

Mục lục

Chủ đề 1. Phương trình quy về bậc hai	2
1.1 Một số phương trình quy về phương trình bậc hai	2
1.2 Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối	24
Chủ đề 2. Phương trình chứa căn	35
2.1 Phương trình cơ bản	35
2.2 Sử dụng lượng liên hợp	47
2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ	65
2.4 Phương trình đẳng cấp	85
2.5 Phương pháp đánh giá	92
2.6 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số	98
2.7 Sử dụng hàm hợp và hàm ngược	112
2.8 Phương pháp hình học	119
2.9 Phương pháp lượng giác	126
Chủ đề 3. Bất phương trình	130
3.1 Giải bất phương trình nhờ tính liên tục của hàm số	130
Chủ đề 4. Hệ phương trình	137
4.1 Biến đổi hệ phương trình	137
4.2 Sử dụng phương pháp thế	141
4.3 Phương pháp đặt ẩn phụ	149
4.4 Hệ phương trình đối xứng loại một	159
4.5 Hệ phương trình phản xứng	163
4.6 Hệ phương trình đối xứng loại hai	164
Tài liệu tham khảo	168

Chủ đề 1

Phương trình quy về bậc hai

1.1 Một số phương trình quy về phương trình bậc hai

Bài tập 1.1. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{2}{9};$$

Đáp số. $\{1; 1 - 3\sqrt{3}; 1 + 3\sqrt{3}\}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \frac{(x+2) + (x-4)}{2} = x - 1$.

$$2) \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{4}{(4x-7)^2} = 5;$$

Đáp số. $\left\{2; \frac{5}{4}\right\}$.

Hướng dẫn. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\frac{1}{4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2} = 5.$$

Đặt

$$t = \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(x - \frac{7}{4}\right)}{2} = x - \frac{13}{8}.$$

Với phương trình dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, ta đặt

$$t = \frac{(x+a) + (x+b)}{2} = x + \frac{a+b}{2}.$$

Chú ý

$$1) (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

$$2) (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Bài tập 1.2. Giải các phương trình sau:

$$1) (x-6)^4 + (x-8)^4 = 16;$$

Đáp số. $\{6; 8\}$.

2) $(x-2)^4 + (x-4)^4 = 16;$

Đáp số. $x = 2 \vee x = 4.$

3) $(x-1)^4 + (x-3)^4 = 16.$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 3.$

Phương trình có dạng

$$(x+a) \cdot (x+b) \cdot (x+c) \cdot (x+d) = A,$$

với $a < b < c < d$ và $a+d = b+c$. Ta đặt

$$t = \frac{(x+a) + (x+b) + (x+c) + (x+d)}{4} = x + \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Bài tập 1.3. Giải các phương trình sau:

1) $x \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) = 24$

Đáp số. $\{-3; 2\}.$

2) $(x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6) \cdot (x-7) = 1680;$

Đáp số. $\{-1; 12\}.$

3) $(12x-1) \cdot (6x-1) \cdot (4x-1) \cdot (3x-1) = 5;$

Đáp số. $\left\{-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}\right\}.$

Hướng dẫn. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\left(x - \frac{1}{12}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12}.$$

Phương trình có dạng

$$(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = dx^2, \quad c \neq 0.$$

- Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.
- Chia phương trình cho x^2 , ta được

$$\left(ax + b_1 + \frac{c}{x}\right) \cdot \left(ax + b_2 + \frac{c}{x}\right) = d.$$

Đặt $t = ax + \frac{c}{x}$.

Chú ý. Ta cũng có thể đặt

$$t = ax^2 + \frac{b_1 + b_2}{2}x + c.$$

Bài tập 1.4. ¹ Giải các phương trình sau:

1) $(x-2)(x-3)(x-6)(x-9) = \frac{45x^2}{4}.$

Đáp số. $x = \frac{3}{2} \vee x = 12.$

¹Trần Văn Toàn

$$2) (x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = \frac{10}{9}x^2.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{8}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{3}(14 - 2\sqrt{31}) \vee x = \frac{1}{3}(14 + 2\sqrt{31}).$$

$$3) (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 4x + 1) = \frac{3x^2}{4};$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{4} \vee x = 2.$$

$$4) (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-6) \cdot (x-12) = 6x^2;$$

$$\text{Đáp số. } x = 3 \vee x = 4 \vee x = 7 - \sqrt{37} \vee x = 7 + \sqrt{37}.$$

$$5) (x^2 - 5x + 1) \cdot (x^2 - 4) = -4(x-1)^2.$$

$$\text{Đáp số. } x = 0 \vee x = 4 \vee x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}).$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x - 1$.

Phương trình dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0)$$

và

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a, b \neq 0, \quad \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Bài tập 1.5. ² Giải các phương trình sau:

$$1) 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = 3.$$

$$2) 6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = 2 \vee x = 3.$$

$$3) x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -2 - \sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} - 2 \vee x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

$$4) x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{5} \vee x = 2 + \sqrt{5}.$$

$$5) 2x^4 - x^3 - 14x^2 + x + 2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -1 - \sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} - 1 \vee x = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{41}) \vee x = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{41}).$$

$$6) 16x^4 - 48x^3 + 24x^2 + 12x + 1 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \vee x = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{5}).$$

- 7) $2x^4 + 9x^3 - x^2 - 18x + 8 = 0$. Đáp số. $\left(x = -4 \vee x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 1\right)$.
- 8) $2x^4 - 7x^3 - 34x^2 + 21x + 18 = 0$. Đáp số. $\left(x = -3 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 6\right)$.
- 9) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$. Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4)$.
- 10) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$. Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2)$.
- 11) $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 6)$.
- 12) $x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 36x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 6)$.
- 13) $x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 24x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 6)$.
- 14) $x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3)$.
- 15) $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 12x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 6)$.
- 16) $x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3)$.
- 17) $x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 2)$.
- 18) $x^4 + 12x^3 + 47x^2 + 72x + 36 = 0$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1)$.
- 19) $x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 72x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 8)$.
- 20) $x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 40x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 8)$.
- 21) $x^4 + 3x^3 - 38x^2 + 24x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -8 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4)$.
- 22) $x^4 - 3x^3 - 38x^2 - 24x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 8)$.
- 23) $x^4 + 5x^3 - 30x^2 - 40x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -8 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4)$.
- 24) $x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 72x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -8 \vee x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2)$.
- 25) $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$. Đáp số. $(x = -8 \vee x = -4 \vee x = -2 \vee x = -1)$.
- 26) $x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 72x + 81 = 0$. Đáp số. $(x = -3 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 9)$.
- 27) $x^4 + 8x^3 - 18x^2 - 72x + 81 = 0$. Đáp số. $(x = -9 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 3)$.
- 28) $x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 120x + 100 = 0$. Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 10)$.
- 29) $x^4 - 6x^3 - 47x^2 + 60x + 100 = 0$. Đáp số. $(x = -5 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 10)$.
- 30) $x^4 + 4x^3 - 57x^2 + 40x + 100 = 0$. Đáp số. $(x = -10 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 5)$.
- 31) $x^4 - 4x^3 - 57x^2 - 40x + 100 = 0$. Đáp số. $(x = -5 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 10)$.

- 32) $x^4 + 6x^3 - 47x^2 - 60x + 100 = 0$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 5$).
- 33) $x^4 + 18x^3 + 97x^2 + 180x + 100 = 0$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -5 \vee x = -2 \vee x = -1$).
- 34) $x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 60x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 6$).
- 35) $x^4 - 3x^3 - 28x^2 + 36x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 6$).
- 36) $x^4 + x^3 - 32x^2 + 12x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 37) $x^4 - x^3 - 32x^2 - 12x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 6$).
- 38) $x^4 + 3x^3 - 28x^2 - 36x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 39) $x^4 + 5x^3 - 20x^2 - 60x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 40) $x^4 + 15x^3 + 80x^2 + 180x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -4 \vee x = -3 \vee x = -2$).
- 41) $x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 180x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 6 \vee x = 12$).
- 42) $x^4 - 7x^3 - 68x^2 + 84x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 12$).
- 43) $x^4 + 5x^3 - 80x^2 + 60x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 6$).
- 44) $x^4 - 5x^3 - 80x^2 - 60x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 12$).
- 45) $x^4 + 7x^3 - 68x^2 - 84x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 46) $x^4 + 21x^3 + 128x^2 + 252x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -6 \vee x = -2 \vee x = -1$).
- 47) $x^4 - 12x^3 - 13x^2 + 144x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 12$).
- 48) $x^4 - 10x^3 - 35x^2 + 120x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 12$).
- 49) $x^4 + 6x^3 - 67x^2 + 72x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 50) $x^4 - 6x^3 - 67x^2 - 72x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 12$).
- 51) $x^4 + 20x^3 + 115x^2 + 240x + 144 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -4 \vee x = -3 \vee x = -1$).
- 52) $x^4 - 18x^3 + 37x^2 + 252x + 196 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 7 \vee x = 14$).
- 53) $x^4 - 8x^3 - 93x^2 + 112x + 196 = 0$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 14$).
- 54) $x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 240x + 225 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 15$).
- 55) $x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 180x + 225 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 15$).
- 56) $x^4 + 8x^3 - 98x^2 + 120x + 225 = 0$. Đáp số. ($x = -15 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 5$).

- 57) $x^4 - 6x^3 - 32x^2 + 96x + 256 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 8$).
- 58) $x^4 + 6x^3 - 32x^2 - 96x + 256 = 0$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 59) $x^4 - 21x^3 + 58x^2 + 336x + 256 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 16$).
- 60) $x^4 - 15x^3 - 32x^2 + 240x + 256 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 16$).
- 61) $x^4 - 10x^3 - 15x^2 + 180x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 6 \vee x = 9$).
- 62) $x^4 - 4x^3 - 57x^2 + 72x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 9$).
- 63) $x^4 + 2x^3 - 63x^2 + 36x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 6$).
- 64) $x^4 - 2x^3 - 63x^2 - 36x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 9$).
- 65) $x^4 + 4x^3 - 57x^2 - 72x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 6$).
- 66) $x^4 + 20x^3 + 135x^2 + 360x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -6 \vee x = -3 \vee x = -2$).
- 67) $x^4 - 24x^3 + 83x^2 + 432x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 9 \vee x = 18$).
- 68) $x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 360x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 6 \vee x = 18$).
- 69) $x^4 - 14x^3 - 87x^2 + 252x + 324 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 18$).
- 70) $x^4 - 9x^3 - 32x^2 + 180x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 5 \vee x = 10$).
- 71) $x^4 - 7x^3 - 48x^2 + 140x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 10$).
- 72) $x^4 + 3x^3 - 68x^2 + 60x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 5$).
- 73) $x^4 - 3x^3 - 68x^2 - 60x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 10$).
- 74) $x^4 + 21x^3 + 148x^2 + 420x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -5 \vee x = -4 \vee x = -2$).
- 75) $x^4 - 27x^3 + 112x^2 + 540x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 10 \vee x = 20$).
- 76) $x^4 - 20x^3 - 21x^2 + 400x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 20$).
- 77) $x^4 - 18x^3 - 59x^2 + 360x + 400 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 20$).
- 78) $x^4 - 24x^3 + 38x^2 + 504x + 441 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 7 \vee x = 21$).
- 79) $x^4 - 30x^3 + 145x^2 + 660x + 484 = 0$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 11 \vee x = 22$).
- 80) $x^4 - 15x^3 + 2x^2 + 360x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 8 \vee x = 12$).
- 81) $x^4 - 5x^3 - 98x^2 + 120x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 12$).

- 82) $x^4 - 12x^3 - 28x^2 + 288x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 6 \vee x = 12$).
- 83) $x^4 - 8x^3 - 68x^2 + 192x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 12$).
- 84) $x^4 + 4x^3 - 92x^2 + 96x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 6$).
- 85) $x^4 - 4x^3 - 92x^2 - 96x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 12$).
- 86) $x^4 - 7x^3 - 38x^2 + 168x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -3 \vee x = 6 \vee x = 8$).
- 87) $x^4 - 3x^3 - 58x^2 + 72x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -3 \vee x = 4 \vee x = 8$).
- 88) $x^4 + x^3 - 62x^2 + 24x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -3 \vee x = 4 \vee x = 6$).
- 89) $x^4 - x^3 - 62x^2 - 24x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -4 \vee x = 3 \vee x = 8$).
- 90) $x^4 + 3x^3 - 58x^2 - 72x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -4 \vee x = 3 \vee x = 6$).
- 91) $x^4 - 28x^3 + 67x^2 + 672x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 8 \vee x = 24$).
- 92) $x^4 - 25x^3 - 2x^2 + 600x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 6 \vee x = 24$).
- 93) $x^4 - 21x^3 - 94x^2 + 504x + 576 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 24$).
- 94) $x^4 - 24x^3 - 50x^2 + 600x + 625 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 25$).
- 95) $x^4 - 32x^3 + 102x^2 + 864x + 729 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 9 \vee x = 27$).
- 96) $x^4 - 15x^3 - 20x^2 + 420x + 784 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 7 \vee x = 14$).
- 97) $x^4 - 9x^3 - 92x^2 + 252x + 784 = 0$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 14$).
- 98) $x^4 - 30x^3 + 25x^2 + 840x + 784 = 0$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 7 \vee x = 28$).
- 99) $x^4 - 20x^3 + 31x^2 + 600x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 10 \vee x = 15$).
- 100) $x^4 - 14x^3 - 47x^2 + 420x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = 6 \vee x = 15$).
- 101) $x^4 - 12x^3 - 73x^2 + 360x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -2 \vee x = 5 \vee x = 15$).
- 102) $x^4 - 8x^3 - 53x^2 + 240x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -3 \vee x = 6 \vee x = 10$).
- 103) $x^4 - 6x^3 - 67x^2 + 180x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -3 \vee x = 5 \vee x = 10$).
- 104) $x^4 + 2x^3 - 83x^2 + 60x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -3 \vee x = 5 \vee x = 6$).
- 105) $x^4 - 2x^3 - 83x^2 - 60x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -5 \vee x = 3 \vee x = 10$).
- 106) $x^4 - 30x^3 - 31x^2 + 900x + 900 = 0$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 6 \vee x = 30$).

107) $x^4 - 28x^3 - 89x^2 + 840x + 900 = 0.$

Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 30$).

Bài tập 1.6. ³ Giải các phương trình sau:

1) $\frac{x^4 + 100}{x(x^2 - 10)} = \frac{29}{3}.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 5 \vee x = \frac{1}{3}(10 - \sqrt{190}) \vee x = \frac{1}{3}(\sqrt{190} + 10)$).

2) $\frac{x^4 + 100}{x(x^2 - 10)} = \frac{89}{6}.$

Đáp số. ($x = -\frac{5}{2} \vee x = 4 \vee x = \frac{1}{3}(20 - 7\sqrt{10}) \vee x = \frac{1}{3}(7\sqrt{10} + 20)$).

3) $\frac{x^4 + 81}{x(x^2 - 9)} = \frac{17}{2}.$

Đáp số. ($x = -\frac{3}{2} \vee x = 6 \vee x = 2 - \sqrt{13} \vee x = \sqrt{13} + 2$).

4) $\frac{x^4 + 81}{x(x^2 - 9)} = \frac{41}{4}.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 9 \vee x = \frac{1}{8}(9 - 3\sqrt{73}) \vee x = \frac{1}{8}(3\sqrt{73} + 9)$).

5) $\frac{x^4 + 81}{x(x^2 - 9)} = \frac{97}{10}.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = \frac{9}{2} \vee x = \frac{1}{5}(18 - 3\sqrt{61}) \vee x = \frac{1}{5}(3\sqrt{61} + 18)$).

6) $\frac{x^4 + 64}{x(x^2 - 8)} = 10.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 4 \vee x = 4 - 2\sqrt{6} \vee x = 2\sqrt{6} + 4$).

7) $\frac{x^4 + 64}{x(x^2 - 8)} = \frac{65}{7}.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 8 \vee x = \frac{1}{7}(8 - 2\sqrt{114}) \vee x = \frac{1}{7}(2\sqrt{114} + 8)$).

8) $\frac{x^4 + 49}{x(x^2 - 7)} = \frac{65}{3}.$

Đáp số. ($x = -\frac{7}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{2}(21 - \sqrt{469}) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{469} + 21)$).

9) $\frac{x^4 + 49}{x(x^2 - 7)} = \frac{65}{6}.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = \frac{7}{2} \vee x = \frac{1}{3}(14 - \sqrt{259}) \vee x = \frac{1}{3}(\sqrt{259} + 14)$).

10) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 - 6)} = 13.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 3 \vee x = 6 - \sqrt{42} \vee x = \sqrt{42} + 6$).

11) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 - 6)} = \frac{37}{5}.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 6 \vee x = \frac{1}{5}(6 - \sqrt{186}) \vee x = \frac{1}{5}(\sqrt{186} + 6)$).

12) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 - 6)} = \frac{73}{10}.$

Đáp số. ($x = -\frac{3}{2} \vee x = 4 \vee x = \frac{1}{5}(12 - 7\sqrt{6}) \vee x = \frac{1}{5}(7\sqrt{6} + 12)$).

13) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 - 5)} = \frac{13}{2}.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 5 \vee x = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{105}) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{105} + 5)$).

14) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 - 5)} = \frac{41}{2}.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = \frac{5}{2} \vee x = 10 - \sqrt{105} \vee x = \sqrt{105} + 10$).

15) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 - 5)} = \frac{53}{6}.$

Đáp số. ($x = -\frac{5}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{4}(15 - \sqrt{305}) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{305} + 15)$).

³Trần Văn Toàn

16) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 - 4)} = \frac{17}{3}$.

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = 4 \vee x = \frac{1}{3}(4 - 2\sqrt{13}) \vee x = \frac{1}{3}(2\sqrt{13} + 4)\right)$.

17) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 - 4)} = \frac{41}{6}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{2}{3} \vee x = 6 \vee x = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{73}) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{73} + 3)\right)$.

18) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 - 4)} = \frac{97}{15}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{4}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{5}(12 - 2\sqrt{61}) \vee x = \frac{1}{5}(2\sqrt{61} + 12)\right)$.

19) $\frac{x^4 + 9}{x(x^2 - 3)} = 5$.

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{21}) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} + 3)\right)$.

20) $\frac{x^4 + 9}{x(x^2 - 3)} = \frac{25}{2}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{3}{2} \vee x = 2 \vee x = 6 - \sqrt{39} \vee x = \sqrt{39} + 6\right)$.

21) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 - 2)} = 5$.

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = 2 \vee x = 2 - \sqrt{6} \vee x = \sqrt{6} + 2\right)$.

22) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 - 2)} = \frac{65}{14}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 4 \vee x = \frac{1}{7}(4 - \sqrt{114}) \vee x = \frac{1}{7}(\sqrt{114} + 4)\right)$.

23) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 - 2)} = \frac{85}{21}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{2}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{7}(6 - \sqrt{134}) \vee x = \frac{1}{7}(\sqrt{134} + 6)\right)$.

24) $\frac{x^4 + 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{17}{6}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{13}) \vee x = \frac{1}{3}(\sqrt{13} + 2)\right)$.

25) $\frac{x^4 + 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{41}{12}$.

Đáp số. $\left(x = -\frac{1}{3} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{73}) \vee x = \frac{1}{8}(\sqrt{73} + 3)\right)$.

26) $\frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)} = 1$.

Đáp số. $x = 1$.

27) $\frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{17}{10}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{1}{2} \vee x = 2\right)$.

28) $\frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{41}{15}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{1}{3} \vee x = 3\right)$.

29) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{5}{3}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2)$.

30) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{65}{18}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{1}{2} \vee x = 4\right)$.

31) $\frac{x^4 + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{85}{33}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{2}{3} \vee x = 3\right)$.

32) $\frac{x^4 + 9}{x(x^2 + 3)} = \frac{5}{2}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 3)$.

33) $\frac{x^4 + 9}{x(x^2 + 3)} = \frac{25}{14}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{3}{2} \vee x = 2\right)$.

34) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 + 4)} = 2$.

Đáp số. $x = 2$.

35) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 + 4)} = \frac{17}{5}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 4)$.

36) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 + 4)} = \frac{82}{15}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{2}{3} \vee x = 6\right)$.

37) $\frac{x^4 + 16}{x(x^2 + 4)} = \frac{97}{39}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{4}{3} \vee x = 3\right)$.

38) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 + 5)} = \frac{13}{3}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 5)$.

39) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 + 5)} = \frac{41}{18}$.

Đáp số. $\left(x = 2 \vee x = \frac{5}{2}\right)$.

40) $\frac{x^4 + 25}{x(x^2 + 5)} = \frac{53}{21}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{5}{3} \vee x = 3\right)$.

41) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 + 6)} = \frac{13}{5}$.

Đáp số. $(x = 2 \vee x = 3)$.

42) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 + 6)} = \frac{37}{7}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 6)$.

43) $\frac{x^4 + 36}{x(x^2 + 6)} = \frac{73}{22}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{3}{2} \vee x = 4\right)$.

44) $\frac{x^4 + 49}{x(x^2 + 7)} = \frac{25}{4}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 7)$.

45) $\frac{x^4 + 49}{x(x^2 + 7)} = \frac{65}{22}$.

Đáp số. $\left(x = 2 \vee x = \frac{7}{2}\right)$.

46) $\frac{x^4 + 49}{x(x^2 + 7)} = \frac{65}{24}$.

Đáp số. $\left(x = \frac{7}{3} \vee x = 3\right)$.

47) $\frac{x^4 + 64}{x(x^2 + 8)} = \frac{10}{3}$.

Đáp số. $(x = 2 \vee x = 4)$.

48) $\frac{x^4 + 64}{x(x^2 + 8)} = \frac{65}{9}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 8)$.

49) $\frac{x^4 + 64}{x(x^2 + 8)} = \frac{65}{9}$.

