ĐẠI SỐ 10

Chương I: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

MỆNH ĐỀ & MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

1. Mệnh đề:

Mệnh đề là một khẳng định *đúng* hoặc *sai*. Mệnh đề không thể vừa *đúng* vừa *sai*.

Ví dụ: *i) 2 + 3 = 5 là mệnh đề đúng.*

ii) "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ" là mệnh đề sai.

iii) "Mệt quá !" không phải là mệnh đề

2. Mệnh đề chứa biến:

Ví dụ: *Cho mệnh đề 2 + n = 5. với mỗi giá trị của n thì ta được một đề đúng hoặc sai. Mệnh đề như trên được gọi là mệnh đề chứa biến.*

3. Phủ định của mệnh đề:

Phủ định của mệnh đề P kí hiệu là $\overline{P}$. Nếu mệnh đề P đúng thì $\overline{P}$ sai, P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Ví dụ: *P: "3 là số nguyên tố"*

$\overline{P}$ *: "3 không là số nguyên tố"*

4. Mệnh đề kéo theo:

Mệnh đề "nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo. Kí hiệu $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Ví dụ: *Mệnh đề* "$-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 < (-2)^2$" *sai*

Mệnh đề "$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow 3 < 4$" *đúng*

Trong mệnh đề $P \Rightarrow Q$ *thì:*

P: giả thiết (điều kiện đủ để có Q)
Q: kết luận (điều kiện cần để có P)

Ví dụ: *Cho hai mệnh đề:*

P: "Tam giác ABC có hai góc bằng 60^0"
Q: "Tam giác ABC là tam giác đều".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

i) Điều kiện cần: "Để tam giác ABC có hai góc bằng 60^0 thì điều kiện cần là tam giác ABC là tam giác đều"

ii) Điều kiện đủ: "Để tam giác ABC là tam giác đều thì điều kiện đủ là tam giác ABC có hai góc bằng 60^0"

5. Mệnh đề đảo – Hai mệnh đề tương đương.

Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

Chú ý: *Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng nhưng mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$ chưa chắc đúng.*

Nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương nhau. Kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$

6. Kí hiệu $\forall, \exists$:

$\forall$: Đọc là với mọi (tất cả)

$\exists$: Đọc là tồn tại (có một hay có ít nhất một)

7. Phủ định của $\forall$ và $\exists$:

* Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$"

* Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$"

Ghi nhớ:

- Phủ định của $\forall$ là $\exists$.
- Phủ định của $\exists$ là $\forall$.
- Phủ định của $=$ là $\neq$.
- Phủ định của $>$ là $\leq$.
- Phủ định của $<$ là $\geq$.

Ví dụ: P: "$\exists n \in Z : n < 0$"

$\overline{P}$: "$\forall n \in Z : n \geq 0$"

ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

1. Định lí và chứng minh định lí:

- Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$ (1)

Trong đó $P(x), Q(x)$ là những mệnh đề chứa biến, X là một tập hợp nào đó.

- Chứng minh định lí dạng (1) là dùng suy luận và những kiến thức đúng đã biết để khẳng định rằng mệnh đề (1) là đúng, tức là cần chứng tỏ rằng với mọi x thuộc X mà P(x) đúng thì Q(x) đúng.

Có thể chứng minh định lí dạng (1) một cách trực tiếp hoặc gián tiếp.

*** Phép chứng minh trực tiếp gồm các bước:**

- Lấy x thùy ý thuộc X mà P(x) đúng;

- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đúng đã biết để chỉ ra rằng Q(x) đúng.

*** Phép chứng minh phản chứng gồm các bước:**

- Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai, tức là mệnh đề (1) là một mệnh đề sai.

- Dùng suy luận và những kiến thức toán học đúng đã biết để chỉ ra điều mâu thuẫn.

2. Điều kiện cần, điều kiện đủ:

Cho định lí dạng: "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1).

- P(x) gọi là giả thiết và Q(x) gọi là kết luận của định lí.

- Định lí (1) còn được phát biểu dưới dạng:

+ P(x) là điều kiện đủ để có Q(x), hoặc

+ Q(x) là điều kiện cần để có P(x).

3. Định lí đảo, điều kiện cần và đủ:

Xét mệnh đề đảo của định lí dạng (1) là $\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)$ (2).

Mệnh đề (2) có thể đúng, có thể sai. Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là định lí đảo của định lí (1), lúc đó (1) gọi là định lí thuận.

Định lí thuận và đảo có thể viết gộp lại thành một định lí dạng:

$\forall x \in X, P\left(x\right) \Leftrightarrow Q\left(x\right)$ (3).

Khi đó ta nói: P(x) là điều kiện cần và đủ để có Q(x) (hoặc ngược lại). Ngoài ra ta cũng có thể nói "P(x) khi và chỉ khi (nếu và chỉ nếu) Q(x)"

TẬP HỢP

I. TẬP HỢP:

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học.
- Cho tập hợp A. Phần tử a thuộc tập A ta viết $a \in A$. Phần tử a không thuộc tập A ta viết $a \notin A$.

1. Cách xác định tập hợp:

a) Cách liệt kê: Là ta liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp.

Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) Cách nêu tính chất đặc trưng: Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập đó.

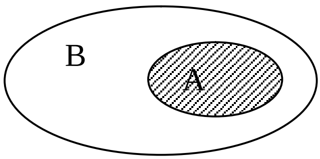
Ví dụ: $A = \{x \in R : 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

Ta thường minh hoạ tập hợp bằng một đường cong khép kín gọi là biểu đồ Ven.

2. Tập hợp rỗng: Là tập hợp không chứa phần tử nào. Kí hiệu $\varnothing$.

Vậy: $A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x : x \in A$

3. Tập con: $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)}$



Chú ý: i) $A \subset A, \forall A$

ii) $\varnothing \subset A, \forall A$

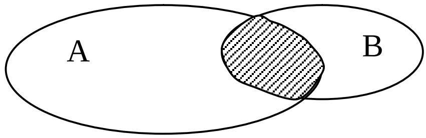
iii) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

4. Hai tập hợp bằng nhau: $\boxed{A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

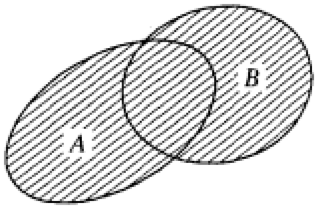
1. Phép giao: $\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}}$

Ngược lại: $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$



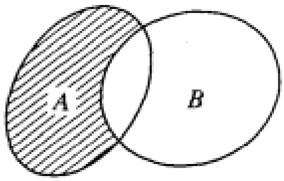
2. Phép hợp: $\boxed{A \cup B = \left\{ x \,/\, x \in A \text{ hoặc } x \in B \right\}}$

Ngược lại: $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$



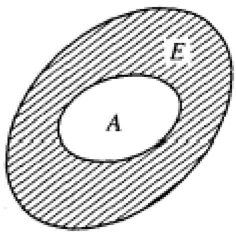
3. Hiệu của hai tập hợp: $\boxed{A \setminus B = \left\{ x \,/\, x \in A \text{ và } x \notin B \right\}}$

Ngược lại: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$



4. Phần bù: Khi $A \subset E$ thì E\A gọi là phần bù của A trong E. Kí hiệu: $C_A B$.

Vậy: $C_E A$ = E\A khi $A \subset E$.



III. CÁC TẬP HỢP SỐ:

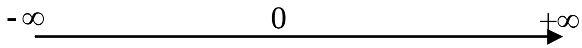
Tập số tự nhiên: $N=\{0,1,2,3,4,...\}$; $N^{*}=\{1,2,3,4,...\}$

Tập số nguyên: $Z=\{....,-2,-1,0,1,2,...\}$

Tập các số hữu tỉ: $Q=\left\{x=\dfrac{m}{n}\,/\,m,n\in Z,n\neq 0\right\}$

Tập số thực: kí hiệu R, gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ. Tập số thực được biểu diễn bằng trục số.

Quan hệ giữa các tập số: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.



+ Các tập con thường dùng của R:

Tập hợp	Nội dung	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực $(-\infty\,;+\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a\,;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	
Khoảng $(a\,;b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	
Nửa khoảng $[a\,;b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	
Nửa khoảng $(a\,;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty\,;a]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	
Nửa khoảng $[a\,;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$	
Khoảng $(-\infty\,;a)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	
Khoảng $(a\,;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	

Chú ý: *Cách biểu diễn phép hợp, giao, hiệu của 2 tập hợp trên trục số:*

Vẽ trục số, biểu diễn các số là biên của tất cả các tập hợp lên trục số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn. Sau đó biểu diễn lần lượt từng tập hợp theo qui tắc sau:

- *Phép hợp: Muốn lấy hợp của hai tập hợp A và B. Tô đậm bên trong của hai tập hợp, phần tô đậm đó chính là hợp của hai tập hợp.*
- *Phép giao: Muốn lấy giao của hai tập hợp A và B. Gạch bỏ phần bên ngoài của tập A, rồi tiếp tục gạch bỏ bên ngoài của tập B. phần không gạch bỏ đó chính là giao của hai tập hợp A và B.*
- *Cách tìm hiệu (a;b) \ (c;d): Tô đậm tập (a;b) và gạch bỏ tập (c;d). Phần tô đậm không bị gạch bỏ là kết quả cần tìm.*

SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng:

Trong đo đạc, tính toán ta thường không biết được giá trị đúng của các đại lượng ta đang quan tâm mà chỉ biết được giá trị gần đúng của nó.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối:

a) Sai số tuyệt đối:

Giả sử $\overline{a}$ là giá trị đúng của một đại lượng và a là giá trị gần đúng của $\overline{a}$. Giá trị $\left|\overline{a}-a\right|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa $\overline{a}$ và a. Ta gọi $\left|\overline{a}-a\right|$ là sai số tuyệt đối của số gần đúng a và kí hiệu là Δ_a, tức là: $\Delta_a = \left|\overline{a}-a\right|$

Trên thực tế nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên không thể tính được chính xác Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương nào đó.

