là công cụ đạo hàm – hàm số nếu cần thiết.

Lưu ý nhỏ là đơn vị Q quyết định miền giá trị có dạng thức A^2B, tổng quát $A^{2k}B$, cụ thể

$$Q_{88}=(2x-1)^2(x-1);Q_{88}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x\ge 1 \end{array}\right.$$

$$Q_{89}=x^2(x-1);Q_{89}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

$$Q_{90}=3(x-1)^2(x-2);Q_{90}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$$

Tác giả xây dựng loạt bài toán có đại lượng nhạy cảm này để cảnh tỉnh bạn đọc trường hợp

$$A^{2k}B\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B\ge 0 \end{array}\right.$$

Tất nhiên các trường hợp may mắn là ngoại lệ khi tập nghiệm của chúng bao hàm nhau, ví dụ

$$(x-1)^2(x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\ge -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge -2 \text{ hoặc } (y-3)^2(y-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow y\ge 2.$$

Trong trường hợp không bao hàm với tập nghiệm rời nhau, các bạn cần hết sức tỉnh táo, cẩn thận và lật đi lật lại, băn khoăn suy nghĩ tìm tòi đến cùng. Mặc dù chỉ là những kiến thức rất đơn giản, cơ bản nhưng rất dễ nhầm lẫn và thiếu trường hợp, dẫn đến tinh thần bài toán bị tổn hại nghiêm trọng do đôi khi mất nghiệm hay nghiệm ngoại lai...mà trong quá trình giải toán, làm việc, kể cả trong cuộc sống chúng ta thường vô tình ngộ nhận, kể cả vô tâm quên đi những thứ thân thương như thế.

Đáng chú ý hơn cả là bài toán số 91, với đại lượng quyết định chặn $Q_{91}=(y+1)^2(y-1)$, tuy nhiên phép liên hợp thiết lập đại lượng này là bất ngờ, độc đáo và cần khai thác nhiều.

$$2\left(\sqrt{x^2+2y+1}-\sqrt{y+3}\right)+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{y+3}=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x^2+y-2\right)}{\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt{y+3}}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{y+3}=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+2y+1}+\sqrt{y+3}}+\sqrt{y+3}\right)=\left(y+1\right)^2\left(y-1\right) \quad (1)$$

Không giống các bài toán trước thường dẫn đến $x^2+y-2\geq 0$, nhưng xui xẻo là cho dù như thế thì vẫn chưa có gì khởi sắc trong lập luận. Nét tinh tế thể hiện ở điều mà ít ai ngờ tới

$$2x+y-3\geq 0\Rightarrow x^2+y-2=2x+y-3+\left(x^2-2x+1\right)=2x+y-3+\left(x-1\right)^2\geq 0.$$

Hơn nữa phương trình hệ quả cũng được thiết lập theo motip đánh giá lơ lửng, đòi hỏi tổng hòa liên hệ, phản biện và chính xác, từng bước tiệm cận đáp số cuối cùng.

Bài toán 92. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x^2+2y+4}+\left(2x^2+y-4\right)\sqrt{x^2+y+7}=6y^2\left(x-1\right),\\ \left(3x^2-1\right)\sqrt{4x+y-5}+\sqrt{3x^2+2y^2-1}=x+y.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases}4x+y-5\geq 0;3x^2+2y^2-1\geq 0\\ x^2+y+7\geq 0;3x^2+2y+4\geq 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2+2y+4}-\sqrt{x^2+y+7}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{x^2+y+7}=6y^2\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+y-3}{\sqrt{3x^2+2y+4}+\sqrt{x^2+y+7}}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{x^2+y+7}=6y^2\left(x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+2y+4}+\sqrt{x^2+y+7}}+\sqrt{x^2+y+7}\right)=6y^2\left(x-1\right)$$

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+2y+4}+\sqrt{x^2+y+7}}+\sqrt{x^2+y+7}>0$.

Bên cạnh đó $4x+y-5\geq 0\Rightarrow 2x^2+y-3=4x+y-5+2\left(x-1\right)^2\geq 0$, dẫn đến $6y^2\left(x-1\right)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ x\geq 1\end{array}\right.$

Xét trường hợp $y=0\Rightarrow \begin{cases}2x^2+y-3=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\dfrac{3}{2}\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow \left(x;y\right)=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}};0\right),\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}};0\right)$, loại vì $4x+y-5<0$.

Xét trường hợp $x\geq 1\Rightarrow 3x^2-1>0\Rightarrow \left(3x^2-1\right)\sqrt{4x+y-5}\geq 0$.

Nhận xét $\left(x-y\right)^2\geq 0\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\geq \left(x+y\right)^2$ và áp dụng $\left|M\right|\geq M,\forall M$ ta có

$$\sqrt{3x^2+2y^2-1}=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+x^2-1}\geq \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\geq \left|x+y\right|\geq x+y.$$

Kết hợp lại ta được $\left(3x^2-1\right)\sqrt{4x+y-5}+\sqrt{3x^2+2y^2-1}\geq x+y$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}4x+y-5=0\\ x=y\\ x+y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases}4x+y-5\ge 0;3x^2+2y^2-1\ge 0\\ x^2+y+7\ge 0;3x^2+2y+4\ge 0\end{cases}$

Xét trường hợp $x\ge 1$ ta có

$$x\ge 1\Rightarrow 3x^2-1>0\Rightarrow \left(3x^2-1\right)\sqrt{4x+y-5}\ge 0$$

$$\Rightarrow x+y=\left(3x^2-1\right)\sqrt{4x+y-5}+\sqrt{3x^2+2y^2-1}\ge \sqrt{3x^2+2y^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y\ge 0\\ x^2+2xy+y^2\ge 3x^2+2y^2-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x+y\ge 0\\ 1-x^2\ge (x-y)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow -1\le x\le 1\Rightarrow x=1$$

Khi đó dấu đẳng thức xảy ra nên $x-y=0;x=1\Leftrightarrow x=y=1$.

Xét trường hợp ngược lại, $x\le 1$ ta có $6y^2(x-1)\le 0\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+2y+4}+\left(2x^2+y-4\right)\sqrt{x^2+y+7}\le 0$.

Đặt $\sqrt{3x^2+2y+4}=a;\sqrt{x^2+y+7}=b,(a\ge 0;b\ge 0)\Rightarrow 2x^2+y-4=a^2-b^2-1$. Thu được

$$a+\left(a^2-b^2-1\right)b\le 0\Leftrightarrow a-b+\left(a^2-b^2\right)b\le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)+(a-b)(a+b)b\le 0\Leftrightarrow (a-b)\left[1+(a+b)b\right]\le 0$$

$$\Rightarrow a-b\le 0\Leftrightarrow 2x^2+y\le 3$$

Kết hợp đồng thời $\begin{cases}2x^2+y\le 3\\ 5-4x-y\le 0\end{cases}\Rightarrow 2x^2-4x+2\le 0\Leftrightarrow 2(x-1)^2\le 0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 93. Trích lược câu 8; Thử sức trước kỳ thi Đại học 2015; Đề số 2; Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam; Số 450, Tháng 12 năm 2014.

Tác giả Nguyễn Tất Thu – Giáo viên Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh; Tỉnh Đồng Nai.

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=1,\\ \left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}\right)^2+8\sqrt{y-x+14}=17.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|y|\ge 1$.

Nhận xét $y\ne \sqrt{y^2-1},\forall y\in\mathbb{R}\Rightarrow y-\sqrt{y^2-1}\ne 0$. Do đó phương trình thứ nhất tương đương với

$$\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}=y+\sqrt{y^2-1}\Leftrightarrow y-x=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2-1}\quad (1).$$

Khi hai vế cùng dấu ta có

$$y^2-2xy+y^2=x^2+y^2-2\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2-1}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2y^2=x^2y^2-x^2+y^2-1\\ xy\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y^2-x^2=1\\ xy\ge 0\end{cases}$$

Ngoài ra từ (1) ta lại có $y-x=\dfrac{x^2-y^2+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}}>0\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}=\dfrac{1}{y-x}$.

Do $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2-1}\ge 1\Rightarrow y-x>0;\dfrac{1}{y-x}\ge 1\Rightarrow 0<y-x\le 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\frac{1}{(y-x)^2}+8\sqrt{y-x+4}=17$. Đặt $t=y-x;t\in(0;1]\Rightarrow\frac{1}{t^2}+8\sqrt{t+4}=17\quad(2)$.

Rõ ràng $0<t\le 1\Rightarrow\frac{1}{t^2}\ge 1;8\sqrt{t+4}>8\sqrt{4}=16\Rightarrow\frac{1}{t^2}+8\sqrt{t+4}>17$, (2) vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 94. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x^2+20}+(3x^2-17y+13)\sqrt{17y+6}=x^4\sqrt[3]{y-1},\\(2y^3-1)\sqrt{6x^2+17y^2-5}=\sqrt{2}(x+2).\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $6x^2+17y^2-5\ge 0;17y+6\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2+20}-\sqrt{17y+6}+(3x^2-17y+14)\sqrt{17y+6}=x^4\sqrt[3]{y-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2-17y+14}{\sqrt{3x^2+20}+\sqrt{17y+6}}+(3x^2-17y+14)\sqrt{17y+6}=x^4\sqrt[3]{y-1}$$

$$\Leftrightarrow(3x^2-17y+14)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+20}+\sqrt{17y+6}}+\sqrt{17y+6}\right)=x^4\sqrt[3]{y-1}$$

Nhận thấy

$$6x-17y+11\ge 0\Rightarrow 3x^2-17y+14=6x-17y+11+3(x-1)^2\ge 0.$$

Lại có $\frac{1}{\sqrt{3x^2+20}+\sqrt{17y+6}}+\sqrt{17y+6}>0\Rightarrow x^4\sqrt[3]{y-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\y\ge 1\end{array}\right.$

- Xét $x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\-17y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=\left(0;\frac{14}{17}\right)$, không thỏa mãn hệ.
- Xét $y\ge 1\Rightarrow 2y^3-1\ge 1>0$ và $6x^2+17y^2-5\ge 6x^2+12>0$.

  Hơn nữa $4(x-1)^2\ge 0\Rightarrow 4x^2-8x+4\ge 0\Leftrightarrow 6x^2+12\ge 2(x^2+4x+4)=2(x+2)^2$ dẫn đến

$$\sqrt{6x^2+17y^2-5}\ge\sqrt{6x^2+12}\ge\sqrt{2(x+2)^2}=\sqrt{2}|x+2|\ge\sqrt{2}(x+2).$$

Kết hợp ta được $(2y^3-1)\sqrt{6x^2+17y^2-5}\ge 1.\sqrt{2}(x+2)=\sqrt{2}(x+2)$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases}x-1=0\\x+2\ge 0\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 95. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x^2+3y-3)\sqrt{4x^2+y+1}=y^2(y^3-1)+\sqrt{3x^2-2y+5},\\y\sqrt{2x^2+3y^2-1}+\sqrt{2x+3y-5}+x^3+x^2+\sqrt{x-y}=4(x+y)-xy-3.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge y;4x^2+y+1\\3x^2-2y+5\ge 0;2x^2+3y^2-1\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+3y-3\right)\sqrt{4x^2+y+1}-\sqrt{3x^2-2y+5}=y^2\left(y^3-1\right)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+y+1}-\sqrt{3x^2-2y+5}+\left(x^2+3y-4\right)\sqrt{4x^2+y+1}=y^2\left(y^3-1\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2+3y-4}{\sqrt{4x^2+y+1}+\sqrt{3x^2-2y+5}}+\left(x^2+3y-4\right)\sqrt{4x^2+y+1}=y^2\left(y^3-1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x^2+3y-4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+y+1}+\sqrt{3x^2-2y+5}}+\sqrt{4x^2+y+1}\right)=y^2\left(y^3-1\right)
\end{aligned}$$

Ta có $2x+3y-5\ge 0\Rightarrow x^2+3y-4=2x+3y-5+\left(x-1\right)^2\ge 0$.

Lại có $\frac{1}{\sqrt{4x^2+y+1}+\sqrt{3x^2-2y+5}}+\sqrt{4x^2+y+1}>0\Rightarrow y^2\left(y^3-1\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y\ge 1\end{array}\right.$

- Xét trường hợp $y=0\Rightarrow \begin{cases}y=0\\ x^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow (x;y)=(2;0),(-2;0)$, không thỏa mãn hệ.
- Xét trường hợp $y\ge 1$, kết hợp $\begin{cases}y\ge 1\\ x\ge y\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$

  Khi đó chú ý $\left(x-y\right)^2\ge 0\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge \left(x+y\right)^2$ ta được

$$\begin{aligned}
&2x^2+3y^2-1=y^2-1+2\left(x^2+y^2\right)\ge \left(x+y\right)^2\\
&\Rightarrow \sqrt{2x^2+3y^2-1}\ge \sqrt{\left(x+y\right)^2}=\left|x+y\right|=x+y>0
\end{aligned}$$

  Ngoài ra

$$\begin{aligned}
&y\ge 1>0\Rightarrow y\sqrt{2x^2+3y^2-1}\ge y\left(x+y\right)=y^2+xy\\
&\Rightarrow y\sqrt{2x^2+3y^2-1}+\sqrt{2x+3y-5}+x^3+x^2+\sqrt{x-y}\ge x^3+x^2+y^2+xy
\end{aligned}$$

  Xét hiệu giữa hai vế phương trình thứ hai

$$\begin{aligned}
&x^3+x^2+y^2+xy-\left[4\left(x+y\right)-xy-3\right]\\
&=x^3-1+\left[x^2+y^2+2xy-4\left(x+y\right)+4\right]\\
&=\left(x^3-1\right)+\left(x+y-2\right)^2\ge 0,\forall x\ge 1,\forall y\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Như vậy phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases}x^3=1;x+y-2=0\\ x=y;x\ge 1;y\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Bài toán 96. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{4x^2+3y}+\left(4x^2+y-7\right)\sqrt{4x^2+y-5}=\left(y-1\right)^3,\\ y\sqrt{8x+y-9}+\left(y+1\right)\sqrt{4x^2+3y+1}=2\sqrt{2}\left(x+1\right).\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+3y\ge 0;4x^2+y-5\ge 0;8x+y\ge 9$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\left(\sqrt{4x^2+3y}-\sqrt{2y+5}\right)+\left(4x^2+y-5\right)\sqrt{4x^2+y-5}=\left(y-1\right)^3\\
&\Leftrightarrow \frac{2\left(4x^2+y-5\right)}{\sqrt{4x^2+3y}+\sqrt{2y+5}}+\left(4x^2+y-5\right)\sqrt{4x^2+y-5}=\left(y-1\right)^3
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+y-5\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+3y}+\sqrt{2y+5}}+\sqrt{4x^2+y-5}\right)=\left(y-1\right)^3$$

Ta có $8x+y-9\ge 0\Rightarrow 4x^2+y-5=8x+y-9+4\left(x-1\right)^2\ge 0$.

Kết hợp $\dfrac{2}{\sqrt{4x^2+3y}+\sqrt{2y+5}}+\sqrt{4x^2+y-5}>0\Rightarrow \left(y-1\right)^3\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Rõ ràng $y\sqrt{8x+y-9}+\left(y+1\right)\sqrt{4x^2+3y+1}>0,\forall y\ge 1\Rightarrow 2\sqrt{2}\left(x+1\right)>0$.

Lại có $2\left(x-1\right)^2\ge 0\Leftrightarrow 2x^2-4x+2\ge 0\Rightarrow 4x^2+4\ge 2\left(x^2+2x+1\right)=2\left(x+1\right)^2$ nên

$$y\ge 1\Rightarrow \sqrt{4x^2+3y+1}\ge \sqrt{4x^2+4}\ge \sqrt{2\left(x+1\right)^2}=\sqrt{2}\left|x+1\right|=\sqrt{2}\left(x+1\right)$$

$$y+1\ge 2>0\Rightarrow \left(y+1\right)\sqrt{4x^2+3y+1}\ge 2\sqrt{2}\left(x+1\right)$$

Ngoài ra $y\sqrt{8x+y-9}\ge 0\Rightarrow y\sqrt{8x+y-9}+\left(y+1\right)\sqrt{4x^2+3y+1}\ge 2\sqrt{2}\left(x+1\right)$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases}8x+y-9=0\\ x-1=0;y=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 97. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3y+3}+\left(2x^2+4y-5\right)\sqrt{y+6}=\left(y-1\right)\sqrt{x+6},\\ y\sqrt{x+y-2}+\left(2x^2+5y-5\right)\sqrt{2y^2-1}=2x^2y.\end{cases}$ $\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y^2\ge \dfrac{1}{2};x+y\ge 2;x^2+3y+3\ge 0\\ y\ge -6;x\ge -6\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+3y+3}-\sqrt{y+6}+2\left(x^2+2y-3\right)\sqrt{y+6}=\left(y-1\right)\sqrt{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2y-3}{\sqrt{x^2+3y+3}+\sqrt{y+6}}+2\left(x^2+2y-3\right)\sqrt{y+6}=\left(y-1\right)\sqrt{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y+3}+\sqrt{y+6}}+2\sqrt{y+6}\right)=\left(y-1\right)\sqrt{x+6}$$

Ta có $x+y-2\ge 0\Rightarrow x^2+2y-3=2\left(x+y-2\right)+\left(x-1\right)^2\ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y+3}+\sqrt{y+6}}+2\sqrt{y+6}>0$ dẫn đến $\left(y-1\right)\sqrt{x+6}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\\ y\ge 1\end{array}\right.$

Xét trường hợp $x=-6\Rightarrow \begin{cases}x=-6\\ x^2+2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-6\\ y=-\dfrac{33}{2}\end{cases}$ (Loại vì không thỏa mãn hệ).

Xét trường hợp $y\ge 1>0\Rightarrow \begin{cases}y\sqrt{x+y-2}\ge 0\\ 2x^2+5y-5\ge 2x^2\ge 0\Rightarrow y\sqrt{x+y-2}+\left(2x^2+5y-5\right)\sqrt{2y^2-1}\ge 2x^2y\\ \sqrt{2y^2-1}\ge \sqrt{y^2}=y\end{cases}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài toán 98. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2y^2+2x+5}+\left(6y^2+3x-10\right)\sqrt{x+8}=(y-1)\sqrt{x},\\ (2y-1)\sqrt{x+4y-5}+\sqrt{4x^2+y-1}=2x.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+4y-5\ge 0; x\ge 0\\ 4x^2+y-1\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{2y^2+2x+5}-\sqrt{x+8}+3\left(2y^2+x-3\right)\sqrt{x+8}=(y-1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y^2+x-3}{\sqrt{2y^2+2x+5}+\sqrt{x+8}}+3\left(2y^2+x-3\right)\sqrt{x+8}=(y-1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(2y^2+x-3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2y^2+2x+5}+\sqrt{x+8}}+3\sqrt{x+8}\right)=(y-1)\sqrt{x}$$

Ta có nhận xét $x+4y-5\ge 0\Rightarrow 2y^2+x-3=x+4y-5+2(y-1)^2\ge 0$.

Lại có $\dfrac{2}{\sqrt{2y^2+2x+5}+\sqrt{x+8}}+3\sqrt{x+8}>0\Rightarrow (y-1)\sqrt{x}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y\ge 1\end{array}\right.$

- ✓ Xét trường hợp $x=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ 2y^2+x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y^2=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow (x;y)=\left(0;\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right),\left(0;-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$; không thỏa mãn.
- ✓ Xét $y\ge 1\Rightarrow 2y-1>0\Rightarrow (2y-1)\sqrt{x+4y-5}\ge 0$.

  Ngoài ra $\sqrt{4x^2+y-1}\ge\sqrt{4x^2}=2x\Rightarrow (2y-1)\sqrt{x+4y-5}+\sqrt{4x^2+y-1}\ge 2x$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=y=1$.

Bài toán 99. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x^2+y}+\left(3x^2+y-5\right)\sqrt{x^2+4}=5x^2(y-1),\\ x+y+\sqrt{6x+y-7}+y\sqrt{6y+x-7}=2+\sqrt{x-1}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^2+y\ge 0; x\ge 1\\ 6x+y\ge 7; 6y+x\ge 7\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{4x^2+y}-\sqrt{x^2+4}+\left(3x^2+y-4\right)\sqrt{x^2+4}=5x^2(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+y-4}{\sqrt{4x^2+y}+\sqrt{x^2+4}}+\left(3x^2+y-4\right)\sqrt{x^2+4}=5x^2(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2+y-4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+y}+\sqrt{x^2+4}}+\sqrt{x^2+4}\right)=5x^2(y-1)$$

Nhận xét $6x+y-7\ge 0\Rightarrow 3x^2+y-4=6x+y-7+3(x-1)^2\ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y}+\sqrt{x^2+4}}+\sqrt{x^2+4}>0\Rightarrow 5x^2(y-1)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ y\ge 1\end{array}\right.$

- Xét $x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x^2+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ (Không thỏa mãn điều kiện).
- Xét $y \geq 1 > 0 \Rightarrow y\sqrt{6y+x-7} = y\sqrt{6y-6+x-1} \geq \sqrt{x-1}$.

  Ngoài ra $\begin{cases} 6x+y \geq 7 \\ 6y+x \geq 7 \end{cases} \Rightarrow 7x+7y \geq 14 \Rightarrow x+y \geq 2$ và $\sqrt{6x+y-7} \geq 0$.

  Kết hợp ta có $x+y+\sqrt{6x+y-7}+y\sqrt{6y+x-7} \geq 2+\sqrt{x-1}$.

  Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 6x+y-7=0 \\ x+y=2 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình có duy nhất nghiệm.

Bài toán 100. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+3y-5}+\left(x^2+y-3\right)\sqrt{x+2y-3} = x^2\left(y^3-1\right), \\ \sqrt{x+2y-3}+\left(2y-1\right)\sqrt{2x+y-3}+x^2+y^2=2. \end{cases}$ $\left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+x+3y-5 \geq 0 \\ x+2y \geq 3 \\ x+2y \geq 3 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+3y-5}-\sqrt{x+2y-3}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{x+2y-3} = x^2\left(y^3-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y-2}{\sqrt{x^2+x+3y-5}+\sqrt{x+2y-3}}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{x+2y-3} = x^2\left(y^3-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+3y-5}+\sqrt{x+2y-3}}+\sqrt{x+2y-3}\right) = x^2\left(y^3-1\right)$$

Ta nhận xét $2x+y-3 \geq 0 \Rightarrow x^2+y-2 = 2x+y-3+\left(x-1\right)^2 \geq 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+3y-5}+\sqrt{x+2y-3}}+\sqrt{x+2y-3} > 0$ dẫn đến $x^2\left(y^3-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y \geq 1 \end{array}\right.$

- Nếu $x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ (Không thỏa mãn hệ ban đầu).
- Nếu $y \geq 1 \Rightarrow 2y-1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x+2y-3}+\left(2y-1\right)\sqrt{2x+y-3} \geq 0$.

  Ta có $\begin{cases} x+2y \geq 3 \\ 2x+y \geq 3 \end{cases} \Rightarrow 3\left(x+y\right) \geq 6 \Rightarrow x+y \geq 2$.

  Ngoài ra $\left(x-y\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right) \geq \left(x+y\right)^2 \geq 4 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2$.

  Vậy $\sqrt{x+2y-3}+\left(2y-1\right)\sqrt{2x+y-3}+x^2+y^2 \geq 22$.

  Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x+2y=2x+y=3 \\ x=y; y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$, nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Các bài toán từ 88 đến 100 không nằm ngoài phạm vi lớp hệ phương trình sử dụng tổng hòa đánh giá – hàm số với điều kiện tiên quyết chặn miền giá trị một biến thông qua đại lượng liên hợp, dù rằng mức độ còn dừng lại đơn giản với một ẩn mà thôi. Bình thường các bài toán trước đó chúng ta biến đổi về dạng $f(x;y)\left[A(x;y)\right]=g(x;y)$.