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 8)$.

$$50) \frac{x^4 + 81}{x(x^2 + 9)} = 3.$$

Đáp số. $x = 3$.

$$51) \frac{x^4 + 81}{x(x^2 + 9)} = \frac{41}{5}.$$

Đáp số. $(x = 1 \vee x = 9)$.

$$52) \frac{x^4 + 81}{x(x^2 + 9)} = \frac{51}{10}.$$

Đáp số. $\left(x = \frac{3}{2} \vee x = 6\right)$.

$$53) \frac{x^4 + 81}{x(x^2 + 9)} = \frac{97}{26}.$$

Đáp số. $\left(x = 2 \vee x = \frac{9}{2}\right)$.

$$54) \frac{x^4 + 100}{x(x^2 + 10)} = \frac{29}{7}.$$

Đáp số. $(x = 2 \vee x = 5)$.

$$55) \frac{x^4 + 100}{x(x^2 + 10)} = \frac{89}{26}.$$

Đáp số. $\left(x = \frac{5}{2} \vee x = 4\right)$.

Bài tập 1.7. ⁴ Giải các phương trình sau:

$$1) x^4 = \frac{11x + 6}{6x + 11}.$$

Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1\right)$.

$$2) x^4 = \frac{61x + 21}{21x + 61}.$$

Đáp số. $\left(x = -3 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = 1\right)$.

$$3) x^4 = \frac{205x + 52}{52x + 205}.$$

Đáp số. $\left(x = -4 \vee x = -\frac{1}{4} \vee x = 1\right)$.

$$4) x^4 = \frac{11x - 6}{6x - 11}.$$

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 2\right)$.

$$5) x^4 = \frac{61x - 21}{21x - 61}.$$

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 3\right)$.

$$6) x^4 = \frac{205x - 52}{52x - 205}.$$

Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{1}{4} \vee x = 4\right)$.

Bài tập 1.8. ⁵ Giải các phương trình sau:

$$1) x^3 = \frac{14x^2 + 13x + 2}{2x^2 + 13x + 14}.$$

Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{21} - 5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 5)\right)$.

$$2) x^3 = \frac{17x^2 + 15x + 2}{2x^2 + 15x + 17}.$$

Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = -2\sqrt{2} - 3 \vee x = 2\sqrt{2} - 3\right)$.

⁴Trần Văn Toàn

⁵Trần Văn Toàn

$$3) x^3 = \frac{20x^2 + 17x + 2}{2x^2 + 17x + 20}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}(-3\sqrt{5} - 7) \vee x = \frac{1}{2}(3\sqrt{5} - 7) \right).$$

$$4) x^3 = \frac{23x^2 + 19x + 2}{2x^2 + 19x + 23}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = -\sqrt{15} - 4 \vee x = \sqrt{15} - 4 \right).$$

$$5) x^3 = \frac{25x^2 + 24x + 4}{4x^2 + 24x + 25}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{4}(-\sqrt{65} - 9) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{65} - 9) \right).$$

$$6) x^3 = \frac{26x^2 + 21x + 2}{2x^2 + 21x + 26}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{77} - 9) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{77} - 9) \right).$$

$$7) x^3 = \frac{29x^2 + 23x + 2}{2x^2 + 23x + 29}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = -2\sqrt{6} - 5 \vee x = 2\sqrt{6} - 5 \right).$$

Bài tập 1.9. ⁶ Giải các phương trình sau:

$$1) x^4 = \frac{23x^2 - 16x + 3}{3x^2 - 16x + 23}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 3 \right).$$

$$2) x^4 = \frac{33x^2 - 19x + 3}{3x^2 - 19x + 33}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 3) \right).$$

$$3) x^4 = \frac{36x^2 - 29x + 6}{6x^2 - 29x + 36}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 3 \right).$$

$$4) x^4 = \frac{43x^2 - 22x + 3}{3x^2 - 22x + 43}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = 2 - \sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} + 2 \right).$$

⁶Trần Văn Toàn

$$5) x^4 = \frac{49x^2 - 42x + 9}{9x^2 - 42x + 49}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = 1 \vee x = 3 \right).$$

Bài tập 1.10. ⁷ Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 = \frac{20x^3 + x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + x + 20}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$2) x^2 = \frac{21x^3 + 2x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 2x + 21}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$3) x^2 = \frac{22x^3 + 3x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 3x + 22}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$4) x^2 = \frac{23x^3 + 4x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 4x + 23}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$5) x^2 = \frac{24x^3 + 5x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 5x + 24}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$6) x^2 = \frac{25x^3 + 6x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 6x + 25}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$7) x^2 = \frac{26x^3 + 7x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 7x + 26}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$8) x^2 = \frac{27x^3 + x^2 + 3x + 2}{2x^3 + 3x^2 + x + 27}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{21} - 5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 5) \right).$$

⁷Trần Văn Toàn

$$9) x^2 = \frac{27x^3 + 8x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 8x + 27}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$10) x^2 = \frac{28x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{2x^3 + 3x^2 + 2x + 28}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{21} - 5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 5) \right).$$

$$11) x^2 = \frac{28x^3 + 9x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 9x + 28}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$12) x^2 = \frac{29x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{2x^3 + 3x^2 + 3x + 29}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{21} - 5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 5) \right).$$

$$13) x^2 = \frac{29x^3 + 10x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 10x + 29}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

$$14) x^2 = \frac{30x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{2x^3 + 3x^2 + 4x + 30}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{21} - 5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 5) \right).$$

$$15) x^2 = \frac{30x^3 + 11x^2 + x + 2}{2x^3 + x^2 + 11x + 30}.$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 2 \vee x = \sqrt{3} - 2 \right).$$

Phương trình đẳng cấp bậc hai theo $f(x)$ và $g(x)$ dạng

$$A \cdot [f(x)]^2 + B \cdot f(x) \cdot g(x) + C \cdot [g(x)]^2 = 0, \quad A \cdot B \cdot C \neq 0.$$

- Nếu $g(x) = 0$, từ phương trình đã cho ta phải có $f(x) = 0$.
- Nếu $g(x) \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $[g(x)]^2$, ta được

$$A \cdot \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]^2 + B \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + C = 0.$$

$$\text{rồi đặt } t = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

* Cũng có thể xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo $f(x)$ hoặc $g(x)$.

Bài tập 1.11. Giải các phương trình sau:

$$1) (x^2 + 4x + 18)^2 + 12x \cdot (x^2 + 4x + 18) + 35x^2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -9 \vee x = -6 \vee x = -3 \vee x = -2.$$

$$2) (x^2 + 6x - 12)^2 - 7x \cdot (x^2 + 6x - 12) + 10x^2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -6 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 3.$$

$$3) (x^2 + 6x - 12)^2 - 9x \cdot (x^2 + 6x - 12) + 14x^2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -6 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 4.$$

$$4) (x^2 + 10x - 12)^2 - 5x \cdot (x^2 + 10x - 12) - 6x^2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -12 \vee x = -6 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

$$5) 3 \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 + 4 \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^2 + 8 \left(\frac{x^2-4}{x^2+4x+3} \right) = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{14}{5} \vee x = 1 \vee x = \frac{1}{6}(-7 - \sqrt{73}) \vee x = \frac{1}{6}(\sqrt{73} - 7).$$

$$6) 20 \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 - 5 \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 + 48 \left(\frac{x^2-4}{x^2-1} \right) = 0;$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ 3; \frac{2}{3} \right\}.$$

$$7) 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1);$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ -1; -\frac{1}{2}; 2; 4 \right\}.$$

$$8) 2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } \{-1; -2 \pm \sqrt{3}\}.$$

$$9) (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0;$$

$$\text{Đáp số. } \{-4; -2\};$$

Hướng dẫn. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0.$

$$10) 6x^2 + 7x \cdot \sqrt{1+x} = 24 \cdot (1+x).$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ 3; -\frac{8}{9} \right\}.$$

Bài tập 1.12. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{9}{2(x^2 - 2x + 4)};$$

$$\text{Đáp số. } \{1\}.$$

$$2) \frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5};$$

$$\text{Đáp số. } \{1; 2\}.$$

$$3) \frac{3}{x^2 + 2x - 8} + \frac{2}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{5}{6};$$

$$\text{Đáp số. } x = -1 \vee x = -1 - \sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} - 1.$$

$$4) \frac{2}{(x+1)(x+2)} - \frac{3}{(x-1)(x+4)} = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Đáp số. } x = -5 \vee x = 2.$$

Phương trình dạng

$$\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = C, \text{ với } ABC \neq 0, \quad ac \neq 0.$$

Viết phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{A}{ax + b_1 + \frac{c}{x}} + \frac{B}{ax + b_2 + \frac{c}{x}} = C$$

rồi đặt $t = ax + \frac{c}{x}$.

Chú ý. Cũng có thể đặt $t = ax^2 + c$. Đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t , tham số x .

Bài tập 1.13. ⁸ Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{3}{4} \vee x = 2.$$

$$2) \frac{4x}{x^2 + 2x + 3} - \frac{5x}{x^2 + 4x + 3} = \frac{10}{9};$$

$$\text{Đáp số. } x = -6 \vee x = -\frac{1}{2}.$$

$$3) \frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1;$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\}.$$

$$4) \frac{2x}{4x^2 - 8x + 7} - \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = -\frac{10}{7}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{7}{8} \vee x = 2.$$

Phương trình dạng

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A, \quad A \neq 0$$

hay

$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} = \frac{A}{ax^2 + b_3x + c}, \quad A \neq 0.$$

- Kiểm tra $x = 0$ có là nghiệm của phương trình hay không?
- Chia cả tử và mẫu mỗi số hạng ở vế trái của phương trình cho x , rồi đặt $t = ax + \frac{c}{x}$.

Chú ý. Cũng có thể đặt $t = ax^2 + c$. Đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t , tham số x .

Bài tập 1.14. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x + 3} + \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 6x + 3} = \frac{3}{4};$$

$$\text{Đáp số. } x = -5 \vee x = -\frac{3}{5}.$$

⁸Trần Văn Toàn

$$2) \frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} + \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 12x + 15} = \frac{7}{4};$$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 15 \vee x = 9 - \sqrt{66} \vee x = 9 + \sqrt{66}$.

$$3) \frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 12x + 15} = \frac{5}{4};$$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 15 \vee x = \frac{1}{5}(33 - \sqrt{714}) \vee x = \frac{1}{5}(33 + \sqrt{714})$.

$$4) \frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{-6x}{x^2 - 2x + 15};$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 5$.

$$5) \frac{x^2 - 2x + 15}{x^2 - 4x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 6x + 15}.$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 5$.

Phương trình có dạng

$$a_1(bx^2 + c_1x + d)^2 + a_2(bx^2 + c_2x + d)^2 = ex^2.$$

- Kiểm tra xem $x = 0$ có là nghiệm phương trình hay không.
- Với $x \neq 0$, chia phương trình cho x^2 .

Bài tập 1.15. ⁹ Giải các phương trình sau:

$$1) (3x^2 + 6x + 5)^2 + 2(3x^2 + 8x + 5)^2 = 4x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1\right)$.

$$2) (3x^2 + 7x + 5)^2 + 2(3x^2 + 8x + 5)^2 = x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1\right)$.

$$3) 3(3x^2 + 7x + 5)^2 + 2(3x^2 + 8x + 5)^2 = 3x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1\right)$.

$$4) 5(3x^2 + 7x + 5)^2 + 2(3x^2 + 8x + 5)^2 = 5x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1\right)$.

$$5) (3x^2 + 7x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 3x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{9}(-\sqrt{34} - 13) \vee x = \frac{1}{9}(\sqrt{34} - 13)\right)$.

$$6) (3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 2x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{9}(-\sqrt{61} - 14) \vee x = \frac{1}{9}(\sqrt{61} - 14)\right)$.

$$7) 3(3x^2 + 7x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 5x^2.$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1\right)$.

⁹Trần Văn Toàn

8) $3(3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 2x^2.$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{15}(-\sqrt{109} - 22) \vee x = \frac{1}{15}(\sqrt{109} - 22)\right).$

9) $5(3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 2x^2.$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{21}(-\sqrt{165} - 30) \vee x = \frac{1}{21}(\sqrt{165} - 30)\right).$

10) $7(3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 2x^2.$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{27}(-\sqrt{229} - 38) \vee x = \frac{1}{27}(\sqrt{229} - 38)\right).$

11) $9(3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 2x^2.$

Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{3} \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{33}(-\sqrt{301} - 46) \vee x = \frac{1}{33}(\sqrt{301} - 46)\right).$

12) $10(3x^2 + 8x + 5)^2 + 2(3x^2 + 9x + 5)^2 = 3x^2.$

Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = -\frac{10}{9} \vee x = -\frac{5}{6}\right).$

Bài tập 1.16. ¹⁰ Giải các phương trình sau:

1) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8;$

Đáp số. $\{2; -1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}.$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2x \frac{x}{x-1} = 8.$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} = 8.$$

2) $\frac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 = 5.$

Đáp số. $x = -1 \vee x = 2.$

3) $\frac{x^2}{(x+1)^2} + x^2 = \frac{5}{4}.$

Đáp số. $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1.$

4) $\frac{x^2}{(x+1)^2} + x^2 = 8.$

Đáp số. $x = -2 \vee x = 1 - \sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} + 1.$

5) $\frac{36x^2}{(x+6)^2} + x^2 = 13.$

Đáp số. $x = -2 \vee x = 3.$

6) $\frac{9x^2}{(x+3)^2} + x^2 = \frac{13}{4}.$

Đáp số. $x = -1 \vee x = \frac{3}{2}.$

7) $\frac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 = \frac{13}{9}.$

Đáp số. $x = -\frac{2}{3} \vee x = 1.$

¹⁰Trần Văn Toàn

- 8) $\frac{16x^2}{(x+4)^2} + x^2 = 20.$ Đáp số. $x = -2 \vee x = 4.$
- 9) $\frac{36x^2}{(x+6)^2} + x^2 = \frac{25}{4}.$ Đáp số. $x = -\frac{3}{2} \vee x = 2.$
- 10) $\frac{16x^2}{(x+4)^2} + x^2 = \frac{25}{9}.$ Đáp số. $x = -1 \vee x = \frac{4}{3}.$
- 11) $\frac{9x^2}{(x+3)^2} + x^2 = \frac{25}{16}.$ Đáp số. $x = -\frac{3}{4} \vee x = 1.$
- 12) $\frac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 = 32.$ Đáp số. $x = -4 \vee x = 2 - 2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3} + 2.$
- 13) $\frac{9x^2}{(x+3)^2} + x^2 = 40.$ Đáp số. $x = -2 \vee x = 6.$
- 14) $\frac{x^2}{(x+1)^2} + x^2 = \frac{40}{9}.$ Đáp số. $x = -\frac{2}{3} \vee x = 2.$
- 15) $\frac{100x^2}{(x+10)^2} + x^2 = \frac{41}{4}.$ Đáp số. $x = -2 \vee x = \frac{5}{2}.$
- 16) $\frac{25x^2}{(x+5)^2} + x^2 = \frac{41}{16}.$ Đáp số. $x = -1 \vee x = \frac{5}{4}.$
- 17) $\frac{16x^2}{(x+4)^2} + x^2 = \frac{41}{25}.$ Đáp số. $x = -\frac{4}{5} \vee x = 1.$
- 18) $\frac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 = 45.$ Đáp số. $x = -6 \vee x = -3 \vee x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{65}) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{65} + 5).$
- 19) $\frac{36x^2}{(x+6)^2} + x^2 = 45.$ Đáp số. $x = -3 \vee x = 6.$
- 20) $\frac{x^2}{(x+1)^2} + x^2 = \frac{45}{4}.$ Đáp số. $x = -3 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{65}) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{65} + 5).$
- 21) $\frac{9x^2}{(x+3)^2} + x^2 = \frac{45}{4}.$ Đáp số. $\left(x = -\frac{3}{2} \vee x = 3\right).$

Bài tập 1.17. ¹¹ Giải các phương trình sau:

- 1) $\frac{x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{5}{4}.$ Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{1}{2}\right).$
- 2) $\frac{x^2}{(x-1)^2} + x^2 = 8.$ Đáp số. $(x = 2 \vee x = -\sqrt{3} - 1 \vee x = \sqrt{3} - 1).$
- 3) $\frac{x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{40}{9}.$ Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = \frac{2}{3}\right).$

¹¹Trần Văn Toàn

- 4) $\frac{x^2}{(x-1)^2} + x^2 = \frac{45}{4}$. Đáp số. $\left(x = \frac{3}{2} \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{4}(-\sqrt{65}-5) \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{65}-5)\right)$.
- 5) $\frac{4x^2}{(x-2)^2} + x^2 = 5$. Đáp số. $(x = -2 \vee x = 1)$.
- 6) $\frac{4x^2}{(x-2)^2} + x^2 = \frac{13}{9}$. Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{2}{3}\right)$.
- 7) $\frac{4x^2}{(x-2)^2} + x^2 = 32$. Đáp số. $(x = 4 \vee x = -2\sqrt{3}-2 \vee x = 2\sqrt{3}-2)$.
- 8) $\frac{4x^2}{(x-2)^2} + x^2 = 45$. Đáp số. $\left(x = 3 \vee x = 6 \vee x = \frac{1}{2}(-\sqrt{65}-5) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{65}-5)\right)$.
- 9) $\frac{9x^2}{(x-3)^2} + x^2 = \frac{13}{4}$. Đáp số. $\left(x = -\frac{3}{2} \vee x = 1\right)$.
- 10) $\frac{9x^2}{(x-3)^2} + x^2 = \frac{25}{16}$. Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{3}{4}\right)$.
- 11) $\frac{9x^2}{(x-3)^2} + x^2 = 40$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = 2)$.
- 12) $\frac{9x^2}{(x-3)^2} + x^2 = \frac{45}{4}$. Đáp số. $\left(x = -3 \vee x = \frac{3}{2}\right)$.
- 13) $\frac{9x^2}{(x-3)^2} + x^2 = 72$. Đáp số. $(x = 6 \vee x = -3\sqrt{3}-3 \vee x = 3\sqrt{3}-3)$.
- 14) $\frac{16x^2}{(x-4)^2} + x^2 = 20$. Đáp số. $(x = -4 \vee x = 2)$.
- 15) $\frac{16x^2}{(x-4)^2} + x^2 = \frac{25}{9}$. Đáp số. $\left(x = -\frac{4}{3} \vee x = 1\right)$.
- 16) $\frac{16x^2}{(x-4)^2} + x^2 = \frac{41}{25}$. Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{4}{5}\right)$.
- 17) $\frac{16x^2}{(x-4)^2} + x^2 = \frac{52}{9}$. Đáp số. $\left(x = -2 \vee x = \frac{4}{3}\right)$.
- 18) $\frac{25x^2}{(x-5)^2} + x^2 = \frac{41}{16}$. Đáp số. $\left(x = -\frac{5}{4} \vee x = 1\right)$.
- 19) $\frac{25x^2}{(x-5)^2} + x^2 = \frac{61}{36}$. Đáp số. $\left(x = -1 \vee x = \frac{5}{6}\right)$.
- 20) $\frac{36x^2}{(x-6)^2} + x^2 = 13$. Đáp số. $(x = -3 \vee x = 2)$.
- 21) $\frac{36x^2}{(x-6)^2} + x^2 = 45$. Đáp số. $(x = -6 \vee x = 3)$.

$$22) \frac{36x^2}{(x-6)^2} + x^2 = \frac{61}{25}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -\frac{6}{5} \vee x = 1 \right).$$

$$23) \frac{36x^2}{(x-6)^2} + x^2 = \frac{85}{49}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -1 \vee x = \frac{6}{7} \right).$$

$$24) \frac{49x^2}{(x-7)^2} + x^2 = \frac{85}{36}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -\frac{7}{6} \vee x = 1 \right).$$

$$25) \frac{64x^2}{(x-8)^2} + x^2 = 80. \quad \text{Đáp số. } (x = -8 \vee x = 4).$$

$$26) \frac{64x^2}{(x-8)^2} + x^2 = \frac{100}{9}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -\frac{8}{3} \vee x = 2 \right).$$

$$27) \frac{100x^2}{(x-10)^2} + x^2 = \frac{41}{4}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -\frac{5}{2} \vee x = 2 \right).$$

$$28) \frac{100x^2}{(x-10)^2} + x^2 = \frac{61}{9}. \quad \text{Đáp số. } \left(x = -2 \vee x = \frac{5}{3} \right).$$

Bài tập 1.18. Giải các phương trình sau:

$$1) \frac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{10}{9}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}.$$

Hướng dẫn. Chia cả tử và mẫu về trái của phương trình cho x^2 .

$$2) \frac{(x-1)^2 \cdot x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{1}{2}; 2; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3} \right\}.$$

$$3) x \left(\frac{5-x}{x+1} \right) \cdot \left(x + \frac{5-x}{x+1} \right) = 6; \quad \text{Đáp số. } \{1; 2\}.$$

$$4) x(x+4) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + 4 \right) = 10; \quad \text{Đáp số. } \{1; -3 \pm 2\sqrt{2}\}.$$

$$5) 343(x^2+3) - 26(x+3)^3 = 0; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$6) \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right); \quad \text{Đáp số. } \{-2; 6; 3 \pm \sqrt{21}\}.$$

$$7) x^3 + \frac{1}{x^3} = 6 \left(x + \frac{1}{x} \right); \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$8) \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 = \frac{40}{9}; \quad \text{Đáp số. } x = -2 \vee x = 2 \vee x = -\sqrt{\frac{5}{11}} \vee x = \sqrt{\frac{5}{11}}.$$

$$9) \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} - \frac{8}{3}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -4; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 4 \right\}.$$

$$10) \frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} - \frac{x-5}{x+6}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -4; -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$11) \frac{x^2+4x+4}{x+4} - \frac{2x+6}{x+2} = \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{2x+9}{x+3};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ 0; \frac{-5+\sqrt{3}}{2}; \frac{-5-\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$12) \frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ -\frac{5}{2}; 0 \right\}.$$

$$13) \frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}.$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{7}{2}.$$

$$14) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ -\frac{7}{2} \right\}.$$

$$15) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{2} \left(-4 - \sqrt{\frac{2}{5} (15 + \sqrt{145})} \right) \vee x = \frac{1}{2} \left(-4 - \sqrt{\frac{2}{5} (15 - \sqrt{145})} \right) \vee x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{5} (15 - \sqrt{145})} - 4 \right) \vee x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{5} (15 + \sqrt{145})} - 4 \right).$$

$$16) \left(\frac{x+6}{x-6} \right) \left(\frac{x+4}{x-4} \right)^2 + \left(\frac{x-6}{x+6} \right) \left(\frac{x+9}{x-9} \right)^2 = 2 \left(\frac{x^2+36}{x^2-36} \right);$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ 0; \frac{6(1+\sqrt{26})}{5}; \frac{6(1-\sqrt{26})}{5} \right\};$$

$$\text{Hướng dẫn. } 2 \left(\frac{x^2+36}{x^2-36} \right) = \frac{x+6}{x-6} + \frac{x-6}{x+6}.$$

Bài tập 1.19. Giải các phương trình sau:

$$1) (x^2+x-2) \cdot (x^2+x-3) = 12;$$

$$\text{Đáp số. } \{2; -3\}.$$

$$2) (x^2+x+1) \cdot (x^2+x+2) = 12;$$

$$\text{Đáp số. } \{-2; 1\}.$$

$$3) (6x+5)^2 \cdot (3x+2) \cdot (x+1) = 35;$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6} \right\}.$$

$$4) (8x+7)^2 \cdot (4x+3) \cdot (x+1) = \frac{9}{2};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ -\frac{5}{4}; -\frac{1}{2} \right\}.$$

$$5) (x^2+x+1)^2 = x^2(7x^2+x+1);$$

$$\text{Đáp số. } x = -\frac{1}{2} \vee x = 1.$$

$$6) (x^2-3x+1) \cdot (x^2+3x+2) \cdot (x^2-9x+20) = -72.$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ 1; 2; \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \right\}.$$

Hướng dẫn.