* Nếu $\Delta_a \le d$ thì: $\left|\overline{a}-a\right| \le d \Leftrightarrow -d \le \overline{a}-a \le d \Leftrightarrow a-d \le \overline{a} \le a+d$

Khi đó ta qui ước viết: $\overline{a} = a \pm d$

Như vậy khi viết: $\overline{a} = a \pm d$ ta hiểu số đúng $\overline{a}$ nằm trong đoạn $\left[a-d;a+d\right]$

Vì vậy, d càng nhỏ thì độ sai lệch càng ít đi.

b) Sai số tương đối:

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số $\dfrac{\Delta_a}{|a|}$. Tức là:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}.$$

Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$ do đó: $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$

Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

3. Số qui tròn:

Nguyên tắc qui tròn số:

* Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi số 0.
* Nếu chữ số ngay sau hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay thế chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số ở hàng được qui tròn

Chú ý:

1. Khi qui tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó.

2. Nếu kết quả cuối cùng của bài toán yêu cầu chính xác đến hàng 10^{-n} thì trong quá trình tính toán, ở kết quả của các phép tính trung gian ta cần lấy chính xác ít nhất đến hàng $10^{-(n+1)}$.

3. Cho số gần đúng a có độ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$). Khi được yêu cầu qui tròn số a mà không nói rõ qui tròn đến hàng nào thì ta qui tròn số a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

4. Chữ số chắc và cách viết chuẩn của số gần đúng:

a) Chữ số chắc:

Cho số gần đúng a của số $\overline{a}$ với độ chính xác d. trong số a, một chữ số được gọi là chữ số chắc (hay đáng tin) nếu d không vượt quá nữa đơn vị của hàng có chữ số đó.

*** Nhận xét:** *Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc là chữ số chắc. tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.*

b) Dạng chuẩn của số gần đúng:

Trong cách viết $\overline{a} = a \pm d$, ta biết ngay độ chính xác d của số gần đúng a. Ngoài cách viết trên, người ta còn qui ước dạng viết chuẩn của số gần đúng và khi cho một số gần đúng dưới dạng chuẩn, ta cũng biết được độ chính xác của nó.

* Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

* Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, k là hàng thấp nhất có chữ số chắc $(k \in \mathbb{N})$

Chú ý: *Với qui ước về dạng chuẩn của số gần đúng thì hai số gần đúng 0,14 và 0,140 viết dưới dạng chuẩn có ý nghĩa khác nhau. Số gần đúng 0,14 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,005 còn số 0,140 có sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0005.*

5. Kí hiệu khoa học của một số:

Mỗi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$, trong đó: $1 \le |\alpha| < 10, n \in Z$. Dạng như thế được gọi là kí hiệu khoa học của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi số rất lớn hoặc số rất bé.

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI.

ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

1. Khái niệm về hàm số:

a) Hàm số:

Cho một tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$.

Hàm số f xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc D với một và chỉ một số, kí hiệu là f(x); số f(x) đó gọi là giá trị của hàm số f tại x.

Tập D còn gọi là tập xác định (hay miền xác định), x gọi là biến số hay đối số của hàm số f.

Để chỉ rõ kí hiệu biến số, hàm số f còn được viết là $y = f\left(x\right)$

b) Hàm số cho bằng biểu thức: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$, khi đó ta nói hàm số được cho bằng biểu thức f(x).

*** Tập xác định của hàm số:**

Ta qui ước rằng: Khi cho hàm số bằng biểu thức y = f(x), nếu không nói gì thêm thì tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các giá trị của x để biểu thức y = f(x) có nghĩa (hay là giá trị của biểu thức f(x) được xác định). Kí hiệu là: D

Vậy: Tập xác định $D = \left\{x \in R \,/\, y = f(x) \text{ có nghĩa}\right\}$

*** Tập xác định của các hàm số thường gặp:**

- $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow Q(x) \neq 0$
- $y = \sqrt{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$
- $y = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow Q(x) > 0$

- $y = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$

- Các hàm đa thức như: y = ax^2 + bx + c, y = ax + b,... có tập xác định là $\mathbb{R}$.

c) Đồ thị của hàm số: Cho hàm số y=f(x) có TXĐ là D.

Đồ thị (C) của hàm số là tập hợp các điểm $M\left(x, f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy với $x \in D$. Vậy $\left(C\right) = \left\{M\left(x, f\left(x\right)\right) \middle| y = f\left(x\right), x \in D\right\}$

Lưu ý khi giải toán: ***Điểm thuộc đồ thị*** $\Leftrightarrow$ ***tọa độ của điểm phải thỏa mãn phương trình của đồ thị***.

2. Sự biến thiên của hàm số:

Ta kí hiệu K là một khoảng, nửa khoảng hay đoạn. Ta có:

* Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

* Hàm số y = f(x) gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nhận xét:

- Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải.

- Nếu một hàm số nghịch biến trên K thì trên đó đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải.

*** Phương pháp khảo sát sự biến thiên của hàm số**

B$_1$: Lấy $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2$.

B$_2$: Lập tỉ số: $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

B$_3$: Nếu tỉ số T > 0 thì hàm số tăng trên K.

Nếu tỉ số T < 0 thì hàm số giảm trên K.

3. Tính chẵn lẻ của hàm số:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên D.

* Hàm số y = f(x) được gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

* Hàm số y = f(x) được gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

*** Phương pháp chứng minh hàm số chẵn, hàm số lẻ.**

B_1: Tìm tập xác định D của hàm số.
B_2: Chứng minh tập D là tập đối xứng (cần c/m: $x \in D \Rightarrow -x \in D$)
B_3:Tính f(-x).

Nếu f(-x) = f(x) thì hàm số là hàm số chẵn.
Nếu f(-x) = - f(x) thì hàm số là hàm số lẻ.

* **Lưu ý**: *Hàm số có thể không chẵn không lẻ.*

4. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ:

* Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung.
* Đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc toạ độ.

HÀM SỐ y = ax + b

1. Hàm số bậc nhất: $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$

a. Tập xác định D = $\mathbb{R}$.

b. Sự biến thiên:

- Nếu a > 0 hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- Nếu a < 0 hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

c. Đồ thị: Đồ thị là đường thẳng không song song, không trùng với hai trục toạ độ và cắt trục Ox tại $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$, Oy tại B(0; b).

*** Chú ý:**

- a được gọi là hệ số góc của đường thẳng.

- Nếu gọi α là góc tạo bởi đường thẳng y=ax+b và chiều dương của trục Ox thì $a = \tan\alpha$.

- Nếu a>0 thì đường thẳng y=ax+b nghiêng về bên phải.

- Nếu a< 0 thì đường thẳng y=ax+b nghiêng về bên trái.

- Cho hai đường thẳng $\left(d\right): y = ax + b, \left(d'\right): y = a'x + b'$. Ta có:

+ $\left(d\right) // \left(d'\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

+ $\left(d\right) \equiv \left(d'\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

+ $\left(d\right)$ *cắt* $\left(d'\right) \Leftrightarrow a \neq a'$

+ $\left(d\right) \perp \left(d'\right) \Leftrightarrow a.a' = -1$

2. Hàm số y = b

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$
- Hàm số hằng là hàm số chẵn.
- Đồ thị là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm (0; b).

3. Hàm số $y = \left|x\right|$

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$.

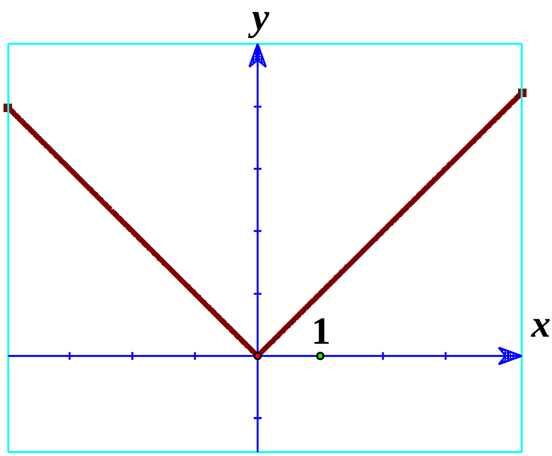
- Hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn. Đồ thị đối xứng qua trục tung.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$
			0		

Đồ thị:



HÀM SỐ BẬC HAI

1. Định nghĩa:

Hàm số bậc hai là hàm số cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx = c$, trong đó a, b, c là những số thực và $a \neq 0$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai:

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$

- Đồ thị là đường parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, có bề lõm quay lên khi a > 0, quay xuống khi a < 0.