Sau đó dùng đặc tính $\begin{cases} A(x;y)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x;y)\ge 0 \\ g(x;y)\ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$ *với mọi giá trị* $x;y$ *thuộc tập xác định D,* $A(x;y)$ *thường là dạng căn thức.*

Từ bài toán số 91 trở đi, mọi thứ không còn đơn thuần nữa, mà dựa trên kết hợp hài hòa các đại lượng không âm dựa trên điều kiện xác địnhD, với văn phong $\left[\begin{array}{l} f(x;y)=U+h(x;y) \\ g(x;y)=V+k(x;y) \end{array}\right.$

Trong đó U, V là biểu thức không âm bất kỳ, còn $h(x;y);k(x;y)$ *không âm với mọi giá trị* $x;y\in D$. Các bạn độc giả *dễ thấy rất khó khăn hơn khi đề bài sử dụng hệ số tuyến tính che giấu đi bản chất*

$$\left[\begin{array}{l} f(x;y)=m_1U+n_1h(x;y) \\ g(x;y)=m_2V+n_2k(x;y) \end{array}\right.;(m_i\ge 0;n_i\ge 0).$$

Các bạn lưu ý với biến đổi $f(x;y)\left[A(x;y)\right]=g(x;y)$, *vai trò của* $g(x;y),g(x;y)$ *không bình đẳng, tạm thời chúng ta xét trường hợp* $g(x;y)\equiv Q$, *đơn vị quyết định miền giá trị một biến.*

Có thể lấy các điển hình với U;V và đại lượng quyết định miền giá trị Q như sau

- *Bài toán 91.* $\begin{cases} U_{91}=x^2-2x+1 \\ h_{92}(x;y)=2x+y-3 \\ Q_{91}\equiv g_{91}(x;y)=(y+1)^2(y-1) \end{cases} \Rightarrow f_{91}(x;y)=U_{91}+h_{91}(x;y)=x^2+y-2\ge 0.$

  Hệ số tuyến tính 1;1.

- *Bài toán 92.* $\begin{cases} U_{92}=2(x-1)^2 \\ h_{92}(x;y)=4x+y-5 \\ Q_{92}\equiv g_{91}(x;y)=6y^2(x-1) \end{cases} \Rightarrow f_{92}(x;y)=U_{92}+h_{92}(x;y)=2x^2+y-3\ge 0.$

  Hệ số tuyến tính 2;1.

- *Bài toán 94.* $\begin{cases} U_{94}=3(x-1)^2 \\ h_{94}(x;y)=6x-17y+11 \\ Q_{94}\equiv g_{94}(x;y)=x^4\sqrt[3]{y-1} \end{cases} \Rightarrow f_{94}(x;y)=U_{94}+h_{94}(x;y)=3x^2-17y+14\ge 0.$

  Hệ số tuyến tính 3;1.

- *Bài toán 95.* $\begin{cases} U_{95}=(x-1)^2 \\ h_{95}(x;y)=2x+3y-5 \\ Q_{95}\equiv g_{95}(x;y)=y^2(y^3-1) \end{cases} \Rightarrow f_{95}(x;y)=U_{95}+h_{95}(x;y)=x^2+3y-4\ge 0.$

  Hệ số tuyến tính 1;1.

- *Bài toán 96.* $\begin{cases} U_{96}=4(x-1)^2 \\ h_{96}(x;y)=8x+y-9 \\ Q_{96}\equiv g_{96}(x;y)=(y-1)^3 \end{cases} \Rightarrow f_{96}(x;y)=U_{96}+h_{96}(x;y)=4x^2+y-5\ge 0.$

  Hệ số tuyến tính 4;1.

Các bài toán tiếp theo tương tự. Trên đây tác giả đã lấy trường hợp đơn giản nhất nghiệm $x = y = 1$, lựa chọn bình phương $U = (x-1)^2$ và ghép thêm hệ số tuyến tính, chưa đả động tới $h(x;y)$, tạm thời $h(x;y)$ là chính bằng một trong các biểu thức dưới căn bậc hai của phương trình thứ hai. Về mặt thẩm mỹ, các hệ số tuyến tính $m_i;n_i$ này vừa giấu đi bản chất liên hợp ban đầu, vừa giảm thiểu sự cồng kềnh, tạo ra sự gọn gàng, đẹp mắt cho $f(x;y)$ cũng như toàn bộ hệ phương trình.
Chúng ta hoàn toàn có thể đào sâu, cải tiến, phức tạp hóa bằng cách thay đổi nghiệm bài toán và các hệ số tuyến tính $m_i;n_i$, cũng như $h(x;y)$ không còn là một trong các căn thức nữa, nó được thay thế bởi sự lồng ghép hệ số tuyến tính với các biểu thức dưới dấu căn, khi đó hệ ban đầu sẽ chứa nhiều dấu căn, đặt ẩn phụ bị vô hiệu hóa mặc dù chúng có mối liên hệ với nhau, tiếc rằng đó là mối liên hệ tuyến tính mà không phải ai ai cũng dễ dàng nhận ra.

Bài toán 101. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3y} + (x^2+3y-4)\sqrt{x+3} = 1 + y^3, \\ \sqrt{x+y-2} + y\sqrt{x+2y-3} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+3y \ge 0; x \ge -3; x+2y-3 \ge 0 \\ x+y-3 \ge 0; y \ge -1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+3y} - 2 + (x^2+3y-4)\sqrt{x+3} = y^3 - 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3y-4}{\sqrt{x^2+3y}+2} + (x^2+3y-4)\sqrt{x+3} = y^3 - 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2+3y-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y}+2} + \sqrt{x+3}\right) = y^3 - 1$$

Ta nhận xét $x^2+3y-4 = (x-1)^2 + 2x + 3y - 5 = (x-1)^2 + (x+y-2) + (x+2y-3) \ge 0$.

Hơn nữa $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3y}+2} + \sqrt{x+3} > 0 \Rightarrow y^3 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Khi đó $y \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} y\sqrt{x+2y-3} \ge 0 \\ \sqrt{y+1} \ge \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+y-2} + y\sqrt{x+2y-3} + \sqrt{y+1} \ge \sqrt{2}$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} x^2+3y-4 = y^3-1 = 0 \\ y = 1 \\ x+y-2 = x+2y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán số 101 mở màn chiến dịch hệ số tuyến tính 1;1;1 với bình phương $(x-1)^2$ các biểu thức dưới dấu căn, tất nhiên tạm dừng chân tại phép liên hợp một căn thức với hằng số, đồng nghĩa đại lượng $f(x;y) = x^2+3y-4$ lộ liễu ngày tại phương trình thứ nhất của hệ. Cụ thể

$$\begin{cases} U_{101} = (x-1)^2; h_1(x;y) = x+y-2; h_2(x;y) = x+2y-3 \\ m_1 = n_1 = p_1 = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x;y) = (x-1)^2 + [2x+3y-5] = (x-1)^2 + (x+y-2) + (x+2y-3) \ge 0 \Rightarrow f(x;y) = x^2+3y-4$$

Ngoài ra các bạn có thể lựa chọn hệ số tuyến tính kiểu khác, đảm bảo hệ số chứa x (hoặc hệ số chứa y) của đại lượng $f(x;y)$ suy biến bằng 0, $f(x;y)$ sẽ lập tức trở nên nhỏ nhắn, xinh tươi.

$$\begin{cases} U_{101} = (x-1)^2; h_1(x;y) = x+y-2; h_2(x;y) = x+2y-3 \\ m_1 = 2; n_1 = 1; p_1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x;y) = 2(x-1)^2 + [4x+7y-11] = 2(x-1)^2 + (x+y-2) + 3(x+2y-3) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x;y) = 2x^2 + 7y - 9$$

Thậm chí thay đổi U nếu muốn hệ số không chứa y

$$\begin{cases} U_{101} = (y-1)^2; h_1(x;y) = x+y-2; h_2(x;y) = x+2y-3 \\ m_1 = 2; n_1 = 2; p_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x;y) = 2(y-1)^2 + [3x+4y-7] = 2(y-1)^2 + 2(x+y-2) + (x+2y-3) \geq 0 \Rightarrow f(x;y) = 2y^2 + 3x - 5$$

Nhưng các bạn biết không, để có thể có được liên kết

$$x^2 + 3y - 4 = (x-1)^2 + 2x + 3y - 5 = (x-1)^2 + (x+y-2) + (x+2y-3) \geq 0.$$

Chúng ta cần điều kiện tiên quyết như thế nào, bởi vì cái gì hệ quả cũng cần sự tổ chức và bố trí từ trước đó. Không quá khó chỉ cần có sự hiện diện của các biểu thức $x+y-2; x+2y-3$ trong căn thức bậc hai tại phương trình thứ hai, hoặc chỉ cần căn thức bậc chẵn đại loại như $\sqrt[4]{x+y-2}; \sqrt[6]{x+2y-3}$ sẽ làm mất phương hướng đặt ẩn phụ của đa số các bạn quen với thủ pháp này.

Bài toán 102. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y^2+x} + \sqrt{2}(y^2+x-3) + 1 = y^2, \\ \sqrt{x+3y-4} + (3y-2)\sqrt{x+y-2} + \sqrt{2y-1} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} y^2 + x \geq 0; y \geq \dfrac{1}{2} \\ x+y-2 \geq 0; x+3y \geq 4 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y^2+x} - \sqrt{2} + (y^2+x-2)\sqrt{2} = y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+x-2}{\sqrt{y^2+x}+\sqrt{2}} + (y^2+x-2)\sqrt{2} = y^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (y^2+x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+x}+\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = y^2 - 1$$

Nhận xét $2y^2 + 2x - 4 = 2(y-1)^2 + 2x + 4y - 6 = 2(y-1)^2 + (x+3y-4) + (x+y-2) \geq 0$.

Do đó $y^2 + x - 2 \geq 0$, lại có $\dfrac{1}{\sqrt{y^2+x}+\sqrt{2}} + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow y^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geq 1 \\ y \leq -1 \end{array}\right.$

Kết hợp với $y \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3y-2 > 0 \\ \sqrt{2y-1} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+3y-4} + (3y-2)\sqrt{x+y-2} + \sqrt{2y-1} \geq 1$.

Vì vậy phương trình thứ hai của hệ có nghiệ khi $\begin{cases} y = 1 \\ x+3y-4 = x+y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 103. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\sqrt{x-y}+(2x-1)\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{4x+y-1}=2, \\ \sqrt{y^2+4x-5}+(y^2-4y+3x-1)\sqrt{x+4y-5}=y-1. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge y; 2x-y-1\ge 0; y^2+4x-5\ge 0 \\ 4x+y-1\ge 0; x+4y-5\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\sqrt{y^2+4x-5}-\sqrt{x+4y-5}+(y^2-4y+3x)\sqrt{x+4y-5}=y-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-4y+3x}{\sqrt{y^2+4x-5}+\sqrt{x+4y-5}}+(y^2-4y+3x)\sqrt{x+4y-5}=y-1$$

$$\Leftrightarrow (y^2-4y+3x)\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+4x-5}+\sqrt{x+4y-5}}+\sqrt{x+4y-5}\right)=y-1.$$

Nhận xét $y^2-4y+3x=(y-1)^2+3x-2y-1=(y-1)^2+(x-y)+(2x-y-1)\ge 0$.

Hơn nữa $\frac{1}{\sqrt{y^2+4x-5}+\sqrt{x+4y-5}}+\sqrt{x+4y-5}>0\Rightarrow y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó ta có

$$x\ge y\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow 2x-1>0\Rightarrow y\sqrt{x-y}+(2x-1)\sqrt{2x-y-1}\ge 0$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x-y}+(2x-1)\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{4x+y-1}\ge\sqrt{4}=2$$

Phương trình thứ nhất của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x=y; y=1 \\ x-y=2x-y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 104. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2+7y}+(2x^2+5y-9)\sqrt{2y+7}=3(y-1)^3, \\ x\sqrt{x-y}+(2y^3-1)\sqrt{x+2y-3}+\sqrt{y^3+3}=2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^2+7y\ge 0; 2y+7\ge 0 \\ x+2y-3\ge 0; x\ge y \\ y^3+3\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\left(\sqrt{2x^2+7y}-\sqrt{2y+7}\right)+(2x^2+5y-7)\sqrt{2y+7}=3(y-1)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x^2+5y-9)}{\sqrt{2x^2+7y}+\sqrt{2y+7}}+(2x^2+5y-7)\sqrt{2y+7}=3(y-1)^3$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+5y-9)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+7y}+\sqrt{2y+7}}+\sqrt{2y+7}\right)=3(y-1)^3$$

Nhận xét $2x^2+5y-7=2(x-1)^2+3(x+2y-3)+x-y\ge 0$.

Lại có $\frac{2}{\sqrt{2x^2+7y}+\sqrt{2y+7}}+\sqrt{2y+7}>0\Rightarrow 3(y-1)^3\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó $y \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} x \ge y \ge 1 \\ 2y^3 - 1 > 0 \\ y^3 + 3 \ge 4 \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{x-y} + \left(2y^3-1\right)\sqrt{x+2y-3} + \sqrt{y^3+3} \ge 0+0+2=2$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} y=1 \\ 2x^2+7y=2y+7 \\ x-y=x+2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 105. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x^2+y\right)\sqrt{17x^2+6y} - 3\sqrt{15x^2+5y+3} = y^3-1, \\ \sqrt{x+y-2} + xy\sqrt{x-2y+1} + \sqrt{2x^2y-1} = 1. \end{cases} \quad \left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y \ge 2; x-2y+1 \ge 0 \\ 2x^2y \ge 1; 17x^2+6y \ge 0 \\ 15x^2+5y+3 \ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\left(\sqrt{17x^2+6y} - \sqrt{15x^2+5y+3}\right) + \left(2x^2+y-3\right)\sqrt{17x^2+6y} = y^3-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(2x^2+y-3\right)}{\sqrt{17x^2+6y}+\sqrt{15x^2+5y+3}} + \left(2x^2+y-3\right)\sqrt{17x^2+6y} = y^3-1$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+y-3\right)\left(\frac{3}{\sqrt{17x^2+6y}+\sqrt{15x^2+5y+3}} + \sqrt{17x^2+6y}\right) = y^3-1$$

Nhận xét $2x^2+y-3 = 3\left(x+y-2\right)+\left(x-2y+1\right)+2\left(x-1\right)^2 \ge 0$.

Hơn nữa $\dfrac{3}{\sqrt{17x^2+6y}+\sqrt{15x^2+5y+3}} + \sqrt{17x^2+6y} > 0 \Rightarrow y^3-1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Kết hợp $x \ge 2y-1 \Rightarrow x \ge 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y-2} + xy\sqrt{x-2y+1} \ge 0 \\ \sqrt{2x^2y-1} \ge \sqrt{2-1} = 1 \end{cases}$

Dẫn đến $\sqrt{x+y-2} + xy\sqrt{x-2y+1} + \sqrt{2x^2y-1} \ge 1$. Phương trình thứ hai có nghiệm khi $x=y=1$.

Thử lại kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 106. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2+y+4} + \left(2x^2+y-4\right)\sqrt{x^2+7} = \left(2x^2-1\right)\left(y-1\right), \\ y\sqrt{2x+y-3} + 3\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^4+y^3-1} = x^2. \end{cases} \quad \left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+y \ge 3; x^2 \ge 1 \\ x^4+y^3-1 \ge 0; 3x^2+y+4 \ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2+y+4}-\sqrt{x^2+7}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{x^2+7}=\left(2x^2-1\right)\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+y-3}{\sqrt{3x^2+y+4}+\sqrt{x^2+7}}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{x^2+7}=\left(2x^2-1\right)\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+y+4}+\sqrt{x^2+7}}+\sqrt{x^2+7}\right)=\left(2x^2-1\right)\left(y-1\right)$$

Nhận xét $2x^2+y-3=\left(x-1\right)^2+x^2-1+2x+y-3\ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y+4}+\sqrt{x^2+7}}+\sqrt{x^2+7}>0\Rightarrow \left(2x^2-1\right)\left(y-1\right)\ge 0$.

Vì $x^2-1>0\Rightarrow 2x^2-1>0\Rightarrow y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1\Rightarrow \begin{cases} y\sqrt{2x+y-3}\ge 0 \\ \sqrt{x^4+y^3-1}\ge \sqrt{x^4}=x^2 \end{cases}$

Dẫn đến $y\sqrt{2x+y-3}+3\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^4+y^3-1}\ge x^2$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} 2x+y-3=x^2-1=0 \\ y^3=1; x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 107. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2+y-3}+\left(x^2+y-3\right)\sqrt{2x^2-1}=x\left(y-1\right), \\ 5\sqrt{x+y-2}+y\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2+y^3-1}=x. \end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x^2+y\ge 3 \\ 2x^2-1\ge 0; x^3-1\ge 0 \\ x+y-2\ge 0; x^2+y^3-1\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+y\ge 3 \\ x+y-2\ge 0; x\ge 1 \\ x^2+y^3-1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2+y-3}-\sqrt{2x^2-1}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{2x^2-1}=x\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y-2}{\sqrt{3x^2+y-3}+\sqrt{2x^2-1}}+\left(x^2+y-2\right)\sqrt{2x^2-1}=x\left(y-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+y-3}+\sqrt{2x^2-1}}+\sqrt{2x^2-1}\right)=x\left(y-1\right)$$

Nhận xét $x\ge 1\Rightarrow x^2+y-2=\left(x-1\right)^2+x+y-2+\left(x-1\right)\ge 0$.

Hơn nữa $x\ge 1;\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y-3}+\sqrt{2x^2-1}}+\sqrt{2x^2-1}>0\Rightarrow x\left(y-1\right)\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Dẫn đến $\begin{cases} y\sqrt{x^3-1}\ge 0 \\ \sqrt{x^2+y^3-1}\ge \sqrt{x^2}=x \end{cases}\Rightarrow 5\sqrt{x+y-2}+y\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2+y^3-1}\ge x$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x^2+y-2=x+y-2=0 \\ x-1=0; y=1 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Bài toán số 107 chúng ta có $x\ge 1\Rightarrow f(x;y)=x^2+y-2=(x-1)^2+x+y-2+(x-1)\ge 0$.

Rõ ràng trên đây có sử dụng $U=(x-1)^2;h_1(x;y)=x+y-2;h_2(x;y)=x-1$*, trong đó* $h_1(x;y)$ *là biểu thức dưới căn, còn đại lượng* $h_2(x;y)=x-1$ *từ trên trời rơi xuống, cũng không âm đấy chứ nhưng mà khai quật được nó ra vô cùng khó khăn. Để tự nhiên hơn các bạn có thể xử lý theo phương án sau*

$$x^2+y-2=x^2-x+x+y-2=x(x-1)+(x+y-2)\text{ với }\begin{cases}U=x(x-1)\ge 0;\forall x\ge 1\\ h(x;y)=x+y-2\end{cases}$$

Bài toán 108. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x^2+y}+\sqrt{3}\left(2x^2+y-4\right)=\sqrt{5}x\left(y^3-1\right),\\ 4\sqrt{x-1}+x\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{x^2y+x+y-2}=x.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2+y\ge 0;2x+y-3\ge 0\\ x\ge 1;x^2y+x+y-2\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{2x^2+y}-\sqrt{3}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{3}=\sqrt{5}x\left(y^3-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2+y-3}{\sqrt{2x^2+y}+\sqrt{3}}+\left(2x^2+y-3\right)\sqrt{3}=\sqrt{5}x\left(y^3-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+y}+\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{5}x\left(y^3-1\right)$$

Nhận xét $x\ge 1\Rightarrow 2x^2+y-3=2x(x-1)+2x+y-3\ge 0$.

Lại có $x\ge 1;\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+y}+\sqrt{3}}+\sqrt{3}>0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{5}x\left(y^3-1\right)\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow y^3\ge 1\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sqrt{2x+y-3}\ge 0\\ \sqrt{x^2y+x+y-2}\ge\sqrt{x^2+1+1-2}=x.\end{cases}$ nên $4\sqrt{x-1}+x\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{x^2y+x+y-2}\ge x$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases}x-1=2x+y-3=0\\ x=y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Bài toán 109. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2y^2}+\left(x^2+y^2-3\right)\sqrt{y^2+2}+2x=1+y^3,\\ y\sqrt{y^2(x-1)}+\sqrt{y^2-2x+1}+3y^3-2y=1.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y^2(x-1)\ge 0\\ y^2-2x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\vee x\ge 1\\ y^2-2x+1\end{cases}$

Xét trường hợp $y=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2}+\left(x^2-3\right)\sqrt{2}+2x=1\\ \sqrt{1-2x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2}+\left(x^2-3\right)\sqrt{2}+2x=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow x\notin\varnothing$.

Xét trường hợp $x\ge 1$ thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+2y^2}+\left(x^2+y^2-3\right)\sqrt{y^2+2}=y^3-2x+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2y^2}-\sqrt{y^2+2}+\left(x^2+y^2-2\right)\sqrt{y^2+2}=y^3-2x+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2}}+\left(x^2+y^2-2\right)\sqrt{y^2+2}=y^3-2x+1$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2}}+\sqrt{y^2+2}\right)=y^3-2x+1$$

Nhận xét $x\ge 1\Rightarrow (x+3)(x-1)\ge 0$, suy ra $x^2+y^2-2=\left(x^2+2x-3\right)+y^2-2x+1=(x+3)(x-1)+y^2-2x+1\ge 0$.

Khi đó kết hợp $\frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{y^2+2}}+\sqrt{y^2+2}>0\Rightarrow y^3-2x+1\ge 0\Leftrightarrow y^3\ge 2x-1\ge 1\Leftrightarrow y\ge 1$.

Ta có ngay $y\sqrt{y^2(x-1)}+\sqrt{y^2-2x+1}\ge 0$.

Xét hàm số $f(y)=3y^3-2y; y\ge 1\Rightarrow f'(y)=9y^2-2>0,\forall y\ge 1$, hàm số liên tục và đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Khảo sát sự biến thiên thu được $\underset{y\ge 1}{Min}\, f(y)=f(1)=1\Rightarrow y\sqrt{y^2(x-1)}+\sqrt{y^2-2x+1}+3y^3-2y\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x=1; y=1\\ y^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 110. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+\sqrt{2\left(x^2+3y^2+x\right)}+\left(2x^2+3y^2-6\right)\sqrt{3y^2+2x+5}=y^3,\\ 2y\sqrt{x^2-1}+3\sqrt{3y^2+2x-5}+\sqrt{x^2-2x+2y-1}=|x-1|.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+3y^2+x\ge 0; x^2\ge 1\\ 3y^2+2x+5\ge 0; 3y^2+2x-5\ge 0\\ x^2-2x+2y-1\ge 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2y\sqrt{x^2-1}+3\sqrt{3y^2+2x-5}+\sqrt{x^2-2x+2y-1}\ge |x-1|$$
$$\sqrt{2x^2+2x+6y^2}-\sqrt{3y^2+2x+5}+\left(2x^2+3y^2-5\right)\sqrt{3y^2+2x+5}=y^3-x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+3y^2-5}{\sqrt{2x^2+2x+6y^2}+\sqrt{3y^2+2x+5}}+\left(2x^2+3y^2-5\right)\sqrt{3y^2+2x+5}=y^3-x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2+3y^2-5\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+6y^2}+\sqrt{3y^2+2x+5}}+\sqrt{3y^2+2x+5}\right)=y^3-x^2$$

Nhận xét $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\Rightarrow 2x(x-1)\ge 0\Rightarrow 2x^2+3y^2-5=2x(x-1)+3y^2+2x-5\ge 0$.

Từ đó kết hợp $\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+6y^2}+\sqrt{3y^2+2x+5}}+\sqrt{3y^2+2x+5}>0\Rightarrow y^3-x^2\ge 0\Rightarrow y^3\ge x^2\ge 1\Rightarrow y\ge 1$.