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 3x + 2) \cdot (x^2 - 9x + 20) &= (x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) \\
 &= [(x + 1)(x - 4)] \cdot [(x + 2)(x - 5)] \\
 &= (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10).
 \end{aligned}$$

1.2 Phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối**Bài tập 1.20.** Giải các phương trình sau:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $ x^2 + 32x + 240 = -x - 2.$ | Đáp số. $(x = -22 \vee x = -17 \vee x = -14 \vee x = -11).$ |
| 2) $ x^2 + 30x + 209 = -x - 1.$ | Đáp số. $(x = -21 \vee x = -16 \vee x = -13 \vee x = -10).$ |
| 3) $ x^2 + 26x + 153 = 1 - x.$ | Đáp số. $(x = -19 \vee x = -14 \vee x = -11 \vee x = -8).$ |
| 4) $ x^2 + 28x + 160 = 22 - x.$ | Đáp số. $(x = -23 \vee x = -14 \vee x = -13 \vee x = -6).$ |
| 5) $ x^2 + 24x + 128 = 2 - x.$ | Đáp số. $(x = -18 \vee x = -13 \vee x = -10 \vee x = -7).$ |
| 6) $ x^2 + 27x + 140 = 25 - x.$ | Đáp số. $(x = -23 \vee x = -15 \vee x = -11 \vee x = -5).$ |
| 7) $ x^2 + 26x + 133 = 23 - x.$ | Đáp số. $(x = -22 \vee x = -13 \vee x = -12 \vee x = -5).$ |
| 8) $ x^2 + 22x + 105 = 3 - x.$ | Đáp số. $(x = -17 \vee x = -12 \vee x = -9 \vee x = -6).$ |
| 9) $ x^2 + 22x + 105 = x + 25.$ | Đáp số. $(x = -16 \vee x = -13 \vee x = -10 \vee x = -5).$ |
| 10) $ x^2 + 24x + 108 = 24 - x.$ | Đáp số. $(x = -21 \vee x = -12 \vee x = -11 \vee x = -4).$ |
| 11) $ x^2 + 20x + 84 = 4 - x.$ | Đáp số. $(x = -16 \vee x = -11 \vee x = -8 \vee x = -5).$ |
| 12) $ x^2 + 20x + 84 = x + 24.$ | Đáp số. $(x = -15 \vee x = -12 \vee x = -9 \vee x = -4).$ |
| 13) $ x^2 + 25x + 100 = -5x - 4.$ | Đáp số. $(x = -26 \vee x = -12 \vee x = -8 \vee x = -4).$ |
| 14) $ x^2 + 22x + 85 = 25 - x.$ | Đáp số. $(x = -20 \vee x = -11 \vee x = -10 \vee x = -3).$ |
| 15) $ x^2 + 18x + 65 = 5 - x.$ | Đáp số. $(x = -15 \vee x = -10 \vee x = -7 \vee x = -4).$ |
| 16) $ x^2 + 18x + 65 = x + 23.$ | Đáp số. $(x = -14 \vee x = -11 \vee x = -8 \vee x = -3).$ |
| 17) $ x^2 + 23x + 76 = 1 - 5x.$ | Đáp số. $(x = -25 \vee x = -11 \vee x = -7 \vee x = -3).$ |
| 18) $ x^2 + 16x + 48 = 6 - x.$ | Đáp số. $(x = -14 \vee x = -9 \vee x = -6 \vee x = -3).$ |
| 19) $ x^2 + 16x + 48 = x + 22.$ | Đáp số. $(x = -13 \vee x = -10 \vee x = -7 \vee x = -2).$ |

- 20) $|x^2 + 21x + 54| = 6 - 5x$. Đáp số. ($x = -24 \vee x = -10 \vee x = -6 \vee x = -2$).
- 21) $|x^2 + 14x + 33| = 7 - x$. Đáp số. ($x = -13 \vee x = -8 \vee x = -5 \vee x = -2$).
- 22) $|x^2 + 14x + 33| = x + 21$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -9 \vee x = -6 \vee x = -1$).
- 23) $|x^2 + 19x + 34| = 11 - 5x$. Đáp số. ($x = -23 \vee x = -9 \vee x = -5 \vee x = -1$).
- 24) $|x^2 + 12x + 20| = 8 - x$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -7 \vee x = -4 \vee x = -1$).
- 25) $|x^2 + 10x + 9| = x + 19$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -7 \vee x = -4 \vee x = 1$).
- 26) $|x^2 + 6x - 7| = 11 - x$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 27) $|x^2 + 6x - 7| = x + 17$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -5 \vee x = -2 \vee x = 3$).
- 28) $|x^2 + 4x - 12| = x + 16$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -4 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 29) $|x^2 + 2x - 15| = 13 - x$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 30) $|x^2 - 16| = 14 - x$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 5$).
- 31) $|x^2 - 16| = x + 14$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 32) $|x^2 - 2x - 15| = x + 13$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 7$).
- 33) $|x^2 - 4x - 12| = 16 - x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 4 \vee x = 7$).
- 34) $|x^2 - 6x - 7| = 17 - x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 2 \vee x = 5 \vee x = 8$).
- 35) $|x^2 - 6x - 7| = x + 11$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4 \vee x = 9$).
- 36) $|x^2 - 10x + 9| = 19 - x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4 \vee x = 7 \vee x = 10$).
- 37) $|x^2 - 12x + 20| = x + 8$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4 \vee x = 7 \vee x = 12$).
- 38) $|x^2 - 14x + 33| = 21 - x$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 6 \vee x = 9 \vee x = 12$).
- 39) $|x^2 - 14x + 33| = x + 7$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5 \vee x = 8 \vee x = 13$).
- 40) $|x^2 - 16x + 48| = 22 - x$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 7 \vee x = 10 \vee x = 13$).
- 41) $|x^2 - 16x + 48| = x + 6$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 6 \vee x = 9 \vee x = 14$).
- 42) $|x^2 - 18x + 65| = 23 - x$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 8 \vee x = 11 \vee x = 14$).
- 43) $|x^2 - 18x + 65| = x + 5$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 7 \vee x = 10 \vee x = 15$).
- 44) $|x^2 - 20x + 84| = 24 - x$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 9 \vee x = 12 \vee x = 15$).

- 45) $|x^2 - 20x + 84| = x + 4$.
Đáp số. ($x = 5 \vee x = 8 \vee x = 11 \vee x = 16$).
- 46) $|x^2 - 22x + 105| = 25 - x$.
Đáp số. ($x = 5 \vee x = 10 \vee x = 13 \vee x = 16$).
- 47) $|x^2 - 22x + 105| = x + 3$.
Đáp số. ($x = 6 \vee x = 9 \vee x = 12 \vee x = 17$).
- 48) $|x^2 - 24x + 128| = x + 2$.
Đáp số. ($x = 7 \vee x = 10 \vee x = 13 \vee x = 18$).
- 49) $|x^2 - 19x + 34| = 5x + 11$.
Đáp số. ($x = 1 \vee x = 5 \vee x = 9 \vee x = 23$).
- 50) $|x^2 - 22x + 85| = x + 25$.
Đáp số. ($x = 3 \vee x = 10 \vee x = 11 \vee x = 20$).
- 51) $|x^2 - 26x + 153| = x + 1$.
Đáp số. ($x = 8 \vee x = 11 \vee x = 14 \vee x = 19$).
- 52) $|x^2 - 21x + 54| = 5x + 6$.
Đáp số. ($x = 2 \vee x = 6 \vee x = 10 \vee x = 24$).
- 53) $|x^2 - 24x + 108| = x + 24$.
Đáp số. ($x = 4 \vee x = 11 \vee x = 12 \vee x = 21$).
- 54) $|x^2 - 23x + 76| = 5x + 1$.
Đáp số. ($x = 3 \vee x = 7 \vee x = 11 \vee x = 25$).
- 55) $|x^2 - 26x + 133| = x + 23$.
Đáp số. ($x = 5 \vee x = 12 \vee x = 13 \vee x = 22$).
- 56) $|x^2 - 30x + 209| = x - 1$.
Đáp số. ($x = 10 \vee x = 13 \vee x = 16 \vee x = 21$).
- 57) $|x^2 - 25x + 100| = 5x - 4$.
Đáp số. ($x = 4 \vee x = 8 \vee x = 12 \vee x = 26$).
- 58) $|x^2 - 27x + 140| = x + 25$.
Đáp số. ($x = 5 \vee x = 11 \vee x = 15 \vee x = 23$).
- 59) $|x^2 - 28x + 160| = x + 22$.
Đáp số. ($x = 6 \vee x = 13 \vee x = 14 \vee x = 23$).
- 60) $|x^2 - 32x + 240| = x - 2$.
Đáp số. ($x = 11 \vee x = 14 \vee x = 17 \vee x = 22$).
- 61) $|x^2 - 23x + 42| = 7x + 13$.
Đáp số. ($x = 1 \vee x = 5 \vee x = 11 \vee x = 29$).
- 62) $|x^2 - 27x + 126| = 5x - 9$.
Đáp số. ($x = 5 \vee x = 9 \vee x = 13 \vee x = 27$).
- 63) $|x^2 - 29x + 168| = x + 24$.
Đáp số. ($x = 6 \vee x = 12 \vee x = 16 \vee x = 24$).
- 64) $|x^2 - 30x + 189| = x + 21$.
Đáp số. ($x = 7 \vee x = 14 \vee x = 15 \vee x = 24$).
- 65) $|x^2 - 34x + 273| = x - 3$.
Đáp số. ($x = 12 \vee x = 15 \vee x = 18 \vee x = 23$).
- 66) $|x^2 - 24x + 44| = 5x + 16$.
Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4 \vee x = 15 \vee x = 28$).
- 67) $|x^2 - 25x + 66| = 7x + 6$.
Đáp số. ($x = 2 \vee x = 6 \vee x = 12 \vee x = 30$).
- 68) $|x^2 - 29x + 154| = 5x - 14$.
Đáp số. ($x = 6 \vee x = 10 \vee x = 14 \vee x = 28$).
- 69) $|x^2 - 31x + 198| = x + 23$.
Đáp số. ($x = 7 \vee x = 13 \vee x = 17 \vee x = 25$).

- 70) $|x^2 - 32x + 220| = x + 20$. Đáp số. ($x = 8 \vee x = 15 \vee x = 16 \vee x = 25$).
- 71) $|x^2 - 36x + 308| = x - 4$. Đáp số. ($x = 13 \vee x = 16 \vee x = 19 \vee x = 24$).
- 72) $|x^2 - 26x + 69| = 5x + 11$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5 \vee x = 16 \vee x = 29$).
- 73) $|x^2 - 27x + 92| = 7x - 1$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 7 \vee x = 13 \vee x = 31$).
- 74) $|x^2 - 31x + 184| = 5x - 19$. Đáp số. ($x = 7 \vee x = 11 \vee x = 15 \vee x = 29$).
- 75) $|x^2 - 33x + 230| = x + 22$. Đáp số. ($x = 8 \vee x = 14 \vee x = 18 \vee x = 26$).
- 76) $|x^2 - 34x + 253| = x + 19$. Đáp số. ($x = 9 \vee x = 16 \vee x = 17 \vee x = 26$).
- 77) $|x^2 - 38x + 345| = x - 5$. Đáp số. ($x = 14 \vee x = 17 \vee x = 20 \vee x = 25$).
- 78) $|x^2 - 28x + 96| = 5x + 6$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 6 \vee x = 17 \vee x = 30$).
- 79) $|x^2 - 29x + 120| = 7x - 8$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 8 \vee x = 14 \vee x = 32$).
- 80) $|x^2 - 35x + 264| = x + 21$. Đáp số. ($x = 9 \vee x = 15 \vee x = 19 \vee x = 27$).
- 81) $|x^2 - 36x + 288| = x + 18$. Đáp số. ($x = 10 \vee x = 17 \vee x = 18 \vee x = 27$).
- 82) $|x^2 - 40x + 384| = x - 6$. Đáp số. ($x = 15 \vee x = 18 \vee x = 21 \vee x = 26$).
- 83) $|x^2 - 27x + 50| = 11x + 13$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 7 \vee x = 9 \vee x = 37$).
- 84) $|x^2 - 30x + 125| = 5x + 1$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 7 \vee x = 18 \vee x = 31$).
- 85) $|x^2 - 31x + 150| = 7x - 15$. Đáp số. ($x = 5 \vee x = 9 \vee x = 15 \vee x = 33$).
- 86) $|x^2 - 37x + 300| = x + 20$. Đáp số. ($x = 10 \vee x = 16 \vee x = 20 \vee x = 28$).
- 87) $|x^2 - 38x + 325| = x + 17$. Đáp số. ($x = 11 \vee x = 18 \vee x = 19 \vee x = 28$).
- 88) $|x^2 - 42x + 425| = x - 7$. Đáp số. ($x = 16 \vee x = 19 \vee x = 22 \vee x = 27$).

Bài tập 1.21. Giải các phương trình sau:

- 1) $|23x + 25| = x^2 + 14x + 45$. Đáp số. ($x = -35 \vee x = -2 \vee x = 4 \vee x = 5$).
- 2) $|19x + 23| = x^2 + 12x + 35$. Đáp số. ($x = -29 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 3) $|17x + 22| = x^2 + 11x + 30$. Đáp số. ($x = -26 \vee x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 4) $|23x + 3| = x^2 + 11x + 30$. Đáp số. ($x = -33 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 9$).
- 5) $|25x + 1| = x^2 + 13x + 36$. Đáp số. ($x = -37 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 7$).

- 6) $|23x + 2| = x^2 + 12x + 32$.
Đáp số. ($x = -34 \vee x = -1 \vee x = 5 \vee x = 6$).
- 7) $|19x + 4| = x^2 + 10x + 24$.
Đáp số. ($x = -28 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 5$).
- 8) $|17x + 5| = x^2 + 9x + 20$.
Đáp số. ($x = -25 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 5$).
- 9) $|25x + 11| = x^2 + 11x + 24$.
Đáp số. ($x = -35 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 13$).
- 10) $|19x + 7| = x^2 + 10x + 21$.
Đáp số. ($x = -28 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 7$).
- 11) $|19x + 9| = x^2 + 9x + 18$.
Đáp số. ($x = -27 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 9$).
- 12) $|11x + 19| = x^2 + 8x + 15$.
Đáp số. ($x = -17 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 13) $|13x + 7| = x^2 + 7x + 12$.
Đáp số. ($x = -19 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 5$).
- 14) $|23x + 11| = x^2 + 15x + 26$.
Đáp số. ($x = -37 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 5$).
- 15) $|25x + 14| = x^2 + 14x + 24$.
Đáp số. ($x = -38 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 10$).
- 16) $|23x + 13| = x^2 + 13x + 22$.
Đáp số. ($x = -35 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 9$).
- 17) $|19x + 10| = x^2 + 12x + 20$.
Đáp số. ($x = -30 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 5$).
- 18) $|19x + 11| = x^2 + 11x + 18$.
Đáp số. ($x = -29 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 7$).
- 19) $|17x + 10| = x^2 + 10x + 16$.
Đáp số. ($x = -26 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 20) $|13x + 8| = x^2 + 8x + 12$.
Đáp số. ($x = -20 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 21) $|11x + 7| = x^2 + 7x + 10$.
Đáp số. ($x = -17 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 22) $|13x - 19| = x^2 + 3x + 2$.
Đáp số. ($x = -17 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = 7$).
- 23) $|11x + 25| = x^2 - 1$.
Đáp số. ($x = -8 \vee x = -3 \vee x = -2 \vee x = 13$).
- 24) $|13x + 19| = x^2 - 3x + 2$.
Đáp số. ($x = -7 \vee x = -3 \vee x = -1 \vee x = 17$).
- 25) $|13x - 7| = x^2 - 7x + 12$.
Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 19$).
- 26) $|11x - 7| = x^2 - 7x + 10$.
Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 17$).
- 27) $|11x - 19| = x^2 - 8x + 15$.
Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 17$).
- 28) $|17x - 5| = x^2 - 9x + 20$.
Đáp số. ($x = -5 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 25$).
- 29) $|13x - 8| = x^2 - 8x + 12$.
Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 20$).
- 30) $|19x - 9| = x^2 - 9x + 18$.
Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 27$).

- 31) $|19x - 4| = x^2 - 10x + 24$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -4 \vee x = 1 \vee x = 28$).
- 32) $|23x - 3| = x^2 - 11x + 30$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 33$).
- 33) $|19x - 7| = x^2 - 10x + 21$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 28$).
- 34) $|17x - 10| = x^2 - 10x + 16$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 26$).
- 35) $|25x - 11| = x^2 - 11x + 24$. Đáp số. ($x = -13 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 35$).
- 36) $|23x - 2| = x^2 - 12x + 32$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -5 \vee x = 1 \vee x = 34$).
- 37) $|19x - 11| = x^2 - 11x + 18$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 29$).
- 38) $|25x - 1| = x^2 - 13x + 36$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -5 \vee x = 1 \vee x = 37$).
- 39) $|19x - 10| = x^2 - 12x + 20$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = 30$).
- 40) $|23x - 13| = x^2 - 13x + 22$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 35$).
- 41) $|25x - 14| = x^2 - 14x + 24$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 38$).
- 42) $|23x - 11| = x^2 - 15x + 26$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = 37$).

Bài tập 1.22. Giải các phương trình sau:

- 1) $|x^2 - 14x + 9| = 2x^2 - 10x + 12$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 7$).
- 2) $|x^2 - 14x + 22| = 2x^2 - 13x + 20$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 7$).
- 3) $|x^2 - 12x + 8| = 2x^2 - 9x + 10$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 4) $|x^2 - 11x - 14| = 3x^2 - x - 2$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 5) $|x^2 - 10x + 15| = 2x^2 - 29x + 105$. Đáp số. ($x = 5 \vee x = 8 \vee x = 9 \vee x = 10$).
- 6) $|x^2 - 8x - 12| = 2x^2 - 31x + 120$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 9 \vee x = 11 \vee x = 12$).
- 7) $|x^2 - 8x - 11| = 2x^2 - x - 1$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 8) $|x^2 - 8x + 6| = 2x^2 - 25x + 78$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 7 \vee x = 8 \vee x = 9$).
- 9) $|x^2 - 6x - 1| = 2x^2 - 21x + 55$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 6 \vee x = 7 \vee x = 8$).
- 10) $|x^2 - 4x - 6| = 2x^2 - 17x + 36$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = 7$).
- 11) $|x^2 - 2x - 9| = 2x^2 - 13x + 21$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6$).
- 12) $|x^2 - 2x - 9| = 2x^2 + 5x + 3$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$).

- 13) $|x^2 + 2x - 9| = 2x^2 - 5x + 3$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 14) $|x^2 + 2x - 9| = 2x^2 + 13x + 21$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -5 \vee x = -4 \vee x = -1$).
- 15) $|x^2 + 4x - 6| = 2x^2 + 17x + 36$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -6 \vee x = -5 \vee x = -2$).
- 16) $|x^2 + 6x - 1| = 2x^2 + 21x + 55$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -7 \vee x = -6 \vee x = -3$).
- 17) $|x^2 + 8x - 12| = 2x^2 + 31x + 120$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -11 \vee x = -9 \vee x = -4$).
- 18) $|x^2 + 8x - 11| = 2x^2 + x - 1$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 5$).
- 19) $|x^2 + 8x - 11| = 2x^2 + 31x + 119$. Đáp số. ($x = -13 \vee x = -10 \vee x = -9 \vee x = -4$).
- 20) $|x^2 + 8x + 6| = 2x^2 + 25x + 78$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -8 \vee x = -7 \vee x = -4$).
- 21) $|x^2 + 10x - 15| = 2x^2 + 38x + 180$. Đáp số. ($x = -15 \vee x = -13 \vee x = -11 \vee x = -5$).
- 22) $|x^2 + 10x - 3| = 2x^2 + 35x + 153$. Đáp số. ($x = -13 \vee x = -12 \vee x = -10 \vee x = -5$).
- 23) $|x^2 + 10x - 2| = 2x^2 + 35x + 152$. Đáp số. ($x = -14 \vee x = -11 \vee x = -10 \vee x = -5$).
- 24) $|x^2 + 10x + 15| = 2x^2 + 29x + 105$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -9 \vee x = -8 \vee x = -5$).
- 25) $|x^2 + 11x - 14| = 3x^2 + x - 2$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 26) $|x^2 + 12x - 4| = 2x^2 + 42x + 220$. Đáp số. ($x = -16 \vee x = -14 \vee x = -12 \vee x = -6$).
- 27) $|x^2 + 12x + 8| = 2x^2 + 9x + 10$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 28) $|x^2 + 12x + 8| = 2x^2 + 39x + 190$. Đáp số. ($x = -14 \vee x = -13 \vee x = -11 \vee x = -6$).
- 29) $|x^2 + 12x + 9| = 2x^2 + 39x + 189$. Đáp số. ($x = -15 \vee x = -12 \vee x = -11 \vee x = -6$).
- 30) $|x^2 + 14x - 6| = 2x^2 + 49x + 300$. Đáp số. ($x = -18 \vee x = -17 \vee x = -14 \vee x = -7$).
- 31) $|x^2 + 14x - 5| = 2x^2 + 49x + 299$. Đáp số. ($x = -19 \vee x = -16 \vee x = -14 \vee x = -7$).
- 32) $|x^2 + 14x + 9| = 2x^2 + 10x + 12$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 33) $|x^2 + 14x + 9| = 2x^2 + 46x + 264$. Đáp số. ($x = -17 \vee x = -15 \vee x = -13 \vee x = -7$).
- 34) $|x^2 + 14x + 9| = 2x^2 + 46x + 264$. Đáp số. ($x = -17 \vee x = -15 \vee x = -13 \vee x = -7$).
- 35) $|x^2 + 14x + 21| = 2x^2 + 43x + 231$. Đáp số. ($x = -15 \vee x = -14 \vee x = -12 \vee x = -7$).
- 36) $|x^2 + 14x + 22| = 2x^2 + 13x + 20$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 37) $|x^2 + 14x + 22| = 2x^2 + 43x + 230$. Đáp số. ($x = -16 \vee x = -13 \vee x = -12 \vee x = -7$).