3. Sự biến thiên của hàm số:

Nếu a > 0 thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Bảng biến thiên:

a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

a < 0

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

4. Dạng toán:

Dạng 1: Vẽ đồ thị hàm số bậc hai:

- Các bước vẽ đồ thị của hàm số bậc hai:

+ Xác định đỉnh của parabol: $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

+ Xác định trục đối xứng và hướng bề lõm của parabol.

+ Xác định một số điểm cụ thể của parabol, chẳng hạn: giao điểm của parabol với hai trục tọa độ và các điểm đối xứng với chung qua trục đối xứng.

+ Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để "nối" các điểm đó lại.

Dạng 2: Lập phương trình parabol (P) thỏa điều kiện K:

Bước 1: Giả sử parabol (P) có phương trình (P): $y = ax^2 + bx + c\left(a \neq 0\right)$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K để xác định a, b, c.

Trong bước này ta thường có các điều kiện thường gặp sau:

** Điểm* $A\left(x_0;y_0\right) \in \left(P\right) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

** (P) có đỉnh* $I\left(x_0;y_0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-b}{2a} \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(x_0\right) \end{cases}$

** (P) có giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) bằng* y_0

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$ *hoặc* $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$

** (P) đạt giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm có hoành độ bằng* x_0

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} a > 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$

** (P) nhận đường thẳng* $x = x_0$ *làm trục đối xứng* $\Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH & HỆ PHƯƠNG TRÌNH

ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. Khái niệm phương trình.

1. Phương trình ẩn x là mệnh đề có dạng f(x) = g(x) (1)

Nếu hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ lần lượt có tập xác định là D_f, D_g, thì $D = D_f \cap D_g$ gọi là tập xác định của phương trình (1).

Nếu có số $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 được gọi là một nghiệm của phương trình f(x) = g(x).

Giải phương trình là ta tìm tất cả các nghiệm của nó.

Phương trình không có nghiệm ta nói phương trình vô nghiệm.

Chú ý: *Các nghiệm của phương trình (1) chính là hoành độ các giao điểm của đồ thị các hàm số $y = f(x)\& y = g(x)$. Phương trình (1) cũng gọi là **phương trình hoành độ giao điểm** của đồ thị các hàm số $y = f(x)\& y = g(x)$.*

2. Điều kiện của phương trình: Là điều kiện của ẩn x để hai vế của phương trình có nghĩa.

* **Chú ý:** *Khi giải phương trình, việc tìm tập xác định của phương trình đôi khi còn khó hơn việc giải phương trình đó, nên khi giải ta chỉ cần ghi điều kiện của phương trình là đủ. Khi giải xong ta chỉ việc thay nghiệm vào điều kiện để loại nghiệm ngoại lai đi.*

3. Phương trình chứa tham số: Là phương trình ngoài ẩn x còn có các chữ số khác xem như là hằng số và được gọi là tham số.

Ví dụ: $x^2 + 2x - m = 0$. Với m là tham số.

4. Phương trình tương đương: Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm (kể cả tập rỗng)

Kí hiệu: “$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$”

Chú ý: *Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định D và tương đương với nhau, ta nói* "Hai phương trình tương đương trong điều kiện D"

5. Phép biến đổi tương đương:

Các phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình được gọi là các phép biến đổi tương đương

* **Phép cộng (trừ):** f(x) =g(x) $\Leftrightarrow$ f(x) $\pm$ h(x) = g(x) $\pm$ h(x)

Cộng hoặc trừ vào hai vế của phương trình với biểu thức h(x) mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì ta được phương trình mới tương đương.

* **Phép nhân (chia):** f(x) =g(x) $\Leftrightarrow$ f(x).h(x) = g(x).h(x)

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{với } h(x) \neq 0$$

Nhân hoặc chia vào hai vế của phương trình với biểu thức h(x) $\neq 0$ mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì ta được phương trình mới tương đương.

Chú ý: *Phép chuyển vế:* $f(x)+h(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)-h(x)$.

6. Phương trình hệ quả:

Cho hai phương trình: f(x) = g(x) (1) $f_1(x) = g_1(x)$ (2)

Phương trình (2) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (1) nếu tập nghiệm của phương trình (2) chứa tập nghiệm của phương trình (1). **Kí hiệu**: (1) $\Rightarrow$ (2)

* **Lưu ý:** *i) Khi bình phương hai vế của phương trình thì ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.*

ii) Khi giải phương trình mà dẫn đến phương trình hệ quả thì phải thử lại nghiệm vào phương trình ban đầu để loại nghiệm ngoại lai.

PHƯƠNG TRÌNH
BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

1. Giải và biện luận phương trình: ax + b = 0 (1)

$ax+b=0$ (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$
a=0	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b=0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

2. Giải và biện luận phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (2)

* **Trường hợp 1:** Với a=0, ta có phương trình $bx+c=0$, đây là phương trình có hệ số cụ thể nên có thể kết luận được nghiệm của phương trình (2)

* **Trường hợp 2:** Với $a \neq 0$, ta tính biệt thức: $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta < 0$: phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = 0$: phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

+ Nếu $\Delta > 0$: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Kết luận: (tùy theo giá trị của m ta kết luận tập nghiệm của phương trình)

Chú ý: Ta có thể dùng Δ'

$ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)(2)$	
$\Delta' = b'^2 - ac$	Kết luận
$\Delta' > 0$	(1) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$
$\Delta' = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b'}{a}$

$\Delta' < 0$	(2) vô nghiệm

Chú ý: Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

3. Định lí Viet:

- Cho phương trình bậc hai có hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

- Ngược lại nếu có hai số u và v mà có tổng u + v = S, tích u.v = P thì u và v là các nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$ (3)

*** Chú ý:**

+ Nếu phương trình (3) có hai nghiệm t_1, t_2 *thì* $\begin{cases} u = t_1 \\ v = t_2 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} u = t_2 \\ v = t_1 \end{cases}$

+ Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + +bx + c$ *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *thì f(x) có thể phân tích thành* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

4. Dạng toán:

Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của phương trình bậc hai:

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Ta có một số biểu thức thường gặp như sau:

$$* \; x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$* \; x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$* \; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} \qquad * \; \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

Dạng 2: Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số (giả sử là m):

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng định lí Viét ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 x_2 = g(m) \end{cases}$

Bước 3: Khử m từ hệ trên ta được hệ thức cần tìm.

Dạng 3: Sử dụng định lí Viét xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0 \left(a \neq 0\right)$

* Nếu $P = \dfrac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2$

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow 0 < x_1 \leq x_2$

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow x_1 \leq x_2 < 0$

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

Các dạng cơ bản: i) $|A| = |B|$, ii) $|A| = B$

Cách giải 1: Dùng định nghĩa trị tuyệt đối để bỏ trị tuyệt đối:
$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Cách giải 2: Bình phương hai vế dẫn đến phương trình hệ quả. Khi giải xong phải thử lại nghiệm để loại nghiệm ngoại lai.

Cách giải 3: Dùng công thức:

- $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$
- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$

II. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn:

Các dạng cơ bản: i) $\sqrt{A} = \sqrt{B}$, ii) $\sqrt{A} = B$

Cách giải 1: Bình phương hai vế dẫn đến phương trình hệ quả. Khi giải xong phải thử lại nghiệm để loại nghiệm ngoại lai.

Cách giải 2: Dùng công thức:

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \ \ (\text{hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

III. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn:

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn: ax + by + c = 0 (2). Trong đó a, b, c là các hệ số, a và b không đồng thời bằng 0.

Cặp $(x_0;y_0)$ được gọi là nghiệm của phương trình (2) nếu chúng nghiệm đúng phương trình (2).

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Cách giải: Có 3 cách:

1. Dùng phương pháp cộng đại số.
2. Dùng phương pháp thế.
3. Dùng định thức:

Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

* Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm

* Nếu $D = 0, D_x \neq 0\, hoặc\, D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

* Nếu $D \neq 0$ thì hệ có 1 nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

Cách giải: Khử dần từng ẩn số để đưa hệ phương trình trình về dạng tam giác:

$$\begin{cases} a_1x = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad \text{(pp Gausse)}$$

4. Hệ phương trình gồm một bậc nhất và một bậc hai đối với 2 ẩn:

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 - 3x + y + y^2 = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Cách giải:

- Từ phương trình bậc nhất ta rút một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình bậc hai ta được phương trình bậc hai một ẩn.

- Giải phương trình bậc hai ta tìm được nghiệm, thay nghiệm vừa tìm vào phương trình bậc nhất ta tìm được nghiệm của ẩn còn lại.

5. Hệ phương trình đối xứng loại 1:

Dạng: Là hệ phương trình mà khi thay x bởi y và y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi.

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 + x + y + y^2 = 8 \\ xy(x + y) = 6 \end{cases}$

Cách giải:

- Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$*, thay vào hệ phương trình ta được hệ phương trình mới theo ẩn S, P. Giải hệ này ta tìm được S,P.*

- x,y khi đó là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ *(nếu có)*

* **Chú ý:** *Nếu (x;y) là một nghiệm thì (y;x) cũng là một nghiệm.*

6. Hệ phương trình đối xứng loại 2:

Dạng: Là hệ phương trình mà khi thay x bởi y và y bởi x thì phương trình này của hệ sẽ trở thành phương trình kia của hệ, và ngược lại.