Khi đó $y \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} 2y\sqrt{x^2-1} \ge 0 \\ \sqrt{x^2+2x+2y-1} \ge \sqrt{x^2-2x+1} = |x-1| \end{cases}$

Suy ra $2y\sqrt{x^2-1} + 3\sqrt{3y^2+2x-5} + \sqrt{x^2-2x+2y-1} \ge |x-1|$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x^2-1 = 3y^2+2x-5 = 0 \\ y=1; 2x^2+3y^2-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Theo lối mòn, chúng ta vẫn chủ đạo công phá một trong hai phương trình, tìm miền giá trị một biến theo biến còn lại với sự lưu tâm sát sao điều kiện xác định. Không giống như những bài toán trước, bài toán số 110 có điều kiện xác định phức tạp hơn, khi mà biến x có tập giá trị nằm trên hai khoảng rời nhau là $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ta thấy $(x-p)(x-q) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge p \\ x \le q \end{array}\right. (p > q)$. *Như vậy* $\left[\begin{array}{l} x \ge m \\ x \le n \end{array}\right. \Rightarrow (x-p)(x-q) \ge 0, \forall p; q \in [m; n]$.

Ngoài ra có thể lựa chọn theo cách khác như sau

$$2x^2+3y^2-5 = (x^2-1)+(x^2-2x+1)+3y^2+2x-5 = (x-1)^2+(x^2-1)+3y^2+2x-5.$$

Bài toán 111. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2+y^2+4y} + (3x^2+y^2+y-6)\sqrt{3y+5} = x^3-1, \\ \sqrt{x^2+y-2} + (x+2)\sqrt{y^2+4x-5} + \sqrt{y^2+x-1} = y. \end{cases} (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x^2+y^2+4y} - \sqrt{3y+5} + (3x^2+y^2+y-5)\sqrt{3y+5} = x^3-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+y^2+y-5}{\sqrt{3x^2+y^2+4y}+\sqrt{3y+5}} + (3x^2+y^2+y-5)\sqrt{3y+5} = x^3-1$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+y^2+y-5)\left(\frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2+4y}+\sqrt{3y+5}} + \sqrt{3y+5}\right) = x^3-1$$

Ta có $3x^2+y^2+y-5 = 2(x-1)^2+x^2+y^2+4x+y-7 = 2(x-1)^2+x^2+y-2+y^2+4x-5 \ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+y^2+4y}+\sqrt{3y+5}} + \sqrt{3y+5} > 0 \Rightarrow x^3-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Lúc đó $\begin{cases} (x+2)\sqrt{y^2+4x-5} \ge 0 \\ \sqrt{y^2+x-1} \ge \sqrt{y^2} = |y| \ge y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+y-2} + (x+2)\sqrt{y^2+4x-5} + \sqrt{y^2+x-1} \ge y$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x=1 \\ y^2+4x-5 = x^2+y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 112. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^3+3y-3} + 2(x^3+2y-4)\sqrt{y} + 1 = 0, \\ 2x\sqrt{x-y} + \sqrt{2x+y-3} + (2y-1)\sqrt{x+y-2} = 0. \end{cases} (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+3y-3\ge 0; y\ge 0 \\ x-y\ge 0; 2x+y-3\ge 0 \\ x+y-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y\ge 0; x^3+3y-3\ge 0 \\ 2x+y-3\ge 0; x+y-2\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+3y-3}+2\left(x^3+2y-3\right)\sqrt{y}-2\sqrt{y}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3y-3}-\sqrt{y}+2\left(x^3+2y-3\right)\sqrt{y}=\sqrt{y}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+2y-3}{\sqrt{x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+2\left(x^3+2y-3\right)\sqrt{y}=\sqrt{y}-1$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+2y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+2\sqrt{y}\right)=\sqrt{y}-1$$

Nhận xét $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\ge 0,\forall x\ge 0$ nên $x^3+2y-3=x^3-3x+2+(2x+y-3)+(x+y-2)\ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+2\sqrt{y}>0\Rightarrow \sqrt{y}-1\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{y}\ge 1\Leftrightarrow y\ge 1$.

Với $\begin{cases} x\ge y\ge 1 \\ y\ge 1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 2x\sqrt{x-y}\ge 0 \\ (2y-1)\sqrt{x+y-2}\ge 0 \end{cases}\Rightarrow 2x\sqrt{x-y}+\sqrt{2x+y-3}+(2y-1)\sqrt{x+y-2}\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y-3=x+y-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Sau một thời gian dài giao tranh, phương án sử dụng chiến thuật du kích thuần túy dọc theo chiến tuyến 91 đến 111 chỉ với vũ khí hạng nhẹ dạng nhị thức bậc nhất – tam thức bậc hai, về cơ bản chúng ta đã xử lý được phần lớn các đơn vị trinh sát, tiền tiêu của địch quân. Tuy nhiên, càng đi sâu vào chính diện cuộc chiến, khi mà tình hình phức tạp hơn với chiến tranh quy ước, với các thành lũy kiên cố, cạm bẫy giăng như mạng nhện, cần sử dụng vũ khí hạng nặng, kinh nghiệm xương máu tích lũy, áp đảo biển người và những bước đi khéo léo, cẩn thận.

Bài toán số 112 mở màn quy mô khi U có dạng đa thức một ẩn bậc ba, kết hợp sử dụng hệ số tuyến tính 1;1;1 với các biểu thức không âm

$$\begin{cases} U=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\ge 0,\forall x\ge 0 \\ h_1(x;y)=2x+y-3\ge 0 \\ h_2(x;y)=x+y-2\ge 0 \end{cases}\qquad (m_1=n_1=p_1=1)$$

$$\Rightarrow f(x;y)=x^3+2y-3=x^3-3x+2+(2x+y-3)+(x+y-2)\ge 0$$

Điểm đáng chú ý hơn là đa thức bậc ba không có đặc tính không âm vốn có như tam thức bậc hai, để thiết lập điều này các bạn chú ý bố trí điều kiện cho các biến trước đó: $(x-a)^2(mx+n)\ge 0,\forall x\ge -\dfrac{n}{m}$.

Ví dụ như

$$(x-2)^2(x+1)\ge 0,\forall x\ge -1\Rightarrow x^3-3x^2+2x+2\ge 0,\forall x\ge -1$$

$$(x-1)^2(x+2)\ge 0,\forall x\ge -2\Rightarrow x^3-3x+2\ge 0,\forall x\ge -2$$

$$(x-1)^2(x+4)\ge 0,\forall x\ge -4\Rightarrow x^3+2x^2-7x+4\ge 0,\forall x\ge -4$$

Vì $f(x;y)$ của chúng ta yêu cầu thẩm mĩ cao, hơn nữa các biểu thức U và $h_i(x;y)$ chui vào trong căn thức nên cần gọn gàng, đẹp mắt, tránh cồng kềnh, vì vậy nên chọn lựa hệ số sao cho khuyết hạng tử bậc hai hoặc bậc nhất để tạo ra đa thức hình thức ba hạng tử

$$(x-2)^2(x+4)=(x^2-4x+4)(x+4)=x^3-12x+16$$
$$(x-3)^2(x+6)=(x^2-6x+9)(x+6)=x^3-27x+54$$
$$(2x-1)^2(x+1)=(4x^2-4x+1)(x+1)=4x^3-3x+1$$

Từ đó ta có thể mở rộng U lên các đa thức bậc bốn và cao hơn nữa, kiến lập các bài toán yêu cầu tư duy tổng thể.

Bài toán 113. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+3x^2+17y}+(x^3+3x^2+13y-19)\sqrt{4y+17}+\sqrt{21}=0,\\ 17\sqrt{x+4y-5}+6y\sqrt{6x+y-7}+\sqrt{4y+21}+\sqrt{x}=5.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+3x^2+17y}-\sqrt{4y+17}+(x^3+3x^2+13y-17)\sqrt{4y+17}=\sqrt{4y+17}-\sqrt{21}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2+13y-17}{\sqrt{x^3+3x^2+17y}+\sqrt{4y+17}}+(x^3+3x^2+13y-17)\sqrt{4y+17}=\frac{4(y-1)}{\sqrt{4y+17}+\sqrt{21}}$$
$$\Leftrightarrow (x^3+3x^2+13y-17)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+17y}+\sqrt{4y+17}}+\sqrt{4y+17}\right)=\frac{4(y-1)}{\sqrt{4y+17}+\sqrt{21}}$$

Nhận xét $x^3+3x^2-9x+5=(x-1)^2(x+5)\ge 0,\forall x\ge 0$, dẫn đến

$$x^3+3x^2+13y-17=x^3+3x^2-9x+5+3(x+4y-5)+(6x+y-7)\ge 0.$$

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+17y}+\sqrt{4y+17}}+\sqrt{4y+17}>0\Rightarrow \dfrac{4(y-1)}{\sqrt{4y+17}+\sqrt{21}}\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó $\begin{cases}y\sqrt{6x+y-7}\ge 0\\ \sqrt{4y+21}\ge\sqrt{25}=5\end{cases}\Rightarrow 17\sqrt{x+4y-5}+6y\sqrt{6x+y-7}+\sqrt{4y+21}+\sqrt{x}\ge 5$.

Vì dấu đẳng thức không xảy ra nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Đối với bài toán này ta thấy

$$f(x;y)=x^3+3x^2+13y-17=x^3+3x^2-9x+5+3(x+4y-5)+(6x+y-7)\ge 0$$
$$g(x;y)\equiv g(y)=\sqrt{4y+17}-\sqrt{21}$$
$$T(x;y)=\frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+17y}+\sqrt{4y+17}}+\sqrt{4y+17}>0$$

Các đại lượng tham gia $U=x^3+3x^2-9x+5;h_1(x;y)=x+4y-5;h_2(x;y)-6x+y-7$.

Hệ số tuyến tính $f(x;y)=m_1U+n_1h_1(x;y)+p_1h_2(x;y);m_1=1;n_1=3;p_1=1$.

Đại lượng không âm một biến U có dạng đa thức bậc ba $U=x^3+3x^2-9x+5$, *như đã nói bạn đọc có thể xử lý U theo phân tích nhân tử hoặc phương pháp hàm số nếu muốn*

- ✓ *Phân tích* $x^3+3x^2-9x+5=(x-1)^2(x+5)\ge 0,\forall x\ge 0$.
- ✓ *Xét hàm số* $t(x)=x^3+3x^2-9x+5,\forall x\ge 0$ *ta có* $t'(x)=3x^2+6x-9;t'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{1;-3\}$.

Rõ ràng $t(0)=5;t(1)=0\Rightarrow t(x)\ge \min\limits_{x\ge 0} t(x)=t(1)=0$.

Bài toán 114. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+3y+5}+\left(x^3+2y-11\right)\sqrt{y+15}=4(y-1),\\ \sqrt{7x+y-15}+y\sqrt{5x+y-11}+\sqrt{x^2+y^2x-4x+4}=\sqrt{x}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+3y+5\ge 0;y+15\ge 0;7x+y-15\ge 0\\ 5x+y-11\ge 0;x^2+y^2x-4x+4\ge 0;x\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^3+3y+5}-\sqrt{y+15}+\left(x^3+2y-10\right)\sqrt{y+15}=4(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+2y-10}{\sqrt{x^3+3y+5}+\sqrt{y+15}}+\left(x^3+2y-10\right)\sqrt{y+15}=4(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+2y-10\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3y+5}+\sqrt{y+15}}+\sqrt{y+15}\right)=4(y-1)$$

Vì $x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)\ge 0,\forall x\ge 0$ nên $x^3+2y-10=x^3-12x+16+(7x+y-15)+(5x+y-11)\ge 0$.

Lại có $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+3y+5}+\sqrt{y+15}}+\sqrt{y+15}>0\Rightarrow 4(y-1)\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Suy ra $\begin{cases}y\sqrt{5x+y-11}\ge 0\\ \sqrt{x^2+y^2x-4x+4}=\sqrt{y^2x+(x-2)^2}\ge y\sqrt{x}\ge\sqrt{x}\end{cases}$.

Từ đó $\sqrt{7x+y-15}+y\sqrt{5x+y-11}+\sqrt{x^2+y^2x-4x+4}\ge\sqrt{x}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}7x+y-15=5x+y-11=0\\ x-2=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=2;y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 114 có các đại lượng đơn giản hơn

$$f(x;y)=x^3+2y-10=x^3-12x+16+(7x+y-15)+(5x+y-11)\ge 0$$

$$T(x;y)=\frac{1}{\sqrt{x^3+3y+5}+\sqrt{y+15}}+\sqrt{y+15}>0$$

$$g(x;y)\equiv g(y)=4(y-1)$$

Với sự tham gia của $U=x^3-12x+16;h_1(x;y)=7x+y-15;h_2(x;y)=5x+y-11$.

Bài toán 115. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{8x^3+3y-3}+\left(8x^3+2y-5\right)\sqrt{y}=-1,\\ \sqrt{2x+y-2}+(x+y)\sqrt{4x+y-3}+\sqrt[4]{16xy+y^2-1}=2\sqrt[4]{x}.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{8x^3+3y-3}+\left(8x^3+2y-3\right)\sqrt{y}-2\sqrt{y}=-1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{8x^3+3y-3}-\sqrt{y}+\left(8x^3+2y-3\right)\sqrt{y}=\sqrt{y}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{8x^3+2y-3}{\sqrt{8x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+\left(8x^3+2y-3\right)\sqrt{y}=\sqrt{y}-1$$
$$\Leftrightarrow \left(8x^3+2y-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{8x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+\sqrt{y}\right)=\sqrt{y}-1$$

Nhận xét $4x^3-3x+1=(2x-1)^2(x+1)\geq 0,\forall x\geq 0$, dẫn đến
$$8x^3+2y-3=2\left(4x^3-3x+1\right)+(2x+y-2)+(4x+y-3)\geq 0.$$

Lại vì $\dfrac{1}{\sqrt{8x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+\sqrt{y}>0\Rightarrow \sqrt{y}-1\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{y}\geq 1\Leftrightarrow y\geq 1$.

Khi đó $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(x+y)\sqrt{4x+y-3}\geq 0\\ \sqrt[4]{16xy+y^2-1}\geq \sqrt[4]{16x}=2\sqrt[4]{x}\end{cases}$

Thu được $\sqrt{2x+y-2}+(x+y)\sqrt{4x+y-3}+\sqrt[4]{16xy+y^2-1}\geq 2\sqrt[4]{x}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases}8x^3+2y-3=0\\ 2x+y-2=4x+y-3=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2};y=1$.

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Các đơn vị tham gia liên hợp bao gồm
$$T(x;y)=\frac{1}{\sqrt{8x^3+3y-3}+\sqrt{y}}+\sqrt{y}>0;g(x;y)=\sqrt{y}-1$$
$$f(x;y)=8x^3+2y-3=2\left(4x^3-3x+1\right)+(2x+y-2)+(4x+y-3)\geq 0$$

Đáng chú ý hơn cả là hệ số tuyến tính của U đã tăng lên
$$U=4x^3-3x+1;h_1(x;y)=2x+y-2;h_2(x;y)=4x+y-3;m_1=2;n_1=p_1=1.$$

Khi viết đến bài toán số 115 này, ngày 15.04.2015, tác giả đang đọc dở dang một truyện ngắn, mà không lúc xem lại thì ra nó là truyện dài 22 chương, và cũng kết hợp xem dang dở một bộ phim, bộ phim chỉ có một tập thôi: Bong bóng lên trời. Bộ phim sản xuất bởi Hãng phim truyền hình, Đài truyền hình Việt Nam năm 1997, chuyển thể từ tác phẩm cùng tên của nhà văn Nguyễn Nhật Ánh viết năm 1991, khi tôi còn rất nhỏ, mãi giờ đây khi không còn ngồi trên ghế nhà trường tôi mới biết đến tác phẩm hiện thực và đậm chất nhân văn như thế.

Hôm nay là một buổi chiều thứ 4 mùa xuân năm 2015, tiết trời đầu hè đẹp và có gió lộng vi vu, tôi làm việc tại một ngôi nhà nhỏ khuất trong khu đô thị mới Yên Hòa, quận Cầu Giấy, trung tâm thủ đô Hà Nội, kế bên dòng sông Tô Lịch đen ngòm, xấu xí nhưng quen thuộc và nhiều kỷ niệm đối với người tha hương xứ người. Mặc dù bên kia là con đường Láng xe cộ ngùn ngụt, bon chen và đông đúc nhưng chúng tôi chẳng quan tâm, hóa ra giữa cái nơi phồn hoa đô hội này vẫn có những khu vắng lặng, thanh bình đến lạ thường.

Giữa không gian tĩnh mịch ấy, tôi ngồi một mình, đọc hết 22 chương và xem tập phim nhẹ nhàng, lòng tràn ngập nhiều cảm xúc. Bộ phim Bong bóng mùa hè được chuyển thể, tuy nội dung không sát với chính truyện và lược bỏ nhiều chi tiết đáng quý, đắt giá cần thiết, làm tôi băn khoăn xen lẫn tiếc nuối. Trong phim tình cờ có diễn xuất vô cùng hồn nhiên, tinh tế, vô tư của anh diễn viên Hoàng Tùng, tôi chợt nhận ra đó là một nhân vật phản diện trong loạt phim Đội đặc nhiệm nhà C21 mà tôi rất thích, hai anh em hay cùng xem mỗi khi may mắn có dịp chiếu lại trên sóng VTV1 Đài truyền hình Quốc gia. Tôi thích gọi là Đài truyền hình Quốc gia hơn là Đài truyền hình Việt Nam vì nó thân thương và duy nhất, chứa đựng một phần thời ấu thơ, bên gia đình, bên người thân.

Quả thực có khác biệt với những kênh phim truyện chuyên nghiệp và những kênh đa chiều loạn xạ thông tin. Đó là kênh thời sự chính thống, kênh văn hóa, giải trí, tin tức tổng hợp truyền thống đối với đồng bào cả nước, với nhân dân miền núi, hải đảo, với các chiến sĩ biên phòng và các miền quê thôn dã. Chao ôi, nào là VTV1, VTV2, VTV3 nè...và Đài phát hình truyền hình Thái Bình thân yêu của quê hương tôi nữa. Bao năm tháng với chiếc màn hình nhỏ xíu từ đen trắng chuyển sang màu với những khung giờ phim quen thuộc, tôi nhớ lắm. những bộ phim kịch tính, chân thực và đậm tính nhân văn hay cùng xem với mẹ ngày nhỏ chiều thứ bảy, chủ nhật... nào là Cảnh sát hình sự, Hoa cỏ may, Phía trước là bầu trời, Sóng ngầm, Vùng trời bình yên, Đường đời.... Không biết có phải vì những giá trị ấy mà giờ đây tôi trở nên suy nghĩ, hành động và mơ ước một cách thận trọng hay không ?

Tiếp cận với tác phẩm này, tôi ấn tượng sâu sắc về nhân vật Nguyễn Minh Thường và gia đình anh, về bố Phong, mẹ Tuệ của anh, về bé Nhi, về cô bé Tài Khôn và hơn thế nữa...Nghĩa cử cao đẹp của chú Phong – bố của anh Thường ở đầu tác phẩm, và của Thường ở cuối tác phẩm, tương tự hành động vừa bất đắc dĩ, vừa đau thương của anh giáo làng tên Triệu trong Những bài học nông thôn (Nguyễn Huy Thiệp), hay việc làm cao thượng của cô bé Thu trong Tâm hồn mẹ (Nguyễn Huy Thiệp). Chắc nhiều bạn đọc biết đến Tâm hồn mẹ cũng là bộ phim đặc biệt cùng tên chuyển thể, dẫn đến tên tuổi cô bé Phùng Hoa Hoài Linh, em bé Hà Nội – nữ diễn viên chính xuất sắc nhất tại Liên hoan phim Á – Phi năm 2011 khi mới 12 tuổi.

Về "Bong bóng lên trời", tác phẩm được viết dựa trên khung cảnh miền Nam, khi tác giả đã chuyển đến sinh sống tại thành phố Hồ Chí Minh, ngôn ngữ trong truyện mang đậm nét Nam bộ mộc mạc và có khác biệt với miền Bắc, tuy nhiên với diễn xuất đặc sắc của anh Hoàng Tùng và tập thể anh chị học sinh lớp 12A1 trường THPT Phan Đình Phùng niên khóa 1994 – 1997, Quận Ba Đình, những con phố Quán Thánh, Lê Duẩn, đoạn đường sắt Bắc – Nam bên Công viên Thống nhất, Công viên Thủ Lệ,...tất cả đều làm toát lên vẻ đẹp dung dị vốn có của đất và người thủ đô, của tuổi học trò và nền văn hóa đất nước.

"Bóng bóng lên trời, những quả bóng đã bay cao và dường như sắp sửa tan vào mây trắng. Thế là chúng đã đến nơi định đến . Và chẳng bao lâu nữa, phúc lành sẽ đến với ai tin vào sự vĩnh hằng của những điều tốt đẹp. Bất giác Thường mỉm cười với ý nghĩ của mình và vừa dõi mắt theo những chấm li ti in vào nền mây trắng, anh vừa xúc động tự hỏi không biết trong cơ man những mơ ước mà con người ký thác, những quả bóng lên trời kia đang mang theo điều nguyện ước nào cô bạn nhỏ chân thành vừa gửi gắm cho anh".

Và tác giả chợt thấy anh Thường được gặp cô bé Tài Khôn (Là), trong phim tên Lụa – cô bé mồ côi thông minh được mẹ Tuệ của anh cưng nhất lớp đã là một điều may mắn, một điều diệu kỳ mà nhà văn sắp xếp. Cũng là một tác phẩm dành cho thiếu nhi của nhà văn Nguyễn Nhật Ánh, cũng có tình tiết "Ăn nhiều kẹo sún răng", nhưng không phải là kẹo kéo như trong Bong bóng lên trời đâu, mà cô bé trong Cô gái đến từ hôm qua (1989) bị sún răng thực sự, Việt An...một cái tên rất xinh xắn, đặc biệt mà tôi âu yếm đặt cho một cô gái 18 tuổi nhỏ nhắn, bé bỏng, cũng hơi hơi sún răng (trẹo trọ) và tinh nghịch không kém Tài Khôn cơ chứ, cô bé mà tôi yêu thương nhất trên đời.

Mọi người sinh ra đều có quyền bình đẳng, có quyền sống và mưu cầu hạnh phúc...đã là điều ước, chúng ta có quyền, miễn sao nó chân chính và không xấu, như thế là đẹp đẽ. Đối với các bài toán từ 100 đến 115, thoạt nhìn không ít bạn cảm thấy mông lung, vô hướng vì hình thức gọn gàng và khó bấu víu của nó, nhưng vì thế liệu có cần ước làm được hay không, không, chỉ cần chú ý một chút và khéo léo biến đổi, cẩn thận trong các liên kết là có thể hoàn toàn xử lý ổn thỏa với một lời giải logic, chính xác.

Bài toán 116. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x^4+8y-5}+\left(x^4+4y-10\right)\sqrt{y}=y^3, \\ (3y-1)\sqrt{x+y-2}+\sqrt{y^3+2y^2+2x^2-1}=x+y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+8y-5\ge 0; y\ge 0 \\ x+y\ge 2; y^3+2y^2+2x^2-1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\sqrt{x^4+8y-5}+\left(x^4+4y-5\right)\sqrt{y}-5\sqrt{y}=y^3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x^4+8y-5}-2\sqrt{y}\right)+\left(x^4+4y-5\right)\sqrt{y}=y^3-\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^4+4y-5\right)}{\sqrt{x^4+8y-5}+2\sqrt{y}}+\left(x^4+4y-5\right)\sqrt{y}=y^3-\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+4y-5\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x^4+8y-5}+2\sqrt{y}}+\sqrt{y}\right)=y^3-\sqrt{y}$$

Nhận xét $x^4+4y-5=x^4-4x+3+4(x+y-2)\geq 0$ nên

$$x^4-4x+3=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)=(x-1)^2\left[(x+1)^2+2\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Lại có $\frac{3}{\sqrt{x^4+8y-5}+2\sqrt{y}}+\sqrt{y}>0$ nên $y^3-\sqrt{y}\geq 0\Leftrightarrow y^3\geq\sqrt{y}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^6\geq y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y\left(y^5-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y\geq 1\end{array}\right.$

Xét trường hợp $y=0\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x^4-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x\in\left\{-\sqrt[4]{5};\sqrt[4]{5}\right\}\end{cases}$

Tất cả các cặp số thu được không thỏa mãn $x+y\geq 2$, loại.