- 38) $|x^2 + 16x + 9| = 2x^2 + 11x + 15$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 39) $|x^2 + 16x + 10| = 2x^2 + 11x + 14$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 40) $|x^2 + 16x + 10| = 2x^2 + 53x + 350$. Đáp số. ($x = -20 \vee x = -17 \vee x = -15 \vee x = -8$).
- 41) $|x^2 + 16x + 24| = 2x^2 + 50x + 312$. Đáp số. ($x = -18 \vee x = -16 \vee x = -14 \vee x = -8$).
- 42) $|x^2 + 17x + 12| = 2x^2 + 13x + 15$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 43) $|x^2 + 18x + 11| = 2x^2 + 12x + 16$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 5$).
- 44) $|x^2 + 18x + 20| = 2x^2 - 3x - 2$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 22$).
- 45) $|x^2 + 20x + 9| = 2x^2 + 13x + 21$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 46) $|x^2 + 20x + 12| = 2x^2 + 13x + 18$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 47) $|x^2 + 21x + 14| = 3x^2 + 15x + 18$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 48) $|x^2 + 22x - 14| = 2x^2 - 13x + 20$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 34$).
- 49) $|x^2 + 22x + 9| = 2x^2 + 14x + 24$. Đáp số. ($x = -11 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 5$).
- 50) $|x^2 + 22x + 13| = 2x^2 + 14x + 20$. Đáp số. ($x = -11 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 7$).
- 51) $|x^2 + 22x + 15| = 2x^2 + 17x + 21$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 52) $|x^2 + 22x + 25| = 3x^2 - 2x - 1$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 13$).
- 53) $|x^2 + 23x + 12| = 2x^2 + 16x + 24$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 54) $|x^2 + 23x + 12| = 2x^2 + 13x + 21$. Đáp số. ($x = -11 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 9$).
- 55) $|x^2 + 23x + 16| = 3x^2 + 17x + 20$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 56) $|x^2 + 24x + 8| = 2x^2 + 15x + 28$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 4 \vee x = 5$).
- 57) $|x^2 + 24x + 9| = 2x^2 + 15x + 27$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 3 \vee x = 6$).
- 58) $|x^2 + 24x + 11| = 2x^2 + 15x + 25$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 7$).
- 59) $|x^2 + 24x + 14| = 2x^2 + 15x + 22$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 8$).
- 60) $|x^2 + 24x + 15| = 3x^2 + 16x + 21$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).

Bài tập 1.23. Giải các phương trình sau:

- 1) $|x^2 + 14x - 15| = 3x^2 - 2x - 1$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 7$).

- 2) $|x^2 + 13x - 14| = 3x^2 - x - 2$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 6$).
- 3) $|x^2 + 11x - 12| = 3x^2 + x - 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 4) $|x^2 + 10x - 11| = 3x^2 + 2x - 5$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 5) $|x^2 + 8x - 9| = 3x^2 + 4x - 7$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 6) $|x^2 + 7x - 8| = 3x^2 + 5x - 8$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 7) $|x^2 + 5x - 6| = 3x^2 + 7x - 10$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 8) $|x^2 + 4x - 5| = 3x^2 + 8x - 11$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 9) $|x^2 + 7x - 18| = 3x^2 + 5x + 2$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 10) $|x^2 + 5x - 14| = 3x^2 + 7x - 2$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 11) $|x^2 + 4x - 12| = 3x^2 + 8x - 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 12) $|x^2 + 2x - 8| = 3x^2 + 10x - 8$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 13) $|x^2 + 12x - 45| = 2x^2 + 9x - 9$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 14) $|x^2 + 10x - 39| = 2x^2 + 11x - 15$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 15) $|x^2 + 4x - 21| = 3x^2 + 8x + 5$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 16) $|x^2 + 3x - 18| = 3x^2 + 9x + 2$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 17) $|x^2 + 2x - 15| = 3x^2 + 10x - 1$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 18) $|x^2 + x - 12| = 3x^2 + 11x - 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 19) $|x^2 + 11x - 60| = 3x^2 + 13x - 4$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = 2$).
- 20) $|x^2 + 10x - 56| = 2x^2 + 11x + 2$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 21) $|x^2 + 10x - 56| = 3x^2 + 14x - 8$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = 2$).
- 22) $|x^2 + 8x - 48| = 2x^2 + 13x - 6$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 23) $|x^2 + 6x - 40| = 2x^2 + 15x - 14$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 24) $|x^2 + 2x - 24| = 3x^2 - 14x + 8$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 25) $|x^2 + 2x - 24| = 3x^2 + 10x + 8$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 26) $|x^2 + x - 20| = 3x^2 - 13x + 4$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).

- 27) $|x^2 + x - 20| = 3x^2 + 11x + 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 28) $|x^2 - x - 12| = 3x^2 - 11x - 4$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 29) $|x^2 - 2x - 8| = 3x^2 - 10x - 8$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 30) $|x^2 + 10x - 75| = 2x^2 + 11x - 15$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = 3$).
- 31) $|x^2 + 10x - 75| = 3x^2 + 14x + 11$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = 2$).
- 32) $|x^2 + 8x - 65| = 2x^2 + 13x + 11$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 33) $|x^2 + 6x - 55| = 2x^2 + 15x + 1$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = 2$).
- 34) $|x^2 + x - 30| = 3x^2 - 13x + 14$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 35) $|x^2 - x - 20| = 3x^2 - 11x + 4$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 36) $|x^2 - x - 20| = 3x^2 + 13x + 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 37) $|x^2 - 2x - 15| = 3x^2 - 10x - 1$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 38) $|x^2 - 4x - 5| = 3x^2 - 8x - 11$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 39) $|x^2 + 8x - 84| = 2x^2 + 13x - 6$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = 3$).
- 40) $|x^2 - x - 30| = 3x^2 + 13x + 14$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 41) $|x^2 - 2x - 24| = 3x^2 - 10x + 8$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 42) $|x^2 - 2x - 24| = 3x^2 + 14x + 8$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = 1$).
- 43) $|x^2 - 3x - 18| = 3x^2 - 9x + 2$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 44) $|x^2 - 4x - 12| = 3x^2 - 8x - 4$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 45) $|x^2 - 5x - 6| = 3x^2 - 7x - 10$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 46) $|x^2 + 8x - 105| = 2x^2 + 13x + 15$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = 3$).
- 47) $|x^2 + 6x - 91| = 2x^2 + 15x + 1$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = 3$).
- 48) $|x^2 - 4x - 21| = 3x^2 - 8x + 5$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 49) $|x^2 - 5x - 14| = 3x^2 - 7x - 2$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 50) $|x^2 - 7x - 8| = 3x^2 - 5x - 8$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 51) $|x^2 - 7x - 18| = 3x^2 - 5x + 2$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).

- 52) $|x^2 - 8x - 9| = 3x^2 - 4x - 7$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 4$).
- 53) $|x^2 - 6x - 40| = 2x^2 - 15x - 14$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 54) $|x^2 - 6x - 55| = 2x^2 - 15x + 1$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 55) $|x^2 - 10x - 11| = 3x^2 - 2x - 5$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 56) $|x^2 - 8x - 48| = 2x^2 - 13x - 6$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 57) $|x^2 - 11x - 12| = 3x^2 - x - 4$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 58) $|x^2 - 6x - 91| = 2x^2 - 15x + 1$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 10$).
- 59) $|x^2 - 8x - 65| = 2x^2 - 13x + 11$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 60) $|x^2 - 10x - 39| = 2x^2 - 11x - 15$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 61) $|x^2 - 8x - 84| = 2x^2 - 13x - 6$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 10$).
- 62) $|x^2 - 10x - 56| = 2x^2 - 11x + 2$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 63) $|x^2 - 10x - 56| = 3x^2 - 14x - 8$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 8$).
- 64) $|x^2 - 13x - 14| = 3x^2 + x - 2$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -1 \vee x = 4$).
- 65) $|x^2 - 8x - 105| = 2x^2 - 13x + 15$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 10$).
- 66) $|x^2 - 10x - 75| = 2x^2 - 11x - 15$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 10$).
- 67) $|x^2 - 10x - 75| = 3x^2 - 14x + 11$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 8$).
- 68) $|x^2 - 11x - 60| = 3x^2 - 13x - 4$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 8$).
- 69) $|x^2 - 12x - 45| = 2x^2 - 9x - 9$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 9$).
- 70) $|x^2 - 14x - 15| = 3x^2 + 2x - 1$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -1 \vee x = 4$).

Chủ đề 2

Phương trình chứa căn

2.1 Phương trình cơ bản

Bài tập 2.1. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2 + 36x + 180} = 2x + 15.$

Đáp số. ($x = -5 \vee x = -3$).

2) $\sqrt{x^2 + 34x + 145} = 2x + 13.$

Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2$).

3) $\sqrt{x^2 + 32x + 112} = 2x + 11.$

Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1$).

4) $\sqrt{x^2 + 28x + 52} = 2x + 7.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1$).

5) $\sqrt{x^2 + 22x - 23} = 2x + 1.$

Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).

6) $\sqrt{x^2 + 20x - 44} = 2x - 1.$

Đáp số. ($x = 3 \vee x = 5$).

7) $\sqrt{x^2 + 18x - 63} = 2x - 3.$

Đáp số. ($x = 4 \vee x = 6$).

8) $\sqrt{x^2 + 16x - 80} = 2x - 5.$

Đáp số. ($x = 5 \vee x = 7$).

9) $\sqrt{x^2 + 14x - 95} = 2x - 7.$

Đáp số. ($x = 6 \vee x = 8$).

10) $\sqrt{x^2 + 12x - 108} = 2x - 9.$

Đáp số. ($x = 7 \vee x = 9$).

11) $\sqrt{x^2 + 10x - 119} = 2x - 11.$

Đáp số. ($x = 8 \vee x = 10$).

12) $\sqrt{x^2 + 8x - 128} = -2x - 29.$

Đáp số. ($x = -19 \vee x = -17$).

13) $\sqrt{x^2 + 8x - 128} = 2x - 13.$

Đáp số. ($x = 9 \vee x = 11$).

14) $\sqrt{x^2 + 6x - 135} = -2x - 27.$

Đáp số. ($x = -18 \vee x = -16$).

15) $\sqrt{x^2 + 6x - 135} = 2x - 15.$

Đáp số. ($x = 10 \vee x = 12$).

16) $\sqrt{x^2 + 4x - 140} = -2x - 25.$

Đáp số. ($x = -17 \vee x = -15$).

- 17) $\sqrt{x^2 + 4x - 140} = 2x - 17$. Đáp số. ($x = 11 \vee x = 13$).
- 18) $\sqrt{x^2 + 2x - 143} = -2x - 23$. Đáp số. ($x = -16 \vee x = -14$).
- 19) $\sqrt{x^2 + 2x - 143} = 2x - 19$. Đáp số. ($x = 12 \vee x = 14$).
- 20) $\sqrt{x^2 - 144} = -2x - 21$. Đáp số. ($x = -15 \vee x = -13$).
- 21) $\sqrt{x^2 - 144} = 2x - 21$. Đáp số. ($x = 13 \vee x = 15$).
- 22) $\sqrt{x^2 - 2x - 143} = -2x - 19$. Đáp số. ($x = -14 \vee x = -12$).
- 23) $\sqrt{x^2 - 2x - 143} = 2x - 23$. Đáp số. ($x = 14 \vee x = 16$).
- 24) $\sqrt{x^2 - 4x - 140} = -2x - 17$. Đáp số. ($x = -13 \vee x = -11$).
- 25) $\sqrt{x^2 - 4x - 140} = 2x - 25$. Đáp số. ($x = 15 \vee x = 17$).
- 26) $\sqrt{x^2 - 6x - 135} = -2x - 15$. Đáp số. ($x = -12 \vee x = -10$).
- 27) $\sqrt{x^2 - 6x - 135} = 2x - 27$. Đáp số. ($x = 16 \vee x = 18$).
- 28) $\sqrt{x^2 - 8x - 128} = -2x - 13$. Đáp số. ($x = -11 \vee x = -9$).
- 29) $\sqrt{x^2 - 8x - 128} = 2x - 29$. Đáp số. ($x = 17 \vee x = 19$).
- 30) $\sqrt{x^2 - 10x - 119} = -2x - 11$. Đáp số. ($x = -10 \vee x = -8$).
- 31) $\sqrt{x^2 - 12x - 108} = -2x - 9$. Đáp số. ($x = -9 \vee x = -7$).
- 32) $\sqrt{x^2 - 14x - 95} = -2x - 7$. Đáp số. ($x = -8 \vee x = -6$).
- 33) $\sqrt{x^2 - 16x - 80} = -2x - 5$. Đáp số. ($x = -7 \vee x = -5$).
- 34) $\sqrt{x^2 - 18x - 63} = -2x - 3$. Đáp số. ($x = -6 \vee x = -4$).
- 35) $\sqrt{x^2 - 20x - 44} = -2x - 1$. Đáp số. ($x = -5 \vee x = -3$).
- 36) $\sqrt{x^2 - 22x - 23} = 1 - 2x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2$).
- 37) $\sqrt{x^2 - 28x + 52} = 7 - 2x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1$).
- 38) $\sqrt{x^2 - 32x + 112} = 11 - 2x$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 3$).
- 39) $\sqrt{x^2 - 34x + 145} = 13 - 2x$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).
- 40) $\sqrt{x^2 - 36x + 180} = 15 - 2x$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 5$).

Bài tập 2.2. Giải các phương trình sau:

- 1) $\sqrt{(1-x)(x-11)} = x+1$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 3$).
- 2) $\sqrt{(1-2x)(x-5)} = x+1$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2$).
- 3) $\sqrt{(1-2x)(x-14)} = x+4$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5$).
- 4) $\sqrt{(1-5x)(x-11)} = x+7$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5$).
- 5) $\sqrt{(1-7x)(x-7)} = x+5$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4$).
- 6) $\sqrt{(1-11x)(x-11)} = x+13$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 5$).
- 7) $\sqrt{(1-11x)(x-11)} = 2x+8$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 5$).
- 8) $\sqrt{(1-11x)(x-11)} = 3x+7$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 3$).
- 9) $\sqrt{(1-14x)(x-14)} = 5x+8$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2$).
- 10) $\sqrt{(2-3x)(x-10)} = x+2$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 6$).
- 11) $\sqrt{(2-3x)(x-10)} = 2x+1$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 3$).
- 12) $\sqrt{(2-5x)(x-4)} = x+2$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2$).
- 13) $\sqrt{(2-7x)(x-14)} = x+10$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 8$).
- 14) $\sqrt{(2-11x)(x-10)} = x+8$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 7$).
- 15) $\sqrt{(2-13x)(x-12)} = 3x+8$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4$).
- 16) $\sqrt{(3-2x)(x-15)} = x+3$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 6$).
- 17) $\sqrt{(3-4x)(x-7)} = x+3$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 3$).
- 18) $\sqrt{(3-5x)(x-9)} = x+3$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 6$).
- 19) $\sqrt{(3-5x)(x-9)} = 3x+1$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2$).
- 20) $\sqrt{(3-5x)(x-15)} = x+9$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 7$).
- 21) $\sqrt{(3-7x)(x-5)} = x+3$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 3$).
- 22) $\sqrt{(3-7x)(x-13)} = x+11$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 5$).
- 23) $\sqrt{(3-7x)(x-13)} = 2x+7$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).
- 24) $\sqrt{(4-5x)(x-8)} = x+4$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).
- 25) $\sqrt{(4-7x)(x-12)} = x+8$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 7$).

- 26) $\sqrt{(4-9x)(x-6)} = x+4$. Đáp số. ($x=1 \vee x=4$).
- 27) $\sqrt{(5-3x)(x-11)} = x+1$. Đáp số. ($x=2 \vee x=7$).
- 28) $\sqrt{(5-6x)(x-9)} = x+5$. Đáp số. ($x=2 \vee x=5$).
- 29) $\sqrt{(5-7x)(x-3)} = x+1$. Đáp số. ($x=1 \vee x=2$).
- 30) $\sqrt{(5-8x)(x-13)} = x+5$. Đáp số. ($x=1 \vee x=10$).
- 31) $\sqrt{(5-8x)(x-13)} = 5x+1$. Đáp số. ($x=1 \vee x=2$).
- 32) $\sqrt{(5-9x)(x-15)} = x+15$. Đáp số. ($x=5 \vee x=6$).
- 33) $\sqrt{(5-9x)(x-15)} = 2x+9$. Đáp số. ($x=2 \vee x=6$).
- 34) $\sqrt{(5-11x)(x-7)} = x+5$. Đáp số. ($x=1 \vee x=5$).
- 35) $\sqrt{(6-5x)(x-12)} = x+6$. Đáp số. ($x=3 \vee x=6$).
- 36) $\sqrt{(6-7x)(x-10)} = x+2$. Đáp số. ($x=1 \vee x=8$).
- 37) $\sqrt{(6-7x)(x-10)} = x+6$. Đáp số. ($x=2 \vee x=6$).
- 38) $\sqrt{(6-11x)(x-6)} = x+6$. Đáp số. ($x=2 \vee x=3$).
- 39) $\sqrt{(6-11x)(x-6)} = 2x+3$. Đáp số. ($x=1 \vee x=3$).
- 40) $\sqrt{(6-11x)(x-6)} = 3x+2$. Đáp số. ($x=1 \vee x=2$).
- 41) $\sqrt{(6-13x)(x-8)} = x+6$. Đáp số. ($x=1 \vee x=6$).
- 42) $\sqrt{(7-4x)(x-8)} = x+2$. Đáp số. ($x=3 \vee x=4$).
- 43) $\sqrt{(7-5x)(x-5)} = x+1$. Đáp số. ($x=2 \vee x=3$).
- 44) $\sqrt{(7-8x)(x-5)} = x+1$. Đáp số. ($x=1 \vee x=4$).
- 45) $\sqrt{(7-8x)(x-11)} = x+7$. Đáp số. ($x=2 \vee x=7$).
- 46) $\sqrt{(7-15x)(x-9)} = x+7$. Đáp số. ($x=1 \vee x=7$).
- 47) $\sqrt{(8-5x)(x-10)} = x+2$. Đáp số. ($x=2 \vee x=7$).
- 48) $\sqrt{(8-7x)(x-8)} = x+4$. Đáp số. ($x=2 \vee x=5$).
- 49) $\sqrt{(8-9x)(x-12)} = x+8$. Đáp số. ($x=2 \vee x=8$).
- 50) $\sqrt{(8-11x)(x-4)} = x+2$. Đáp số. ($x=1 \vee x=3$).

- 51) $\sqrt{(8-11x)(x-13)} = 2x+4$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 8$).
- 52) $\sqrt{(8-11x)(x-13)} = 4x+2$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4$).
- 53) $\sqrt{(9-5x)(x-9)} = x+3$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 5$).
- 54) $\sqrt{(9-7x)(x-15)} = x+9$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 9$).
- 55) $\sqrt{(9-10x)(x-13)} = x+9$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 9$).
- 56) $\sqrt{(10-7x)(x-6)} = x+2$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).
- 57) $\sqrt{(10-7x)(x-14)} = x+10$. Đáp số. ($x = 5 \vee x = 6$).
- 58) $\sqrt{(10-7x)(x-14)} = 2x+5$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 5$).
- 59) $\sqrt{(10-11x)(x-14)} = x+10$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 10$).
- 60) $\sqrt{(11-x)(x-1)} = x+1$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 3$).
- 61) $\sqrt{(11-4x)(x-9)} = x+1$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 5$).
- 62) $\sqrt{(11-5x)(x-13)} = x+5$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 7$).
- 63) $\sqrt{(11-6x)(x-10)} = x+4$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 6$).
- 64) $\sqrt{(11-7x)(x-13)} = x+7$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 8$).
- 65) $\sqrt{(11-12x)(x-15)} = x+11$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 11$).
- 66) $\sqrt{(11-15x)(x-5)} = x+3$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 4$).
- 67) $\sqrt{(12-11x)(x-12)} = x+12$. Đáp số. ($x = 4 \vee x = 6$).
- 68) $\sqrt{(12-11x)(x-12)} = 2x+6$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 6$).
- 69) $\sqrt{(12-11x)(x-12)} = 3x+4$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 4$).
- 70) $\sqrt{(13-5x)(x-11)} = x+1$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 8$).
- 71) $\sqrt{(13-7x)(x-11)} = x+1$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 9$).
- 72) $\sqrt{(13-7x)(x-11)} = x+5$. Đáp số. ($x = 3 \vee x = 7$).
- 73) $\sqrt{(13-8x)(x-14)} = x+4$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 11$).
- 74) $\sqrt{(13-9x)(x-7)} = x+3$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 5$).
- 75) $\sqrt{(13-11x)(x-11)} = x+7$. Đáp số. ($x = 2 \vee x = 8$).