Ví dụ: $\begin{cases} x^2 = 2y - 3 \\ y^2 = 2x - 3 \end{cases}$

Cách giải:

- Trừ từng vế hai phương trình ta được phương trình mới.

- Phân tích phương trình mới thành dạng $(x - y).f(x;y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ f(x;y) = 0 \end{array}\right.$.

- Kết hợp với 1 trong 2 phương trình của hệ ta được một hệ mới đơn giản hơn rồi giải.

Chương IV: BẤT ĐẲNG THỨC & BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

I. Bất Đẳng Thức:

1. Bất đẳng thức có dạng: A > B, A < B, $A \geq B, A \leq B$ **.**

2. Bất đẳng thức hệ quả: Nếu mệnh đề $A < B \Rightarrow C < D$ đúng thì ta nói BĐT C < D là BĐT hệ quả của BĐT A < B.

3. Bất đẳng thức tương đương: Nếu BĐT A < B là hệ quả của BĐT C < D và ngược lại thì ta nói hai BĐT tương đương nhau. Kí hiệu: $A < B \Leftrightarrow C < D$.

4. Các tính chất:

Tính chất		**Tên gọi**
Điều kiện	**Nội dung**	
	$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$	Bắc cầu
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế bất đẳng thức với một số
c > 0	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số.
c < 0	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
a > 0, c> 0	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng lên một lũy thừa.
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$	
A > 0	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

5. Bất đẳng thức Côsi: Cho hai số a và b không âm:

Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

6. Các hệ quả:

$$i)\ a + \frac{1}{a} \geq 2,\ \forall a > 0$$

ii) Cho hai số x > 0, y > 0. Nếu x + y không đổi thì x.y lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

iii) Cho hai số x > 0, y > 0. Nếu x.y không đổi thì x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

7. Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối:

$$i)\ |x| \ge 0, |x| \ge x, |x| \ge -x$$

$$ii)\ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a,\ \forall a > 0$$

$$iii)\ |x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a \text{ hoặc } |x| \ge a,\ \forall a > 0$$

$$iv)\ |a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$$

8. Các phương pháp chứng minh BĐT:

i) Dùng định nghĩa: Muốn chứng minh A > B thì ta cần chứng minh: A – B > 0.

ii) Phương pháp chứng minh tương đương:

$$A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow ...... \Leftrightarrow A_n > B_n.$$

Trong đó: A > B là bđt cần chứng minh

A_n > $\mathbf{B_n}$ là bđt đúng đã biết.

iii) Dùng các bất đẳng thức đã biết: BĐT Côsi, BĐT chứa giá trị tuyệt đối…

II. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn:

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn:

Bất phương trình ẩn x có dạng: f(x) < g(x), $f(x) \le g(x), f(x) > g(x), f(x) \ge g(x)$. Trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức chứa x.

2. Điều kiện của bất phương trình: là điều kiện của ẩn x để hai vế f(x) và g(x) đều có nghĩa.

TXĐ: D = $\{x \in R / f(x), g(x) \text{ có nghĩa}\}$

3. Hệ bất phương trình một ẩn: Là hệ gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Phương pháp giải hệ bất phương trình: Giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

4. Bất phương trình tương đương: Hai bất phương trình (hệ bpt) được gọi là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu: $\Leftrightarrow$

5. Các phép biến đổi tương đương: Cho bất phương trình P(x) < Q(x) có TXĐ D.

a) Phép cộng (trừ): Nếu f(x) xác định trên D thì:

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

b) Phép nhân (chia):

i) Nếu f(x) > 0, $\forall x \in D$ thì: P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ P(x).f(x) < Q(x).f(x)

ii) Nếu f(x) < 0, $\forall x \in D$ thì:P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ P(x).f(x) > Q(x).f(x)

c) Phép bình phương: Nếu P(x) ≥ 0, Q(x) $\geq 0, \forall x \in D$ thì:

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x)$$

6. Các chú ý khi giải bất phương trình:

i) Khi biến đổi hai vế của bất phương trình thì có thể làm thay đổi điều kiện của bất phương trình. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\dfrac{5x+2\sqrt{3-x}}{4} - 1 > \dfrac{x}{4} - \dfrac{4-3\sqrt{3-x}}{6}$.

ii) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình với biểu thức f(x) ta cần lưu ý về dấu của f(x). Nếu f(x) nhận cả giá trị dương lẫn âm thì ta phải lần lượt xét cả hai trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến một hệ bất phương trình.

iii) Khi giải bất phương trình có ẩn ở mẫu ta quy đồng mẫu nhưng không được bỏ mẫu và phải xét dấu biểu thức để tìm tập nghiệm

VD: Giải bpt: $\dfrac{1}{x-1} \geq 1$

iv) Khi giải bất phương trình P(x) < Q(x) mà phải bình phương hai vế thì phải xét hai trường hợp:

TH1: P(x) và Q(x) đều không âm thì ta bình phương hai vế của bất phương trình.

TH2: P(x) và Q(x) đều âm thì ta viết P(x) < Q(x) $\Leftrightarrow$ - Q(x) < - P(x) rồi bình phương hai vế của bất phương trình mới.

VD: Giải bpt: $\sqrt{x^2 + \dfrac{17}{4}} > x + \dfrac{1}{2}$

III. Dấu của nhị thức bậc nhất:

1. Nhị thức bậc nhất: Là biểu thức có dạng: f(x) = ax + b. trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$).

2. Dấu của nhị thức bậc nhất f(x) = ax + b:

Bảng Xét Dấu:

x		$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
f(x) = ax + b	a > 0		-	0	+	
	a < 0		+	0	-	

Quy tắc: ***Phải cùng – Trái trái***.

3. Phương pháp lập bảng xét dấu của nhị thức:

B_1: Tìm nghiệm của nhị thức.
B_2: Lập bảng xét dấu.
B_3: Kết luận về dấu của nhị thức.

4. Dấu của một tích, một thương các nhị thức bậc nhất:

Phương pháp xét dấu: Tìm nghiệm từng nhị thức có mặt trong biểu thức. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức có mặt trong biểu thức. Từ đó ta suy ra được dấu của biểu thức.

VD: Xét dấu biểu thức: $f(x) = \dfrac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5}$

5. Áp dụng vào việc giải bất phương trình:

a) Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Phương pháp giải:

B_1: Đưa bất phương trình về dạng f(x) > 0 hoặc f(x) < 0.
B_2: Lập bảng xét dấu của biểu thức f(x).
B_3: Dựa vào bảng xét dấu kết luận nghiệm của bất phương trình.

VD: Giải bất phương trình:

a) $\dfrac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5} \geq 0$ b) $\dfrac{1}{1-x} \geq 1$

*** Chú ý:** *Ở đây ta cũng còn có một phương pháp xét dấu riêng đơn giản mà hiệu quả hơn*

6. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

Chú ý:

$$i)\ |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

$$ii)\ |A|^2 = A^2,\ \forall A$$

$$iii)\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,\ \forall a > 0$$

$$iv)\ |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad \text{hoặc} \quad x \geq a,\ \forall a > 0$$

Phương pháp giải:

Phương pháp: Dùng định nghĩa để khử trị tuyệt đối.

B_1: Lập bảng xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối.

B_2: Dựa vào bảng xét dấu khử dấu giá trị tuyệt đối và giải bất phương trình trên từng miền xác định của bất phương trình.

B_3: Nghiệm của bất phương trình là hợp các tập nghiệm trên từng miền xác định.

- $f(x) \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a, \forall a > 0$
- $f(x) \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a \\ f(x) \geq a \end{array}\right. \quad \forall a > 0$
- $|A| \leq |B| \Leftrightarrow A^2 \leq B^2$
- $|A| \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 \leq B^2 \end{cases}$
- $|A| \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B \leq 0 \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 \geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$

Phương pháp: Dùng công thức.

7. Bất phương trình chứa ẩn trong căn bậc hai:

$$* \ \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B < 0 \\ A \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$* \ \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \ge 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$* \ \sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A < B \end{cases}$$

IV. Dấu của tam thức bậc hai:

1. Tam thức bậc hai đối với x có dạng: f(x) = ax^2 + bx + c ($a \ne 0$).

2. Dấu của tam thức: Cho tam thức f(x) = ax^2 + bx + c ($a \ne 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac$

TH1: Nếu $\Delta < 0$:

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	Cùng dấu với a với mọi x $\in R$	

TH2: Nếu $\Delta = 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu với a	0	Cùng dấu với a	

TH3: Nếu $\Delta > 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		***Cùng dấu với a***	0	***Trái dấu với a***	0	***Cùng dấu với a***	

Phương pháp xét dấu tam thức bậc hai f(x) = ax^2 + bx + c ($a \ne 0$).

B_1: Tính Δ v tìm nghiệm của tam thức (nếu cĩ)

B_2: Lập bảng xét dấu của biểu f(x)

B_3: Kết luận dấu của tam thức.

VD: Xét dấu các tam thức sau:

a. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

b. $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

c. $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

d. $f(x) = (2x - 5)(3 - 4x)$

e. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

f. $f(x) = (x^2 + 3x - 4)(-3x - 5)$

* **Chú ý**: *Khi xét dấu một thương cần xác định điều kiện để phân số có nghĩa.*

3. Bất phương trình bậc hai một ẩn:

Dạng: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \le 0; f(x) \ge 0$ với $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$

@ Cách giải:

B_1: Đưa bất phương trình về một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \le 0; f(x) \ge 0$.