Xét trường hợp $y\geq 1\Rightarrow\begin{cases}3y-1>0\\ y^3-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3y-1)\sqrt{x+y-2}\geq 0\\ \sqrt{y^3+2y^2+2x^2-1}\geq\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\end{cases}$

Mặt khác $(x-y)^2\geq 0\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\geq(x+y)^2\Rightarrow\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\geq|x+y|\geq x+y$.

Dẫn đến $(3y-1)\sqrt{x+y-2}+\sqrt{y^3+2y^2+2x^2-1}\geq x+y$. Dấu đẳng thức $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2=y^3-1=0\\ x=y;x+y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 116 này chúng ta có các đơn vị tham gia liên hợp như sau

$$T(x;y)=\frac{3}{\sqrt{x^4+8y-5}+2\sqrt{y}}+\sqrt{y}>0;g(x;y)\equiv g(y)=y^3-\sqrt{y}$$

$$f(x;y)=x^4+4y-5=x^4-4x+3+4(x+y-2)\geq 0$$

Trong đó $U=x^4-4x+3=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)=(x-1)^2\left[(x+1)^2+2\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hệ số tuyến tính $h_1(x;y)=x+y-2;m_1=1;n_1=4$.

Điểm đáng lưu ý là đại lượng không âm U đã tăng cấp trở thành đa thức bậc bốn một ẩn. Đa phần các bạn đọc quen sử dụng bất đẳng thức Cauchy đều biết đến đánh giá con với điểm rơi $x=1$ *điển hình như*

$$x^2-2x+1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R};x^3-3x+2\geq 0,\forall x\geq 0$$

$$x^4-4x+3\geq 0,\forall x\in\mathbb{R};x^5-6x+5\geq 0,\forall x\geq 0,...$$

Xử lý các đại lượng này có thể sử dụng phân tích nhân tử hoặc công cụ đạo hàm – hàm số rất thuận tiện

- *Phân tích* $U=x^4-4x+3=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)=(x-1)^2\left[(x+1)^2+2\right]\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.
- *Xét hàm số* $U=t(x)=x^4-4x+3;x\in\mathbb{R}$.

  Đạo hàm $t'(x)=4x^3-4;t'(x)=0\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$ *dẫn đến* $t(x)\geq\underset{x\in\mathbb{R}}{Min}\,t(x)=t(1)=1$.

Ngoài ra đơn vị quyết định miền giá trị biến y cũng có một số điểm chướng ngại dù là kiến thức hết sức cơ bản

$$Q=y^3-\sqrt{y}\geq 0\Leftrightarrow y^3\geq\sqrt{y}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y^6\geq y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geq 0\\ y\left(y^5-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y\geq 1\end{array}\right.$$

Vì vậy cần xem xét tổng thể hai trường hợp xảy ra, khuyến cáo nên dùng trực tiếp phương trình liên hợp sẽ thu được ngay kết quả không thỏa mãn điều kiện xác định, chưa kể thỏa mãn hệ ban đầu (tính theo đa số). Để ác độc hơn nữa, người ra đề có thể bố trí cho trường hợp nghiệm đặc biệt này nghiệm đúng phương trình dẫn đến mất nghiệm vốn có của bài toán, điều này tấn công mạnh mẽ vào một bộ phận những thí sinh vội vàng, không cẩn thận.

Bài toán 117. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^4+x^2+2y}+\left(x^4+x^2-5y\right)\sqrt{7y-3}=-2, \\ \sqrt{x^2+4x-5y}+y\sqrt{7y+3}+\sqrt{7y^3-3}=2+\sqrt{10}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+x^2+2y\ge 0 \\ x^2+4x-5y\ge 0 \\ 7y^3\ge 3 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\sqrt{x^4+x^2+2y}+\left(x^4+x^2-5y+3\right)\sqrt{7y-3}-3\sqrt{7y-3}=-2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^4+x^2+2y}-\sqrt{7y-3}\right)+\left(x^4+x^2-5y+3\right)\sqrt{7y-3}=\sqrt{7y-3}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x^4+x^2-5y+3\right)}{\sqrt{x^4+x^2+2y}+\sqrt{7y-3}}+\left(x^4+x^2-5y+3\right)\sqrt{7y-3}=\frac{7\left(y-1\right)}{\sqrt{7y-3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^4+x^2-5y+3\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^4+x^2+2y}+\sqrt{7y-3}}+\sqrt{7y-3}\right)=\frac{7\left(y-1\right)}{\sqrt{7y-3}+2}$$

Ta nhận xét $x^4-4x+3=\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+3\right)=\left(x-1\right)^2\left[\left(x+1\right)^2+2\right]\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $x^4+x^2-5y+3=x^4-4x+3+\left(x^2+4x-5y\right)\ge 0$.

Lại do $\dfrac{2}{\sqrt{x^4+x^2+2y}+\sqrt{7y-3}}+\sqrt{7y-3}>0\Rightarrow y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó $y\ge 1>0\Rightarrow \begin{cases} y\sqrt{7y+3}\ge\sqrt{10} \\ \sqrt{7y^3-3}\ge 2 \end{cases}\Rightarrow \sqrt{x^2+4x-5y}+y\sqrt{7y+3}+\sqrt{7y^3-3}\ge 2+\sqrt{10}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} x^2+4x-5y=0 \\ x^4-4x+3=0 \\ y=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 118. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y^3+x+y}+\left(y^3+x-3\right)\sqrt{y+2}+2=2\sqrt{y}, \\ \sqrt{x+3y-4}+\left(y+1\right)\sqrt{2x^2+5y-3}=2\left|x+1\right|. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} y^3+x+y\ge 0; y\ge 0 \\ x+3y-4\ge 0; 2x^2+5y-3\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y^3+x+y}-\sqrt{y+2}+\left(y^3+x-2\right)\sqrt{y+2}=2\sqrt{y}-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^3+x-2}{\sqrt{y^3+x+y}+\sqrt{y+2}}+\left(y^3+x-2\right)\sqrt{y+2}=2\sqrt{y}-2$$
$$\Leftrightarrow \left(y^3+x-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y^3+x+y}+\sqrt{y+2}}+\sqrt{y+2}\right)=2\left(\sqrt{y}-1\right)$$

Nhận xét $y^3-3y+2=\left(y-2\right)^2\left(y+2\right)\ge 0,\forall y\ge 0\Rightarrow y^3+x-2=y^3-3y+2+\left(x+3y-4\right)\ge 0$.

Bên cạnh đó $\dfrac{1}{\sqrt{y^3+x+y}+\sqrt{y+2}}+\sqrt{y+2}>0\Rightarrow \sqrt{y}-1\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{y}\ge 1\Leftrightarrow y\ge 1$.

Vì thế $y\ge 1>0\Rightarrow 2x^2+5y-4\ge 2x^2+2\ge x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2\Rightarrow \sqrt{2x^2+5y-3}\ge \left|x+1\right|$.

Hơn nữa $y+1\ge 2>0\Rightarrow \left(y+1\right)\sqrt{2x^2+5y-3}\ge 2\left|x+1\right|\Rightarrow \sqrt{x+3y-4}+\left(y+1\right)\sqrt{2x^2+5y-3}\ge 2\left|x+1\right|$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases}\left(x-1\right)^2=0\\ x+3y-4=y^3-3y+2=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 119. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y^4+3x+1}+\left(y^4+2x-5\right)\sqrt{x+4}=-\sqrt{5},\\ x\sqrt{x+2y-3}+\sqrt{x^3+2y^4+1}+\sqrt{x}=y^2+2.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+2y-3\ge 0\\ x\ge 0\\ y^4+3x+1\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y^4+3x+1}-\sqrt{x+4}+\left(y^4+2x-3\right)\sqrt{x+4}=\sqrt{x+4}-\sqrt{5}$$
$$\frac{y^4+2x-3}{\sqrt{y^4+3x+1}+\sqrt{x+4}}+\left(y^4+2x-3\right)\sqrt{x+4}=\frac{x-1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow \left(y^4+2x-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y^4+3x+1}+\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+4}\right)=\frac{x-1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{5}}$$

Nhận xét $y^4-4y+3=\left(y-1\right)^2\left(y^2+2y+3\right)=\left(y-1\right)^2\left[\left(y+1\right)^2+2\right]\ge 0$.

Dẫn đến $y^4+2x-3=y^4-4y+3+2\left(x+2y-3\right)\ge 0$.

Lại thấy $\dfrac{1}{\sqrt{y^4+3x+1}+\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+4}>0\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi $x\ge 1\Rightarrow \begin{cases}x\sqrt{x+2y-3}\ge 0\\ \sqrt{x}\ge 1\end{cases}\Rightarrow x\sqrt{x+2y-3}+\sqrt{x}\ge 1$.

Mặt khác $x^3+2y^4+1\ge 2y^4+2\ge y^4+2y^2+1=\left(y^2+1\right)^2\Rightarrow \sqrt{x^3+2y^4+1}\ge y^2+1$.

Kết hợp tổng thể ta có $x\sqrt{x+2y-3}+\sqrt{x^3+2y^4+1}+\sqrt{x}\ge y^2+2$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} x+2y-3=y^4+2x-3=0 \\ x=1;y=1 \\ \left(y^2-1\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 120. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\sqrt{x+y-2}+x^3-3x^2+6x+3y=7, \\ (x+y)^2+2\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{2x-1}+4x+3y. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x+y\ge 2;x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(x+y)^2-3x-3y+2=\sqrt{2x-1}+x-2\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}+x-\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\frac{x(x-1)}{x+\sqrt{x}}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)+2=(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\frac{x}{x+\sqrt{x}}\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2-3t+2;t\ge 2\Rightarrow f'(t)=2t-3>0,\forall t\ge 2$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét dẫn đến $f(t)\ge f(2)=0$.

Bên cạnh đó $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}>0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$5\sqrt{x+y-2}+x^3-3x^2+3x-1+3x+3y=6\Leftrightarrow 5\sqrt{x+y-2}+3(x+y)+(x-1)^3=6.$$

Dễ thấy $(x-1)^3\ge 0,\forall x\ge 1$ và hàm $g(t)=5\sqrt{t-2}+3t;t=x+y\ge 2$ đồng biến, liên tục.

Do đó $g(t)=5\sqrt{t-2}+3t\ge g(2)=6\Rightarrow 5\sqrt{x+y-2}+3(x+y)+(x-1)^3\ge 6$.

Phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} x+y=2 \\ x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$ (Thỏa mãn hệ ban đầu).

Nhận xét.

Bài toán số 120 chúng ta đã sử dụng kỹ thuật liên hợp với biến x để cô lập các đại lượng $x;x+y$. Tuy nhiên cần hết sức chú ý chứng minh $f(x+y)\ge 0$ với $f(x+y)=(x+y)^2-3(x+y)+2$. Không quá khó khi nhận ra đây là tam thức bậc hai một ẩn $t=x+y;t\ge 2$ do điều kiện xác định. Do đó có thể biến đổi như sau

$$(x+y)^2-3(x+y)+2=(x+y-1)(x+y-2)\ge 0,\forall x+y\ge 2.$$

Bài toán 121. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{y^2-2y+2}+3 \\ x^3-2x+y^4-4y+5=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+2}{3x^2-2x+4}}. \end{cases} \quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\sqrt{2x-1}-2+\sqrt{x+3}-2=\sqrt{y^2-2y+2}-1$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\sqrt{x+3}-2=\sqrt{y^2-2y+2}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^2-2y+2}+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=\frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^2-2y+2}+1}$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}>0;\frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^2-2y+2}+1}\ge 0$ nên ta được $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-2x; x\ge 1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2>0, \forall x\ge 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền $x\ge 1 \Rightarrow f(x)\ge f(1)=-1$.

Lại có $y^4-4y+3=(y-1)^2(y^2+2y+3)\ge 0, \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow x^3-2x+y^4-4y+5\ge -1+0+2=1$.

Mặt khác $2(x-1)^2\ge 0 \Rightarrow 0<x^2+2x+2\le 3x^2-2x+4 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{3x^2-2x+4}}\le 1$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} y-1=0 \\ x=1 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại ta thu được nghiệm duy nhất của hệ.

Nhận xét.

Với bài toán số 121, để chặn miền giá trị $x\ge 1$, các bạn hoàn toàn có thể sử dụng bất phương trình ẩn x với đánh giá giảm theo hằng đẳng thức như sau

$$\sqrt{y^2-2y+2}+3=\sqrt{(y-1)^2+1}+3\ge 1+3=4 \text{ dẫn đến } 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4.$$

- *Sử dụng đại lượng liên hợp – hệ tạm thời chúng ta sẽ quy về lời giải mới cùng bản chất lời giải trên.*
- *Sử dụng phép biến đổi tương đương – nâng lũy thừa (bình phương) trong trường hợp này là chắc chắn tuy nhiên cũng khá dài dòng, vì cần giải phương trình chứa căn, phương trình bậc hai có kèm theo điều kiện.*
- *Sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số (liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 cấp THPT) cũng là hướng đi táo bạo, nhanh gọn*

  Xét hàm số $f(x)=2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}; x\ge\frac{1}{2}$ *ta có* $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0, \forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

  Hàm số liên tục và đồng biến trên miền tương ứng dẫn đến $f(x)\ge f(1)=4 \Leftrightarrow x\ge 1$.
- *Đánh giá đơn thuần cũng rất phù hợp với các bạn học sinh nhỏ tuổi*

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}=4 \\ x\ge 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4 \\ \frac{1}{2}\le x<1 \Rightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}<4 \end{array}\right. \text{ dẫn đến } 2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4 \Leftrightarrow x\ge 1.$$

Bài toán 122. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}=5x+2y-4 \\ x\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{x^3+y^2}=\dfrac{y+1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge\dfrac{2}{3} \\ 2x+y-3\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} & x\left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\sqrt{x+3}-2=4x+2y-6 \\ & \Leftrightarrow \frac{3x(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=2(2x+y-3) \\ & \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=2(2x+y-3) \end{aligned}$$

Ta có $2x+y-3\ge 0;\dfrac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}>0,\forall x\ge\dfrac{2}{3}\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Do $x\ge 1\Rightarrow x^2(x-1)\ge 0\Leftrightarrow x^3\ge x^2\Rightarrow x^3+y^2\ge x^2+y^2$.

Lại có $(x-y)^2\ge 0\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2\Rightarrow x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}\ge\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$.

Từ đó dẫn đến $\sqrt{x^3+y^2}\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\ge\dfrac{1+y}{\sqrt{2}}\Rightarrow x\sqrt{2x+y-3}+\sqrt{x^3+y^2}\ge\dfrac{y+1}{\sqrt{2}}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, hay $\begin{cases} 2x+y-3=x-1=0 \\ x=y \\ x+y\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Vẫn với motip sử dụng đại lượng liên hợp chốt chặn miền giá trị một biến, lưu ý bài toán này khó có thể độc lập giải bất phương trình ẩn x như hệ phương trình 122 vì đã được găm đại lượng không âm $2x+y-3\ge 0$ *nội tại phương trình thứ hai, đó là chướng ngại vật cản trở và chắc hẳn đã phá vỡ kế hoạch ngây thơ của nhiều bạn đọc.*

$$(x-1)\left(\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=2(2x+y-3)\text{ với vai trò } f(x;y).T(x;y)=g(x;y).$$

Trong đó

- $f(x;y)$ *vẫn còn trẻ con với dạng* $f(x;0)\equiv f(x)$*, hơn nữa vẫn còn là nhị thức.*
- $g(x;y)$ *còn nhẹ nhàng khi trùng lặp biểu thức dưới căn* $g(x;y)=2x+y-3$.
- $T(x;y)=\dfrac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ *bước đầu xuất hiện biến trên tử thức (một biến).*

Sau khi khai phá điều kiện $x\ge 1$*, rõ ràng đây không phải mối quan hệ hai biến, vì vậy không thể thay thế vào mà ung dung giải nghiệm, suy nghĩ thường nhật là chuẩn bị tinh thần đánh giá phương trình thứ hai, bởi hình thức nó cho thấy đã được bố trí viện binh đón lõng chặn đứng đà tiến quân có vẻ mạnh mẽ của mình.*

Không quá khó các bạn đều nhận xét $x\sqrt{2x+y-3}\ge 0$ *cho dù* $x\ge\alpha>0$ *đi chăng nữa, vì đã dự đoán trước dấu đẳng thức dành cho nghiệm xảy ra khi* $x=1;2x+y-3=0\Leftrightarrow x=y=1$.

Chính vì thế chúng ta manh nha chuyển đà tấn công theo hướng $\sqrt{x^3+y^2}\ge\frac{y+1}{\sqrt{2}},\forall x\ge 1$, *và may mắn đã đến theo ước nguyện, bởi vì* $2\left(x^3+y^2\right)\ge y^2+2y+1\Leftrightarrow 2x^3+y^2-2y\ge 1\Leftrightarrow 2x^3+\left(y-1\right)^2\ge 2$.

Tất nhiên khi thực hành cần khéo léo đối với các kiến thức cơ bản

$$2x^3+\left(y-1\right)^2\ge 2,\forall x\ge 1\Rightarrow 2\left(x^3+y^2\right)\ge y^2+2y+1=\left(y+1\right)^2$$

$$\Rightarrow x^3+y^2\ge\frac{\left(y+1\right)^2}{2}\Rightarrow\sqrt{x^3+y^2}\ge\sqrt{\frac{\left(y+1\right)^2}{2}}=\frac{\left|y+1\right|}{\sqrt{2}}\ge\frac{y+1}{\sqrt{2}}$$

Bài toán 123. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3+x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}\right)=y^2+5x,\\ x\sqrt{y^2+2x-3}+\sqrt{x^3-2x+2y^2+3}=y+1.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge\frac{1}{2};y^2+2x-3\ge 0\\ x^3-2x+2y^2+3\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\sqrt{x+3}-2x+x\sqrt{2x-1}-x=y^2+2x-3$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x+3}-2\right)+x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)=y^2+2x-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x\left(x-1\right)}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{2x\left(x-1\right)}{\sqrt{2x-1}+1}=y^2+2x-3$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{2x}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=y^2+2x-3$$

Ta có $y^2+2x-3\ge 0;\frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{2x}{\sqrt{2x-1}+1}>0,\forall x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-2x;x\ge 1\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2-2>0,\forall x\ge 1$.

Rõ ràng hàm liên tục và đồng biến nên ta thu được $f\left(x\right)\ge\underset{x\ge 1}{Min}\,f\left(x\right)=f\left(1\right)=-1$.

Suy ra $x^3-2x+2y^2+3\ge -1+2y^2+3=2y^2+2\ge y^2+2y+1=\left(y+1\right)^2$.

Vì thế $\sqrt{x^3-2x+2y^2+3}\ge\left|y+1\right|\ge y+1\Rightarrow x\sqrt{y^2+2x-3}+\sqrt{x^3-2x+2y^2+3}\ge y+1$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}y+1\ge 0\\ y-1=0\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

- *Biểu thức liên hợp xuất hiện biến trên tử thức* $T\left(x;y\right)\equiv T\left(x;0\right)=\frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{2x}{\sqrt{2x-1}+1}$.
- $g\left(x;y\right)=y^2+2x-3$ *là đa thức hai biến không âm.*
- *Đơn vị quyết định miền giá trị biến x là* $Q\equiv f\left(x;y\right)\equiv f\left(x;0\right)=x-1$.
- *Đánh giá* $x^3-2x\ge -1$ *có thể qua biến đổi tương đương, không nhất thiết sử dụng hàm số*

$$x^3-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)\ge 0, \forall x\ge 1 \text{ vì } x^2+x-1\ge 1>0, \forall x\ge 1.$$

- *Đánh giá* $\sqrt{2y^2+2}\ge |y+1|\ge y+1$ *có thể dùng bất đẳng thức phụ* $2\left(a^2+b^2\right)\ge (a+b)^2$.

$$2y^2+2=2\left(y^2+1\right)\ge (y+1)^2 \Rightarrow \sqrt{2y^2+2}\ge |y+1|\ge y+1.$$

Bài toán 124. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x-2+\sqrt{y^3+y-2}=0, \\ x^3+2=x^2-xy+y+\sqrt{y^2+3}. \end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y^3+y-2\ge 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+2\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x^2+x-2=-\sqrt{y^3+y-2}\le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 1$.

Phương trình thứ hai biến đổi về

$$x^3-x^2+xy-y=\sqrt{y^2+3}-2 \Leftrightarrow \left(x^2+y\right)(x-1)=\frac{y^2-1}{\sqrt{y^2+3}+2}=\frac{(y-1)(y+1)}{\sqrt{y^2+3}+2}.$$

Mà $\dfrac{(y-1)(y+1)}{\sqrt{y^2+3}+2}\ge 0, \forall y\ge 1; x^2+y>0, \forall y\ge 1, \forall x\in \mathbb{R} \Rightarrow x-1\ge 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=y=1$.

Vậy hệ đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Không quá khó để chúng ta nhận ra điều kiện $y^3+y-2\ge 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+2\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$.

Điều kiện này may mắn vì nó độc lập với một biến, không bất lợi như các ràng buộc hai biến.

Hơn nữa với chú ý đó, dễ dàng suy ra được $\sqrt{y^2+3}\ge \sqrt{1+3}=2$, *vì thế*

$$x^3-x^2+xy-y+2\ge 2 \Leftrightarrow \left(x^2+y\right)(x-1)\ge 0$$

Vì biểu thức đã được bố trí sẵn đại lượng xác định dương x^2+y *nên tất yếu* $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \Rightarrow x=1$.

Sự đối lập này dẫn đến lời giải ngắn gọn, nhẹ nhàng.

Bài toán 125. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+x^2+2x+\sqrt{y^3+3y-4}=4, \\ x^3-x^2+2xy+6=2\left(y+\sqrt{y^3+8}\right). \end{cases}$ $(x;y\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y^3+3y-4\ge 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+4\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x^3+x^2+2x-4=-\sqrt{y^3+3y-4}\le 0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+2x+4\right)\le 0 \Leftrightarrow x\le 1.$$

Phương trình thứ hai biến đổi

$$x^2(x-1)+2y(x-1)=2\left(\sqrt{y^3+8}-3\right) \Leftrightarrow \left(x^2+2y\right)(x-1)=\frac{2\left(y^3-1\right)}{\sqrt{y^3+8}+3}.$$

Mà $\dfrac{2\left(y^3-1\right)}{\sqrt{y^3+8}+3}\ge 0, \forall y\ge 1; x^2+2y>0, \forall x\in \mathbb{R}, \forall y\ge 1 \Rightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1 \Rightarrow x=y=1$.

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán này cũng không quá khó khai thác điều kiện $y^3+3y-4\ge 0 \Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+y+4\right)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$.

Căn thức chứa y tại phương trình thứ hai độc lập nên cũng dễ dàng đánh giá

$$x^3-x^2+2xy+6=2\left(y+\sqrt{y^3+8}\right)\Rightarrow x^3-x^2+2xy-2y=2\sqrt{y^3+8}-6\geq 2\sqrt{9}-6=0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)+2y(x-1)\geq 0\Leftrightarrow \left(x^2+2y\right)(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$$

Bài toán 126. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+x^2+2x+\sqrt{2y^3+3y-5}=5,\\ xy+2x=y+\sqrt{y^3+y+2}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2y^3+3y-5\geq 0\\ y^3+y+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-1)\left(2y^2+2y+5\right)\geq 0\\ y^3+y+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-1)\left[(y+1)^2+y^2+5\right]\geq 0\\ y^3+y+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow y\geq 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi

$$2x^3+x^2+2x-5=-\sqrt{2y^3+3y-5}\leq 0\Rightarrow (x-1)\left(2x^2+3x+5\right)\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1.$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$xy-y+2x-2=\sqrt{y^3+y+2}-2\Leftrightarrow y(x-1)+2(x-1)=\frac{y^3+y-2}{\sqrt{y^3+y+2}+2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+2)=\frac{(y-1)\left(y^2+y+2\right)}{\sqrt{y^3+y+2}+2}$$

Ta có $\dfrac{(y-1)\left(y^2+y+2\right)}{\sqrt{y^3+y+2}+2}\geq 0; y+2>0,\forall y\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1\Rightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=1;y=1$.