76) $\sqrt{(14-5x)(x-10)} = x+2.$

Đáp số. $(x=4 \vee x=6).$

77) $\sqrt{(14-15x)(x-10)} = x+2.$

Đáp số. $(x=1 \vee x=9).$

78) $\sqrt{(15-7x)(x-9)} = x+3.$

Đáp số. $(x=3 \vee x=6).$

79) $\sqrt{(15-8x)(x-12)} = x+6.$

Đáp số. $(x=3 \vee x=8).$

80) $\sqrt{(15-13x)(x-13)} = x+15.$

Đáp số. $(x=5 \vee x=6).$

81) $\sqrt{(15-13x)(x-13)} = 3x+5.$

Đáp số. $(x=2 \vee x=5).$

82) $\sqrt{(15-14x)(x-15)} = x+15.$

Đáp số. $(x=3 \vee x=10).$

83) $\sqrt{(15-14x)(x-15)} = 5x+3.$

Đáp số. $(x=2 \vee x=3).$ **Bài tập 2.3.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x+5} = x+3;$

Đáp số. $x = -2.$

2) $\sqrt{3x+10} = 5x-6;$

Đáp số. $x = 2.$

3) $\sqrt{x+5} = x-1;$

Đáp số. $x = 4.$

4) $\sqrt{3x+10} = 4x+13.$

Đáp số. $x = -3.$

5) $\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}} = 1-x;$

Đáp số. $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}.$

6) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1;$

Đáp số. $\left\{\frac{5}{4}\right\}.$

7) $x^2-4x-2 = 2\sqrt{x^3+1};$

Đáp số. $\{5-\sqrt{33}; 5+\sqrt{33}\}.$

8) $\frac{1}{2}-x^2 = \sqrt{\frac{1}{2}-x};$

Đáp số. $\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}.$

9) $\frac{x^2}{4}-2 = \sqrt{4(x+2)};$

Đáp số. $\{2\sqrt{3}+2\}.$

10) $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{\sqrt{2x^2+5x}}{x+2};$

Đáp số. $\{0\}.$

11) $\sqrt{\frac{x}{2x-5}} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{2-x};$

Đáp số. $\{0\}.$

12) $\sqrt{\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x}} = 1-x;$

Đáp số. $\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}.$

13) $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x}} = 1+x.$

Đáp số. $\left\{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\};$

14) (Dự bị 1, khối B, 2010) $8x^2 - 8x + 3 = 8x \cdot \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$, ($x \in \mathbb{R}$).

Đáp số. $\left\{ \frac{\sqrt{7}-1}{4}; \frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{3+\sqrt{3}}{4} \right\}$.

15) $\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)(x+5)}}}} = x^2(x+1)$.

Đáp số. $x = -1 \vee x = 1$.

Bài tập 2.4. ¹ Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = 1$;

Đáp số. $\{1; 5\}$.

2) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{-3x+10} = 5$;

Đáp số. $\{-2; 2\}$.

3) $\sqrt{4x+5} + \sqrt{-6x+10} = 5$;

Đáp số. $\{-1; 1\}$.

4) $\sqrt{5x-6} + \sqrt{-3x+10} = 4$;

Đáp số. $\{2; 3\}$.

5) $\sqrt{5x-1} + \sqrt{-3x+7} = 4$;

Đáp số. $\{1; 2\}$.

6) $\sqrt{7x-5} + \sqrt{-3x+10} = 5$;

Đáp số. $\{2; 3\}$.

7) $\sqrt{7x+2} + \sqrt{-3x+7} = 5$;

Đáp số. $\{1; 2\}$.

8) $\sqrt{9x-2} + \sqrt{-3x+10} = 6$;

Đáp số. $\{2; 3\}$.

9) $\sqrt{11x+3} + \sqrt{-3x+10} = 7$.

Đáp số. $\{2; 3\}$.

Bài tập 2.5. ² Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{-10x-6} - \sqrt{-9x-8} = 1$;

Đáp số. $x = -33 \vee x = -1$.

2) $\sqrt{10x+11} - \sqrt{9x+1} = 1$;

Đáp số. $x = 7 \vee x = 11$.

3) $\sqrt{8x+9} - \sqrt{4x-7} = 4$;

Đáp số. $x = 2 \vee x = 14$.

4) $\sqrt{7x-5} - \sqrt{6x-9} = 1$;

Đáp số. $x = 3 \vee x = 15$.

5) $\sqrt{6x+4} - \sqrt{5x-1} = 1$;

Đáp số. $x = 2 \vee x = 10$.

6) $\sqrt{5x+4} - \sqrt{x-8} = 6$;

Đáp số. $x = 9 \vee x = 12$.

7) $\sqrt{4x-7} - \sqrt{5x+9} = -2$;

Đáp số. $x = 8 \vee x = 32$.

8) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-10} = 5$;

Đáp số. $x = 14 \vee x = 19$.

9) $\sqrt{2x-5} - \sqrt{4x-3} = -2$;

Đáp số. $x = 3 \vee x = 7$.

¹Trần Văn Toàn

²Trần Văn Toàn

10) $\sqrt{x-6} - \sqrt{3x+4} = -4.$

Đáp số. $x = 7 \vee x = 15.$ **Bài tập 2.6.** ³ Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{7x+2} = 2x+2;$

Đáp số. $\{1;2\}.$

2) $\sqrt{-7x+37} - \sqrt{5x-11} + 2x - 8 = 0;$

Đáp số. $\{3;4\}.$

3) $\sqrt{3x-14} + \sqrt{16x-71} = 3x-11;$

Đáp số. $\{5;6\}.$

4) $\sqrt{3x-14} - \sqrt{-3x+19} = 2x-11;$

Đáp số. $x = 5 \vee x = \frac{11}{2} \vee x = 6.$ **Bài tập 2.7.** Giải các phương trình sau:

1) $3\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+7} - \sqrt{6x+7} = 0;$

Đáp số. $\{-1;3\}.$

2) $3\sqrt{-2x+5} - 7\sqrt{3x+10} + 5\sqrt{6x+13} = 0;$

Đáp số. $\{-2;2\}.$

3) $\sqrt{-4x+5} + 5\sqrt{4x+5} - 4\sqrt{6x+10} = 0;$

Đáp số. $\{-1;1\}.$

4) $\sqrt{-7x-12} + \sqrt{-3x-8} = 2\sqrt{-5x-11};$

Đáp số. $x = -4 \vee x = -3.$

5) $\sqrt{x+5} - \sqrt{3x+4} - \sqrt{7x+8} = -7;$

Đáp số. 4.

6) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12};$

Đáp số. $\{7;8\}.$

7) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+2} - \sqrt{3x};$

Đáp số. $\left\{\frac{3}{2}\right\}.$

8) $\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \sqrt{\frac{3x}{x+1}} = 3;$

Đáp số. $\left\{3; -\frac{3}{2}\right\}.$

9) $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} + \sqrt{\frac{3x-5}{x-1}} = 3;$

Đáp số. $\left\{2; \frac{2}{3}\right\}.$

10) $\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+8x} = 5;$

Đáp số. $\{1\}.$

11) $\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2-35x} = 8;$

Đáp số. $\{-1\}.$

12) $2 \cdot \sqrt{x+2} = x+1 + \frac{1}{x};$

Đáp số. $\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\};$ **Hướng dẫn.** Phương trình đã cho tương đương với

$$2x \cdot \sqrt{x+2} = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2})^2 = 1.$$

13) $2 \cdot \sqrt{x+1} = x+1 - \frac{3}{x};$

Đáp số. $\left\{\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}.$

$$14) \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{5}{3}}} = x;$$

$$\text{Đáp số. } \left\{-\frac{4}{3}\right\}.$$

$$15) \sqrt{8x^2+3x+4} = 3 + \sqrt{x+1};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{-1; \frac{5}{4}\right\}.$$

$$16) \sqrt{8x^2-2x+1} = 2 + \sqrt{2x+1};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$$

Bài tập 2.8. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{x^2-x};$$

$$\text{Đáp số. } \{1\}.$$

$$2) \sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{x^2-3x+2};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{-1 - \frac{2\sqrt{21}}{3}; 1\right\}.$$

$$3) \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+2x-8} = \sqrt{x^2-2x};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{2; -2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

$$4) \sqrt{x^2-4x} + \sqrt{x^2-2x-8} = \sqrt{x^2-6x+8};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{4; -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

$$5) \sqrt{x \cdot (x-1)} + \sqrt{x \cdot (x+2)} = 2\sqrt{x^2};$$

$$\text{Đáp số. } \left\{0; \frac{9}{8}\right\}.$$

6) (Đại học Bách khoa Hà Nội, 2001)

$$\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2.$$

$$\text{Đáp số. } \{-1; 1\}.$$

2.2 Sử dụng lượng liên hợp

Ví dụ 2.1

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+13x+19} + \sqrt{x^2+14x+17} = \sqrt{x^2+16x+13} + \sqrt{x^2+20x+5} \quad (2.1)$$

Phân tích. Để ý rằng

$$x^2+16x+13 - (x^2+13x+19) = 3(x-2)$$

và

$$x^2+20x+5 - (x^2+14x+17) = 6(x-2).$$

◁

Lời giải. Điều kiện (2.1) có nghĩa là

$$\begin{cases} x^2 + 13x + 19 \geq 0, \\ x^2 + 14x + 17 \geq 0, \\ x^2 + 16x + 13 \geq 0, \\ x^2 + 20x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

Phương trình (2.1) tương đương với

$$(\sqrt{x^2 + 16x + 13} - \sqrt{x^2 + 13x + 19}) + (\sqrt{x^2 + 20x + 5} - \sqrt{x^2 + 14x + 17}) = 0.$$

Bằng cách nhân lượng liên hợp, ta được

$$\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2 + 16x + 13} + \sqrt{x^2 + 13x + 19}} + \frac{6(x-2)}{\sqrt{x^2 + 20x + 5} + \sqrt{x^2 + 14x + 17}} = 0.$$

Từ phương trình này, ta có được $x = 2$.

Thử lại, ta thấy $x = 2$ thỏa phương trình (2.1).

Vậy phương trình (2.1) có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Ví dụ 2.2

Giải phương trình

$$2x^2 - 9x - 8 + \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} = 0. \quad (2.2)$$

Lời giải. Điều kiện để (2.2) có nghĩa là $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$.

Ta thấy $x = 5$ là một nghiệm của phương trình (2.2).

Để ý là với $x = 5$, thì $\sqrt{3x+1} = 4$ và $\sqrt{6-x} = 1$. Ta viết (2.2) tương đương với

$$2x^2 - 9x - 5 + (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) = 0.$$

hay

$$(x-5)(2x+1) + \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} = 0.$$

Điều này tương đương

$$(x-5) \left(2x+1 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Do điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$, nên

$$2x+1 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} > 0.$$

Do đó, (2.3) xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$.

Vậy phương trình (2.2) có nghiệm duy nhất $x = 5$. □

Ví dụ 2.3

Giải phương trình

$$(2x + 3) \cdot \sqrt{4x + 5} + (6x + 7) \cdot \sqrt{8x + 9} = 2. \quad (2.4)$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq -\frac{9}{8}$.

Cách 1. Trước hết, ta chứng minh với $x \geq -\frac{9}{8}$ thì

$$(2x + 3) \cdot \sqrt{4x + 5} \geq 1 \quad (2.5)$$

và

$$(6x + 7) \cdot \sqrt{8x + 9} \geq 1 \quad (2.6)$$

Dấu đẳng thức ở (2.5) và (2.6) xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$. Thật vậy, với $x \geq -\frac{9}{8}$, ta có

$$(2x + 3) \cdot \sqrt{4x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow 4(x + 1)(4x^2 + 13x + 11) \geq 0$$

và

$$(6x + 7) \cdot \sqrt{8x + 9} \geq 1 \Leftrightarrow 4(x + 1)(72x^2 + 177x + 110) \geq 0.$$

Từ (2.5) và (2.6), suy ra (2.4) có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Cách 2.

(2.4) tương đương với

$$(2x + 3) \cdot (\sqrt{4x + 5} - 1) + (6x + 7) \cdot (\sqrt{8x + 9} - 1) + 8x + 8 = 0$$

hay

$$\frac{(2x + 3) \cdot (4x + 4)}{\sqrt{4x + 5} + 1} + \frac{(6x + 7) \cdot (8x + 8)}{\sqrt{8x + 9} + 1} + 8x + 8 = 0.$$

tương đương

$$(4x + 4) \underbrace{\left[\frac{(2x + 3)}{\sqrt{4x + 5} + 1} + \frac{2(6x + 7)}{\sqrt{8x + 9} + 1} + 2 \right]}_{>0} = 0.$$

□

Ví dụ 2.4

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 7x + 11} + \sqrt{-x^2 - 12x - 19} - x^2 - 6x - 10 = 0. \quad (2.7)$$

Phân tích. Dùng máy tính bỏ túi, ta thấy phương trình có hai nghiệm là $x = -5$ và $x = -2$.

Giả sử lượng liên hợp của $\sqrt{x^2 + 7x + 11}$ là $ax + b$. Để tìm a, b , ta xét phương trình

$$\sqrt{x^2 + 7x + 11} - (ax + b) = 0. \quad (2.8)$$

Lần lượt thay $x = -5$ và $x = -2$ vào (2.8), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 5a - b + 1 = 0, \\ 2a - b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$$

Do đó, lượng liên hợp $\sqrt{x^2 + 7x + 11}$ là 1.

Tương tự, giả sử lượng liên hợp $\sqrt{-x^2 - 12x - 19}$ là $cx + d$, ta xét phương trình

$$\sqrt{-x^2 - 12x - 19} - (cx + d) = 0. \quad (2.9)$$

Lần lượt thay $x = -5$ và $x = -2$ vào (2.9), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 5c - d + 4 = 0, \\ 2c - d + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1, \\ d = -1. \end{cases}$$

Do đó, lượng liên hợp $\sqrt{-x^2 - 12x - 19}$ là $-x - 1$. ◁

Lời giải. Điều kiện để (2.7) có nghĩa là $-6 - \sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17} - 6$.

(2.7) tương đương với

$$(\sqrt{x^2 + 7x + 11} - 1) + (\sqrt{-x^2 - 12x - 19} + x + 1) - (x^2 + 7x + 10) = 0$$

hay

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{\sqrt{x^2 + 7x + 11} + 1} - \frac{2(x^2 + 7x + 10)}{\sqrt{-x^2 - 12x - 19} - x - 1} - (x^2 + 7x + 10) = 0.$$

Đặt nhân tử chung, ta được

$$(x^2 + 7x + 10) \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 7x + 11} + 1} - \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 12x - 19} - x - 1}}_{< 0} - 1 \right] = 0.$$

Từ đây, ta có $x^2 + 7x + 10 = 0$ hay $x = -5 \vee x = -2$ là nghiệm của (2.7). □

Ví dụ 2.5

Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 3x - 4. \quad (2.10)$$

Lời giải. Phương trình đã cho có nghĩa với mọi x .

Ví dụ 2.6

Solve the equation

$$\sqrt{8x + 1} - \sqrt{6x - 2} - 2x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Lời giải. We rewrite the given equation in the form

$$\sqrt{8x+1} - (x+2) + (x+1 - \sqrt{6x-2}) = 2(x^2 - 4x + 3).$$

equivalently to

$$\frac{-(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{8x+1} + (x+2)} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x+1 + \sqrt{6x-2}} = 2(x^2 - 4x + 3).$$

Or

$$(x^2 - 4x + 3) \left(\frac{1}{\sqrt{8x+1} + (x+2)} + 2 - \frac{1}{x+1 + \sqrt{6x-2}} \right) = 0.$$

It's easy to see that

$$\frac{1}{\sqrt{8x+1} + (x+2)} + 2 - \frac{1}{x+1 + \sqrt{6x-2}} > 0.$$

Thus, the given equation have two solutions are $x = 1$ or $x = 3$. □

Ví dụ 2.7

Giải phương trình

$$x^3 - x^2 - 6x + 10 = (3x - 4) \cdot \sqrt{3x - 5}. \quad (2.11)$$

Lời giải. Điều kiện để (2.11) có nghĩa là $x \geq \frac{5}{3}$.

(2.11) tương đương với

$$\frac{x^3 - x^2 - 6x + 10}{3x - 4} = \sqrt{3x - 5}. \quad (2.12)$$

Dùng máy tính cầm tay, ta thấy (2.11) có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 3$. Làm tương tự các ví dụ trước, lượng liên hợp của $\sqrt{3x-5}$ là $x-1$. Ta viết (2.12) tương đương với

$$\frac{x^3 - x^2 - 6x + 10}{3x - 4} - (x - 1) = \sqrt{3x - 5} - (x - 1).$$

Hay

$$\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{3x-4} = \frac{3x-5 - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{3x-5} + (x-1)}$$

tương đương

$$\frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{3x-4} + \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{3x-5} + x - 1} = 0.$$

Đặt nhân tử chung của hai số hạng, ta được

$$(x-2)(x-3) \left(\frac{x+1}{3x-4} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + x - 1} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Do $x \geq \frac{5}{3}$, nên

$$\frac{x+1}{3x-4} + \frac{1}{\sqrt{3x-5} + x - 1} > 0.$$

Như vậy, (2.13) xảy ra khi và chỉ khi

$$(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3.$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2 \vee x = 3$. □

Ví dụ 2.8

Giải phương trình

$$\sqrt{3x-5} + 2 \cdot \sqrt[3]{19x-30} = 2x^2 - 7x + 11.$$

Lời giải. Điều kiện phương trình có nghĩa là $x \geq \frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\left[\sqrt{3x-5} - (x-1) \right] + 2 \left(\sqrt[3]{19x-30} - x \right) = 2x^2 - 10x + 12.$$

Hay

$$\frac{3x-5-(x-1)^2}{\sqrt{3x-5}+x-1} + 2 \frac{19x-30-x^2}{(\sqrt[3]{19x-30})^2 + x \cdot \sqrt[3]{19x-30} + x^2} = 2(x-2)(x-3).$$

Thu gọn mỗi tử số và phân tích thành nhân tử, ta được

$$-\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{3x-5}+x-1} - 2 \frac{(x-2)(x-3)(x+5)}{(\sqrt[3]{19x-30})^2 + x \cdot \sqrt[3]{19x-30} + x^2} = 2(x-2)(x-3).$$

Đặt nhân tử chung, dẫn đến

$$(x-2)(x-3) \left[\frac{1}{\sqrt{3x-5}+x-1} + \frac{2(x+5)}{(\sqrt[3]{19x-30})^2 + x \cdot \sqrt[3]{19x-30} + x^2} + 2 \right] = 0.$$

Vì $x \geq \frac{5}{3}$, nên biểu thức trong dấu ngoặc vuông dương. Từ đó, ta thu được

$$(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3. \quad \square$$

Ví dụ 2.9

Giải phương trình

$$(x+6) \cdot \sqrt{x+7} + (x+11) \cdot \sqrt{x+12} = (x+8) \cdot (x+9). \quad (2.14)$$

Lời giải. Điều kiện phương trình đã cho có nghĩa $x \geq -7$.

Phương trình (2.14) tương đương với

$$(x+6) \cdot (\sqrt{x+7} - 2) + (x+11) \cdot (\sqrt{x+12} - 3) = x^2 + 12x + 27$$

hay

$$(x+3) \left[\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} + \frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} - (x+9) \right] = 0.$$

Ta thấy $x = -3$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Xét phương trình

$$\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} + \frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} - (x+9) = 0. \quad (2.15)$$

- Với $x > -6$, ta có

$$\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} < \frac{x+6}{2}$$

và

$$\frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} < \frac{x+11}{3} < \frac{x+12}{3} < \frac{x+12}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} + \frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} < \frac{x+6}{2} + \frac{x+12}{2} = x+9.$$

Do đó, (2.15) vô nghiệm.

- Với $-7 \leq x \leq -6$, ta có $x+7 \geq 0$ và $x+6 \leq 0$, nên

$$\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} < \frac{x+7}{\sqrt{x+7}+2} < \frac{x+7}{2}.$$

Mặt khác, $x \geq -7$, nên $x+11 > 0$, do đó

$$\frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} < \frac{x+11}{3} < \frac{x+11}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+2} + \frac{x+11}{\sqrt{x+12}+3} < \frac{x+7}{2} + \frac{x+11}{2} = x+9.$$

Do đó, (2.15) vô nghiệm.

Vậy (2.14) có nghiệm duy nhất $x = -3$. □

Ví dụ 2.10

Giải phương trình

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 16 = (x+2) \cdot \sqrt{x+1}. \quad (2.16)$$

Lời bình. Trước hết, ta tìm lượng liên hợp của $\sqrt{x+1}$. Sử dụng máy tính cầm tay, với lệnh **SHIFT SOLVE**, ta được nghiệm gần đúng 4.302775638. Lưu nghiệm này vào phím **A** bằng cách bấm **SHIFT STO A**. Tiếp theo ta bấm $\sqrt{A+1}$, ta được 2.302775638. Nhận xét rằng

$$\sqrt{A+1} = A - 2.$$

Do đó, lượng liên hợp của $\sqrt{x+1}$ là $x-2$. Viết (2.16) dưới dạng

$$x^3 - 8x^2 + 23x - 16 - (x+2)(x-2) = (x+2)[\sqrt{x+1} - (x-2)].$$

Tương đương

$$(x-4)(x^2 - 5x + 3) = -\frac{(x+2)(x^2 - 5x + 3)}{\sqrt{x+1} + (x+2)}.$$

Chuyển về và đặt nhân tử chung, ta được

$$(x^2 - 5x + 3) \left[x - 4 + \frac{x+2}{\sqrt{x+1} + (x+2)} \right] = 0.$$

Quy đồng phương trình trong dấu ngoặc vuông, từ phương trình trên, ta thu được

$$(x^2 - 5x + 3) \left[\frac{x^2 - 5x + 10 + (x-4)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + (x+2)} \right] = 0. \quad (2.17)$$

Xét phương trình

$$x^2 - 5x + 10 + (x-4)\sqrt{x+1} = 0. \quad (2.18)$$

Để giải (2.18), ta có thể làm như sau:

Do $x^2 - 5x + 10 > 0$, nên ta phải có $x - 4 < 0$. Ta có

$$x^2 - 5x + 10 - (4-x)\sqrt{x+1} > x^2 - 5x + 10 - \frac{(4-x)^2 + (x+1)}{2} = \frac{x^2 - 3x + 3}{2} > 0.$$

Do đó, (2.18) vô nghiệm.