B_2: Lập bảng xét dấu biểu thức f(x).

B_3: Nhận nghiệm ứng với dấu của bất phương trình.

VD: Giải các bất phương trình sau:

a. $2x^2 - 5x + 2 > 0$

b. $9x^2 - 24x + 16 > 0$

c. $x^2 + x + 2 \le 0$

d. $x^2 + 12x + 36 \ge 0$

e. $x^2 + 12x + 36 \le 0$

f. $(2x - 5)(3 - 4x) > 0$

g. $(x^2 + 3x - 4)(-3x - 5) \ge 0$

h. $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4} \le 0$

4. Các ứng dụng của tam thức bậc hai:

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$ có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$
- Phương trình f(x) = 0 có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$
- Phương trình f(x) = 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$
- Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ P < 0 \end{cases}$

- Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- f(x) > 0 $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ f(x) ≥ 0 $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- f(x) < 0 $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ f(x) ≤ 0 $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- f(x) > 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow$ f(x) $\leq 0 \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- f(x) ≥ 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow$ f(x) $< 0 \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

- f(x) < 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow$ f(x) $\geq 0 \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- f(x) ≤ 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow$ f(x) $> 0 \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

Chương V: THỐNG KÊ

I. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ & TẦN SUẤT.

1. Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó. Ta có:

Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i.

Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i.

2. Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân bố vào k lớp (k<n). Xét lớp thứ i (i = 1, 2, 3,…,k) trong k lớp đó, ta có:

Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp i được gọi là **tần số của lớp** đó.

Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i.

Chú ý: *Trong bảng phân bố tần suất, tần suất được tính ở dưới dạng tỉ số phần trăm.*

II. BIỂU ĐỒ.

1. Cách vẽ biểu đồ tần suất, tần số hình cột.

a/ Cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

Để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp và trình bày các số liệu thống kê, có thể vẽ biểu đồ tần suất hình cột như sau:

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy với đơn vị trên trục hoành Ox của dấu hiệu X được nghiên cứu, đơn vị trục tung Oy là 1%. Để đồ thị cân đối, đôi khi phải cắt bỏ một đoạn nào đó của trục hoành (hoặc của trục tung). Trên trục hoành, đặt các khoảng có các mút biểu diễn cho các mút của các lớp ở bảng phân bố tần suất (độ dài của các khoảng bằng bề rộng của các lớp). Ta gọi các khoảng và các lớp này tương ứng với nhau. Lấy các khoảng đó làm cạnh đáy, vẽ các hình chữ nhật có độ dài của các đường cao bằng tần suất của các lớp tương ứng và nằm về phía chiều dương của trục tung. Các hình chữ nhật vừa vẽ được lập thành một biểu đồ tần suất hình cột.

b/ Cách vẽ biểu đồ tần số hình cột tương tự.

2. Cách vẽ đường gấp khúc tần suất, tần số.

a/ Giá trị đại diện.

Trong bảng phân bố ghép lớp, ta gọi số trung bình cộng của hai mút lớp thứ i là *giá trị đại diện* của lớp đó, kí hiệu là c_i.

b/ Cách vẽ đường gấp khúc tần suất.

Cũng có thể mô tả bảng phân bố ghép lớp bằng cách vẽ đường gấp khúc tần suất như sau:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hệ tọa độ Oxy đã nói ở trên), xác định các điểm $\left(c_i; f_i\right)$ i = 1, 2,…,k, trong đó ci và fi lận lượt là giá trị đại diện, tần suất của các lớp của bảng phân bố (gồm k lớp). Vẽ các đoạn thẳng nối điểm $\left(c_i; f_i\right)$ với điểm $\left(c_{i+1}; f_{i+1}\right)$, i = 1, 2,…,k – 1, ta thu được một đường gấp khúc, gọi là đường gấp khúc tần suất.

c/ Cách vẽ đường gấp khúc tần số tương tự.

3. Biểu đồ hình quạt:

B1: Vẽ đường tròn, xác định tâm của nó.

B2: Tính các góc ở tâm của mỗi hình quạt theo công thức a^0=f.3,6 (trong đó f là tần suất)

III. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

1. Số trung bình cộng (hay số trung bình)

$\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê.

a/ Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất:

$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k\right) = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$ trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i, n là số các số liệu thống kê $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

b/ Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k\right) = f_1c_1 + f_2c_2 + \ldots + f_kc_k$ trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

2. Số trung vị:

Định nghĩa: Giả sử có một mẫu gồm n số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Nếu n là một số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{n+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là số trung vị.

Nếu n là một số chẵn, ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}$ +1 làm số trung vị. Số trung vị, kí hiệu là M_e

3. Mốt:

Khái niệm: Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O.

IV. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN:

1. Công thức tính phương sai:

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2\right]$$
$$= f_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + f_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + f_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2$$

*** Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất:**

Trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị $x_i; n$ là các số liệu thống kê (n= n_1+n_2+ … +n_k); $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

*** Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:**

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(c_k - \overline{x}\right)^2\right]$$
$$= f_1\left(c_1 - \overline{x}\right)^2 + f_2\left(c_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + f_k\left(c_k - \overline{x}\right)^2$$

Trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của giá trị $x_i; n$ là các số liệu thống kê ($n = n_1+n_2+ \ldots +n_k$); $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

Ngoài ra, người ta còn chứng minh được công thức sau: $s_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ trong đó $\overline{x^2}$ là trung bình cộng các bình phương số liệu thống kê, tức là

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \ldots + n_kx_k^2\right) = f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \ldots + f_kx_k^2}$$

(đối với bảng tần số, tần suất)

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \ldots + n_kc_k^2\right) = f_1c_1^2 + f_2c_2^2 + \ldots + f_kc_k^2}$$

(đối với bảng tần số, tần suất ghép lớp)

2. Độ lệch chuẩn. $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s_x, vì s_x có cùng đơn vị với dầu hiệu được nghiên cứu.

Chương VI: LƯỢNG GIÁC

TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Độ và radian:

$(180)^0 = \pi\,(rad)$; $1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ (rad); $1(rad) = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^0$

2. Các hệ thức cơ bản:

* $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha \neq 0\right)$; * $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha \neq 0\right)$

* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \forall\alpha$;

* $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \ k \in \mathbf{Z}\right)$

* $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi\ ,\ \ k \in \mathbf{Z})$

* $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}\ ,\ \ k \in \mathbf{Z}\right)$.

3. Các hệ quả cần nhớ:

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

$\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in Z$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Dấu các giá trị lượng giác:

Góc phần tư / GTLG	I	II	III	IV
sinα	+	+	–	-
cosα	+	-	–	+
tanα	+	–	+	–
cotα	+	–	+	–

4. Các cung liên kết:

a. Cung đối: α và $-\alpha$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha; \qquad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha; \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

b. Cung bù: α và $\pi-\alpha$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha; \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha; \qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

c. Cung phụ: α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

d. Cung sai kém nhau π : α và $\pi+\alpha$

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha; \qquad \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha; \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

e. Cung hơn kém nhau $\dfrac{\pi}{2}$: α và $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

5. Các công thức biến đổi:

a. Công thức cộng:

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
- $\cot(a \pm b) = \dfrac{1 \mp \tan a \tan b}{\tan a \pm \tan b}$

Lưu ý:

a. Khi tính GTLG của các góc không đặc biệt ta phân tích góc đó thành tổng, hiệu của hai góc đặc biệt rồi dùng công thức cộng.

b. Khi c/m đẳng thức lượng giác trong tam giác ta thường dùng tính chất:

$A+B=\pi-C,\ \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ *sau đó dùng công thức cộng và cung liên kết để c/m.*

b. Công thức nhân đôi:

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$; $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

c. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}; \quad \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

Lưu ý:

*** Dạng đặc biệt:**

A = cosa.cos2a.cos4a…cos2na (1)

B = sina.cos2a.cos4a…cos2na (2)

Cách tính:

- Nhân hai vế của (1) với sina và hai vế của (2) cho cosa.

- Dùng công thức $\sin a.\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$ *nhiều lần.*

- Cuối cùng có thể dùng liên kết để rút gọn.

***** Khi c/m hay rút gọn một đẳng thức, biểu thức lượng giác ta thường chọn một góc chuẩn, đổi các góc khác về góc chuẩn bằng công thức nhân đôi. Sau đó dùng hệ thức cơ bản để làm bài.

***** Khi tính GTLG của một góc không đặc biệt, ta nhân đôi góc đó để được góc đặc biệt sau đó dùng công thức nhân để tính.

d. Công thức biến đổi tích về tổng:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a.\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

e. Công thức biến đổi tổng về tích:

- $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
- $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\left(\alpha;\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \ k \in \mathbf{Z}\right)$

f. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

Góc	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**	**120^0**	**135^0**	**150^0**	**180^0**
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$

HÌNH HỌC 10

Chương I: VECTƠ

CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Để xác định một vectơ cần biết một trong hai điều kiện sau:
   - Điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
   - Độ dài và hướng.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

   Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

3. Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

4. $\vec{a} = \vec{b}$ khi và chỉ khi $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

5. Với mỗi điểm A ta gọi $\overrightarrow{AA}$ là vectơ – không. Vectơ – không được kí hiệu là $\vec{0}$ và quy ước rằng $|\vec{0}| = 0$ vectơ $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Xác định một vecto, sự cùng phương và hướng của hai vecto.