Bài toán 127. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-2x+3=2\sqrt{5-y^2},\\ \sqrt{\dfrac{3x^2+3}{2}+x}-x=\sqrt{y+2}-1.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\geq -2;y^2\leq 5$. Phương trình thứ nhất biến đổi

$$(x-1)^2+2=2\sqrt{5-y^2}\Rightarrow 2\sqrt{5-y^2}\geq 2\Leftrightarrow 5-y^2\geq 1\Leftrightarrow y^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2.$$

Lại có

$$(x-1)^2\geq 0\Rightarrow 3x^2+2x+3\geq 2\left(x^2+2x+1\right)=2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+2x+3}{2}\geq (x+1)^2\Rightarrow \sqrt{\frac{3x^2+3}{2}+x}\geq |x+1|\geq x+1\Rightarrow \sqrt{\frac{3x^2+3}{2}+x}-x\geq 1$$

Từ phương trình thứ hai của hệ dẫn đến $\sqrt{y+2}-1\geq 1\Leftrightarrow \sqrt{y+2}\geq 2\Leftrightarrow y\geq 2\Rightarrow y=2$.

Khi đó các dấu đẳng thức cũng xảy ra nên $\begin{cases}y=2\\ x-1=0\\ x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Thử lại không thỏa mãn hệ nên kết luận hệ vô nghiệm.

Nhận xét.

Phương trình thứ nhất của hệ đa phần bạn đọc đều nhận ra đặc điểm

$$(x-1)^2+2=2\sqrt{5-y^2}\Rightarrow 2\sqrt{5-y^2}\ge 2\Leftrightarrow 5-y^2\ge 1\Leftrightarrow y^2\le 4\Leftrightarrow -2\le y\le 2.$$

Tuy nhiên phương trình thứ hai có đại lượng $\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+3}{2}}-x$ *gây khó khăn trong việc đánh giá.*

Lời giải trên sử dụng là rất thuần túy và cơ bản, nhưng nghĩ được như thế cần một sự linh hoạt và khéo léo nhất định. Không nhất thiết như thế, các bạn có thể sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số như sau

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+3}{2}}-x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+3}}-1$.

Dễ thấy

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x+1=\sqrt{6x^2+4x+6}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1\ge 0\\9x^2+6x+1=6x^2+4x+6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\3x^2+2x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\x\in\left\{1;-\dfrac{5}{3}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Lập bảng biến thiên hàm số ta thấy $\underset{x\in\mathbb{R}}{Min}\, f(x)=f(1)=1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+3}{2}}-x\ge 1$.

Lúc này đã có đòn bẩy để chặn miền giá trị biến y còn lại $\sqrt{y+2}-1\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{y+2}\ge 2\Leftrightarrow y\ge 2\Rightarrow y=2$.

Bài toán 128. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^3+2x-3}=y^3+y-1,\\y\sqrt{x^2+3x-3}+x\sqrt{y^3+y+2}=2x+y.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x-3\ge 0\\x^2+3x-3\ge 0\\y^3+y+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2+x+3)\ge 0\\x^2+3x-3\\(y+1)(y^2-y+2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\y\ge -1\end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x+\sqrt{x^3+2x-3}\ge 1\Rightarrow y^3+y-1\ge 1\Leftrightarrow y^3+y-2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y+2)\ge 0\Leftrightarrow(y-1)\left[(2y+1)^2+7\right]\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$$

Khi đó $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-3}\ge 1\\\sqrt{y^3+y+2}\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\sqrt{x^2+3x-3}\ge y\\x\sqrt{y^3+y+2}\ge 2x\end{cases}\Rightarrow y\sqrt{x^2+3x-3}+x\sqrt{y^3+y+2}\ge 2x+y$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là $x=y=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn, vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Phương trình thứ nhất của hệ được cô lập biến nên tìm điều kiện chặt chẽ cho toàn thể hai biến không mấy khó khăn. Phương trình thứ hai của hệ tuy các hạng tử là tổ hợp căn thức – đơn thức hai biến nhưng do điều kiện tìm được mạnh mẽ $x\ge 1;y\ge 1$ *nên dễ dàng đánh giá nhẹ nhàng.*

Bài toán 129. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x^4+y^3+1}+1=x^3+x^2+\sqrt{x},\\x\sqrt{y^3-1}+\sqrt{x^3+y^3+2}+\sqrt{xy+3}=4.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} y \ge 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Ta có $\left(x^2-1\right)^2 \ge 0 \Rightarrow 2x^4+2 \ge x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{2x^4+2} \ge x^2+1$.

Xét phương trình thứ nhất của hệ

$$y \ge 1 \Rightarrow \sqrt{2x^4+y^3+1} \ge \sqrt{2x^4+2} \ge x^2+1$$
$$\Rightarrow x^3+x^2+\sqrt{x} \ge x^2+2 \Leftrightarrow x^3+\sqrt{x} \ge 2$$

Đặt $\sqrt{x}=t; t \ge 0$ dẫn đến $\begin{cases} t^6+t \ge 2 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)\left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+2\right) \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow t-1 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó $\begin{cases} x\sqrt{y^3-1} \ge 0 \\ \sqrt{x^3+y^3+2} \ge \sqrt{4}=2 \\ \sqrt{xy+3} \ge \sqrt{4}=2 \end{cases} \Rightarrow x\sqrt{y^3-1}+\sqrt{x^3+y^3+2}+\sqrt{xy+3} \ge 4$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ, kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 130. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+1+\sqrt{x-2}\right)^2+(x-7)^2=y^4-4y+44, \\ y^6+4x^3+30x=21x^2+6y+4. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2+2x+1+2(x+1)\sqrt{x-2}+x-2+x^2-14x+49=y^4-4y+44$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x-2}+2x^2-11x=y^4-4y-4$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)\left(\sqrt{x-2}-1\right)+2x^2-9x+9=y^4-4y+3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)(x-3)}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(2x-3)=(y-1)^2\left(y^2+2y+3\right)$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{2(x+1)}{\sqrt{x-2}+1}+2x-3\right]=(y-1)^2\left[(y+1)^2+2\right] \quad (1)$$

Rõ ràng $\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x-2}+1}+2x-3>0, \forall x \ge 2$ nên từ (1) suy ra $x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$.

Xét phương trình thứ hai của hệ

$$y^6-6y+5+4x^3-21x^2+30x=9$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2\left(y^4+2y^3+3y^2+4y+5\right)+4x^3-21x^2+30x-9=0 \quad (2)$$

Ta có $y^4+2y^3+3y^2+4y+5=y^4+2y^3+y^2+2y^2+4y+5=\left(y^2+y\right)^2+2(y+1)^2+3>0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa xét hàm số $f(x)=4x^3-21x^2+30x-9; x \ge 3$.

Đạo hàm $f'(x)=12x^2-42x+30>0, \forall x \ge 3 \Rightarrow f(x)$ đồng biến, liên tục nên $f(x) \ge f(3)=0$.

Phương trình (3) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} (y-1)^2=0 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại cặp giá trị thấy thỏa mãn hệ đề bài. Kết luận nghiệm duy nhất $x=3; y=1$.

Nhận xét.

Phương trình thứ nhất của hệ có vế phải là một đại lượng một biến $f(y)=y^4-4y+44$. Thông thường nhiều bạn đọc quen thuộc với bất đẳng thức đều dễ dàng nhận ra mấu chốt vấn đề

$$M=y^4-4y+44=\left(y^4-4y+3\right)+41\geq 41 \text{ với } y^4-4y+3\geq 0,\forall y\in\mathbb{R}.$$

Thực ra điều này được tác giả xây dựng từ bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân với bốn số thực không âm như sau

$$y^4+1+1+1\geq 4\sqrt[4]{y^4}=4|y|\geq 4y\Rightarrow y^4-4y+3\geq 0.$$

Ngoài bản chất đẳng thức như trên các bạn hoàn toàn sử dụng phân tích nhân tử tương tự lời giải hoặc công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số

- ✓ $y^4-4y+3=(y-1)^2\left(y^2+2y+3\right)=(y-1)^2\left[(y+1)^2+2\right]\geq 0$.
- ✓ *Xét hàm số* $f(y)=y^4-4y+3; y\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(y)=4y^3-4$.

  Ta có $f'(y)=0\Leftrightarrow y=1$. *Khảo sát sự biến thiên ta được* $\underset{y\in\mathbb{R}}{Min} f(y)=f(1)=0$.

Sau công đoạn này nhiều bạn xông pha tấn công bất phương trình ẩn x dạng $2(x+1)\sqrt{x-2}+2x^2-11x+7\geq 0$.

Tuy nhiên đây là bất phương trình một ẩn chứa tam thức bên ngoài căn thức nên không phải một điều đơn giản, có thể nói phương án liên hợp ở trên là tối ưu.

Phương trình hệ quả thực chất là hai hàm độc lập một biến

$$N=\left(y^6-6y+5\right)+\left(4x^3-21x^2+30x-9\right)=g(y)+f(x).$$

- ✓ *Với hàm số biến y, thực hành phương án* $g(y)=(y-1)^2\left(y^4+2y^3+3y^2+4y+5\right)$ *cần lưu ý phân tích bình phương* $y^4+2y^3+3y^2+4y+5=y^4+2y^3+y^2+2y^2+4y+5=\left(y^2+y\right)^2+2(y+1)^2+3>0,\forall y\in\mathbb{R}$.
- ✓ *Ngoài ra có thể sử dụng công cụ hàm số với* $g'(y)=6y^5-6; g'(y)=0\Leftrightarrow y=1$.
- ✓ *Hàm số biến x có thể sử dụng phân tích nhân tử* $f(x)=4x^3-21x^2+30x-9; x\geq 3$.

Bài toán 131. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x-3}+2y-1=\dfrac{y^2+1}{x},\\ \sqrt{4x^2-3}+\sqrt{6x^2+3y^2}=2x+y+1.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\sqrt{4x-3}+2xy-x=y^2+1\Leftrightarrow x\left(\sqrt{4x-3}-1\right)+x^2-1=x^2-2xy+y^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{\sqrt{4x-3}+1}+(x-1)(x+1)=(x-y)^2\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{4x-3}+1}+x+1\right)=(x-y)^2$$

Ta có $(x-y)^2\geq 0;\dfrac{x}{\sqrt{4x-3}+1}+x+1>0,\forall x\geq\dfrac{3}{4}\Rightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Lại có

$$(x-y)^2\geq 0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0\Leftrightarrow 2x^2-4xy+2y^2\geq 0$$

$$\Rightarrow 6x^2+3y^2\geq 4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2\Rightarrow\sqrt{6x^2+3y^2}\geq|2x+y|\geq 2x+y$$

Hơn nữa $x\geq 1\Rightarrow\sqrt{4x^2-3}\geq 1\Rightarrow\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{6x^2+3y^2}\geq 2x+y+1$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x-y=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

- *Sau khi thực hiện quy đồng chúng ta quy phương trình thứ nhất về phương trình hai ẩn hỗn tập căn thức, hơn nữa hai ẩn dính vào nhau gây tâm lý hoang mang* $x\sqrt{4x-3}+2xy-x=y^2+1$.
  Trong trường hợp này cần hết sức bình tĩnh thiết lập đại lượng không âm, không quá khó nhận thấy đó là hằng đẳng thức $g(x;y)=(x-y)^2$, *cũng là đơn vị quyết định* $M(x;y)$ *quen thuộc. Biểu thức còn lại chứa độc biến x nên sử dụng liên hợp giải bất phương trình là phù hợp*
  $$x\left(\sqrt{4x-3}-1\right)+x^2-1=x^2-2xy+y^2$$
  $$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{\sqrt{4x-3}+1}+(x-1)(x+1)=(x-y)^2$$
- *Khi đã xuất hiện miền giá trị* $x\ge 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2-3}\ge 1$ *là điều tất yếu. Vấn đề tiếp theo là hai đại lượng tương ứng lọt lại* $\sqrt{6x^2+3y^2}\sim 2x+y$, *rõ ràng là bất đẳng thức là chứng minh thuận chiều lớn hơn nên ta cảm quan theo hướng* $\sqrt{6x^2+3y^2}\ge 2x+y$.
  Sử dụng biến đổi tương đương tương tự lời giải
  $$(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2-4xy+2y^2\ge 0$$
  $$\Rightarrow 6x^2+3y^2\ge 4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2 \Rightarrow \sqrt{6x^2+3y^2}\ge |2x+y|\ge 2x+y$$
  Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky hai bộ số với điểm rơi
  $$(2x+y)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{6}}.\sqrt{6}x+\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}y\right)^2\le\left(\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\right)\left(6x^2+3y^2\right)=6x^2+3y^2$$
  $$\Rightarrow 2x+y\le |2x+y|\le \sqrt{6x^2+3y^2}$$

Bài toán 132. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x-2}+2x\sqrt{2y-1}+x^2\sqrt{x}=2x^2+2y, \\ \sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3x^4+2y^2-1}=x+y+1. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\sqrt{\frac{2}{3}};y\ge\frac{1}{2};3x^4+2y^2-1\ge 0$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-1+x^2\left(\sqrt{x}-1\right)=x^2-2x\sqrt{2y-1}+2y-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2(x-1)}{\sqrt{x}+1}=\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}\right)=\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2$$

Ta có $\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2\ge 0;\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}>0,\forall x\ge\frac{2}{3}$ dẫn đến $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó $x\ge 1\Rightarrow x^2\ge 1\Rightarrow x^4\ge x^2$ và $\sqrt{3x^2-2}\ge 1,\forall x\ge 1$. Ta có các nhận xét

$$3x^4+2y^2-1\ge 3x^2+2y^2-1=2\left(x^2+y^2\right)+x^2-1\ge 2\left(x^2+y^2\right)$$

$$\left(x-y\right)^2\ge 0\Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2\Rightarrow 3x^4+2y^2-1\ge\left(x+y\right)^2$$

Từ đó $\sqrt{3x^4+2y^2-1}\ge |x+y|=x+y\Rightarrow\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{3x^4+2y^2-1}\ge x+y+1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\sqrt{2y-1}\\ x-1=x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 132 vì phương trình thứ nhất có các đại lượng bậc thấp hơn nên ta sẽ chuyển trọng tâm tấn công đối tượng này. Thoạt tiên quan sát chúng ta thấy lại có yếu tố dính kép gây bất lợi cho việc cô lập biến, nhưng chú ý một chút sẽ thấy nó phục vụ cho hằng đẳng thức – dự kiến đơn vị quyết định dấu $M\left(x;y\right)$

$$\sqrt{3x-2}-1+x^2\left(\sqrt{x}-1\right)=x^2-2x\sqrt{2y-1}+2y-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\left(x-1\right)}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2\left(x-1\right)}{\sqrt{x}+1}=\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}\right)=\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2$$

Tổng thể biểu thức biến x ta sử dụng phép liên hợp công phá, một điều chú ý hơn là biểu thức liên hợp xuất hiện biến số trên tử thức, vẫn chỉ là một biến, sẽ phức tạp hơn rất nhiều nếu có sự tham gia của hai biến

$$T\left(x;y\right)\equiv T\left(x;0\right)=\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x}+1}.$$

Tương tự bài toán số 131, tách tương đồng đánh giá $\begin{cases}\sqrt{3x^2-2}\sim 1 & (1)\\ \sqrt{3x^4+2y^2-1}\sim x+y & (2)\end{cases}$

Rõ ràng (1) *tất yếu do miền giá trị* $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$. *Vì bất đẳng thức cùng chiều nên cần* $\sqrt{3x^4+2y^2-1}\ge x+y$.

Biến đổi tương đương

$$\sqrt{3x^4+2y^2-1}\ge x+y\Leftrightarrow 3x^4+2y^2-1\ge x^2+2xy+y^2\Leftrightarrow 3x^4-x^2+y^2-2xy-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^4-2x^2+x^2-2xy+y^2-1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4-1+2x^4-2x^2+\left(x-y\right)^2\ge 0\\ 3x^4-2x^2-1+\left(x-y\right)^2\ge 0\end{array}\right.$$

Hai hướng đi này đều khả quan vì

$$x^4-1+2x^4-2x^2+\left(x-y\right)^2=x^4-1+2x^2\left(x^2-1\right)+\left(x-y\right)^2\ge 0,\forall x\ge 1$$

$$3x^4-2x^2-1+\left(x-y\right)^2\ge 0=\left(x^2-1\right)\left(3x^2+1\right)+\left(x-y\right)^2\ge 0,\forall x\ge 1$$

Bài toán 133. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+3}+\left(x+2y\right)\sqrt{3x-2}=y^2+4x,\\ \sqrt{3y-2}+\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(y+2\right)}=\dfrac{x^2+4xy+3}{2}.\end{cases}\quad\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge\frac{2}{3};x\ge\frac{2}{3}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{x^2+3}-2+x\left(\sqrt{3x-2}-1\right)=y^2-2y\sqrt{3x-2}+3x-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{3x(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}=\left(y-\sqrt{3x-2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}\right)=\left(y-\sqrt{3x-2}\right)^2$$

Nhận xét $\left(y-\sqrt{3x-2}\right)^2\geq 0;\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{3x}{\sqrt{3x-2}+1}>0,\forall x\geq\frac{2}{3}$ nên $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{3y-2}+\sqrt{(x^2+2)(y+2)}\leq\frac{3y-2+1}{2}+\frac{x^2+2+y+2}{2}=\frac{x^2+4y+3}{2}\leq\frac{x^2+4xy+3}{2}.$$

Do đó phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}3y-2=y=1\\x^2+2=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

- *Lưu ý dạng phương trình chốt chặn sử dụng liên hợp – trục căn thức* $f(x;y).T(x;y)=g(x;y)$.

  Với tập xác định D, ta có $T(x;y)\geq 0,\forall x;y\in D$.

  Đơn vị quyết định miền giá trị một biến có thể xoay chuyển quanh $f(x;y),g(x;y)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x;y)\equiv Q\\g(x;y)\equiv Q\end{array}\right.$

  Một trong hai đơn vị $f(x;y),g(x;y)$ *không âm để phục vụ đơn vị Q phát huy hiệu quả.*

  Chúng ta đã biết lúc đó $\left[\begin{array}{l}f(x;y)=m_1U+n_1h_1(x;y)+p_1h_2(x;y)\\g(x;y)=m_1U+n_1h_1(x;y)+p_1h_2(x;y)\end{array}\right.$

  Triển khai mức độ phức tạp được tùy nghi lựa chọn.

- *Các bạn đều có thể nhận thấy bài toán số 133 có phương trình thứ nhất được xây dựng khéo léo, trước hết là hình thức ngắn gọn nhưng sự gắn kết căn thức hỗn tạp đập tan hy vọng cô lập hai biến* $x;y$. *Với tư tưởng áp đặt nghiệm đẹp để* $x=y=1$, *đại lượng không âm* $g(x;y)$ *dựa trên tư tưởng thuần túy với bình phương hiệu* $k(a-b)^2$, *đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra khi* $a=b\Leftrightarrow x=y=1$. *Chia sẻ về phương cách thiết lập đơn vị* $g(x;y)$, *bạn đọc có thể có nhiều lựa chọn*

$$g(x;y)=\left(x-\sqrt{2y-1}\right)^2;g(x;y)=\left(x+1-\sqrt{3y+1}\right)^2;g(x;y)=\left(y+1-\sqrt{x+3}\right)^2;...$$

- *Và hơn thế nữa. Tuy nhiên để ý rằng phương trình thứ nhất vốn đã cần các căn thức một biến x để phục vụ liên hợp đánh giá miền giá trị x, nếu chọn lựa như thế vô tình làm cho xuất hiện 3 căn thức trở lên, hình thức bài toán cồng kềnh mà khó giấu được ý đồ ban đầu của chúng ta, như bài toán số 132. Ở đây tác giả đã lựa chọn trùng lặp căn thức thứ hai tức là* $g(x;y)=\left(y-\sqrt{3x-2}\right)^2$ *cũng vì những lý do nho nhỏ đó.*

- *Đối với phương trình thứ hai của hệ, ý tưởng đánh giá bất đẳng thức là hoàn toàn tự nhiên vì hai vế có sự xuất hiện của* x^2 *tương ứng trong căn, ngoài căn. Sự bằng nhau của hai nhân tử* $x^2+2;y+2$ *gợi ý đến bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân (AM – GM hay Cauchy), tuy nhiên là đánh giá trội, nghĩa là vế trái nhỏ thua vế phải, bước đầu đã thoát khỏi kìm hãm đánh giá giảm vế trái phương trình*

$$\sqrt{3y-2}+\sqrt{(x^2+2)(y+2)}\leq\frac{3y-2+1}{2}+\frac{x^2+2+y+2}{2}=\frac{x^2+4y+3}{2}\leq\frac{x^2+4xy+3}{2}.$$

❖ *Sau khi xử lý đến bước* $\frac{x^2+4y+3}{2}$ *thấy sai khác chút ít với* $\frac{x^2+4xy+3}{2}$, *lúc này miền giá trị* $x\geq 1$ *phát huy tác dụng, khi mà* $4y\leq 4xy,\forall x\geq 1;\forall y\geq \frac{2}{3}>0$.

Bài toán 134. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(3x+43)=10\sqrt{(7y+4)(3x+4)}, \\ (3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-6y-5)\sqrt{7y+4}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $7y+4\geq 0;3x+4\geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-7y)\sqrt{7y+4}+(y-5)\sqrt{7y+4}$$
$$\Leftrightarrow (3x-7y)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{7y+4}\right)=(y-5)\sqrt{7y+4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3x-7y)^2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}=(y-5)\sqrt{7y+4}$$

Vì $\frac{(3x-7y)^2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}\geq 0;\sqrt{7y+4}\geq 0\Rightarrow y-5\geq 0$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$10\sqrt{(7y+4)(3x+4)}=5.2\sqrt{(7y+4)(3x+4)}\leq 5(3x+4+7y+4)$$
$$=5(3x+7y+8)=5.3x+35y+40\leq y.3x+35y+8y=y(3x+43)$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi $\begin{cases} 3x=7y \\ y=5 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{35}{3};y=5$.

Nhận xét.

Bài toán số 134 tác giả trích lược trong một tài liệu, không rõ tác giả, khi nhận thấy sự tương đồng ý tưởng với tài liệu này, thuộc lớp hệ phương trình sử dụng chặn miền giá trị – bất đẳng thức – hàm số. Các bạn có thể có một số quan sát như sau

- *Phương trình thứ hai của hệ gợi ý tưởng liên hợp*

$$(3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-6y-5)\sqrt{7y+4}$$
$$\Leftrightarrow (3x-7y)\sqrt{3x+4}=(3x-7y+y-5)\sqrt{7y+4}$$

- *Hiệu hai căn thức thiết lập bình phương hiệu*

$$(3x-7y)\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{7y+4}\right)=\frac{(3x-7y).(3x-7y)}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}=\frac{(3x-7y)^2}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{7y+4}}.$$

- *Điểm mút* $y-5\geq 0\Leftrightarrow y\geq 5\Rightarrow (x;y)=\left(\frac{35}{3};5\right)$ *khi* $3x=7y$.
- *Sự xuất hiện của* $3x$ *tại hai vế phương trình thứ nhất dẫn dắt bất đẳng thức AM – GM*

$$10\sqrt{(7y+4)(3x+4)}=5.2\sqrt{(7y+4)(3x+4)}\leq 5(3x+4+7y+4)=5(3x+7y+8).$$

Lưu ý nếu vội vàng sử dụng áp đặt điều kiện tìm được $y\geq 5$ *sẽ bị vướng vì*

$5(3x+7y+8)\leq y(3x+7y+8)$ *và cần chứng minh* $3x+7y+8\leq 3x+43\Leftrightarrow y\leq 5$, *ngược.*

Cần khéo léo và nhẹ nhàng chia cắt các đơn vị đối phương

$$5(3x+7y+8)=5.3x+35y+40\leq y.3x+35y+8y=y(3x+43).$$

Sở dĩ như thế vì cần để ý triệt tiêu hai đại lượng trùng lặp $3xy$. *Có thể thông qua bắc cầu*

$$5(3x+7y+8)=15x+35y+40\le 3xy+35y+40$$
$$3xy+35y+40\le 3xy+43y \Leftrightarrow 8y\ge 40 \Leftrightarrow y\ge 5$$

Bài toán 135. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-2y)\sqrt{3x+y}=(x-2)\sqrt{x+5y},\\ 4\sqrt{y^3+3}+2\sqrt{(x^3+1)(10y-1)}=x^3+y^3+18y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}3x+y\ge 0; x+5y\ge 0; y^3+3\ge 0\\ (x^3+1)(10y-1)\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-2y)\sqrt{3x+y}=(x-2y)\sqrt{x+5y}+2(y-1)\sqrt{x+5y}$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)\left(\sqrt{3x+y}-\sqrt{x+5y}\right)=2(y-1)\sqrt{x+5y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2y).2(x-2y)}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+5y}}=2(y-1)\sqrt{x+5y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2y)^2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+5y}}=2(y-1)\sqrt{x+5y}$$

Ta có $\frac{2(x-2y)^2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{x+5y}}\ge 0, \sqrt{x+5y}\ge 0 \Rightarrow y-1\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$, do đó $10y-1>0\Rightarrow x^3+1\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân AM – GM ta có

$$4\sqrt{y^3+3}\le y^3+4+4=y^3+8$$
$$2\sqrt{(x^3+1)(10y-1)}\le x^3+1+10y-1=x^3+10y$$

Kết hợp $1\le y\Rightarrow 4\sqrt{y^3+3}+2\sqrt{(x^3+1)(10y-1)}\le x^3+y^3+10y+8\le x^3+y^3+10y+8y=x^3+y^3+18y$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}y^3+3=4\\ 10y-1=x^3+1\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

Thử lại trên toàn bộ hệ ta thu được nghiệm $x=2; y=1$.