Như vậy, (2.17) xảy ra khi

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13}) \vee x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{13}).$$

Chỉ có nghiệm $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{13})$ thỏa phương trình đã cho.

Một ý tưởng rất hay của em Nguyễn Minh Hoàng Nhật⁴ là viết (2.16) dưới dạng

$$(x - 2 - \sqrt{x+1}) \cdot [x^2 + ax + b + (cx + d) \cdot \sqrt{x+1}] = 0.$$

Để tìm các số a, b, c, d , xét hàm số

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 16 - (x+2)\sqrt{x+1} - (x-2-\sqrt{x+1}) \left[x^2 + ax + b + (cx+d)\sqrt{x+1} \right].$$

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3(b+d-6), \\ f(3) = 3a+b+6c+2d+7, \\ f(8) = -3(8a+b+24c+3d+18), \\ f(15) = -9(15a+b+60c+4d+21). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(3) = 0, \\ f(8) = 0, \\ f(15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5, \\ b = 10, \\ c = 1, \\ d = -4. \end{cases}$$

Như vậy, phương trình đã cho tương đương

$$(x - 2 - \sqrt{x+1}) \cdot [x^2 - 5x + 10 + (x-4) \cdot \sqrt{x+1}] = 0.$$



⁴Học sinh lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, năm học 2016 – 2017.

Ví dụ 2.11

Giải phương trình

$$x^3 + 5x^2 + 2x = 3 \cdot (x + 1)\sqrt{3x + 2}. \quad (2.19)$$

Phân tích. Dùng máy tính bỏ túi ta tìm được các nghiệm xấp xỉ của phương trình đã cho là -0.6180339887 . Lưu số này vào phím A. Để tìm lượng liên hợp của $\sqrt{3x+2}$, ta bấm $\sqrt{3A+2}$, ta được 0.3819660113 . Con số này bằng $A+1$. Như vậy, lượng liên hợp của $\sqrt{3x+2}$ là $x+1$.

Lời giải. Điều kiện $3x+2 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{2}{3}$. Viết (2.19) tương đương

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 2x}{x+1} - 3(x+1) = 3 \cdot [\sqrt{3x+2} - (x+1)].$$

Hay

$$\frac{(x+3)(x^2-x-1)}{x+1} = \frac{3(-x^2+x+1)}{\sqrt{3x+2}+(x+1)}.$$

Chuyển vế và đặt nhân tử chung, ta được

$$(x^2-x-1) \cdot \left[\frac{x+3}{x+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+2}+(x+1)} \right] = 0. \quad (2.20)$$

Do điều kiện $x \geq -\frac{2}{3}$, nên biểu thức trong dấu ngoặc vuông dương. Do đó, (2.20) xảy ra khi và chỉ khi

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}). \quad \square$$

Ví dụ 2.12

Giải phương trình

$$2x^3 - 7x^2 + 11x - 1 = (4x + 7) \cdot \sqrt{2x + 3}. \quad (2.21)$$

Phân tích. Dùng máy tính cho một nghiệm xấp xỉ là 4.449489743 . Lưu số này vào phím A và bấm $\sqrt{2A+3}$, ta được 3.44949548 . Số này bằng $A-1$. Như vậy, lượng liên hợp của $\sqrt{2x+3}$ là $x-1$. ◀

Lời giải. Viết phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 11x - 1}{4x + 7} = \sqrt{2x + 3}.$$

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 11x - 1}{4x + 7} - (x - 1) = \sqrt{2x + 3} - (x - 1). \quad (2.22)$$

Xét

$$\sqrt{2x + 3} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{6}.$$

Giá trị này không thỏa phương trình (2.21).

Xét $\sqrt{2x + 3} + x - 1 \neq 0$. (2.22) viết lại thành

$$\frac{(2x - 3)(x^2 - 4x - 2)}{4x + 7} = \frac{-(x^2 - 4x - 2)}{\sqrt{2x + 3} + x - 1}.$$

Chuyển về và đặt nhân tử chung, ta được

$$(x^2 - 4x - 2) \left[\frac{2x - 3}{4x + 7} + \frac{1}{\sqrt{2x + 3} + x - 1} \right] = 0. \quad \square$$

Ví dụ 2.13: Thi thử THPT chuyên Hùng Vương, 2014 - 2015

Giải phương trình

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 8x - 5} = 2x. \quad (2.23)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} (2.23) &\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} + (\sqrt{x + 3} - 2) + 2\sqrt{x^3 - 4x^2 + 8x - 5} - (2x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} + \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} + 2} + 2\sqrt{(x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 5)} - 2(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \cdot \left[1 + \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 3} + 2} + 2\left(\sqrt{x^2 - 3x + 5} - \sqrt{x - 1}\right) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 3} + 2} + \frac{2(x^2 - 4x + 6)}{\sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x - 1}} \right]}_{>0} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Ví dụ 2.14

Giải phương trình

$$-x^3 + x + 2 = \sqrt{3x^2 + 4x + 5}. \quad (2.24)$$

Lời giải. (2.24) tương đương với

$$\sqrt{3x^2 + 4x + 5} - 2 + x^3 - x = 0.$$

Nhân lượng liên hợp, ta có

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5} + 2} + (x + 1)x(x - 1) = 0.$$

Hay

$$\frac{(x+1)(3x+1)}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} + (x+1)x(x-1) = 0.$$

Đặt nhân tử chung ta được

$$(x+1) \left[\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} + x(x-1) \right] = 0.$$

Trường hợp 1. $x+1=0$ tức $x=-1$.

Trường hợp 2.

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} + x \cdot (x-1) = 0. \quad (2.25)$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+	+
x^2-x	+	+	0	0	+

- Nếu $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$, vế trái của (2.25) dương, nên (2.25) vô nghiệm.
- Nếu $x < -\frac{1}{3}$, ta chứng minh

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} > \frac{3x+1}{2} > x-x^2.$$

Thật vậy,

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} > \frac{3x+1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} < \frac{1}{2}.$$

Điều này luôn đúng.

$$\frac{3x+1}{2} > x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2+x+1 > 0.$$

Điều này cũng luôn đúng.

- Nếu $0 < x < 1$, ta chứng minh

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} > \frac{3x+1}{8} > x-x^2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} > \frac{3x+1}{8} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x+5}+2} > \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+5} < 6 \\ &\Leftrightarrow 3x^2+4x-31 < 0. \end{aligned}$$

Điều này luôn đúng do $0 < x < 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\frac{3x+1}{8} > x-x^2.$$

Điều này đơn giản vì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức luôn đúng là

$$8x^2 - 5x + 1 > 0.$$

Như vậy, (2.25) vô nghiệm.

Tóm lại, phương trình đã cho chỉ có nghiệm $x = -1$. □

Lời bình. Lời giải bằng phương pháp liên hợp như trên quá phức tạp. Mong quý thầy cô tìm thêm cách giải khác.

Có thể giải (2.24) như sau:

(2.24) tương đương với

$$\begin{cases} -x^3 + x + 2 \geq 0, \\ x^6 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Phân tích phương trình thứ hai thành nhân tử, ta được

$$(x+1)(x^5 - x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1) = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1 &= x^5 - x^3 - 2x^2 - (x^2 - x + 1) - x^4 \\ &= x^2(x^3 - x - 2) - (x^2 - x + 1) - x^4 \end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{cases} x^3 - x - 2 \leq 0, \\ x^2 - x + 1 > 0, \\ x^4 \geq 0, \end{cases}$$

nên

$$x^5 - x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1 < 0. \quad \clubsuit$$

Ví dụ 2.15

Giải phương trình

$$x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{x^2 + 4x + 13}. \quad (2.26)$$

Lời bình. (2.26) tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 1 \geq 0, \\ x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 1 \geq 0, \\ (x-2)(x^5 + x^3 + 4x^2 + 5x + 6) = 0. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^5 + x^3 + 4x^2 + 5x + 6 &= x^2(x^3 - x^2 + 1) + x^4 + x^3 + 3x^2 + 5x + 6 \\ &= x^2(x^3 - x^2 + 1) + x^2(x^2 + x + 1) + 2x^2 + 5x + 6 > 0. \end{aligned}$$



Ví dụ 2.16

Giải phương trình

$$\frac{2}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} + \frac{6}{\sqrt{8x^2 + 9x + 10}} + x - 2 = 0. \quad (2.27)$$

Lời giải. Do $3x^2 + 4x + 5 > 0$ và $8x^2 + 9x + 10 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên phương trình đã cho xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} .

(2.27) tương đương với

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} - 1 \right) + \left(\frac{6}{\sqrt{8x^2 + 9x + 10}} - 2 \right) + x + 1 = 0 \quad (2.28)$$

hay

$$\frac{2 - \sqrt{3x^2 + 4x + 5}}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} + \frac{2(3 - \sqrt{8x^2 + 9x + 10})}{\sqrt{8x^2 + 9x + 10}} + x + 1 = 0.$$

Nhân với lượng liên hợp của mỗi tử thức trong mỗi phân thức, ta được

$$\frac{-3x^2 - 4x - 1}{A \cdot (2 + A)} + \frac{2(-8x^2 - 9x - 1)}{B \cdot (3 + B)} + x + 1 = 0, \quad (2.29)$$

ở đây,

$$A = \sqrt{3x^2 + 4x + 5}, \quad B = \sqrt{8x^2 + 9x + 10}.$$

Chuyển về và đặt nhân tử chung trong (2.29), ta được

$$(x+1) \left[\frac{3x+1}{A \cdot (2+A)} + \frac{2(8x+1)}{B \cdot (3+B)} - 1 \right] = 0. \quad (2.30)$$

Ta thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Bằng máy tính bỏ túi, ta thấy

$$\frac{3x+1}{A \cdot (2+A)} < \frac{1}{2},$$

hay

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5} \cdot (2 + \sqrt{3x^2 + 4x + 5})} < \frac{1}{2}. \quad (2.31)$$

Thật vậy, (2.31) tương đương với

$$6x + 2 < 3x^2 + 4x + 5 + 2\sqrt{3x^2 + 4x + 5}$$

hay

$$3x^2 - 2x + 3 + 2\sqrt{3x^2 + 4x + 5} > 0. \quad (2.32)$$

Mà (2.32) luôn đúng, nên ta có (2.31). Một cách hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{2(8x+1)}{B \cdot (3+B)} < \frac{1}{2}.$$

Như vậy

$$\frac{3x+1}{A \cdot (2+A)} + \frac{2(8x+1)}{B \cdot (3+B)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Do đó, (2.30) vô nghiệm.

Vậy (2.27) có nghiệm duy nhất $x = -1$. □

Ví dụ 2.17: Thi thử ĐH 2016, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

Giải phương trình

$$\frac{10x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} - \frac{9x}{\sqrt{11x^2 + 12x + 13}} + x - 4 = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đặt

$$A = \sqrt{3x^2 + 4x + 5} > 0, \quad B = \sqrt{11x^2 + 12x + 13} > 0.$$

Để ý rằng

$$B^2 - A^2 = 8(x^2 + x + 1) > 0,$$

nên $B > A$.

Ta có

$$\frac{10x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} - \frac{9x}{\sqrt{11x^2 + 12x + 13}} = \frac{x(10B - 9A)}{A \cdot B} \leq 0, \quad \forall x \leq 0.$$

Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm nếu $x \leq 0$.

Viết phương trình đã cho tương đương

$$\left(\frac{10x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} - 4 \right) + \left(x - \frac{9x}{\sqrt{11x^2 + 12x + 13}} \right) = 0.$$

Quy đồng và nhân liên hợp, ta được

$$\frac{2(x-2)(13x+10)}{A(5x+2A)} + \frac{x(x-2)(11x+34)}{B(9+B)} = 0.$$

Đặt nhân tử chung

$$(x-2) \left[\frac{2(13x+10)}{A(5x+2A)} + \frac{x(11x+34)}{B(9+B)} \right] = 0.$$

Do $x > 0$, nên biểu thức bên trong dấu ngoặc vuông luôn dương. Nên ta có $x = 2$ là nghiệm của phương trình. \square

Bài tập 2.9. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2+7x+7} + \sqrt{x^2+4x+13} - \sqrt{x^2+x+19} - \sqrt{x^2+5x+11} = 0;$

Đáp số. $x = 2.$

2) $\sqrt{x^2+10x-3} + \sqrt{x^2+11x-6} = \sqrt{x^2+12x-9} + \sqrt{x^2+13x-12};$

Đáp số. $x = 3.$

3) $\sqrt{x^2+10x-3} + \sqrt{x^2+11x-6} - 2\sqrt{x^2+12x-9} = 0;$

Đáp số. $x = 3.$

4) $\sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-3x+4};$

Đáp số. $\{2\}.$

5) $\sqrt{x^2+13x+19} + \sqrt{x^2+14x+17} + \sqrt{x^2+16x+13} + \sqrt{x^2+20x+5} = 28;$

Đáp số. $x = 2.$

6) $\sqrt[3]{x^2+2} + \sqrt[3]{4x^2+3x-2} = \sqrt[3]{3x^2+x+5} + \sqrt[3]{2x^2+2x-5};$

Đáp số. $x = -\frac{3}{5} \vee x = 0.$

Bài tập 2.10. ⁵ Giải các phương trình sau:

1) $x = \sqrt{1 + \sqrt{7+x}}.$

Đáp số. $x = 2.$

2) $x = \sqrt{2 + \sqrt{2+x}}.$

Đáp số. $x = 2.$

3) $x = \sqrt{4 + \sqrt{22+x}}.$

Đáp số. $x = 3.$

4) $x = \sqrt{5 + \sqrt{13+x}}.$

Đáp số. $x = 3.$

5) $x = \sqrt{6 + \sqrt{6+x}}.$

Đáp số. $x = 3.$

6) $x = \sqrt{7 + \sqrt{1+x}}.$

Đáp số. $x = 3.$

7) $x = \sqrt{11 + \sqrt{21+x}}.$

Đáp số. $x = 4.$

8) $x = \sqrt{12 + \sqrt{12+x}}.$

Đáp số. $x = 4.$

⁵Trần Văn Toàn.

9) $x = \sqrt{13 + \sqrt{5 + x}}$.

Đáp số. $x = 4$.

10) $x = \sqrt{20 + \sqrt{20 + x}}$.

Đáp số. $x = 5$.

11) $x = \sqrt{21 + \sqrt{11 + x}}$.

Đáp số. $x = 5$.

12) $x = \sqrt{22 + \sqrt{4 + x}}$.

Đáp số. $x = 5$.**Bài tập 2.11.** ⁶ Giải các phương trình sau:

1) $x = \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}$.

Đáp số. $x = 2$.

2) $x = \sqrt{x + \sqrt{x + 33}}$.

Đáp số. $x = 3$.

3) $x = \sqrt{2x + \sqrt{x + 6}}$.

Đáp số. $x = 3$.

4) $x = \sqrt{2x + \sqrt{x + 60}}$.

Đáp số. $x = 4$.

5) $x = \sqrt{3x + \sqrt{x + 12}}$.

Đáp số. $x = 4$.

6) $x = \sqrt{3x + \sqrt{x + 95}}$.

Đáp số. $x = 5$.

7) $x = \sqrt{4x + \sqrt{x + 20}}$.

Đáp số. $x = 5$.

8) $x = \sqrt{5x + \sqrt{x + 30}}$.

Đáp số. $x = 6$.

9) $x = \sqrt{6x + \sqrt{x + 42}}$.

Đáp số. $x = 7$.

10) $x = \sqrt{7x + \sqrt{x + 56}}$.

Đáp số. $x = 8$.

11) $x = \sqrt{8x + \sqrt{x + 72}}$.

Đáp số. $x = 9$.

12) $x = \sqrt{9x + \sqrt{x + 90}}$.

Đáp số. $x = 10$.

13) $x = \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}$.

Đáp số. $x = 2$.

14) $x = \sqrt{x + \sqrt{x + 33}}$.

Đáp số. $x = 3$.

15) $x = \sqrt{2x + \sqrt{x + 6}}$.

Đáp số. $x = 3$.

16) $x = \sqrt{2x + \sqrt{x + 60}}$.

Đáp số. $x = 4$.

17) $x = \sqrt{3x + \sqrt{x + 12}}$.

Đáp số. $x = 4$.

18) $x = \sqrt{3x + \sqrt{x + 95}}$.

Đáp số. $x = 5$.

19) $x = \sqrt{4x + \sqrt{x + 20}}$.

Đáp số. $x = 5$.⁶Trần Văn Toàn.

- 20) $x = \sqrt{5x + \sqrt{x + 30}}$. Đáp số. $x = 6$.
- 21) $x = \sqrt{6x + \sqrt{x + 42}}$. Đáp số. $x = 7$.
- 22) $x = \sqrt{7x + \sqrt{x + 56}}$. Đáp số. $x = 8$.
- 23) $x = \sqrt{8x + \sqrt{x + 72}}$. Đáp số. $x = 9$.
- 24) $x = \sqrt{9x + \sqrt{x + 90}}$. Đáp số. $x = 10$.
- 25) $x = \sqrt{x + \sqrt{45 - x^2}}$. Đáp số. $x = 3$.
- 26) $x = \sqrt{2x + \sqrt{18 - x^2}}$. Đáp số. $x = 3$.
- 27) $x = \sqrt{3x + \sqrt{32 - x^2}}$. Đáp số. $x = 4$.
- 28) $x = \sqrt{4x + \sqrt{50 - x^2}}$. Đáp số. $x = 5$.

Bài tập 2.12. ⁷ Giải các phương trình sau:

- 1) $\sqrt{x+10} + 2\sqrt{3x+7} - x - 8 = 0$; Đáp số. $\{-1; 6\}$.
- 2) $4\sqrt{x+10} + \sqrt{3x+7} - x - 15 = 0$; Đáp số. $\{-1; 6\}$.
- 3) $\sqrt{x+10} - \sqrt{3x+7} + 2x + 9 = 0$; Đáp số. $\{-1; 6\}$.
- 4) $\sqrt{2x+5} - 3\sqrt{3x+10} + x^2 + x + 3 = 0$; Đáp số. $\{-2; 2\}$.
- 5) $3\sqrt{2x+5} - 5\sqrt{3x+10} + 2x^2 + x + 1 = 0$; Đáp số. $\{-2; 2\}$.
- 6) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{-x+10} - x^2 + 10x - 15 = 0$; Đáp số. $\{1; 9\}$.
- 7) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} + 3x^2 - 18x + 14 = 0$; Đáp số. $\{1; 5\}$.
- 8) $3\sqrt{x+9} + 6\sqrt{-x-4} - x^2 - 12x - 47 = 0$; Đáp số. $\{-8; -5\}$.
- 9) $\sqrt{x^2+x-11} + \sqrt{8x-23} - x^2 + 3x - 2 = 0$; Đáp số. $\{3; 4\}$.
- 10) $4\left(\sqrt{x^2-5x+1} + \sqrt{-2x+19}\right) - 4x^2 + 11x + 29 = 0$; Đáp số. $\{-3; 5\}$.
- 11) $\sqrt{x^2+9x+34} + \sqrt{2x^2+13x+22} + x^2 + 10x + 16 = 0$. Đáp số. $\{-6; -3\}$.

Bài tập 2.13. ⁸ Giải các phương trình sau:

- 1) $(x+1) \cdot \sqrt{x+2} + (x+6) \cdot \sqrt{x+7} = (x+3) \cdot (x+4)$; Đáp số. $x = 2$.
- 2) $(x+2) \cdot \sqrt{x+3} + (x+7) \cdot \sqrt{x+8} = (x+4) \cdot (x+5)$; Đáp số. $x = 1$.

⁷Trần Văn Toàn

⁸Trần Văn Toàn.

$$3) (x+4) \cdot \sqrt{x+5} + (x+9) \cdot \sqrt{x+10} = (x+6) \cdot (x+7); \quad \text{Đáp số. } x = -1.$$

$$4) (x+5) \cdot \sqrt{x+6} + (x+10) \cdot \sqrt{x+11} = (x+7) \cdot (x+8); \quad \text{Đáp số. } x = -2.$$

$$5) (x+6)\sqrt{x+7} + (x+11)\sqrt{x+12} = (x+8) \cdot (x+9). \quad \text{Đáp số. } x = -3.$$

Bài tập 2.14. Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}. \quad \text{Đáp số. } \{-3\}.$$

$$2) (3x+2)\sqrt{2x-3} = 2x^2 + 3x - 6. \quad \text{Đáp số. } \{2\}.$$

$$3) x^3 + x - 7 = \sqrt{x^2 + 5}; \quad \text{Đáp số. } \{2\}.$$

$$4) 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8, (x \in \mathbb{R}); \quad \text{Đáp số. } \{-1; 2\}.$$

$$5) (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}) \cdot (x - 3\sqrt{x-2} + 2) = 9; \quad \text{Đáp số. } x = \frac{1}{2} (5 + 3\sqrt{5}).$$

$$6) (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}) \cdot (x + 3\sqrt{x-1} + 3) = 9; \quad \text{Đáp số. } x = \frac{3}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Đáp số. $\{3\}$.

$$7) (\text{B, 2010}) \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0, (x \in \mathbb{R}); \quad \text{Đáp số. } \{5\}.$$

$$8) 2 \cdot \sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} + 5x^2 - 8x - 26 = 0, (x \in \mathbb{R}); \quad \text{Đáp số. } \{3\}.$$

$$9) \sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}; \quad \text{Đáp số. } \{2\}.$$

$$10) 2x^2 - 11x + 21 = 3 \cdot \sqrt[3]{4x-4}; \quad \text{Đáp số. } \{3\}.$$

$$11) \sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}; \quad \text{Đáp số. } \{3\}.$$

$$12) \sqrt{x^3+17} = 3x - 5 + \sqrt{x^3+8}; \quad \text{Đáp số. } \{2\}.$$

$$13) \sqrt[3]{9-x} + \sqrt{5x-1} = 2x^2 + 3x - 1. \quad \text{Đáp số. } x = 1.$$

$$14) \sqrt[3]{x^2-2x+5} + 5 = \sqrt{x-2} + 2x; \quad \text{Đáp số. } x = 3.$$

$$15) x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3-3x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = 4 \vee x = 12.$$

Bài tập 2.15. Giải các phương trình sau:

$$1) 4(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = x; \quad \text{Đáp số. } \{0\}.$$

$$2) \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6; \quad \text{Đáp số. } \{3\}.$$

$$3) 9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x + 3; \quad \text{Đáp số. } \{6\}.$$

4) $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 5} = x + 2;$

Đáp số. $x = -2 \vee x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{7}{2}.$

5) $\sqrt{2x^2 + 3x - 7} - \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 + 4x + 5};$

Đáp số. $x = -3.$

6) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 - 4x + 5} = x^2 - 4x + 3.$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 2.$

7) $\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x + 1.$

Đáp số. $\left\{ 3; \frac{5 + \sqrt{297}}{8} \right\}.$

8) $x = (\sqrt{x+1} + 1) \cdot (\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7);$

Đáp số. $\{2\}.$

9) $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}};$

Đáp số. $x = \frac{2}{3} \vee x = 2.$

10) $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6};$

Đáp số. $\left\{ 3; \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2} \right\}.$

Bài tập 2.16. ⁹ Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{15x-14} + \sqrt[3]{-2x+3} - (x^2 - 2x + 3) = 0;$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 2.$

2) $2\sqrt{15x+31} + \sqrt[3]{2x+3} = x^2 + 11x + 19;$

Đáp số. $x = -2 \vee x = -1.$

3) $\sqrt{15x-29} - \sqrt[3]{2x-5} = x^2 - 4x + 6;$

Đáp số. $x = 2 \vee x = 3.$

4) $\sqrt{-15x-29} + \sqrt[3]{2x+5} = x^2 + 4x + 6.$

Đáp số. $x = -3 \vee x = -2.$

2.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Làm giảm số căn trong một phương trình.