@ Phương pháp:

- Để xác định vecto $\vec{a} \neq \vec{0}$ ta cần biết $|\vec{a}|$ và hướng của $\vec{a}$ hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Chẳng hạn,với hai điểm phân biệt A và B ta có hai vecto khác vecto $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{BA}$
- Vecto $\vec{a}$ là vecto – không khi và chỉ khi $|\vec{a}|$ = 0 hoặc $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

Dạng 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

@ *Phương pháp:* Để chứng minh hai vecto bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

* $\left.\begin{matrix} \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

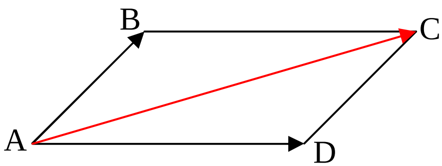
* Tứ giác ABCD là hình bình hành $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *và* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

* Nếu $\vec{a} = \vec{b},\ \vec{b} = \vec{c}$ *thì* $\vec{a} = \vec{c}$

TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

1. Định nghĩa tổng của hai vecto và quy tắc tìm tổng.

- Cho hai vecto tùy ý $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy điểm A tùy ý, dựng $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.
- Với ba điểm M, N và P tùy ý ta luôn có: $\boxed{\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}}$ (quy tắc 3 điểm)
- Tứ giác ABCD là hình bình hành, ta có: $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}}$ (quy tắc hình bình hành).



2. Định nghĩa vecto đối.

* Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

* Mỗi vectơ đều có vectơ đối, chẳng hạn vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

* Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

3. Định nghĩa hiệu của hai vecto và quy tắc tìm hiệu.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

Quy tắc ba điểm đối với phép trừ vectơ: Với ba điểm bất kì O, A, B ta có $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$.

Lưu ý:

- I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
- G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Tìm tổng của hai vecto và tổng của nhiều vecto.

@ *Phương pháp:* Dùng định nghĩa tổng của hai vecto, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vecto.

Dạng 2: Tìm vecto đối và hiệu của hai vecto

@ *Phương pháp:*

- Theo định nghĩa, để tìm hiệu $\vec{a}-\vec{b}$, ta làm hai bước sau:
- Tìm vecto đối của $\vec{b}$.
- Tính tổng $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$
- Vận dụng quy tắc $\boxed{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}}$ với ba điểm O, A, B bất kì.

Dạng 3: Tính độ dài của $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$

@ *Phương pháp:*

Đầu tiên tính $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CD}$. Sau đó tính độ dài các đoạn thẳng AB và CD bằng cách gắn nó vào các đa giác mà ta có thể tính được độ dài các cạnh của nó hoặc bằng phương pháp tính trực tiếp khác.

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức vecto.

@ *Phương pháp:*

Mỗi vế của một đẳng thức vecto gồm các vecto được nối với nhau bởi các phép toán vecto. Ta dùng quy tắc tìm tổng, hiệu của hai vecto, tìm vecto đối để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cà hai vế của đẳng thức để được hai vế bằng nhau. Ta cũng có thể biến đổi đẳng thức vecto cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vecto được công nhận là đúng.

TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ.

1. Định nghĩa: Cho số $k \neq 0$ và vecto $\vec{a} \neq \vec{0}$.Tích của vecto $\vec{a}$ với số k là một vecto, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0 và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

2. Các tính chất. $\forall \vec{a}, \vec{b}; \forall h, k \in \mathbb{R}$, ta có:

$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;	$(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;	$1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$
$0.\vec{a} = \vec{0}, \forall \vec{a}$;	$k\vec{0} = \vec{0}, \forall k \in \mathbb{R}$

1. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ *với* $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$. Cho hai vecto $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ cùng phương, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Tìm số k để $\vec{a} = k\vec{b}$ và khi đó số k tìm được là duy nhất.
2. **Áp dụng:**

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ với số k xác định.
- I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$.
- G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Xác định vecto $k\vec{a}$.

@ ***Phương pháp:*** Dựa vào định nghĩa vecto $k\vec{a}$

* $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$.

\- Nếu k > 0, $k\vec{a}$ *và* $\vec{a}$ *cùng hướng*.

- Nếu k < 0, $k\vec{a}$ *và* $\vec{a}$ *ngược hướng* .

* $k\vec{0} = \vec{0}, \forall k \in \mathbb{R}$ $\qquad 0.\vec{a} = \vec{0}, \forall \vec{a}$

* $1.\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

Dạng 2: Phân tích (biểu thị) một vecto theo hai vecto không cùng phương.

@ *Phương pháp:*

a/ Để phân tích vecto $\vec{x} = \overrightarrow{OC}$ theo hai vecto không cùng phương $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ *và* $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ta làm như sau:

- Vẽ hình bình hành OA'CB' có hai đỉnh O, C và hai cạnh OA' và OB' lần lượt nằm trên hai giá của $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Ta có: $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$
- Xác định số h để $\overrightarrow{OA'} = h\overrightarrow{OA}$. Xác định số k để $\overrightarrow{OB'} = h\overrightarrow{OB}$. Khi đó $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

b/ Có thể sử dụng linh hoạt các công thức sau:

* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, với ba điểm O, A, B bất kì.

* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ nếu tứ giác ABCD là hình bình hành.

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song.

@ *Phương pháp:* Dựa vào các khẳng định sau:

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Nếu $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì AB // CD.

Dạng 4: Chứng minh các đẳng thức vecto có chứa tích của vecto với một số.

@ *Phương pháp:*

- Sử dụng tính chất tích của vecto với một số.
- Sử dụng các tính chất của: ba điểm thẳng hàng, trung điểm của một đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

Dạng 5: Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức vecto.

@ *Phương pháp:* Sử dụng các khẳng định và các công thức sau:

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$;
- Cho điểm A và cho $\vec{a}$. Có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B \equiv C$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A_1 \equiv A$

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Trục và độ dài đại số trên trục:

- Cho điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}$. Ta gọi a đó là độ dài đại số của vecto $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu: $a = \overline{AB}$.
- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$

2. Tọa độ của một vecto, của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

* $\vec{u} = \left(x;y\right) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ * M(x;y) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ với O là gốc tọa độ. * Cho hai điểm $A = \left(x_A;y_A\right)$ *và* $B\left(x_B;y_B\right)$, ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;y_B - y_A\right)$

3. Tọa độ của các vecto $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}$

Cho $\vec{u} = \left(u_1;u_2\right)$, $\vec{v} = \left(v_1;v_2\right)$. Khi đó:

• $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1;u_2+v_2)$ • $\vec{u}-\vec{v} = (u_1-v_1;u_2-v_2)$ • $k\vec{u} = (ku_1;ku_2), k \in \mathbb{R}$ • $\vec{u}$ c.phương $\vec{v} \Leftrightarrow u_1v_2 - u_2v_1 = 0$

4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Toạ độ trọng tâm của tam giác:

a) Cho $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$ và $I\left(x_I;y_I\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

b) Cho tam giác ABC có $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$, $C\left(x_C;y_C\right)$, Ta có toạ độ trọng tâm $G\left(x_G;y_G\right)$ của tam giác ABC được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Tìm tọa độ của điểm và độ dài đại số của một vecto trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$.

@ *Phương pháp:* Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm và độ dài đại số của vecto.

- Điểm M có tọa độ a $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{e}$ với O là điểm gốc.
- Vecto $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- Nếu M và N có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{MN} = b - a$

Dạng 2: Xác định tọa độ của vecto và của điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

@ *Phương pháp:* Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của moat vecto và tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

- Để tìm tọa độ của vecto $\vec{a}$ ta làm như sau: Vẽ vecto $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ Gọi hai điểm $M_1\, và M_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy. Khi đó $\vec{a} = \left(a_1;a_2\right)$ trong đó $a_1 = \overline{OM_1}, a_2 = \overline{OM_2}$.

- Để tìm tọa độ của điểm A ta tìm tọa độ của vecto $\overrightarrow{OA}$. Như vậy A có tọa độ là (x;y) trong đó $x=\overline{OA_1}, y=\overline{OA_2}$; A_1 và A_2 tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ A xuống Ox và Oy.
- Nếu biết tọa độ của hai điểm A, B ta tính được tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ theo công thức: $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)$.

Dạng 3: Tìm tọa độ của các vecto $\vec{u}+\vec{v};\ \vec{u}-\vec{v};\ k.\vec{u}$

@ Phương pháp:

Tính theo các công thức tọa độ của $\vec{u}+\vec{v};\ \vec{u}-\vec{v};\ k.\vec{u}$

Dạng 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song bằng tọa độ.

@ Phương pháp: Sử dụng các điều kiện can và đủ sau:

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
- Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow$*có số k để* $\vec{a}=k.\vec{b}$

Dạng 5: Tính tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác.

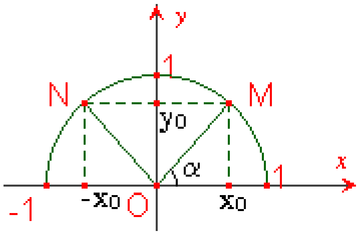
@ Phương pháp: Sử dụng các công thức sau:

- Tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của hai đầu mút.
- Tọa độ của trọng tâm tam giác bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của ba đỉnh.