Nhận xét.

- *Tổng quát dành cho phương trình quyết định miền giá trị, motip hệ phương trình số 134*

$$(mx-ny)\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(y)}\right]=\left[\begin{array}{l}h(x;y).\sqrt{f(x)}\\ h(x;y).\sqrt{g(y)}\end{array}\right.\ \textit{thỏa mãn}\ f(x)-g(y)=k(mx-ny).$$

  Khi đó sẽ xuất hiện hệ quả $\frac{k(mx-ny)^2}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(y)}}=\left[\begin{array}{l}h(x;y).\sqrt{f(x)}\\ h(x;y).\sqrt{g(y)}\end{array}\right.$

- *Rõ ràng là $h(x;y)$ thiên biến vạn hóa, tạm dừng chân với một ẩn. Đối với bài toán số 135 này, ban đầu tác giả lựa chọn $h(x;y)=y-1$ thôi, nhưng mà chợt thấy như thế hơi lộ liễu vì $x-2y\sim x-y$ nghe chừng nó "thân thiết" quá*

$$(x-2y)\left(\sqrt{3x+y}-\sqrt{x+5y}\right)=(y-1)\sqrt{x+5y}$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)\sqrt{3x+y}=(x-2y)\sqrt{x+5y}+(y-1)\sqrt{x+5y}=(x-y-1)\sqrt{x+5y}$$

- *Rắp tâm làm cho nó không ngóc đầu dậy được, khuynh hướng gọn gàng triệt tiêu ẩn y, mạo muội chọn lựa đa thức* $h(x;y)=2(y-1)$

$$(x-2y)\left(\sqrt{3x+y}-\sqrt{x+5y}\right)=2(y-1)\sqrt{x+5y}$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)\sqrt{3x+y}=(x-2y)\sqrt{x+5y}+2(y-1)\sqrt{x+5y}=(x-2)\sqrt{x+5y}$$

Các bạn có thể dọa ma choán tâm lý bằng biến đổi

$$(x-2y)\sqrt{3x+y}=(x-2)\sqrt{x+5y}\Leftrightarrow \frac{x-2y}{x-2}.\sqrt{3x+y}=\sqrt{x+5y}.$$

Hoặc tiếp tục $\frac{x-2-2y+2}{x-2}.\sqrt{3x+y}=\sqrt{x+5y}\Leftrightarrow\left(1-\frac{2y-2}{x-2}\right).\sqrt{3x+y}=\sqrt{x+5y}$.

- *Đối với phương trình thứ hai của hệ, để áp dụng được bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân nhất thiết các bạn cần có* $10y-1>0\Rightarrow x^3+1\ge 0$*, đơn giản vì điều kiện tiên quyết là các hạng tử tham gia không âm, dạng thức* $2\sqrt{ab}\le a+b$ *khi* $a;b\ge 0$.

  Đơn cử chúng ta có $2\sqrt{2}=2\sqrt{2.1}\le 2+1$ *đúng và* $2\sqrt{(-2).(-1)}\le(-2)+(-1)$ *sai.*

Bài toán 136. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x-1}=(y+4)\sqrt{x},\\ 7\sqrt{y^2-4y-5}+\sqrt{x^3+y^3+2xy}+y\sqrt{x}=3.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge\frac{2}{3}\\ y^2-4y-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{2}{3}\\ y\ge 1\vee y\le -5\end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $2\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x-1}>0,\forall x\ge\frac{2}{3}\Rightarrow y+4>0\Leftrightarrow y>-4$.

Kết hợp điều kiện thu được $y\ge 1$, lúc này biến đổi phương trình thứ nhất

$$2\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x-1}-5\sqrt{x}=(y-1)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}\right)+3\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)=(y-1)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=(y-1)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}\right)=(y-1)\sqrt{x}$$

Vì $\frac{4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}>0;(y-1)\sqrt{x}\ge 0,\forall y\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Kết hợp $\begin{cases}x\ge 1>0\\ y\ge 1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^3+y^3+2xy}\ge\sqrt{4}=2\\ y\sqrt{x}\ge 1\end{cases}\Rightarrow 7\sqrt{y^2-4y-5}+\sqrt{x^3+y^3+2xy}+y\sqrt{x}\ge 3$.

Toàn bộ các dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$, cặp số này thỏa mãn hệ ban đầu.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 136 này, cảm giác đầu tiên là hai biến đã may mắn được bố trí cho chúng ta dạng cô lập. Thành thử không phán đoán được nghiệm $x=1$ để tiến hành liên hợp, một số bạn dựa trên cơ sở $x \ge \frac{2}{3}$, chia cả hai vế phương trình thứ nhất cho $\sqrt{x}$, đưa về dạng

$$2\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x-1}=(y+4)\sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{3-\frac{2}{x}}+3\sqrt{2-\frac{1}{x}}=y+4.$$

Sau đó tất yếu đặt ẩn phụ và hy vọng tấn công theo lối mòn $\frac{1}{x}=t \Rightarrow 2\sqrt{3-t}+3\sqrt{2-t}=y+4$.

Một điều không may xảy ra, điều kiện xác định y của mình là hai tập hợp rời nhau $y \ge 1 \vee y \le -5$, *như vậy đánh giá theo một chiều là khó khăn và không toàn vẹn. Để ý một chút có thể thấy giản lược đi được điều kiện này, bằng cách sử dụng điều kiện có nghiệm ngay chính phương trình trên* $\begin{cases} y+4>0 \\ y \ge 1 \vee y \le -5 \end{cases} \Leftrightarrow y \ge 1$.

Bài toán 137. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x+3}=3(x+1)+(y^3-x-4)\sqrt{4x-3}, \\ \sqrt{x^3+y+2}+(x+y-2)\sqrt{y^3-1}=2. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+y+2 \ge 0 \\ y \ge 1; x \ge \frac{3}{4} \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{x+3}-2x+(x+3)\sqrt{4x-3}-x-3=(y^3-1)\sqrt{4x-3} \\
& \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x+3}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{4x-3}-1\right)=(y^3-1)\sqrt{4x-3} \\
& \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x+3)(x-1)}{\sqrt{4x-3}+1}=(y^3-1)\sqrt{4x-3} \\
& \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x+3)}{\sqrt{4x-3}+1}\right]=(y^3-1)\sqrt{4x-3}
\end{aligned}$$

Lại có $(y^3-1)\sqrt{4x-3} \ge 0, \forall y \ge 1; \frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x+3)}{\sqrt{4x-3}+1}>0, \forall x \ge \frac{3}{4}$ dẫn đến $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2 \ge 0 \\ x^3+y+2 \ge 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^3+y+2}+(x+y-2)\sqrt{y^3-1} \ge 2$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.

Bài toán 138. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}=(y+1)\sqrt{x+3}, \\ \sqrt{(y-1)(y+4)}+\sqrt{x^5+x^3+2y^2}=x+y. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ (y-1)(y+4) \ge 0 \\ x^5+x^3+2y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 1 \vee y \le -4 \\ x^5+x^3+2y^2 \ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$, kết hợp điều kiện ta được $y \ge 1$.

$$2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}=(y-1)\sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}=(y-1)\sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}\right)=(y-1)\sqrt{x+3}$$

Ta có $\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}>0,(y-1)\sqrt{x+3}\geq 0,\forall y\geq 1$ dẫn đến $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Khi đó ta để ý $x^5+x^3-2x^2=x^2\left(x^3+x-2\right)\geq 0\Rightarrow x^5+x^3+2y^2\geq 2x^2+2y^2$.

Hơn nữa $(x-y)^2\geq 0\Rightarrow 2x^2+2y^2\geq (x+y)^2\Rightarrow \sqrt{2x^2+2y^2}\geq |x+y|\geq x+y$, dẫn đến
$$\sqrt{x^5+x^3+2y^2}\geq \sqrt{2x^2+2y^2}\geq x+y\Rightarrow \sqrt{(y-1)(y+4)}+\sqrt{x^5+x^3+2y^2}\geq x+y.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Bài toán 139. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(y^3+6\right)\sqrt{x}+2\sqrt{x+8}+\sqrt{2-x}=0,\\ \sqrt{y^3-1}+\sqrt{x^2+3xy+5y^2}=4.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $0\leq x\leq 2; y\geq 1; x^2+3xy+5y^2\geq 0$.
Phương trình thứ nhất tương đương với
$$6\sqrt{x}-2\sqrt{x+8}++\sqrt{x}-\sqrt{2-x}=\left(y^3-1\right)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(3\sqrt{x}-\sqrt{x+8}\right)+\sqrt{x}-\sqrt{2-x}=\left(y^3-1\right)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}=\left(y^3-1\right)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8}}+\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\right)=\left(y^3-1\right)\sqrt{x}$$

Ta có $\frac{2}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8}}+\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}>0;\left(y^3-1\right)\sqrt{x}\geq 0,\forall y\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Khi đó $x\geq 1; y\geq 1\Rightarrow x^2+3xy+5y^2\geq 9\Rightarrow \sqrt{y^3-1}+\sqrt{x^2+3xy+5y^2}\geq 3$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $x=y=1$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.
Dạng thức $f(x;y).T(x;y)=g(x;y)$.

$$Q_{136}\equiv f(x;y)=x-1;T(x;y)=\frac{4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}};g(x;y)=(y-1)\sqrt{x}$$
$$Q_{137}=f(x;y)=x-1;T(x;y)=\frac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{4(x+3)}{\sqrt{4x-3}+1};g(x;y)=\left(y^3-1\right)\sqrt{4x-3}$$
$$Q_{138}=f(x;y)=x-1;T(x;y)=\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}};g(x;y)=(y-1)\sqrt{x+3}$$
$$Q_{139}=f(x;y)=x-1;T(x;y)=\frac{2}{3\sqrt{x}+\sqrt{x+8}}+\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}};g(x;y)=\left(y^3-1\right)\sqrt{x}$$

Trải dọc theo tuyến đương 136 – 139, các bạn có thể thấy đại lượng quyết định miền giá trị một biến Q là đơn giản dưới dạng nhị thức bậc nhất, tuy nhiên đơn vị $g(x;y)$ còn lại phù trợ Q, vẫn xuất hiện với hai biến nhưng trông rất trơ trụi và khó bấu víu, không còn là dạng bình phương quen thuộc, cần hết sức lưu tâm đến điều kiện xác định của bài toán, thậm chí là điều kiện có nghiệm để xử lý bằng được.

Bài toán 140. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^3+2x-2}+(x+1)\sqrt{2x-1}=(y+1)\sqrt{x}, \\ 2\sqrt{(y-1)(y^3+5)}+\sqrt[4]{27(2x^4+1)}=2x+1. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ (y-2)(y^3+5)\ge 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x\sqrt{x^3+2x-2}+(x+1)\sqrt{2x-1}>0,\forall x\ge \frac{1}{2}\Rightarrow (y+1)\sqrt{x}>0\Leftrightarrow y>-1.$$

Kết hợp điều kiện $(y-1)(y^3+5)\ge 0\Rightarrow y\ge 1$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$\left(\sqrt{x^3+2x-2}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)=(y-1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^3+x-2)}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x}}+\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=(y-1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x(x^2+x+2)}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}\right]=(y-1)\sqrt{x}$$

Vì $\dfrac{x(x^2+x+2)}{\sqrt{x^3+2x-2}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}>0;(y-1)\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Nhận xét $x^2-2x+1\ge 0\Rightarrow 2x^2-4x+2\ge 0\Leftrightarrow 6x^2+3\ge 4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta lại có

$$(6x^2+3)^2=\left(3\sqrt{2}.\sqrt{2}x^2+3.1\right)^2\le (18+9)(2x^4+1)=27(2x^4+1)$$

$$\Rightarrow 6x^2+3\le \sqrt{27(2x^4+1)}\Rightarrow 2x+1\le \sqrt{6x^2+3}\le \sqrt[4]{27(2x^4+1)}$$

Do đó $2\sqrt{(y-1)(y^3+5)}+\sqrt[4]{27(2x^4+1)}\ge \sqrt[4]{27(2x^4+1)}\ge 2x+1$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.

Bài toán 141. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x-2}+(2y-1)\sqrt{x}=y^2+1, \\ \sqrt{y}+\sqrt{(2x+1)(y+2)}=3x+y. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}+2y\left(\sqrt{x}-1\right)=y^2-2y+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{2y(x-1)}{\sqrt{x}+1}=(y-1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{2y}{\sqrt{x}+1}\right)=(y-1)^2$$

Rõ ràng $(y-1)^2\geq 0;\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{2y}{\sqrt{x}+1}\geq 0,\forall y\geq 0\Rightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{y}+\sqrt{(2x+1)(y+2)}\leq \frac{y+1}{2}+\frac{2x+1+y+2}{2}=\frac{2x+2y+4}{2}=x+y+2\leq x+y+2x=3x+y.$$

Do đó phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}x=1\\y=1\\2x+1=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Đối với các bạn độc giả chưa làm quen với lớp hệ phương trình sử dụng liên hợp chặn miền giá trị biến kết hợp bất đẳng thức – đánh giá thì bài toán này thực sự khó. Cùng với motip các bài toán trước, hệ phương trình số 141 có đại lượng tham gia liên hợp $T(x;y)$ bắt đầu xuất hiện hai ẩn, trong khi đơn vị quyết định miền giá trị và đơn vị còn lại không quá khó để nhận ra

$$T(x;y)=\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{2y}{\sqrt{x}+1}>0;\forall x\geq\frac{2}{3},\forall y\geq 0 \text{ và } g(x;y)=(y-1)^2.$$

Bài toán 142. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{2x-1}+y\sqrt{4x-3}=\left(y^2-y+x+1\right)\sqrt{x},\\ \sqrt{2y-1}+\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x(2-y)}=\dfrac{y-x^2}{2}+2x.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4}\leq x\leq\sqrt{2};\frac{1}{2}\leq y\leq 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)+y\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}\right)=\left(y^2-2y+1\right)\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\frac{3y(x-1)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}}=(y-1)^2\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow(x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\frac{3y}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}}\right)=(y-1)^2\sqrt{x}.$$

Ta có $\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}+\frac{3y}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}}>0,\forall x\in\left[\frac{3}{4};\sqrt{2}\right],\forall y\in\left[\frac{1}{2};2\right];(y-1)^2\sqrt{x}\geq 0$ nên $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân khi đó

$$\sqrt{2y-1}+\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x(2-y)}\leq\frac{2y-1+1}{2}+\frac{2-x^2+1}{2}+\frac{x+2-y}{2}$$
$$=\frac{-x^2+x+y+3}{2}\leq\frac{-x^2+y+4x}{2}=\frac{y-x^2}{2}+2x$$

Phương trình thứ hai có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} 2y-1=2-x^2=1 \\ x=2-y=1 \\ y-1=0; x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

So sánh với điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 143. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\sqrt{2x+y}+y\sqrt{2y+1}=x\sqrt{x+2y}, \\ \sqrt{3y-2}+\sqrt{x(2y-1)}=2x^3+y-1. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge \frac{2}{3}; x\ge 0$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$(x-y)\sqrt{2x+y}-(x-y)\sqrt{x+2y}=y\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}\right)=y\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{2y+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x-y)}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}=\frac{y(x-1)}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y+1}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}=\frac{y(x-1)}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y+1}}$$

Ta có $\frac{(x-y)^2}{\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+2y}}\ge 0; \frac{y}{\sqrt{x+2y}+\sqrt{2y+1}}>0, \forall y\ge \frac{2}{3}$ nên $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó $2x\left(x^2-1\right)\ge 0, \forall x\ge 1 \Rightarrow 2x\le 2x^3$, kết hợp bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân thì

$$\sqrt{3y-2}+\sqrt{x(2y-1)}\le \frac{3x-2+1}{2}+\frac{x+2y-1}{2}=\frac{4x+2y-2}{2}=2x+y-1\le 2x^3+y-1.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức đồng thời xảy ra , nghĩa là $\begin{cases} 3y-2=1 \\ x=2y-1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

So sánh với điều kiện ta có nghiệm duy nhất của hệ $x=y=1$.

Bài toán 144. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\sqrt{x+3y}=(5x-2y-3)\sqrt{y}, \\ \sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x^4+y^4+x^3+1}=1+2\sqrt{xy}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} y\ge 0 \\ xy\ge 0 \\ 3x^2\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \sqrt{\frac{2}{3}} \\ y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y)\sqrt{x+3y}-2(x-y)\sqrt{y}=3(x-1)\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{x+3y}-2\sqrt{y}\right)=3(x-1)\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}}=3(x-1)\sqrt{y}$$

Ta có $\dfrac{(x-y)^2}{\sqrt{x+3y}+2\sqrt{y}} \ge 0; \sqrt{y} \ge 0 \Rightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$x^4+y^4+x^3+1 \ge x^4+y^4+1+1 \ge 4\sqrt[4]{x^4y^4} = 4xy \Rightarrow \sqrt{x^4+y^4+x^3+1} \ge 2\sqrt{xy}.$$

Lại có $\sqrt{3x^2-2} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x^4+y^4+x^3+1} \ge 1+2\sqrt{xy}$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.

Bài toán 145. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2y)\sqrt{7x-6} = x\sqrt{x}+(y^2+1)\sqrt{2x-1}, \\ x^3+2y\sqrt{2-x^3}+2\sqrt{y} = 2x^5+y^2+y+1. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{6}{7} \le x \le \sqrt[3]{2}; y \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\left(\sqrt{7x-6}-\sqrt{x}\right)+2y\left(\sqrt{7x-6}-\sqrt{2x-1}\right) = (y-1)^2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x(x-1)}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{x}}+\frac{5y(x-1)}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{2x-1}} = (y-1)^2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{6x}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{x}}+\frac{5y}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{2x-1}}\right) = (y-1)^2\sqrt{2x-1}$$

Dễ thấy $\dfrac{6x}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{x}}+\dfrac{5y}{\sqrt{7x-6}+\sqrt{2x-1}} > 0, \forall x \in \left[\dfrac{6}{7};\sqrt[3]{2}\right], \forall y \ge 0; (y-1)^2\sqrt{2x-1} \ge 0$.

Từ đó $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1 \Rightarrow x^5 \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân lại có

$$2y\sqrt{2-x^3} \le y^2+2-x^3 \Rightarrow x^3+2y\sqrt{2-x^3} \le y^2+2.$$

Hơn nữa $2\sqrt{y} \le y+1; 2 \le 2x^5 \Rightarrow x^3+2y\sqrt{2-x^3}+2\sqrt{y} \le y^2+2x^5+y+1$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} y-1=0 \\ x=y=1 \\ y=2-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được các nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 146. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}\right)+1 = y^2+2x, \\ (y-1)^2\sqrt{2y-1}+x^3-x^2+7\sqrt{x} = 7. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \dfrac{2}{3}; y \ge \dfrac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}\right) = y^2-2y\sqrt{2x-1}+2x-1$$

$$\Leftrightarrow y\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}\right) = \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x-1)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}} = \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

Ta có $\frac{y}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}} \ge 0, \forall y \ge \frac{1}{2}; \left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+7\sqrt{x}; x \ge 1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+\frac{7}{2\sqrt{x}}=x(3x-2)+\frac{7}{2\sqrt{x}}>0, \forall x \ge 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền $[1;+\infty)$ dẫn đến

$$f(x) \ge \underset{x\ge 1}{Min}\, f(x)=f(1)=7 \Rightarrow (y-1)^2\sqrt{2y-1}+x^3-x^2+7\sqrt{x} \ge 7.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.
Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 147. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x-1}=\frac{x}{y}+y, \\ 2\sqrt{2y-1}+3y\sqrt[3]{2x-1}=5xy. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}; y \ge \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2y\sqrt{2x-1}=x+y^2 \Leftrightarrow 2y\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)=y^2-2y\sqrt{x}+x$$

$$\Leftrightarrow 2y\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)=\left(y-\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2y(x-1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=\left(y-\sqrt{x}\right)^2$$

Ta thấy $\frac{2y}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}>0, \forall y \ge \frac{1}{2}; \left(y-\sqrt{x}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$2\sqrt{2y-1}+3y\sqrt[3]{2x-1} \le 2y-1+1+y(2x-1+1+1)=2xy+3y \le 2xy+3xy=5xy.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.
Vậy hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Đối với các bài toán 141 đến 147 là lớp hệ phương trình sử dụng phép liên hợp linh hoạt xử lý miền giá trị biến x, không cô lập được hai biến độc lập, trong đó biểu thức liên hợp $T(x;y)$ đều chứa hai biến, dù rằng còn đơn độc một phân thức nhưng thực sự khó phát hiện, để làm được điều này các bạn cần tư duy cao độ, bằng mọi giá làm xuất hiện các đại lượng không âm $g(x;y)$ như bình phương, lũy thừa bậc chẵn, căn thức, nhân tử,...tùy theo điều kiện xác định, thậm chí điều kiện có nghiệm của phương trình như các bạn đã thấy.

Riêng đối với bài toán số 147, ngoài phương án liên hợp các bạn có thể sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng – trung bình nhân AM – GM với điểm rơi may mắn $2\sqrt{2x-1}=\frac{x}{y}+y \ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.y}=2\sqrt{x}$.

Tiếp tục sử dụng bất phương trình đi đến $2\sqrt{2x-1} \ge 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} \ge \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x-1 \ge x \Leftrightarrow x \ge 1$.