Ví dụ 2.18

Giải phương trình

$$\sqrt{x+10} + 2\sqrt{3x+7} - x - 8 = 0. \quad (2.33)$$

Lời giải. Cách 1.Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là $x \geq -\frac{7}{3}.$ Đặt $t = \sqrt{x+10} \geq 0.$ Ta có $x = t^2 - 10.$ Phương trình đã cho trở thành

$$2\sqrt{3t^2 - 23} = t^2 - t - 2$$

⁹Trần Văn Toàn

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} t^2 - t - 2 \geq 0, \\ t^4 - 2t^3 - 15t^2 + 4t + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 4.$$

Trở lại ẩn x , ta tìm được các nghiệm của phương trình (2.33) là

$$x = -1 \vee x = 6.$$

Cách 2. Đặt $a = \sqrt{x+10}$, $b = \sqrt{3x+7}$. Chọn $x = a^2 - 10$.

Từ phương trình (2.33), ta có hệ

$$\begin{cases} -3a^2 + b^2 + 23 = 0, \\ -a^2 + a + 2b + 2 = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Lấy phương trình thứ nhất cộng sáu lần phương trình thứ hai của hệ (2.34), ta được

$$-9a^2 + b^2 + 6a + 12b + 35 = 0.$$

Hay

$$(3a + 5 + b) \cdot (3a - 7 - b) = 0.$$

Hệ phương trình thứ nhất

$$\begin{cases} 3a + 5 + b = 0, \\ -a^2 + a + 2b + 2 = 0. \end{cases}$$

vô nghiệm.

Hệ phương trình thứ hai

$$\begin{cases} 3a - 7 - b = 0, \\ -a^2 + a + 2b + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow (a = 3 \wedge b = 2) \vee (a = 4 \wedge b = 5).$$

Từ đó, ta cũng tìm được hai nghiệm của phương trình (2.33) là $x = -1$ hoặc $x = 6$. \square

Ví dụ 2.19

Giải phương trình sau:

$$(4x+2) \cdot \sqrt{x+1} - (4x-2)\sqrt{x-1} = 9.$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$(4t^2 + 6)\sqrt{t^2 + 2} = 9 + (4t^2 + 2)t.$$

Bình phương hai vế phương trình trên ta được

$$64t^4 - 72t^3 + 128t^2 - 36t - 9 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(32t^3 - 20t^2 + 54t + 9) = 0.$$

- Với $t = \frac{1}{2}$, ta có $x = \frac{5}{4}$.
- Hàm số $f(t) = 32t^3 - 20t^2 + 54t + 9$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, nên $f(t) \geq f(0) = 9$.

Do đó, phương trình

$$32t^3 - 20t^2 + 54t + 9 = 0$$

vô nghiệm trên $[0; +\infty)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left\{\frac{5}{4}\right\}$. □

Ví dụ 2.20

Giải phương trình

$$2x^2 - 2(x+3)\sqrt{x^2+3x+2} + 15x + 25 = 0. \quad (2.35)$$

Lời giải. Cách 1.

Phương trình (2.35) tương với

$$2x^2 + 15x + 25 = 2(x+3) \cdot \sqrt{x^2+3x+2},$$

hay

$$\begin{cases} (2x^2 + 15x + 25)(x+3) \geq 0, \\ 24x^3 + 209x^2 + 594x + 553 = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Giải hệ (2.36), ta được

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{3} \vee x = \frac{1}{16}(-51 - \sqrt{73}). \quad \square$$

Phân tích. Ta giải phương trình (2.35) bằng cách đưa (2.35) về phương trình đẳng cấp theo $x+3$ và $\sqrt{x^2+3x+2}$ bằng cách giả sử

$$2x^2 + 15x + 25 = m \cdot (x+3)^2 + n \cdot (x^2+3x+2), \quad \forall m, n.$$

Hay

$$2x^2 + 15x + 25 = (m+n)x^2 + (6m+3n)x + 9m+2n, \quad \forall m, n. \quad (2.37)$$

Đồng nhất các hệ số ở hai vế của (2.37), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} m+n=2, \\ 6m+3n=15, \\ 9m+2n=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3, \\ n=-1. \end{cases}$$

Do đó,

$$2x^2 + 15x + 25 = 3(x+3)^2 - (x^2+3x+2). \quad \triangleleft$$

Lời giải. Cách 2.

Phương trình (2.35) tương với

$$3(x+3)^2 - (x^2 + 3x + 2) - 2(x+3)\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 0. \quad (2.38)$$

Đặt $a = x + 3$, $b = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, (2.38) thành

$$3a^2 - 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{b}{3} \vee a = b.$$

Tới đây, dễ dàng giải được (2.35). □

Lời bình. Việc sử dụng đồng nhất như cách giải trên không phải lúc nào cũng dễ thực hiện. ♣

Lời giải. Cách 3.

Đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$. Cùng với phương trình (2.35), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 15x - 6y + 25 = 0, \\ x^2 - y^2 + 3x + 2 = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Cộng hai phương trình trên, ta được

$$3x^2 - 2xy - y^2 + 18x - 6y + 27 = 0.$$

Phương trình này được phân tích thành

$$(3x + y + 9) \cdot (x - y + 3) = 0.$$

Như vậy, ta chỉ cần giải hai hệ

$$\begin{cases} 3x + y + 9 = 0, \\ x^2 - y^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ x^2 - y^2 + 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

Công việc này thì đơn giản. □

Ví dụ 2.21

Giải phương trình

$$60 - 15\sqrt{-2 - 3x} - 30\sqrt{3 - x} + 4\sqrt{(-2 - 3x) \cdot (3 - x)} - 7x = 0. \quad (2.40)$$

Lời giải. Phương trình (2.40) tương đương với

$$60 - 15(\sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x}) + 4\sqrt{(-2-3x) \cdot (3-x)} - 7x = 0. \quad (2.41)$$

Đặt $t = \sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x}$, ta có

$$t^2 = 10 - 7x + 4\sqrt{(-2-3x) \cdot (3-x)}$$

Phương trình (2.40) trở thành

$$t^2 - 15t + 50 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \vee t = 10.$$

- Với $t = 5$, ta có $\sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x} = 5$.

Hàm số $f(t) = \sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x}$ nghịch biến trên đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$ và phương trình có nghiệm $x = -1$ và đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình $\sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x} = 5$.

- Tương tự, phương trình $\sqrt{-2-3x} + 2\sqrt{3-x} = 10$ cũng có nghiệm duy nhất $x = -6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -6$. □

Ví dụ 2.22

Giải phương trình

$$\sqrt{6x^2 - 40x + 150} - \sqrt{4x^2 - 60x + 100} = 2x - 10.$$

Lời giải. Cách 1. Đặt

$$y = \sqrt{6x^2 - 40x + 150} \geq 0, \quad z = \sqrt{4x^2 - 60x + 100} \geq 0.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - z = 2(x - 5), \\ y^2 + z^2 = 10(x - 5)^2. \end{cases}$$

Thay phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được

$$3y^2 - 10yz + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow y = 3z \text{ hoặc } y = \frac{z}{3}.$$

- Với $y = 3z$, ta có

$$\sqrt{6x^2 - 40x + 150} = 3\sqrt{4x^2 - 60x + 100} \Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}.$$

Thử lại, ta chỉ nhận nghiệm $x = 15$.

- Với $y = \frac{z}{3}$, ta có

$$3\sqrt{6x^2 - 40x + 150} = \sqrt{4x^2 - 60x + 100}.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 15$.

Cách 2. Xét $x > 5$. Chia phương trình cho $x - 5$, ta được

$$\sqrt{\frac{6x^2 - 40x + 150}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{4x^2 - 60x + 100}{(x-5)^2}} = 2,$$

hay

$$\sqrt{\frac{5(x-5)^2 + (x+5)^2}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{5(x-5)^2 - (x+5)^2}{(x-5)^2}} = 2.$$

Tương đương

$$\sqrt{5 + \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} - \sqrt{5 - \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} = 2.$$

Đặt $y = \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 \geq 0$, phương trình trên trở thành

$$\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = 2. \quad (2.42)$$

Hàm số

$$f(y) = \sqrt{5+y} - \sqrt{5-y}, \quad 0 \leq y \leq 5$$

đồng biến trên đoạn $[0;5]$, lại thấy $y = 4$ là một nghiệm của phương trình (2.42), nên (2.42) có nghiệm duy nhất $y = 4$. Với $y = 4$, ta có

$$\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3} \text{ (loại)}.$$

Nếu $x - 5 < 0$, ta có $x - 5 = -\sqrt{(x-5)^2}$. Vẫn lí luận như trên, ta có phương trình

$$\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = -2.$$

Giải phương trình này, ta được $y = -4$. Trở lại ẩn x , ta có

$$\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = -4.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 15$.

Cách 3. Bình phương phương trình đã cho ta được

$$6x^2 - 60x + 150 = 2\sqrt{(6x^2 - 40x + 150)(4x^2 - 60x + 100)}.$$

Tiếp tục bình phương, ta có

$$\Leftrightarrow 15x^4 - 340x^3 + 2250x^2 - 8500x + 9375 = 0.$$

Dùng máy tính ta có được một nghiệm $x = 15$, nên ta phân tích được

$$\Leftrightarrow (x - 15)(15x^3 - 115x^2 + 525x - 625) = 0.$$

Từ đó, ta có $\Leftrightarrow x = 15$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Thử lại ta chỉ nhận nghiệm $x = 15$. □

Ví dụ 2.23

Giải phương trình sau:

$$(13 - 4x)\sqrt{2x - 3} + (4x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 2 + 8\sqrt{16x - 4x^2 - 15}.$$

Lời giải. Với những bài toán phương trình vô tỉ cho dưới hình thức này ta thường khéo léo “kéo” các mối quan hệ giữa “căn thức và đa thức” sao cho thật khéo nhất. Nhưng ta cần chú ý tới khi muốn áp dụng cho bài toán ta cần để ý tới mỗi lượng duyên của “ \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{ab} ”. Bây giờ mình đưa ra hai hướng giải cho bài toán này như sau.

Trước tiên ta cần đặt điều kiện cho các căn thức có nghĩa. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \\ 16 - 4x^2 - 15x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Hướng giải 1. Ta để ý rằng

$$(2x - 3)(5 - 2x) = 16 - 4x^2 - 15.$$

Giờ ta sẽ kéo sự khéo léo về mối quan hệ “căn thức và đa thức” trong bài toán. Cụ thể, ta xét phương trình:

$$13 - 4x = a(2x - 3) + b(5 - 2x) = 2(a - b)x - 3a + 5b.$$

Cân bằng hệ số hai vế phương trình ta thu được

$$\begin{cases} 2(a - b) = -4 \\ -3a + 5b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Tương tự ta xét phương trình

$$4x - 3 = a(2x - 3) + b(5 - 2x) = 2(a - b)x - 3a + 5b.$$

Cân bằng hệ số hai vế phương trình ta thu được

$$\begin{cases} 2(a - b) = 4 \\ -3a + 5b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Chú ý thêm một điều tuyệt diệu đó là $(2x - 3) + (5 - 2x) = 2$. Tới đây ý đồ giải bài toán đã rõ. Đặt $u = \sqrt{2x - 3}$, $v = \sqrt{5 - 2x}$ ($u, v \geq 0$). Khi đó phương trình đã cho được biến đổi thành

$$\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{7}{2}v^2\right)u + \left(\frac{7}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2\right)v = 2 + 8uv,$$

tương đương

$$3(u^3 + v^3) + 7uv(u + v) = 4 + 16uv,$$

hay

$$3(u + v)(2 - uv) + 7uv(u + v) = 4 + 16uv. \quad (2.43)$$

Lại đặt $t = u + v$, $\sqrt{2} \leq t \leq 2$, ta có $uv = \frac{t^2 - 2}{2}$. Lúc đó phương trình (2.43) trở thành:

$$3\left(2 - \frac{t^2 - 2}{2}\right) + 7\left(\frac{t^2 - 2}{2}\right)t = 4 + 16\left(\frac{t^2 - 2}{2}\right),$$

hay

$$t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với $t = 2$, trở về ẩn x , ta tìm được $x = 2$.

Hướng giải 2. Ta phân tích lại bài toán dưới hình thức khác: Ta cũng có

$$(2x - 3)(5 - 2x) = 16x - 4x^2 - 15$$

và điều “tuyệt diệu”

$$(2x - 3) + (5 - 2x) = 2.$$

Lại có nhận xét

$$13 - 4x = 3 + 10 - 4x = 3 + 2(5 - 2x), \quad 4x - 3 = 4x + 3 - 6 = 3 + 2(2x - 3).$$

Vậy ý đồ giải bài toán cũng đã hiện lên. Lúc đó với cách đặt như trên ta thu được phương trình mới:

$$(3 + 2u^2)v + (3 + 2v^2)u = 2 + 8uv \Leftrightarrow 3(u + v) + 2(u + v)uv = 2 + 8uv.$$

Tới đây tương tự như hướng giải 1. Các bạn tiếp tục nhé.

Hướng giải 3. Đặt

$$t = \sqrt{5 - 2x} + \sqrt{2x - 3}.$$

Ta có

$$t^2 = 2 + 2\sqrt{5 - 2x}\sqrt{-3 + 2x}$$

và

$$t^3 = -4\sqrt{5 - 2x} + 4x \cdot \sqrt{5 - 2x} + 12\sqrt{-3 + 2x} - 4x \cdot \sqrt{-3 + 2x}.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2 \vee t = 3.$$

□

Ví dụ 2.24

Giải phương trình

$$(9x - 2) \cdot \sqrt{3x - 1} + (10 - 9x) \cdot \sqrt{3 - 3x} - 4\sqrt{-9x^2 + 12x - 3} = 4.$$

Lời giải. Viết phương trình đã cho thành

$$[3(3x - 1) + 1] \cdot \sqrt{3x - 1} + [3(3 - 3x) \cdot \sqrt{3 - 3x} + 1] - 4\sqrt{(3x - 1) \cdot (3 - 3x)} = 4.$$

Đặt $a = \sqrt{3x - 1} \geq 0$, $b = \sqrt{3 - 3x} \geq 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} (3a^2 + 1) \cdot b + (3b^2 + 1) \cdot a - 4ab = 4, \\ a^2 + b^2 = 2. \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng theo a, b . Đặt $S = a + b > 0$, $P = a \cdot b \geq 0$. Từ hệ trên, ta có

$$\begin{cases} 3(S^3 - 3SP) + S - 4P = 4 \\ S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{S^2 - 2}{2}, \\ S(3S^2 + 4S - 20) = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, ta có $S = 0$, $S = 2$, $S = \frac{10}{3}$. Ta chỉ nhận $S = 2$. Khi đó, $P = 1$. Từ đó suy ra $a = b = 1$ và $x = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{2}{3}$. □

Ví dụ 2.25

Giải phương trình

$$(5x + 1) \cdot \sqrt{2x + 1} - (7x + 3) \cdot \sqrt{x} = 1. \quad (2.44)$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $a = \sqrt{2x + 1}$ và $b = \sqrt{x}$. Ta có

$$5x + 1 = a^2 + 3b^2, \quad 7x + 3 = 3a^2 + b^2.$$

(2.44) trở thành

$$(a^2 + 3b^2) \cdot a - (3a^2 + b^2) \cdot b = 1 \Leftrightarrow (a - b)^3 = 1 \Leftrightarrow a - b = 1.$$

Lúc đó

$$\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Vậy (2.44) có hai nghiệm là $x = 0 \vee x = 4$. □

Ví dụ 2.26

Giải phương trình

$$(5x - 4) \cdot \sqrt{2x - 3} - (4x - 5) \cdot \sqrt{3x - 2} = 2. \quad (2.45)$$

Lời giải. Điều kiện để (2.45) có nghĩa là $x \geq \frac{3}{2}$.

Từ phương trình đã cho, ta suy ra

$$(5x - 4) \cdot \sqrt{2x - 3} > (4x - 5) \cdot \sqrt{3x - 2}$$

Điều này tương đương

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 > 0$$

hay

$$(x + 1)(x - 2)(2x - 1) > 0.$$

Do điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$, nên ta thu được $x > 2$.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(5x - 4) \cdot \sqrt{2x - 3} = 2 + (4x - 5) \cdot \sqrt{3x - 2}. \quad (2.46)$$

Bình phương phương trình trên, ta được phương trình tương đương.

$$2x^3 - 3x^2 - 3x - 2 = 4 \left(\sqrt{3x - 2} - 5 \right) \quad (2.47)$$

Đặt $t = \sqrt{3x - 2}$, (2.47) trở thành

$$t^6 + 6t^4 - 40t^3 + 3t^2 - 56t + 6 = 0.$$

$$(t - 3) \cdot (t^5 + 3t^4 + 15t^3 + 5t^2 + 18t - 2) = 0. \quad (2.48)$$

Do $t > 2$, nên

$$t^5 + 3t^4 + 15t^3 + 5t^2 + 18t - 2 > 0.$$

Do đó, từ (2.48), cho ta $t = 3$. Khi đó, $\sqrt{3x - 2} = 3$ hay $x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 6$. □

Ví dụ 2.27

Giải phương trình

$$2(x - 7) + 11\sqrt{2(3x - 1)} = \sqrt{2(12x^2 - 13x + 3)} + 8\sqrt{4x - 3}.$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(4x-3) - (6x-2) + 11\sqrt{6x-2} - 10 = \sqrt{(4x-3)(6x-2)} + 8\sqrt{4x-3}. \quad (2.49)$$

Đặt

$$a = \sqrt{4x-3} \geq 0, \quad b = \sqrt{6x-2} \geq 0.$$

Phương trình (2.49) trở thành

$$2a^2 - b^2 + 11b - 10 = ab + 8a. \quad (2.50)$$

hay

$$2a^2 + (-b-8)a - b^2 + 11b - 10 = 0 \Leftrightarrow a = 5 - \frac{b}{2} \vee a = b - 1.$$

Trở lại ẩn x , phương trình (2.49) có hai nghiệm là $x = 1 \vee x = 3$. □

Ví dụ 2.28

Giải phương trình

$$(x-1) \cdot \sqrt{x} + \sqrt{4-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Đáp số. $x = 2 \vee x = 2 + \sqrt{2}$.

Bài tập 2.17. ¹⁰ Giải các phương trình sau:

1) $(x-2)(x+5) - 6\sqrt{x^2+3x-3} = -12;$

Đáp số. $x = -7 \vee x = -4 \vee x = 1 \vee x = 4$.

2) $(x+9)(x-2) - 6\sqrt{x^2+7x+7} = -30;$

Đáp số. $x = -9 \vee x = -6 \vee x = -1 \vee x = 2$.

3) $(x+3)(x+6) - 4\sqrt{x^2+9x+9} = 6;$

Đáp số. $x = -9 \vee x = -8 \vee x = -1 \vee x = 0$.

4) $(x+3)(x+8) - 4\sqrt{x^2+11x+19} = 2;$

Đáp số. $x = -10 \vee x = -9 \vee x = -2 \vee x = -1$.

5) $(x-2)(x-10) - 6\sqrt{x^2-12x+12} = 3.$

Đáp số. $x = -1 \vee x = 1 \vee x = 11 \vee x = 13$.