Chương II: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

1. Định nghĩa.

Với mỗi góc α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có toạ độ $M(x_0; y_0)$. Khi đó ta định nghĩa:



* sin của góc α là y_0, ký hiệu $\sin\alpha = y_0$;

* côsin của góc α là x_0, ký hiệu $\cos\alpha = x_0$;

* tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0} (x_0 \ne 0)$, ký hiệu $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;

* côtang của góc α là $\frac{x_0}{y_0} (y_0 \ne 0)$, ký hiệu $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$;

Các số sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các *giá trị lượng giác của góc α.*

✍ ***Chú ý:*** *+ Nếu α là góc tù thì cosα<0, tanα<0, cotα<0.*

+ tanα chỉ xác định khi $\alpha \ne 90^0$, *cotα chỉ xác định khi* $\alpha \ne 0^0$ *và* $\alpha \ne 180^0$

2. Các hệ thức lượng giác.

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin a = \sin(180^0 - a)\\ &\cos a = -\cos(180^0 - a)\\ &\tan a = -\tan(180^0 - a)\\ &\cot a = -\cot(180^0 - a)\end{aligned}}$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

α / Giá trị lượng giác	0 (0^0)	$\frac{\pi}{6}$ (30^0)	$\frac{\pi}{4}$ (45^0)	$\frac{\pi}{3}$ (60^0)	$\frac{\pi}{2}$ (90^0)	π (180^0)
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	||	0
cotα	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	||

4. Góc giữa hai vecto.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

5. Tích vô hướng của hai vecto:

a/ Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. ***Tích vô hướng*** của $\vec{a}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước : $(\vec{a}\vec{b} = 0)$

Chú ý:

* Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

* Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là *bình phương vô hướng của vectơ* $\vec{a}$

b/ Các tính chất của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)
* $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)
* $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k.\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$
* $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

c/ Biểu thức toạ dộ của tích vô hướng:

Trong mặt phẳng toạ độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$

***Nhận xét:** *Hai vectơ* $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ *khác vectơ - không vuông góc với nhau khi và chỉ khi* $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$$

d/ Độ dài của vectơ: Cho $\vec{a} = (a_1;a_2)$, khi đó: $\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$

e/ Góc giữa hai vectơ:

Cho $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ đều khác vectơ - không, khi đó:

$$\boxed{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$$

f/ Khoảng cách giữc hai điểm:

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ được tính theo công thức: $\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

6. Các hệ thức lượng trong tam giác:

a/ Định lí cô sin:

Trong tam giác ABC bất kì với BC=a, CA=b, AB=c, ta có:

- $a^2=b^2+c^2-2b.c\cos A$
- $b^2=a^2+c^2-2a.c\cos B$
- $c^2=a^2+b^2-2a.b\cos C$

Hệ quả:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

@ Áp dụng: Tính độ dài đường trung tuyến của tam giác.

Cho tam giác ABC có các cạnh BC=a, CA=b, AB=c. Gọi m_a,m_b,m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Ta có:

- $m_a^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$
- $m_b^2=\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$
- $m_c^2=\dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

b/ Định lí sin: Trong tam giác ABC bất kì với BC=a, CA=b, AB=c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\boxed{\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R}$

c/ Công thức tính diện tích tam giác:

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Tính giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

@ Phương pháp:

- *Dựa vào định nghĩa, tìm tung độ* y_0 *và hoành độ* x_0 *của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị với góc* $\widehat{xOM} = \alpha$ *và từ đó ta có các giá trị lượng giác:*

  $$\sin\alpha = y_0;\ \cos\alpha = x_0;\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0};\ \cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

- *Dựa vào tình chất: Hai góc bù nhau có sin bằng nhau và có côsin, tang, côtang đối nhau.*

Dạng 2: Chứng minh các hệ thức về giá trị lượng giác.

@ Phương pháp:

- *Dựa vào định nghĩa giá trị lượng giác của một góc* $\alpha\ \left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$.
- *Dựa vào tính chất của tổng ba góc của moat tam giác bằng 1800.*
- *Sử dụng các hệ thức:*

  $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

Dạng 3: Cho biết một giá trị lượng giác của góc α, tìm các giá trị lượng giác còn lại của α.

@ Phương pháp:

- *Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc α và các hệ thức cơ bản liên hệ giữa các giá trị đó như:*

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ 1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha};\ \ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{array}}$$

Dạng 4: Tính tích vô hướng của hai vecto.

@ *Phương pháp:*

- *Áp dụng công thức của định nghĩa:* $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$.
- *Dùng tính chất phân phối:* $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$.

Dạng 5: Chứng minh các đẳng thức về vecto có liên quan đến tích vô hướng.

@ *Phương pháp:*

- *Sử dụng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng các vecto.*
- *Dùng quy tắc ba điểm đối với phép cộng hoặc trừ vecto.*

Dạng 6: Chứng minh sự vuông góc của hai vecto.

Dạng 7: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng: tính độ dài của một vecto, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vecto.

@ *Phương pháp:*

- *Cho hai vecto* $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$ *và* $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ *. Ta có:*

  $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$.
- *Độ dài vecto:* $\vec{a}=(a_1;a_2)$*, khi đó:* $\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.
- *Góc giữa hai vecto* $\vec{a}=(a_1;a_2)$*,* $\vec{b}=(b_1;b_2)$ *là:*

$$\boxed{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}}.$$

- *Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ được tính theo công thức:* $\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

Dạng 8: Tính một số yếu tố trong tam giác theo một yếu tố cho trước (trong đó có ít nhất là một cạnh).

@ Phương pháp:

- *Sử dụng trực tiếp định lí côsin và định lí sin.*
- *Chọn các hệ thức lượng thích hợp đối với tam giác để tính một số yếu tố trung gian cần thiết để việc giả toán thuận lợi.*

Dạng 9: Giải tam giác.

@ Phương pháp: *Một tam giác thường được xác định khi biết ba yếu tố. Trong các bài toán giải tam giác, người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau:*

- *Biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó (g, c, g).*
- *Biết một góc và hai cạnh kề góc đó (c, g, c).*
- *Biết ba cạnh (c, c, c).*

Để tìm các yếu tố còn lại của tam giác người ta thường sử dụng các định lí cô sin, định lí sin, định lí tổng ba góc của một tam giác bằng 1800 và đặc biệt có thể sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Chương III:PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tham số.

- Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2)$ là:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}}$$

- Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k là: $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$
- Nếu (Δ) có vecto chỉ phương $\vec{u}=(u_1;u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì hệ số góc của (Δ) là $k = \frac{u_2}{u_1}$
- Nếu (Δ) có hệ số góc k thì (Δ) có vecto chỉ phương là $\vec{u}=(1;k)$

2. Phương trình tổng quát.

- Phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ là:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

Hay ax + by + c = 0 với $c = -ax_0 - by_0$

- Đường thẳng (Δ) cắt Ox và Oy lần lượt tại A(a;0) và B(0;b) có phương trình theo đoạn chắn là: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a, b \neq 0)}$

* **Chú ý:** *Mối liên hệ giữa VTCP và VTPT của cùng một đường thẳng: Nếu* $\vec{n} = (a;b)$ *là 1 VTPT thì VTCP là* $\vec{u} = (-b;a)$ *hoặc* $\vec{u} = (b;-a)$

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Xét 2 đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Toạ độ giao điểm của Δ_1, Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (I). Ta có các trường hợp sau :

a) Hệ (I) có một nghiệm $(x_0;y_0)$, khi đó Δ_1 cắt Δ_2 tại $M_0(x_0;y_0)$

b) Hệ (I) có vô số nghiệm, khi đó Δ_1 trùng Δ_2

c) Hệ (I) vô nghiệm, khi đó $\Delta_1 // \Delta_2$.

Chú ý : Nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ thì :

* $\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

* $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

* $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

4. Góc giữa hai đường thẳng :

Cho 2 đường thẳng : $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}$.

Đặt $\varphi = \left(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}\right)$ khi đó: $\boxed{\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$

Chú ý :

\+ $\boxed{\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0}$

+ Nếu Δ_1 và Δ_2 có phương trình $y=k_1x+m_1$ và $y=k_2x+m_2$ thì $\boxed{\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1}$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình ax+by+c=0 và điểm $M_0(x_0;y_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0, \Delta)$, được tính bởi công thức:

$$\boxed{d\left(M_0,\Delta\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Viết phương trình tham số (PTTS) của đường thẳng.

@ Phương pháp: Để viết PTTS của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước sau:

- *Tìm VTCP* $\vec{u}=\left(u_1;u_2\right)$ *của đường thẳng* Δ.
- *Tìm một điểm* $M\left(x_0;y_0\right)$ *thuộc* Δ.
- *Phương trình tham số của* Δ *là:* $\begin{cases} x=x_0+tu_1 \\ y=y_0+tu_2 \end{cases}$

Chú ý:

- Nếu Δ có hệ số góc k thì Δ có VTCP $\vec{u}=\left(1;k\right)$.
- Nếu Δ có VTPT là $\vec{n}=\left(a;b\right)$ thì Δ có VTCP $\vec{u}=\left(-b;a\right)$ *hoặc* $\vec{u}=\left(b;-a\right)$

Dạng 2: Viết phương trình tổng quát (PTTQ) của đường thẳng.