Bài toán 148. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x-2}+2y\sqrt{2x-1}=y^2+x+\sqrt{x}, \\ 3x^2-3x+y=2x\sqrt{y}-5\sqrt{x}+4. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}; y \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}+2y\sqrt{2x-1}=y^2+x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{x}+2y\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)=y^2-2y\sqrt{x}+x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}}+\frac{2y(x-1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}=\left(y-\sqrt{x}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}+\frac{2y}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}\right)=\left(y-\sqrt{x}\right)^2$$

Ta thấy $\frac{2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}+\frac{2y}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}>0,\forall y\ge 0;\left(y-\sqrt{x}\right)^2\ge 0$ nên dẫn đến $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\left(x^2-2x\sqrt{y}+y\right)+2x^2-3x+5\sqrt{x}=4\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{y}\right)^2+2x^2-3x+5\sqrt{x}=4 \quad (*).$$

Khi đó xét hàm số $f(x)=2x^2-3x+5\sqrt{x};x\ge 1\Rightarrow f'(x)=4x-3+\frac{5}{2\sqrt{x}}>0,\forall x\ge 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét nên

$$f(x)\ge \underset{x\ge 1}{Min}\, f(x)=f(1)=4\Rightarrow\left(x-\sqrt{y}\right)^2+2x^2-3x+5\sqrt{x}\ge 4.$$

Vì vậy phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\sqrt{y};y=\sqrt{x}\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 149. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+3x}=\dfrac{y^2+4\sqrt{x}+x}{y+2},\\ x\sqrt{3x+1}+\sqrt{2\left(x^4+1\right)}=4\sqrt{y}.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(y+2)\sqrt{x^3+3x}=4\sqrt{x}+y^2+x\Leftrightarrow (y+2)\sqrt{x^3+3x}-2(y+2)\sqrt{x}=y^2-2y\sqrt{x}+x$$
$$\Leftrightarrow (y+2)\left(\sqrt{x^3+3x}-2\sqrt{x}\right)=y^2-2y\sqrt{x}+x\Leftrightarrow\frac{(y+2)\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^3+3x}+2\sqrt{x}}=\left(y-\sqrt{x}\right)^2$$

Ta thấy $\frac{y+2}{\sqrt{x^3+3x}+2\sqrt{x}}>0,\forall y\ge 0;\left(y-\sqrt{x}\right)^2\ge 0\Rightarrow x^3-x\ge 0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ -1\le x\le 0\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện đi đến hai khả năng $x=0\vee x\ge 1$.

- $x=0\Rightarrow 4\sqrt{y}=\sqrt{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{8}$, cặp số $\left(0;\frac{1}{8}\right)$ không thỏa mãn hệ.
- $x\ge 1\Rightarrow x\sqrt{3x+1}\ge 2$. Khi đó nhận xét $2x^4+2\ge x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{2x^4+2}\ge y^2+1$.

  Dẫn đến $x\sqrt{3x+1}+\sqrt{2\left(x^4+1\right)}\ge y^2+3=y^2+1+1+1\ge 4\sqrt[4]{y^2}=4\sqrt{y}$.

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2=x-1=0\\ y-\sqrt{x}=0;y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài toán 150. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\sqrt{x^3+8x}+(3y+4)\sqrt{x+8}-x=y^2+4y+12, \\ \sqrt{x(2x-y)}+2\sqrt{y(x+3)}=\dfrac{4x^5+3x+3y}{2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(x^2+8)\ge 0 \\ x(2x-y)\ge 0 \\ y(x+3)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x\ge y \\ y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y\left(\sqrt{x^3+8x}+\sqrt{x+8}\right)=y^2+4y+4-2(y+2)\sqrt{x+8}+x+8$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x^3+7x-8)}{\sqrt{x^3+8x}+\sqrt{x+8}}=\left(y+2-\sqrt{x+8}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y(x-1)(x^2+x+8)}{\sqrt{x^3+8x}+\sqrt{x+8}}=\left(y+2-\sqrt{x+8}\right)^2$$

Xét trường hợp $\begin{cases} y=0 \\ y+2-\sqrt{x+8}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=(-4;0)$ bị loại.

Xét $y>0 \Rightarrow \dfrac{y(x^2+x+8)}{\sqrt{x^3+8x}+\sqrt{x+8}}>0, \forall y>0; \left(y+2-\sqrt{x+8}\right)^2\ge 0$ dẫn đến $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta lại có

$$\sqrt{x(2x-y)}+2\sqrt{y(x+3)}\le \frac{x+2x-y}{2}+\frac{4y+x+3}{2}=\frac{4x+3y+3}{2}\le\frac{4x^5+3x+3y}{2} \text{ do } x\le x^5, \forall x\ge 1.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra hay $\begin{cases} x=2x-y \\ 4y=x+3 \\ x-1=y+2-\sqrt{x+8}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 151. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\dfrac{3}{x}+y^4+8y, \\ 2x^3+3y+4=3x^2+6\sqrt{y}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2}; y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\left(x+\frac{1}{x}-2\right)-\frac{2\sqrt{2x-1}}{2x}+y^4-6y^2+8y-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x^2-2x+1)}{x}+\frac{2x-2\sqrt{2x-1}}{2x}-1+y^4-6y^2+8y-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{x}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{2x}+y^4-6y^2+8y-3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{x}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{2x}=(1-y)^3(y+3)$$

Để ý rằng $\frac{3(x-1)^2}{x}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{2x}\ge 0,\forall x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow(1-y)^3(y+3)\ge 0\Leftrightarrow y\le 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2x^3-3x^2+3y-6\sqrt{y}+4=0\Leftrightarrow f(x)+g(y)=0$.

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2;x\ge\frac{1}{2}$ thì $f'(x)=6x^2-6x;f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên hàm $f(x)$, rõ ràng trên miền $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right]\Rightarrow \underset{x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right]}{Min} f(x)=f(1)=-1$.

Xét hàm số $g(y)=3y-6\sqrt{y}+4;y\in[0;1]$ thì $f'(y)=\frac{3\left(\sqrt{y}-1\right)}{\sqrt{y}}\le 0,\forall y\in(0;1]$.

Hàm số này nghịch biến nên $\underset{y\in[0;1]}{Min}\, g(y)=g(1)=1$. Như vậy $f(x)+g(y)\ge 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$. Thử lại vào hệ ban đầu ta có cặp nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Nhận xét.

Thao tác biến đổi phương trình thứ nhất của hệ hết sức thú vị, việc tạo ra các hằng đẳng thức như thế trên thực tế không phải một điều dễ thấy, nó manh nha từ cái nhìn bất đẳng thức AM – GM (BĐT Cauchy, liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân). Xét phương trình thứ nhất của hệ

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\frac{3}{x}+y^4+8y$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=3x^2-8x+3+x\left(y^4-6y^2+8y\right)$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=3(x-1)^2+x\left(y^4-6y^2+8y-2\right)$$

Khi đó rõ ràng

$$\sqrt{2x-1}\le\frac{2x-1+1}{2}=x\Rightarrow 3(x-1)^2+x\left(y^4-6y^2+8y-2\right)\le x$$
$$\Rightarrow y^4-6y^2+8y-2\le 1-\frac{x}{3(x-1)^2}\le 1\Leftrightarrow(y-1)^3(y+3)\le 0\Leftrightarrow y\le 1$$

Bài toán 152. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y\sqrt{x^3+y}+(y+2)\sqrt{x+y}=y^2+3y+x+1,\\\sqrt{x(2y-1)}+\sqrt{2x-1}+1=\frac{3}{2}x^4+y.\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2};y\ge\frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y\sqrt{x^3+y}-y\sqrt{x+y}=y^2+3y+x+1-2(y+1)\sqrt{x+y}$$
$$\Leftrightarrow y\left(\sqrt{x^3+y}-\sqrt{x+y}\right)=y^2+2y+1-2(y+1)\sqrt{x+y}+x+y$$
$$\Leftrightarrow\frac{y\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^3+y}+\sqrt{x+y}}=\left(y+1-\sqrt{x+y}\right)^2$$

Ta thấy $\left(y+1-\sqrt{x+y}\right)^2\ge 0;\sqrt{x^3+y}+\sqrt{x+y}>0,\forall x\ge\frac{1}{2},\forall y\ge\frac{1}{2}$.

Dẫn đến $x^3-x\ge 0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ -1\le x\le 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x\ge \frac{1}{2}\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow x\le x^4$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân cho phương trình thứ hai

$$\sqrt{x\left(2y-1\right)}+\sqrt{2x-1}\le \frac{x+2y-1}{2}+\frac{1+2x-1}{2}=\frac{3x+2y-2}{2}=\frac{3x}{2}+y-1\le \frac{3}{2}x^4+y-1.$$

Hệ có nghiệm khi tất cả các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} x=2y-1 \\ 2x-1=1 \\ y+1=\sqrt{x+y}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ y+1=\sqrt{x+y}\end{cases}\Rightarrow x;y\in\varnothing$.

Kết luận hệ ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 153. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\sqrt{x^2+3y}+\left(2x-y+2\right)\sqrt{x+3y}=x^2+3x+3y+1, \\ 3+\sqrt{\left(2y-1\right)\left(3x-2\right)}+\sqrt{5x-4}=4x\sqrt{x}+y.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{4}{5};y\ge \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y\left(\sqrt{x^2+3y}-\sqrt{x+3y}\right)=x^2+2x+1-2\left(x+1\right)\sqrt{x+3y}+x+3y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+3y}+\sqrt{x+3y}}=\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2$$

Vì $\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2\ge 0;\sqrt{x^2+3y}+\sqrt{x+3y}>0;\forall x\ge \frac{4}{5}.\forall y\ge \frac{1}{2}$ dẫn đến $x^2-x\ge 0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x\ge \frac{4}{5}\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow \sqrt{x}\ge 1\Rightarrow x\le x\sqrt{x}$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân với phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{\left(2y-1\right)\left(3x-2\right)}+\sqrt{5x-4}\le \frac{2y-1+3x-2}{2}+\frac{5x-4+1}{2}$$

$$=\frac{8x+2y-6}{2}=4x+y-3\le 4x\sqrt{x}+y-3$$

Hệ có nghiệm khi toàn bộ các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} 2y-1=3x-2 \\ 5x-4=\sqrt{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1\end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 154. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^3+x-y}=y-1+\frac{3x}{y}, \\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+x-y}+\sqrt{y}=2x^3+1.\end{cases}\quad \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{1}{2};y>0;x^3+x-y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$2y\sqrt{x^3+x-y}=y^2+3x-y$$
$$\Leftrightarrow 2y\left(\sqrt{x^3+x-y}-\sqrt{2x-y}\right)=y^2-2y\sqrt{2x-y}+2x-y$$
$$\Leftrightarrow \frac{2y\left(x^3-x\right)}{\sqrt{x^3+x-y}+\sqrt{2x-y}}=\left(y-\sqrt{2x-y}\right)^2$$

Ta thấy $\left(y-\sqrt{2x-y}\right)^2\geq 0;\sqrt{x^3+x-y}+\sqrt{2x-y}\geq 0;\forall y>0$ nên $x^3-x\geq 0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1\\-1\leq x\leq 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow x\leq x^3\Rightarrow x^3+3x\leq 4x^3$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân cho phương trình thứ hai

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+x-y}+\sqrt{y}\leq\frac{1+2x-1}{2}+\frac{x^3+x-y+1}{2}+\frac{y+1}{2}=\frac{x^3+3x+2}{2}\leq\frac{4x^3+2}{2}=2x^3+1.$$

Hệ có nghiệm khi tất cả các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}2x-1=x^3+x-y=1\\y=1\\y=\sqrt{2x-y}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại, kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 155. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y-1)\sqrt{3x+y}=(x-y)\sqrt{2(x+y)}-\sqrt{y+3},\\\sqrt{x^3-2x+5}+\sqrt{y^4-4y+x+3}=3.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}3x+y\geq 0;x+y\geq 0\\y\geq -3;x^3-2x+5\geq 0\\y^4-4y+x+3\geq 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x-y)\sqrt{3x+y}-(x-y)\sqrt{2(x+y)}=\sqrt{3x+y}-\sqrt{y+3}$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{3x+y}-\sqrt{2x+2y}\right)=\sqrt{3x+y}-\sqrt{y+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{2x+2y}}=\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{y+3}}$$

Ta thấy $\frac{(x-y)^2}{\sqrt{3x+y}+\sqrt{2x+2y}}\geq 0;\sqrt{3x+y}+\sqrt{y+3}>0\Rightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Với phương trình thứ hai của hệ

Xét hàm số $f(x)=x^3-2x+5;x\geq 1\Rightarrow f'(x)=3x^2-2>0,\forall x\geq 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét dẫn đến $f(x)\geq \underset{x\geq 1}{Min}\, f(x)=f(1)=4\Rightarrow\sqrt{x^3-2x+5}\geq 2$.

Lại có $y^4-4y+x+3\geq y^4-4y+4$. Xét hàm số $g(y)=4y^3-4;g'(y)=0\Leftrightarrow y^3=1\Leftrightarrow y=1$.

Khảo sát hàm số này ta có $g(y)\geq \underset{y\in\mathbb{R}}{Min}\, g(y)=g(1)=1\Rightarrow\sqrt{y^4-4y+x+3}\geq 1$.

Như vậy $\sqrt{x^3-2x+5}+\sqrt{y^4-4y+x+3}\geq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Bài toán 156. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(y^2+4\sqrt{3x+y}+6\right)=3(x+4), \\ \sqrt{x^2-2xy+y^3+1}+\sqrt{3x^2+5y^2+1}=1+|x+2|. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x+y\ge 0 \\ x^2-2xy+y^3+1\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^3+4y\sqrt{3x+y}+6y=3x+12$$
$$\Leftrightarrow 3x+y-4y\sqrt{3x+y}+4y^2=y^3+4y^2+7y-12$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+y}-2y\right)^2=y^3+4y^2+7y-12$$

Rõ ràng $y^3+4y^2+7y-12\ge 0\Leftrightarrow (y-1)\left(y^2+5y+12\right)\ge 0\Leftrightarrow (y-1)\left[\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\right]\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Từ đây $y\ge 1\Rightarrow y^3\ge y^2\Rightarrow x^2-2xy+y^3+1\ge x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1\ge 1\Rightarrow \sqrt{x^2-2xy+y^3+1}\ge 1$.

Lại có $(x-1)^2\ge 0\Rightarrow 2(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow 3x^2+6\ge x^2+4x+4$, nên

$$y\ge 1\Rightarrow 3x^2+5y^2+1\ge 3x^2+6\ge x^2+4x+4=(x+2)^2\Rightarrow \sqrt{3x^2+5y^2+1}\ge |x+2|.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} x-1=0;y=1 \\ x-y=0;x+2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Trên đây các bạn vừa tiếp cận với một loạt các bài toán hệ phương trình vô tỷ kết hợp đánh giá – hàm số - bất đẳng thức (từ thí dụ 120 đến thí dụ 155), với hướng đi chặn miền giá trị của một trong hai biến bằng cách sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức với đầy đủ các hình thức đa dạng, phong phú.

Phương trình chốt chặn sử dụng liên hợp – trục căn thức $f(x;y).T(x;y)=g(x;y)$.

Với tập xác định D, ta có $T(x;y)\ge 0,\forall x;y\in D$.

Đơn vị quyết định miền giá trị một biến có thể xoay chuyển quanh $f(x;y),g(x;y)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x;y)\equiv Q \\ g(x;y)\equiv Q \end{array}\right.$

Một trong hai đơn vị $f(x;y),g(x;y)$ *không âm để phục vụ đơn vị Q phát huy hiệu quả.*

Chúng ta đã biết lúc đó $\left[\begin{array}{l} f(x;y)=m_1U+n_1h_1(x;y)+p_1h_2(x;y) \\ g(x;y)=m_1U+n_1h_1(x;y)+p_1h_2(x;y) \end{array}\right.$

Biểu thức tham gia liên hợp $T(x;y)$ *từ dễ đến khó, từ xuất hiện hằng số trên tử thức tiến dần đến một biến, hai biến nằm trên tử thức. Đó là chưa kể đến* $f(x;y),g(x;y)$ *xoay chuyển không ngừng qua bình phương, lũy thừa bậc chẵn, căn thức tùy theo điều kiện xác định.*

Từ bài toán 156, chúng ta tạm rời xa thiên hướng liên hợp, quay trở lại khai thác tính chất không âm dựa trên các tổng bình phương, cũng là một mảnh đất quen thuộc nhưng không kém phần màu mỡ.

Bài toán 157. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(y+2)=x^3+2(x+1)\sqrt{x+3y}, \\ \sqrt[3]{x^4+3x^2y+3x^2y^2+y^3}+\sqrt{2y^2+4y+10x^2}=x+2y+3. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2y^2+4y+10x^2\ge 0; x+3y\ge 0$.
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}&3y+6=x^3+2(x+1)\sqrt{x+3y}\\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x+3y}+x+3y=x^3+x^2+3x-5\\ &\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^3+x^2+3x-5\end{aligned}$$

Rõ ràng ta phải có $x^3+x^2+3x-5\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+5)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)^2+4\right]\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó $\begin{cases}x^4\ge x^3\\ x^2\ge x\end{cases}\Rightarrow \sqrt[3]{x^4+3x^2y+3x^2y^2+y^3}\ge \sqrt[3]{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}=\sqrt[3]{(x+y)^3}=x+y$.

Hơn nữa $2y^2+4y+10x^2\ge 2y^2+4y+10\ge y^2+6y+9=(y+3)^2\Rightarrow \sqrt{2y^2+4y+10x^2}\ge |y+3|\ge y+3$.

Do đó $\sqrt[3]{x^4+3x^2y+3x^2y^2+y^3}+\sqrt{2y^2+4y+10x^2}\ge x+y+y+3=x+2y+3$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}x=1; y-1=0\\ y+3\ge 0\\ x+1=\sqrt{x+3y}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Nhận xét.

Để thiết kế lớp hệ phương trình này không quá khó, điều quan trọng là giấu được các bản chất tổng bình phương và làm gọn phương trình khai triển của chúng ta. Lấy thí dụ bài toán số 157, ấn định nghiệm đẹp $x=y=1$, giả định sử dụng bình phương để lập phương trình chốt chặn miền giá trị của từng biến theo dạng thức

$$\left[\begin{array}{ll}k\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=t(x) & (1)\\ k\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=t(y) & (2)\end{array}\right.$$

Các bạn tạm thời lấy trường hợp đơn giản nhất $k=1$. Nếu sử dụng (1) thì mục tiêu chặn miền giá trị biến x và sử dụng (2) là mục tiêu chặn miền giá trị biến y. Tất cả bạn đọc đều biết nếu khai triển bình phương vế trái như trên sẽ xuất hiện phần lớn đa thức chứa x.

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x+3y}+x+3y=x^2+3x+3y+1-2(x+1)\sqrt{x+3y}.$$

Vì thế sử dụng (1) sẽ tối ưu hơn (2) khi bố trí $t(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ để triệt tiêu (tất nhiên chỉ triệt tiêu một biến) được đại lượng $M=x^2+3x+3y+1$. Một câu hỏi đặt ra là vì sao chúng ta lại lựa chọn đa thức bậc ba thay vì tam thức bậc hai, một khả năng quen thuộc và càng làm gọn gàng phương trình chốt.

- *Trước tiên mời các bạn quan sát các điển hình sau*

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^2-2x+1;\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=3\left(x^2-4x+4\right)$$
$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=2\left(4x^2-4x+1\right);\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=9x^4-6x^2+1;\ldots$$

  Với dạng thức trên chúng ta không khai thác được điều gì trừ dạng nhân tử phức tạp.
  Hơn nữa hai vế đều có dạng bình phương, đặc tính không âm là hiển nhiên.

- *Tiếp theo là các thí dụ*

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^2+3x-4;\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=3\left(x^2-4x+3\right)$$
$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=2\left(2x^2-5x+2\right);\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=5x^4-6x^2+1;\ldots$$

  Với các thí dụ thuộc mục 2, chúng ta khai thác được miền giá trị biến x.

Ngoài ra còn triệt tiêu được đại lượng M đưa về phương trình hết sức đẹp mắt

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^2+3x-4$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+3y+1-2(x+1)\sqrt{x+3y}=x^2+3x-4$$
$$\Leftrightarrow 3y+5=2(x+1)\sqrt{x+3y}$$

Tuy nhiên $x^2+3x-4\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x+4)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -4\end{array}\right.$

Miền giá trị biến x thuộc hai tập hợp rời nhau nên gây bất lợi cho quá trình đánh giá tiếp theo.
Để co cụm được miền giá trị trên bắt buộc cần có thêm yếu tố tại phương trình thứ hai.
Thí dụ như sự xuất hiện của các căn, hoặc một phương trình đánh giá tạo ra miền đối lập như

$$\sqrt{x};\sqrt{2x-1};\sqrt{x+3};\sqrt[4]{3x+4};...$$
$$N^{2k}=x-2\Rightarrow x\ge 2;N^{2k}=2x-1\Rightarrow x\ge\frac{1}{2};N^{2k}=3x-2\Rightarrow x\ge\frac{2}{3}$$

- *Vấn đề này tác giả sẽ xin đề cập sau. Thay đổi theo hướng đa thức bậc ba bất kỳ có nghiệm hữu tỷ*

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^3-6x^2+11x-6;\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=3\left(x^3+4x^2-5\right)$$
$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=2\left(x^3+2x^2-7x+4\right);\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^3-9x;...$$

Khai thác miền giá trị

$$x^3-6x^2+11x-6\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$$
$$x^3+4x^2-5\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+5x+5\right)\ge 0$$
$$x^3+2x^2-7x+4\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+3x-4\right)\ge 0$$

Các miền đều rời nhau và tỏ ra phức tạp, khi không có sự hỗ trợ điều kiện nào sau đó.

- *Dựa trên những thử nghiệm trên bước đầu chúng ta sử dụng đa thức bậc ba với nghiệm duy nhất và có các hệ số thích hợp nhất mục tiêu triệt tiêu đại lượng M*

$$\left(x+1-\sqrt{x+3y}\right)^2=x^2+3x+3y+1-2(x+1)\sqrt{x+3y}\Rightarrow t(x)=ax^3+x^2+3x+d\,.$$

Do nghiệm ấn định bằng 1 nên a và d được xác định khá đơn giản

$$t(x)=ax^3+x^2+3x+d$$
$$a=1;f(1)=0\Leftrightarrow d=-5$$
$$a=2;f(1)=0\Leftrightarrow d=-6$$
$$a=3;f(1)=0\Leftrightarrow d=-7$$

Lưu ý quá trình chọn a và d cũng cần chính xác, khéo léo, tránh tạo ra đa thức hai nghiệm.

Bài toán 158. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y^2-2y+2x}+\sqrt{x^2-x+4y}=1+\sqrt{y},\\ x^3+2x\sqrt{2x-y}=4-y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}y^2-2y+2x\ge 0;x^2-x+4y\ge 0\\ 2x-y\ge 0;y\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{2x-y}+2x-y=x^3+x^2+2x-4\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x-y}\right)^2=x^3+x^2+2x-4\,.$$

Rõ ràng $x^3+x^2+2x-4\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+4)\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1)^2+3\right]\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó $x\ge 1 \Rightarrow x^2-x=x(x-1)\ge 0 \Rightarrow x^2-x+4y\ge 4y \Rightarrow \sqrt{x^2-x+4y}\ge\sqrt{4y}=2\sqrt{y}$.

Lại có $x\ge 1\Rightarrow \sqrt{y^2-2y+2x}\ge\sqrt{y^2-2y+2}=\sqrt{(y-1)^2+1}\ge 1$ dẫn đến $\sqrt{y^2-2y+2x}+\sqrt{x^2-x+4y}\ge 1+\sqrt{y}$.

Phương trình thứ nhất có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $x=y=1$.

Bài toán 159. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2x\sqrt{3x-2y}=4x^2-2y+1, \\ y^2+7x=2y\sqrt{3x-2y}+2y+4. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x-2y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{3x-2y}+3x-2y=x^3-3x^2+3x-1 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x-2y}\right)^2=(x-1)^3.$$

Dễ thấy $\left(x-\sqrt{3x-2y}\right)^2\ge 0 \Rightarrow (x-1)^3\ge 0 \Leftrightarrow x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai trở thành $y^2-2y\sqrt{3x-2y}+3x-2y+4x=4 \Leftrightarrow \left(y-\sqrt{3x-2y}\right)^2+4x=4$.

Lại có $\left(y-\sqrt{3x-2y}\right)^2+4x\ge 4,\forall x\ge 1$ nên phương trình thứ hai có nghiệm khi $\begin{cases} y=\sqrt{3x-2y} \\ x=\sqrt{3x-2y} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 160. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+2y\sqrt{2x-y}=4y^2-4y+2x+1, \\ 2y^3-6y^2+5y+x^2+2x=2x\sqrt{2x-y}+2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x-y\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^2-2y\sqrt{2x-y}+2x-y=y^3-3y^2+3y-1$$
$$\Leftrightarrow \left(y-\sqrt{2x-y}\right)^2=(y-1)^3$$

Rõ ràng $\left(y-\sqrt{2x-y}\right)^2\ge 0\Rightarrow (y-1)^3\ge 0 \Leftrightarrow y\ge 1$. Biến đổi phương trình thứ hai

$$x^2-2x\sqrt{2x-y}+2x-y+2\left(y^3-3y^2+3y-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2x-y}\right)^2+2(y-1)^3=0$$

Dễ thấy $\left(x-\sqrt{2x-y}\right)^2+2(y-1)^3\ge 0,\forall y\ge 1$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi $\begin{cases} x=\sqrt{2x-y} \\ y-1=0 \\ y=\sqrt{2x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 161. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+3x^2+y^2=2xy\left(\sqrt{2x-1}+1\right)+x+y-1, \\ \sqrt{x(2y-1)}+\sqrt{3y-2}=\dfrac{x-3}{2}+3y. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2};y\ge\dfrac{2}{3}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x\left(y^2-2y\sqrt{2x-1}+2x-1\right)+x^2-2xy+y^2=y-1$$

$$\Leftrightarrow x\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+(x-y)^2=y-1$$

Rõ ràng $x\left(y-\sqrt{2x-1}\right)^2+(x-y)^2\ge 0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{x(2y-1)}+\sqrt{3y-2}\le\sqrt{x(2y-1)}+\sqrt{y(3y-2)}\le\frac{x+2y-1}{2}+\frac{y+3y-2}{2}=\frac{x-3}{2}+3y.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là

$$\begin{cases} x=2y-1;y=3x-2 \\ y=1;x-y=0 \\ y=\sqrt{2x-1} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Thử lại, kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 162. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^3+2x\sqrt{2x-y}=8-y, \\ y^2+(1-2y)\sqrt{2x^3-1}+2x^3=2. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x\ge y;x^3\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{2x-y}+2x-y=5x^3+x^2+2x-8\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2x-y}\right)^2=5x^3+x^2+2x-8.$$

Rõ ràng $5x^3+x^2+2x-8\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(5x^2+6x+8\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Khi đó phương trình thứ hai tương đương với

$$y^2-2y\sqrt{2x^3-1}+2x^3-1+\sqrt{2x^3-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{2x^3-1}+\left(y-\sqrt{2x^3-1}\right)^2=1.$$

Lại thấy $x\ge 1\Rightarrow\sqrt{2x^3-1}\ge 1\Rightarrow\sqrt{2x^3-1}+\left(y-\sqrt{2x^3-1}\right)^2\ge 1$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{2x^3-1} \\ x=\sqrt{2x-y} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại, kết luận hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 163. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2=y^4+2x\sqrt{4y-3}, \\ 2x^2+5y=3+4x\sqrt{2y-1}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y \ge \frac{3}{4}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2 - 2x\sqrt{4y-3} + 4y - 3 = y^4 + 4y - 5 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{4y-3}\right)^2 = y^4 + 4y - 5.$$

Như vậy $\begin{cases} y^4 + 4y - 5 \ge 0 \\ y \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)\left(y^3 + y^2 + y + 5\right) \ge 0 \\ y \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $2\left(x^2 - 2x\sqrt{2y-1} + 2y - 1\right) = 1 - y \Leftrightarrow 2\left(x - \sqrt{2y-1}\right)^2 = 1 - y$.

Rõ ràng $1 - y \ge 0 \Leftrightarrow y \le 1$. Các dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} y = 1 \\ x = \sqrt{2y-1} \\ x = \sqrt{4y-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 164. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 2(x+1)\sqrt{3x+y} = 2x + y + 2, \\ (y+1)\left(2y + 1 - 2\sqrt{3y+x}\right) = -2x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3y + x \ge 0; 3x + y \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2 + 2x + 1 - 2(x+1)\sqrt{3x+y} + 3x + y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$\Leftrightarrow \left(x + 1 - \sqrt{3x+y}\right)^2 = (x-1)^3$$

Ta có $\left(x + 1 - \sqrt{3x+y}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow (x-1)^3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. Phương trình thứ hai tương đương với

$$2y^2 + 3y + 1 - 2(y+1)\sqrt{3y+x} = -2x$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 - 2(y+1)\sqrt{3y+x} + 3y + x + y^2 - 2y + 1 = 1 - x$$
$$\Leftrightarrow \left(y + 1 - \sqrt{3y+x}\right)^2 + (y-1)^2 = 1 - x$$

Rõ ràng $\left(y + 1 - \sqrt{3y+x}\right)^2 + (y-1)^2 \ge 0 \Rightarrow 1 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$.

Hệ có nghiệm khi toàn bộ các dấu đẳng thức xảy ra, tức là $\begin{cases} y + 1 = \sqrt{3y+x} \\ x + 1 = \sqrt{3x+y} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 165. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + 2xy + 7 = x^3 + y + 2(x+y)\sqrt{5x-y}, \\ \sqrt{3-2xy} + \sqrt{2y-x^2} = \frac{5-x^3}{2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 5x - y \ge 0; 3 - 2xy \ge 0 \\ 2y - x^2 \ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2+2xy+y^2-2(x+y)\sqrt{5x-y}+5x-y=x^3+x^2+5x-7$$
$$\Leftrightarrow\left(x+y-\sqrt{5x-y}\right)^2=x^3+x^2+5x-7$$

Rõ ràng chúng ta có $x^3+x^2+5x-7\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+2x+7\right)\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left[(x+1)^2+6\right]\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Sử dụng điều này và áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\sqrt{3-2xy}+\sqrt{2y-x^2}\le\sqrt{3-2xy}+\sqrt{x\left(2y-x^2\right)}\le\frac{3-2xy+1}{2}+\frac{2xy-x^3+1}{2}=\frac{5-x^3}{2}.$$

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}3-2xy=1;2xy-x^3=1\\ x+y=\sqrt{5x-y};x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 166. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2+y+3=2\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)+x^2,\\ \sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{y\left(3x^2+y^2\right)}=\dfrac{(x+y)^3}{4}+2.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $y\ge 0;x\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2+y^2+x+y=2\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)+x^3+x^2+x-3$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{y}+y+y^2-2y\sqrt{x}+x=x^3+x^2+x-3$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{y}\right)^2+\left(y-\sqrt{x}\right)^2=x^3+x^2+x-3$$

Ta có $x^3+x^2+x-3\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+2x+3\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân với phương trình thứ hai

$$\sqrt{4\left(x^2+3y^2\right)}\le\sqrt{4x\left(x^2+3y^2\right)}\le\frac{x^3+3xy^2+4}{2}$$
$$\sqrt{4\left(3x^2y+y^3\right)}\le\frac{3x^2y+y^3+4}{2}$$

Thu được

$$\sqrt{4\left(x^2+3y^2\right)}+\sqrt{4\left(3x^2y+y^3\right)}\le\frac{x^3+3xy^2+4}{2}+\frac{3x^2y+y^3+4}{2}=\frac{(x+y)^3}{2}+4$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3y^2}+\sqrt{y\left(3x^2+y^2\right)}=\frac{(x+y)^3}{4}+2$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases}y=\sqrt{x};x=\sqrt{y}\\ x^2+3y^2=3x^2y+y^3=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 167. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^3+2x\sqrt{2x-y}+y=y^2-2xy+7,\\ \sqrt{17x-6y-10}+2x\sqrt{3y-5x+3}=(x+2)^2-2.\end{cases}\quad(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x \geq y; 3y-5x+3 \geq 0 \\ 17x-6y-10 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x\sqrt{2x-y}+2x-y=3x^3+2x^2+2x-7$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+\left(x-\sqrt{2x-y}\right)^2=3x^3+2x^2+2x-7$$

Rõ ràng chúng ta có $3x^3+2x^2+2x-7 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+5x+7\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân cho phương trình thứ hai

$$\sqrt{17x-6y-10} \leq \sqrt{x(17x-6y-10)} \leq \frac{x+17x-6y-10}{2}=9x-3y-5$$
$$2x\sqrt{3y-5x+3} \leq x^2+3y-5x+3$$

Dẫn đến $\sqrt{17x-6y-10}+2x\sqrt{3y-5x+3} \leq x^2+4x-2=(x+2)^2-2$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 17x-6y-10=1; x=1 \\ x=\sqrt{3x-5y+3} \\ x-y=x-\sqrt{2x-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 168. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\sqrt{y}+1=\dfrac{2}{x}+y, \\ 2\sqrt{2x\left(y^2+1\right)}=2x^3+y^2+x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0; y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x\sqrt{y}-y+1=\frac{2}{x} \Leftrightarrow x\left(2x\sqrt{y}-y+1\right)=2 \Leftrightarrow 2x^2\sqrt{y}+x=xy+2$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-2x\sqrt{y}+y\right)=x^3+x-2 \Leftrightarrow x\left(x-\sqrt{y}\right)^2=x^3+x-2$$

Rõ ràng ta có $x^3+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$x \leq x^3 \Rightarrow \sqrt{2x\left(y^2+1\right)} \leq \frac{2x+y^2+1}{2} \leq \frac{2x^3+y^2+x}{2}.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra nghĩa là $\begin{cases} 2x=y^2+1 \\ x=\sqrt{y} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Đối chiếu và thử lại ta được nghiệm duy nhất của hệ $x=y=1$.

Bài toán 169. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=3y-6\sqrt{xy}+4, \\ \sqrt{3x-2}+\sqrt{xy}=2x^4+\dfrac{y-1}{2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}; y \ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3\left(x+y-2\sqrt{xy}\right)=x^2+3x-4 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=x^2+3x-4.$$

Rõ ràng $x^2+3x-4\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -4 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta được $x\ge 1 \Rightarrow x\le x^4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy thu được

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{xy}\le \frac{1+3x-2}{2}+\frac{x+y}{2}=2x+\frac{y-1}{2}\le 2x^4+\frac{y-1}{2}.$$

Hệ có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra hay $\begin{cases} 3x-2=1 \\ x=y \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Đối chiếu và thử lại ta được nghiệm duy nhất của hệ $x=y=1$.

Bài toán 170. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^3+4\sqrt{2x^2-xy}+2y=11, \\ x^2-y+y^2+3=x+\dfrac{1}{x}+2y\sqrt{2x-y}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x-y\ge 0; x\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\left[3x-y-2\sqrt{x(2x-y)}\right]=5x^3+6x-11$$

$$\Leftrightarrow 2\left[x-2\sqrt{x(2x-y)}+2x-y\right]=5x^3+6x-11$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-y}\right)^2=5x^3+6x-11$$

Rõ ràng $5x^3+6x-11\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(5x^2+5x+11\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^3-xy+xy^2+3x=x^2+2xy\sqrt{2x-y}+1$$

$$\Leftrightarrow x\left(2x-y-2y\sqrt{2x-y}+y^2\right)+x^3-3x^2+3x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{2x-y}-y\right)^2+(x-1)^3=0$$

Vì $x\ge 1>0 \Rightarrow x\left(\sqrt{2x-y}-y\right)^2+(x-1)^3\ge 0$.

Phương trình trên có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là $\begin{cases} \sqrt{2x-y}=y \\ x=1 \\ \sqrt{x}=\sqrt{2x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Đối chiếu và thử lại ta được nghiệm duy nhất của hệ $x=y=1$.

Bài toán 171. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+1=2y+2\sqrt{3x-2y}, \\ x^3+y^2=2y\sqrt{3x-2}. \end{cases} \quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}; 3x \ge 2y$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3x-2y-2\sqrt{3x-2y}+1=3x-\frac{3}{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2y}-1\right)^2=3x-\frac{3}{x}.$$

Ta thấy $3x-\frac{3}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+1)}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -1 \le x \le 0 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $x \ge \frac{2}{3} \Rightarrow x \ge 1$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} & 3x-2-2y\sqrt{3x-2}+y^2+x^3-3x+2=0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{3x-2}-y\right)^2+(x-1)^2(x+2)=0 \end{aligned}$$

Rõ ràng $\left(\sqrt{3x-2}-y\right)^2+(x-1)^2(x+2) \ge 0, \forall x \ge \frac{2}{3}$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi đồng bộ các dấu đẳng thức xảy ra nghĩa là $\begin{cases} \sqrt{3x-2}-y=0 \\ x-1=0 \\ \sqrt{3x-2y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Đối chiếu và thử lại ta được nghiệm duy nhất của hệ $x=y=1$.

Bài toán 172. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{x}=y+2x\sqrt{2x^2-y}, \\ 2x^2+2y^2+x=1+2y\sqrt{x}+2xy. \end{cases} \quad (x;y \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 \ge y; x>0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x^2-y-2x\sqrt{2x^2-y}+x^2=3x^2-\frac{3}{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2-y}-x\right)^2=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3\left(x^3-1\right)}{x}.$$

Rõ ràng $\frac{3\left(x^3-1\right)}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1 \vee x \le 0$. Kết hợp với $x>0 \Rightarrow x \ge 1$.

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\begin{aligned} & 2x^2+2y^2+x=1+2y\sqrt{x}+2xy \\ \Leftrightarrow & x-2y\sqrt{x}+y^2+2x^2-2xy+y^2=1 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x}-y\right)^2+(x-y)^2+x^2=1 \end{aligned}$$

Vì $x \ge 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x}-y\right)^2+(x-y)^2+x^2 \ge 1$. Hệ có nghiệm khi tất cả các dấu đẳng thức xảy ra.

Nghĩa là $\begin{cases} \sqrt{x}-y=x-y=0 \\ \sqrt{2x^2-y}=x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 173. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{5x-4y}+2y=\dfrac{3}{x}, \\ 2x+\sqrt{2x^2-y^2}=(2y+1)\sqrt{2x-y^2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 5x\ge 4y;2x^2-y^2\ge 0 \\ 2x-y^2\ge 0;x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x\ge 4y;x>0 \\ 2x^2\ge y^2;2x-y^2\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2-2x\sqrt{5x-4y}+5x-4y=x^2+5x-\frac{6}{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5x-4y}-x\right)^2=x^2+5x-\frac{6}{x}$$

Rõ ràng $x^2+5x-\dfrac{6}{x}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x^3+5x^2-6}{x}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)(x^2+6x+6)}{x}\ge 0$.

Chú ý điều kiện $x>0\Rightarrow\dfrac{x^2+6x+6}{x}>0$ nên thu được $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2x-y^2-2y\sqrt{2x-y^2}+y^2+\sqrt{2x^2-y^2}-\sqrt{2x-y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-y^2}-y\right)^2+\sqrt{2x^2-y^2}-\sqrt{2x-y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-y^2}-y\right)^2+\frac{2x(x-1)}{\sqrt{2x^2-y^2}+\sqrt{2x-y^2}}=0$$

Lại có $\left(\sqrt{2x-y^2}-y\right)^2\ge 0;\dfrac{2x(x-1)}{\sqrt{2x^2-y^2}+\sqrt{2x-y^2}}\ge 0,\forall x\ge 1$.

Phương trình thứ hai có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra tức là $\begin{cases} \sqrt{2x-y^2}=y \\ x=1 \\ \sqrt{5x-4y}=x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta được nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 174. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+x^2+2y\sqrt{2y-x^2}=\dfrac{4}{y}, \\ y+(1-x)\sqrt{2y-x^2}=\sqrt{2-x^2}. \end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2y\ge x^2 \\ 2\ge x^2 \\ y\ne 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y>0 \\ 2y\ge x^2 \\ 2\ge x^2 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$2y-x^2-2y\sqrt{2y-x^2}+y^2=y^3+y^2+2y-\frac{4}{y}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2y-x^2}-y\right)^2=y^3+y^2+2y-\frac{4}{y}$$

Nhận thấy rằng khi đó

$$y^3+y^2+2y-\frac{4}{y}\ge 0\Leftrightarrow \frac{y^4+y^3+3y^2-4}{y}\ge 0\Leftrightarrow \frac{(y-1)(y^3+2y^2+5y+4)}{y}\ge 0.$$

Chú ý điều kiện $y>0\Rightarrow \frac{y^3+2y^2+5y+4}{y}>0 y-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge 1$.

Phương trình thứ hai tương đương với

$$\begin{aligned}&y-x\sqrt{2y-x^2}+\sqrt{2y-x^2}-\sqrt{2-x^2}=0\\&\Leftrightarrow 2y-x^2-2x\sqrt{2y-x^2}+x^2+2\sqrt{2y-x^2}-2\sqrt{2-x^2}=0\\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y-x^2}-x\right)^2+2\sqrt{2y-x^2}-2\sqrt{2-x^2}=0\\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y-x^2}-x\right)^2+\frac{4(y-1)}{\sqrt{2y-x^2}+\sqrt{2-x^2}}=0\quad (1)\end{aligned}$$

Rõ ràng $\left(\sqrt{2y-x^2}-x\right)^2\ge 0;\frac{4(y-1)}{\sqrt{2y-x^2}+\sqrt{2-x^2}}\ge 0,\forall y\ge 1$ nên (1) có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra.

Nghĩa là $\begin{cases}\sqrt{2y-x^2}=x\\ y=1\\ \sqrt{2y-x^2}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y-x^2=x^2\\ x\ge 0;y=1\\ 2y-x^2=y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta được nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 175. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{17}{x}=2y\sqrt{2x^3-y^2}+3x(3x+2),\\ \sqrt{2x^3-y^2}+\sqrt{2y^4+y^2-2x^3}=y^4+x^4.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^3\ge y^2;x\ne 0\\ 2y^4+y^2-2x^3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3\ge y^2;x>0\\ 2y^4+y^2-2x^3\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}&2x^3-y^2-2y\sqrt{2x^3-y^2}+y^2=2x^3+9x^2+6x-\frac{17}{x}\\&\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^3-y^2}-y\right)^2=2x^3+9x^2+6x-\frac{17}{x}\end{aligned}$$

Vì $\left(\sqrt{2x^3-y^2}-y\right)^2\ge 0$ nên

$$2x^3+9x^2+6x-\frac{17}{x}\ge 0\Leftrightarrow\frac{2x^4+9x^3+6x^2-17}{x}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(2x^3+11x^2+17x+17)}{x}\ge 0.$$

Lại có điều kiện $x>0\Rightarrow\frac{2x^3+11x^2+17x+17}{x}>0$, dẫn đến $x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$, và $1\le x^4$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân AM – GM cho phương trình thứ hai

$$\sqrt{2x^3-y^2}+\sqrt{2y^4+y^2-2x^3}\le\frac{2x^3-y^2+1}{2}+\frac{2y^4+y^2-2x^3+1}{2}=y^4+1\le y^4+x^4.$$

Hệ có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là ta có hệ điều kiện sau

$$\begin{cases}2x^3-y^2=1\\2y^4+y^2-2x^3=1\\x=1\\\sqrt{2x^3-y^2}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-y^2=1\\2y^4+y^2-2x^3=1\\x=1;y\ge 0\\2x^3-y^2=y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta được nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài toán 176. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2-2xy+5=x^3+2x\sqrt{2x-y}+y,\\\sqrt{2x-y}+\sqrt{3x-3y+1}=x^2+3x-2y.\end{cases}\quad (x;y\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x-y\ge 0\\3x-3y+1\ge 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2x^2+y^2+2x-2xy-y-2x\sqrt{2x-y}=x^3+2x^2+2x-5$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-2x\sqrt{2x-y}+x^2+x^2-2xy+y^2=x^3+2x^2+2x-5$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-y}-x\right)^2+\left(x-y\right)^2=x^3+2x^2+2x-5$$

Khi đó rõ ràng $x^3+2x^2+2x-5\ge 0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+3x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Sử dụng điều này, kết hợp bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân cho phương trình sau

$$\sqrt{2x-y}\le\sqrt{x(2x-y)}\le\frac{x+2x-y}{2}+\frac{3x-3y+1+1}{2}=3x-2y+1\le 3x-2y+x^2.$$

Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm khi toàn bộ các dấu đẳng thức xảy ra, tức là

$$\begin{cases}2x-y=3x-3y+1=1\\\sqrt{2x-y}-x=x-y=0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta được nghiệm duy nhất $x=y=1$.

17.6

Lời kết.

Bài toán số 176 cũng là bài toán cuối cùng của tài liệu Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn phần thứ 7, chủ đạo kết hợp phép thế, ẩn phụ, tính chất đơn điệu hàm số với kỹ thuật liên hợp – phân tích chặn miền giá trị, đánh giá thuần túy và tổng hòa toàn bộ các kỹ năng giải phương trình vô tỷ, tuy nhiên nó chỉ là chút chia sẻ phần nào của tác giả. Kiến thức hàm số, đồ thị hàm số và các kỹ thuật giải phương trình bậc cao, vô tỷ khác chắc hẳn các bạn học sinh đã thuần thục, đáng lưu ý hơn hết là cách tìm miền giá trị của các biến, đây là mấu chốt và là điểm nhấn của từng bài toán, là đòn quyết định tính đơn điệu của hàm số đang xét trên một miền, và tất nhiên điều này không đơn giản, như các bạn đã thấy, nó đòi hỏi quan sát tinh tế, một chút tư duy, liên hệ, biến đổi đại số và một chút bất đẳng thức – cực trị vừa đủ! Mong muốn các bạn độc giả chú ý kỹ lưỡng và rút được nhiều kinh nghiệm quý báu cho bản thân mình.

Tác giả chúc các bạn học sinh, các thầy cô giáo và toàn thể các bạn độc giả sức khỏe, vui vẻ, bình tĩnh, tự tin, bứt phá, đánh bật đề thi, đạt kết quả cao trong các kỳ thi tương lai sắp tới, chúc cho cô bé tôi yêu thương nhất đạt điểm 10 tối đa môn Toán trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2015 và hơn thế nữa.

"Học, học nữa, học mãi"

(*Vladimir Ilyich Ulyanov*)

Người ta thường nói "Học để biết, học để làm việc, học để cùng chung sống". Tuy nhiên với con người học là chưa đủ, quan trọng là sống, điều này là vô cùng khó. Sinh ra và lớn lên trên đất nước nhiều đau thương, sục sôi dòng máu chảy trong mình không thay đổi được, thừa hưởng chế độ y tế và giáo dục để phát triển, đó là ân huệ của cha mẹ, của thế hệ trước, của non sông ban tặng cho mỗi công dân. Tư tưởng cá nhân luôn tồn tại trong mỗi người, đó là sự phân công xã hội và tất yếu nảy sinh do bản năng, vì thế nó thường vượt qua ngưỡng cửa tập thể, dễ lầm đường lạc lối. Thiết nghĩ sống tốt, hữu ích, đúng đạo lý, khoan dung, không dẫm đạp đồng bào, diệt trừ ác độc, hơn nữa để an toàn và thoải mái cần chiếm lĩnh khoa học, cùng nhau vững bước làm chủ tri thức, làm chủ tương lai, cùng nhau mang sức trẻ và ý chí kiên cường xây dựng bức tường thành bảo vệ mẹ già, vợ dại, con thơ trước sự dòm ngó của ngoại bang. Quyết tâm xây dựng tổ quốc Việt Nam hòa bình, công chính, dân chủ, vững bền, giàu mạnh, sánh vai cùng các nước trong khu vực, như Liên Bang Nga, Cộng hòa Hồi giáo Iran, CHDCND Triều Tiên, hay ít nhất là CHND Trung Hoa láng giềng chẳng hạn.

Facebook Mâu Thuẫn – Yêu Thương.
Thủ đô Hà Nội, ngày 09 tháng 05 năm 2015.

-----------------------------**HẾT**-----------------------------

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
   Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
   Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
   Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
   Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
   Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
   Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
   Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
   Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
   Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
    Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
    Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
    Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
    Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
    Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
    Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
    Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.***
    Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
    Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
    Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
    Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.***
    Lê Hoành Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. ***Tam thức bậc hai và ứng dụng.***

Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.

23. ***Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.***
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. ***23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.***
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. ***Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.***
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. ***Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. ***Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.***
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. ***Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.***
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuân
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. ***Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.***
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. ***9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
33. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
34. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
35. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.***
36. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).***
37. ***Các tạp chí toán học:*** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
38. ***Các diễn đàn toán học:*** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
39. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...***

THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CÁNH YẾU ĐẠI