@ Phương pháp: Để viết PTTQ của đường thẳng Δ ta thực hiện các bước sau:

- *Tìm VTPT* $\vec{n}=\left(a;b\right)$ *của đường thẳng* Δ.
- *Tìm một điểm* $M\left(x_0;y_0\right)$ *thuộc* Δ.
- *Viết phương trình* Δ *theo công thức:* $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$
- *Biến đổi về dạng:* $ax+by+c=0$

Chú ý:

- Nếu đường thẳng Δ cùng phương với đường thẳng d: ax+by+c=0 thì Δ có PTTQ: ax+by+c′=0.
- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d: ax+by+c=0 thì Δ có PTTQ: -bx+ay+c″=0.

Dạng 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

@ *Phương pháp:* *Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *;* $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *ta xét các trường hợp sau :*

$$\begin{array}{|l|}\hline * \quad \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \\ * \quad \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \\ * \quad \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \\ \hline \end{array}$$

- *Toạ độ giao điểm của* Δ_1 *,* Δ_2 *là nghiệm của hệ phương trình :*

$$\boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}}$$

- *Góc giữa hai đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *được tính bởi công thức :*

$$\boxed{\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Dạng 4: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

@ *Phương pháp:*

- *Để tính khoảng cách từ điểm M0(x_0;y_0) đến đường thẳng* Δ *:* $ax + by + c = 0$ *ta dùng công thức:* $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình đường tròn:

Phương trình đường tròn tâm I(a;b), bán kính R là :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

- Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn tâm I(a;b), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì chỉ có một điểm I(a;b) thỏa mãn phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
- Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì không có điểm M(x;y) nào thỏa mãn phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

- Cho điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) tâm I(a;b). Gọi Δ là tiếp tuyến với (C) tại M_0 có phương trình:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=0$$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Nhận dạng một phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

@ Phương pháp:

Cách 1:

- Đưa về phương trình vế dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. *(1)*

- Xét dấu biểu thức: $m=a^2+b^2-c$.

- Nếu m > 0 thì (1) là phương trình đường tròn tâm I(a;b), bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Cách 2:

- Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=m$. *(2)*

- Nếu m > 0 thì (2) là phương trình đường tròn tâm I(a ;b), bán kính $R = \sqrt{m}$ *.*

Dạng 2: Lập phương trình đường tròn.

@ Phương pháp:

Cách 1:

- *Tìm tọa độ tâm I(a ;b) của đường tròn (C).*
- *Tìm bán kính R của (C).*
- *Viết phương trình (C) theo dạng :* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ *(1)*

Chú ý :

- *(C) đi qua A, B* $\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = R^2$ *.*
- *(C) đi qua A và tiếp xúc với đ.thẳng* Δ *tại A* $\Leftrightarrow IA = d(I,\Delta)$*.*
- *(C) tiếp xúc với hai đ.thẳng* Δ_1 *và* Δ_2

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta_1) = d(I,\Delta_2) = R.$$

Cách 2 :

- *Gọi phhương trình của đường tròn (C) là*

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \quad (2)$$

- *Từ điều kiện của đề bài đưa đến hệ phương trình với ba ẩn số là: a, b, c.*
- *Giải hệ phương trình tìm a, b, c thế vào (2) ta được phương trình đường tròn (C).*

Dạng 3: Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

@ Phương pháp:

Loại 1: *Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm M0(x0;y0) thuộc đường tròn (C).*

- *Tìm tọa độ tâm I(a;b) của (C).*
- *Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M0(x0;y0) có dạng:*

  $(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = 0$.

Loại 2: *Lập phương trình tiếp tuyến của* Δ *với (C) khi chưa biết tiếp điểm: Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định* Δ*:* Δ *tiếp xúc với đường tròn (C) tâm I, bán kính R* $\Leftrightarrow d(I,\Delta) = R$

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa.

Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi 2a lớn hơn F_1F_2. Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho: $F_1M+F_2M=2a$

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip. Độ dài $F_1F_2=2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip (E).

* Cho elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-c,0)$, $F_2(c;0)$. Điểm M thuộc elip khi và chỉ khi $MF_1+MF_2=2a$. $M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (1), trong đó $b^2=a^2-c^2$.

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của elip.

3. Các thành phần của elip (E) là:

- Hai tiêu điểm: $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$.
- Bốn đỉnh: $A_1\left(-a;0\right)$, $A_2\left(a;0\right)$, $B_1\left(-b;0\right)$, $B_2\left(b;0\right)$.
- Độ dài trục lớn: $A_1A_2=2a$.
- Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2=2b$.
- Tiêu cự: $F_1F_2=2c$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Lập phương trình chính tắc của một elip khi biết các thành phần đủ để xác định elip đó.

@ Phương pháp:

- *Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của elip.*
- *Lập phương trình chính tắc của elip theo công thức:* $(E)\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- *Ta có các hệ thức:*

- *0 < b < a.*

- *$c^2=a^2-b^2$.*
- *Độ dài trục lớn:* $A_1A_2=2a$.
- *Độ dài trục nhỏ:* $B_1B_2=2b$.
- *Tiêu cự:* $F_1F_2=2c$
- *$MF_1+MF_2=2a$.*

• *Ta có tọa độ các điểm đặc biệt của elip (E).*

- *Hai tiêu điểm:* $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$.
- *Bốn đỉnh:* $A_1\left(-a;0\right)$, $A_2\left(a;0\right)$, $B_1\left(-b;0\right)$, $B_2\left(b;0\right)$.

Dạng 2: Xác định các thành phần của một elip khi biết phương trình chính tắc của elip đó.

@ Phương pháp:

Các thành phần của elip $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- *Độ dài trục lớn nằm trên Ox:* $A_1A_2=2a$.
- *Độ dài trục nhỏ nằm trên Oy:* $B_1B_2=2b$.
- *Hai tiêu điểm:* $F_1\left(-c;0\right)$, $F_2\left(c;0\right)$ *với* $c=\sqrt{a^2-b^2}$
- *Tiêu cự:* $F_1F_2=2c$
- *Bốn đỉnh:* $A_1\left(-a;0\right)$, $A_2\left(a;0\right)$, $B_1\left(-b;0\right)$, $B_2\left(b;0\right)$.
- *Tỉ số* $\dfrac{c}{a}<1$ *(tâm sai của (E))*
- *Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là:* $x=\pm a;\ y=\pm b$.

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa.

Định nghĩa:

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2=2c$. Hypebol (H) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho: $|F_1M - F_2M| = 2a$, trong đó a là số dương nhỏ hơn c.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol. Độ dài $F_1F_2=2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của hypebol (H).

* Cho hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-c,0)$, $F_2(c;0)$. Điểm M thuộc hypebol khi và chỉ khi $|MF_1-MF_2|=2a$. $M(x;y)\in(E)\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(1)$ (a>0, b>0), trong đó $b^2=c^2-a^2$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc* của hypebol.

3. Các thành phần của hypebol (H) là:

- Hai tiêu điểm: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Bốn đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(-b;0)$, $B_2(b;0)$.
- Độ dài trục thực: $A_1A_2=2a$.
- Độ dài trục ảo: $B_1B_2=2b$.
- Tiêu cự: $F_1F_2=2c$

Các dạng toán và phương pháp giải

Dạng 1: Lập phương trình chính tắc của một hypebol khi biết các thành phần đủ để xác định hypebol đó.

@ Phương pháp:

- *Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của hypebol.*

- *Lập phương trình chính tắc của hypebol theo công thức:* $(H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- *Ta có các hệ thức:*

- *a,b>0.*
- *$c^2=a^2+b^2$.*
- *Độ dài trục thực:* $A_1A_2 = 2a$.
- *Độ dài trục ảo:* $B_1B_2 = 2b$.
- *Tiêu cự:* $F_1F_2 = 2c$
- *$|MF_1-MF_2|=2a$.*

- *Ta có tọa độ các điểm đặc biệt của hypebol (H).*

- *Hai tiêu điểm:* $F_1\left(-c;0\right),\ F_2\left(c;0\right)$.
- *Bốn đỉnh:* $A_1\left(-a;0\right),\ A_2\left(a;0\right),\ B_1\left(-b;0\right),\ B_2\left(b;0\right)$.

Dạng 2: Xác định các thành phần của một hypebol khi biết phương trình chính tắc của hypebol đó.

@ Phương pháp:

Các thành phần của hypebol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- *Độ dài trục thực nằm trên Ox:* $A_1A_2 = 2a$.
- *Độ dài trục ảo nằm trên Oy:* $B_1B_2 = 2b$.
- *Hai tiêu điểm:* $F_1\left(-c;0\right),\ F_2\left(c;0\right)$ *với* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
- *Tiêu cự:* $F_1F_2 = 2c$
- *Bốn đỉnh:* $A_1\left(-a;0\right),\ A_2\left(a;0\right),\ B_1\left(-b;0\right),\ B_2\left(b;0\right)$.
- *Tỉ số* $e = \frac{c}{a} > 1$ *(tâm sai của (H))*
- *Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là:* $x = \pm a;\ y = \pm b$.

- *Phương trình các đường tiệm cận là:* $y = \pm\frac{b}{a}x$