Bài tập 2.18. ¹¹ Giải các phương trình sau:

¹⁰Trần Văn Toàn

¹¹Trần Văn Toàn

$$1) (x^2 - 9x + 50) \cdot \sqrt{x^2 - 9x - 6} - 2 \cdot (7x^2 - 63x - 10) = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -5 \vee x = -2 \vee x = -1 \vee x = 10 \vee x = 11 \vee x = 14.$$

$$2) (x^2 + 9x + 50) \cdot \sqrt{x^2 + 9x - 6} - 2 \cdot (7x^2 + 63x - 10) = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -14 \vee x = -11 \vee x = -10 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 5.$$

$$3) (x^2 - 11x + 60) \cdot \sqrt{x^2 - 11x + 4} - 2 \cdot (7x^2 - 77x + 60) = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = -4 \vee x = -1 \vee x = 0 \vee x = 11 \vee x = 12 \vee x = 15.$$

$$4) (x^2 + 11x + 60) \cdot \sqrt{x^2 + 11x + 4} - 2 \cdot (7x^2 + 77x + 60) = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = -15 \vee x = -12 \vee x = -11 \vee x = 0 \vee x = 1 \vee x = 4.$$

$$5) (x^2 - 15x + 86) \sqrt{x^2 - 15x + 30} - 2(7x^2 - 105x + 242) = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 13 \vee x = 14 \vee x = 17.$$

Bài tập 2.19. ¹² Giải các phương trình sau:

$$1) x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{35}{4}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{15}{4} \vee x = 5.$$

$$2) x + \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{35}{3}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 5 \vee x = \frac{20}{3}.$$

$$3) x + \frac{6x}{\sqrt{x^2 - 36}} = \frac{35}{2}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{15}{2} \vee x = 10.$$

$$4) x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 - 64}} = \frac{70}{3}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 10 \vee x = \frac{40}{3}.$$

$$5) x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{32}{5}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 4.$$

$$6) x + \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{27}{5}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 3.$$

$$7) x + \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{64}{5}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 8.$$

$$8) x + \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 64}} = \frac{54}{5}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 6.$$

$$9) x + \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 81}} = \frac{96}{5}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 12.$$

$$10) x + \frac{5x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{27}{4}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 3.$$

$$11) x + \frac{5x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{32}{3}.$$

$$\text{Đáp số. } x = 4.$$

¹²Trần Văn Toàn

$$12) x + \frac{10x}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{27}{2}. \quad \text{Đáp số. } x = 6.$$

$$13) x + \frac{10x}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{64}{3}. \quad \text{Đáp số. } x = 8.$$

$$14) x - \frac{5x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{3}{4}. \quad \text{Đáp số. } x = -3.$$

$$15) x - \frac{5x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{8}{3}. \quad \text{Đáp số. } x = -4.$$

$$16) x - \frac{10x}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{3}{2}. \quad \text{Đáp số. } x = -6.$$

$$17) x - \frac{10x}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{16}{3}. \quad \text{Đáp số. } x = -8.$$

Bài tập 2.20. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{\frac{4x-1}{x}} = \frac{8x^2-2x-3}{x}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{1-\sqrt{17}}{8}; \frac{1+\sqrt{37}}{8} \right\}.$$

$$2) \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{2x^2-2x-10}{x-2}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ 3; \frac{1-3\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

$$3) x \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x}} = x^2 - 3x - 6; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -1; \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} \right\}.$$

$$4) x \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x}} = x^2 + 2x - 2; \quad \text{Đáp số. } \{-1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{5}\}.$$

$$5) x(x+3) + (x+3)\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 2 = 0; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -4; \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

$$6) x(x+4) + (x+4)\sqrt{\frac{x}{x+4}} = 6. \quad \text{Đáp số. } \{2\sqrt{2}-2; -2-\sqrt{13}\}.$$

Bài tập 2.21. Giải các phương trình sau:

$$1) (\text{Dự bị 1, A, 2008}) \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}.$$

Hướng dẫn. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được

$$4 + \sqrt{-(4x^2-4x-3)} = \frac{(4x^2-4x+1)^2}{4}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(4x^2-4x-3)}.$$

$$2) \sqrt{5+2x} + \sqrt{4-2x} = \frac{(4x+1)^2}{27}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -\frac{5}{2}; 2 \right\}.$$

$$3) (4x+1) \cdot \sqrt{(x+1)(1-2x)} = -1; \quad \text{Đáp số. } \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \right\}.$$

$$4) (2x - 5) \cdot \sqrt{(x - 1)(x - 4)} = 10; \quad \text{Đáp số. } \{5\}.$$

$$5) \sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x + 2)^3}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \right\}.$$

$$6) \sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 1)^3}. \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right\}.$$

Bài tập 2.22. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1; \quad \text{Đáp số. } \{-6; 4\}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

$$2) \sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2; \quad \text{Đáp số. } \{-2; 6\}.$$

$$3) \sqrt{2x^2 - 12x + 46} - \sqrt{x^2 - 6x + 22} = 3; \quad \text{Đáp số. } \{-3; 9\}.$$

$$4) \sqrt{2x^2 - 8x + 49} - \sqrt{x^2 - 4x + 21} = 4. \quad \text{Đáp số. } \{-6; 10\}.$$

Bài tập 2.23. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}; \quad \text{Đáp số. } \{-1; 0\}.$$

Hướng dẫn. Có thể đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 1}$ hoặc $t = x^2 + x$.

$$2) \sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}. \quad \text{Đáp số. } \{-2; 1\}.$$

Bài tập 2.24. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = x - 1; \quad \text{Đáp số. } \{5\}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{x - 1}$.

$$2) \sqrt{x - 2} + \sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}; \quad \text{Đáp số. } \{15\}.$$

$$3) \sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x + 7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + 7}} = 4; \quad \text{Đáp số. } \{2\}.$$

$$4) \text{(D, 2005)} \quad 2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + 1} = 4; \quad \text{Đáp số. } \{3\}.$$

$$5) \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x - 2 - 2\sqrt{x - 3}} = 2. \quad \text{Đáp số. } \left\{ 7; \frac{31}{9} \right\}.$$

Bài tập 2.25. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} = 1; \quad \text{Đáp số. } [0; 3].$$

$$2) \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = 1; \quad \text{Đáp số. } [2; 5].$$

$$3) \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} = 2. \quad \text{Đáp số. } [-1; 0].$$

Bài tập 2.26. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4x; \quad \text{Đáp số. } \{1\}.$$

$$2) \sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 10x + 5} = 7x; \quad \text{Đáp số. } \{1\}.$$

$$3) \sqrt{2x^2 + 4x + 3} - \sqrt{9x^2 + 4x + 3} = -x; \quad \text{Đáp số. } \{0; 1\}.$$

$$4) \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x. \quad \text{Đáp số. } \{4\}.$$

Bài tập 2.27. Giải các phương trình sau:

$$1) 2 - \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \sqrt{x+7}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{1-5\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$2) 3 - \sqrt{\frac{x+1}{x-6}} = \sqrt{x+11}; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{5-7\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Bài tập 2.28. Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x+1} \cdot (3x^2 + x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x; \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}.$$

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$. Ta có phương trình

$$t \cdot (3x^2 + t^2) = x^3 + 3xt^2 \Leftrightarrow (x-t)^3 = 0.$$

$$2) \sqrt{1-x} \cdot (3x^2 - x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}.$$

Bài tập 2.29. Giải phương trình $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2} - x^2} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = 0$.

Đáp số. $\{-2; 2\}$.

Bài tập 2.30. Giải phương trình

$$(4x+1) \cdot \sqrt{x+2} - (4x-1) \cdot \sqrt{x-2} = 21$$

Đáp số. $\left\{ \frac{17}{4} \right\}$.

Bài tập 2.31. ¹³ Giải các phương trình sau:

$$1) (9+x) \cdot \sqrt{3-x} + (11-x) \cdot \sqrt{1+x} - 6\sqrt{-x^2+2x+3} = 16;$$

Đáp số. $x = -1 \vee x = 3$.

¹³Trần Văn Toàn

$$2) (4x - 1) \cdot \sqrt{3 - 2x} + (7 - 4x) \cdot \sqrt{2x - 1} = 2\sqrt{-4x^2 + 8x - 3} + 4.$$

Đáp số. $x = 1$.

$$3) -4\sqrt{-9x^2 + 12x - 3} + \sqrt{3 - 3x} \cdot (10 - 9x) + \sqrt{3x - 1} \cdot (9x - 2) - 4 = 0;$$

Đáp số. $x = \frac{2}{3}$.

$$4) (25 + 2x)\sqrt{7 - x} + (27 - 2x)\sqrt{6 + x} - 10\sqrt{-x^2 + x + 42} = 65.$$

Đáp số. $x = -2 \vee x = 3$.

Bài tập 2.32. ¹⁴ Giải các phương trình sau:

$$1) (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 120x;$$

Đáp số. $x = 4 \vee x = 9$.

$$2) (x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 12\sqrt{x} + 32) = 270x;$$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 64$.

$$3) (x + 12\sqrt{x} + 32)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 462x.$$

Đáp số. $x = 9 \vee x = 64$.

Bài tập 2.33. Giải các phương trình sau:

$$1) 2 - \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \sqrt{x+7};$$

Đáp số. $\left\{ \frac{1-5\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \geq 0$. Suy ra $x = \frac{2+3t^2}{t^2-1}$. Thay vào phương trình đã cho ta được,

$$t^4 - 4t^3 - 7t^2 + 4t + 1 = 0. \quad (2.51)$$

Chia (2.51) cho t^2 .

$$2) 3 - \sqrt{\frac{x+1}{x-6}} = \sqrt{x+11}.$$

Đáp số. $\left\{ \frac{5-7\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài tập 2.34. Giải các phương trình sau:

$$1) (D, 2006) \sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0;$$

Đáp số. $\{1; 2 - \sqrt{2}\}$.

$$2) x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36;$$

Đáp số. $\{3\}$.

$$3) x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18;$$

Đáp số. $\{2\}$.

$$4) 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}.$$

Đáp số. $\{2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{2}\}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{4x+5}$, phương trình đã cho trở thành

$$t^4 - 22t^2 - 8t + 77 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 7) \cdot (t^2 - 2t - 11) = 0.$$

Bài tập 2.35. Giải các phương trình sau:

¹⁴Trần Văn Toàn

- 1) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2;$ Đáp số. $\{-15; 1\}.$
- 2) $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5;$ Đáp số. $\{-61; 4\}.$
- 3) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} = \sqrt{2};$ Đáp số. $\{2; 6\}.$
- 4) $\sqrt[4]{13x+1} + \sqrt[4]{4x-1} = 3\sqrt[4]{x}.$ Đáp số. $\left\{\frac{1}{3}\right\}.$

Hướng dẫn. Chia phương trình cho $\sqrt[4]{x}.$

Bài tập 2.36. Giải các phương trình sau:

- 1) $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt[3]{4-x} = 4;$ Đáp số. $x = -23 \vee x = 3.$
- 2) $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt[3]{2-x} = 2;$ Đáp số. $x = -25 \vee x = 3.$
- 3) $\sqrt[3]{x+12} + \sqrt[3]{-5-x} = 1;$ Đáp số. $x = -13 \vee x = -4.$
- 4) $\sqrt[3]{x+12} + \sqrt[3]{-3-x} = 3.$ Đáp số. $x = -11 \vee x = -4.$
- 5) $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1;$ Đáp số. $\{3\sqrt{21}; -3\sqrt{21}\}.$
- 6) $\sqrt[3]{10-x} - \sqrt[3]{3-x} = 1;$ Đáp số. $\{2; 11\}.$
- 7) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{30-\sqrt{x}} = 6;$ Đáp số. $\{9\}.$
- 8) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18};$ Đáp số. $\{4416\}.$
- 9) $\sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{3x+14} = 4.$ Đáp số. $x = -2.$
- 10) $\sqrt[3]{5x-7} + \sqrt[3]{3x-1} = 4.$ Đáp số. $x = 3.$
- 11) $\sqrt[3]{\frac{x+56}{x}} + 4\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}} = 8.$ Đáp số. $x = 8.$
- 12) $\sqrt[3]{\frac{x+7}{x}} + \sqrt[3]{\frac{9-x}{x}} = 4.$ Đáp số. $x = 1.$
- 13) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$ Đáp số. $x = 1 \vee x = 3.$
- 14) $3x^3 + 10 = 17\sqrt[3]{\frac{17x}{3} - \frac{10}{3}}.$ Đáp số. $x = 2 \vee x = \frac{1}{3}(-3 - 2\sqrt{6}) \vee x = \frac{1}{3}(2\sqrt{6} - 3).$

Bài tập 2.37. ¹⁵ Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[3]{-5x+5} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{4x-8} = 0;$

Đáp số. $x = -3 \vee x = 1 \vee x = 2.$

¹⁵Trần Văn Toàn

2) $\sqrt[3]{-6x+6} + \sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{5x-10} = 0;$

Đáp số. $x = -4 \vee x = 1 \vee x = 2.$

3) $\sqrt[3]{-4x-8} + \sqrt[3]{3x+9} + \sqrt[3]{x-1} = 0;$

Đáp số. $x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1.$

4) $\sqrt[3]{-3x+3} + \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{2x-10} = 0;$

Đáp số. $x = -7 \vee x = 1 \vee x = 5.$

5) $\sqrt[3]{-3x+6} + \sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-10} = 0.$

Đáp số. $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 10.$

Bài tập 2.38. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5;$

Đáp số. $\{-73; -8\}.$

2) $\sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8;$

Đáp số. $\{4; 548\}.$

3) $x + \sqrt{17-x^2} + x \cdot \sqrt{17-x^2} = 9;$

Đáp số. $\{1; 4\}.$

Hướng dẫn. Đặt $y = \sqrt{17-x^2}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$

4) $2x + \sqrt{26-4x^2} + 4x \cdot \sqrt{26-4x^2} = 2 + 5\sqrt{22};$

Đáp số. $\left\{1; \frac{\sqrt{22}}{2}\right\}.$

5) $x \cdot \sqrt[3]{35-x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30;$

Đáp số. $\{2; 3\}.$

Hướng dẫn. Đặt $y = \sqrt[3]{35-x^3}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ (x+y)xy = 30. \end{cases}$$

6) $x \cdot \left(\frac{19-x}{x+1}\right) \cdot \left(x + \frac{19-x}{x+1}\right) = 84;$

Đáp số. $\{3; 4; 6 - \sqrt{29}; 6 + \sqrt{29}\}$

Hướng dẫn. Đặt $\frac{19-x}{x+1} = y$, suy ra $19-x = xy + y$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + y + xy = 19, \\ xy(x+y) = 84. \end{cases}$$

$$7) \frac{30}{x \cdot \sqrt[3]{35-x^3}} = x + \sqrt[3]{35-x^3};$$

Đáp số. {2;3}.

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt[3]{35-x^3} = y$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ \frac{30}{xy} = x + y. \end{cases}$$

$$8) \sqrt{17-x^2} = (3-\sqrt{x})^2;$$

Đáp số. {1;4}.

Hướng dẫn.

★ **Cách 1.** Đặt $u = \sqrt{x}$ và $v = 3 - \sqrt{x}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 17. \end{cases}$$

★ **Cách 2.** Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{17-t^4} = (3-t)^2 \Leftrightarrow t^4 + (t-3)^4 = 17.$$

Lại đặt

$$u = \frac{t+(t-3)}{2} = t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = u + \frac{3}{2},$$

ta được phương trình

$$\left(u + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(u - \frac{3}{2}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow 16t^4 + 216t^2 - 55 = 0.$$

$$9) x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12};$$

Đáp số. $\left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right\}$.

Hướng dẫn. Đặt

$$\frac{1}{x} = u, \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = v.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{35}{12}. \end{cases}$$

$$10) \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12};$$

Đáp số. $\left\{\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{-5-\sqrt{73}}{14}\right\}$.

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{1-x^2} = y$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{35}{12}. \end{cases}$$

Có thể làm như sau:

- Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta được

$$\frac{1}{x^2(1-x^2)} + \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}} - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0.$$

- Đặt $t = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}, \\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{25}{12} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}, \\ \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{49}{12}. \end{cases}$$

$$11) \frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30.$$

Đáp số. {26;7}.

Bài tập 2.39. Giải các phương trình sau:

$$1) 4\sqrt{x+2} + 3\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x^2+7x+2} - 12 = 0;$$

Đáp số. {7;5}.

$$2) \text{ (Dự bị, khối D, 2006)}$$

$$x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1;$$

Đáp số. {4;5}.

$$3) \sqrt{8-x} + \sqrt{9+x} - 2\sqrt{-x^2-x+72} = -3;$$

Đáp số. {-8,7}.

$$4) 16 - 7\sqrt{4-x} - 7\sqrt{6+x} + 4\sqrt{-x^2-2x+24} = 0;$$

Đáp số. {-5,3}.

$$5) 5 - 4\sqrt{10-x} + x - 4\sqrt{7+2x} + 2\sqrt{-2x^2+13x+70} = 0;$$

Đáp số. {1,9}.

$$6) 8 - 5\sqrt{7-9x} - 6x - 5\sqrt{7+3x} + 2\sqrt{49-42x-27x^2} = 0.$$

Đáp số. {-2, -1}.

Bài tập 2.40. Giải các phương trình sau:

$$1) \text{ (Dự bị 1, A, 2008)} \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2};$$

Đáp số. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được

$$4 + \sqrt{-(4x^2-4x-3)} = \frac{(4x^2-4x+1)^2}{4}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(4x^2-4x-3)}.$$

$$2) \sqrt{5+2x} + \sqrt{4-2x} = \frac{(4x+1)^2}{27};$$

Đáp số. $\left\{-\frac{5}{2}; 2\right\}$.

3) $(4x + 1) \cdot \sqrt{(x + 1)(1 - 2x)} = -1;$

Đáp số. $\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \right\}.$

4) $(2x - 5) \cdot \sqrt{(x - 1)(x - 4)} = 10;$

Đáp số. $\{5\}.$

5) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} = \sqrt{(x + 2)^3};$

Đáp số. $\left\{ \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \right\}.$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 1)^3}.$

Đáp số. $\left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right\}.$

Bài tập 2.41. ¹⁶ Giải các phương trình sau:

1) $(5x - 4) \cdot \sqrt{2x - 3} - (4x - 5) \cdot \sqrt{3x - 2} = 2;$

Đáp số. $x = 6.$

2) $(5x - 2) \cdot \sqrt{-2x - 6} - (2x - 5) \cdot \sqrt{-6x - 2} = -12;$

Đáp số. $x = -11.$

3) $(5x - 3) \cdot \sqrt{6x - 14} - (3x - 5) \cdot \sqrt{14x - 6} = 8.$

Đáp số. $x = 5.$

2.4 Phương trình đẳng cấp

Ví dụ 2.29

Giải phương trình

$$4x^2 + 16 = 5\sqrt{x^4 - x^2 + 16}.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 16 &= (x^4 + 16) - x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - 9x^2 \\ &= (x^2 - 3x + 4) \cdot (x^2 + 3x + 4) \end{aligned}$$

Ta biểu diễn $-3x^2 + 15x - 12$ qua $x^2 - 3x + 4$ và $x^2 + 3x + 4$ bằng cách giả sử

$$4x^2 + 16 = a(x^2 - 3x + 4) + b(x^2 + 3x + 4).$$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình, ta được $a = 2$ và $b = 2$. Từ đó, ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2 \cdot (x^2 - 3x + 4) + 2(x^2 + 3x + 4) = 5\sqrt{(x^2 - 3x + 4) \cdot (x^2 + 3x + 4)}.$$

Đặt

$$A = \sqrt{x^2 - 3x + 4}, \quad B = \sqrt{x^2 + 3x + 4}.$$

¹⁶Trần Văn Toàn

Ta có phương trình

$$2A^2 - 5AB + 2B^2 = 0.$$

Giải phương trình này, ta được $A = \frac{B}{2}$ hoặc $A = 2B$. Từ đó, ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4. \quad \square$$

Lời bình. Lời giải đơn giản cho Ví dụ này là bình phương hai vế! ♣

Ví dụ 2.30

Giải phương trình

$$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}. \quad (2.52)$$

Lời giải. Viết phương trình (2.52) thành

$$2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{x - 1}. \quad (2.53)$$

Đặt

$$a = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad \sqrt{x - 1}.$$

Phương trình (2.53) trở thành

$$2a^2 + 3b^2 = 7ab \Leftrightarrow a = \frac{b}{2} \vee a = 3b.$$

- Với $a = \frac{b}{2}$, phương trình

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$$

vô nghiệm.

- Với $a = 3b$, ta có

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 3\sqrt{x - 1},$$

ta thu được $x = 4 - \sqrt{6} \vee x = 4 + \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4 - \sqrt{6} \vee x = 4 + \sqrt{6}$. □

Với phương trình dạng

$$\sqrt{m \cdot a^2 + n \cdot ab + p \cdot b^2} = r \cdot a + s \cdot b$$

ta có thể đưa về phương trình đẳng cấp bằng cách bình phương hai vế của phương trình đã cho.

Ví dụ 2.31

Giải phương trình

$$2\sqrt{2x^2 - 2x + 49} = 3 \cdot (x - 5) - \sqrt{x + 1}. \quad (2.54)$$

Phân tích. Đặt $a = x - 5$ và $b = \sqrt{x+1}$, ta sẽ biểu diễn $2x^2 - 2x + 49$ qua a^2 và b^2 . Giả sử

$$2x^2 - 2x + 49 = m(x-5)^2 + n(x+1).$$

Ta dễ dàng tìm được $m = 2$ và $n = -1$.

Do đó, ta có biểu diễn

$$2x^2 - 2x + 49 = 2(x-5)^2 - (x+1). \quad \triangleleft$$

Lời giải. (2.54) tương đương với

$$2\sqrt{2(x-5)^2 - (x+1)} = 3 \cdot (x-5) - \sqrt{x+1}. \quad (2.55)$$

Đặt $a = x - 5$ và $b = \sqrt{x+1}$, (2.55) thành

$$2\sqrt{2a^2 - b^2} = 3a - b. \quad (2.56)$$

Bình phương (2.56), ta được phương trình hệ quả

$$a^2 - 6ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = 5b.$$

Từ đây, đã có thể giải được phương trình đã cho.

Nghiệm của (2.54) là $x = 8$ hoặc $x = 35$. □

Ví dụ 2.32

Giải phương trình

$$x^2 + 2x + 36 - 6\sqrt{x^3 + 5x^2 - 28x - 32} = 0. \quad (2.57)$$

Lời giải. Điều kiện (2.57) có nghĩa là $-8 \leq x \leq -1 \vee x \geq 4$.

(2.57) tương đương với

$$x^2 + 2x + 36 - 6\sqrt{(x-4)(x+1)(x+8)} = 0. \quad (2.58)$$

Ta có

$$x^2 + 2x + 36 = (x+1)(x-4) + 5(x+8). \quad (2.59)$$

Viết (2.58) tương đương

$$(x+1)(x-4) + 5(x+8) - 6\sqrt{(x-4)(x+1)} \cdot \sqrt{x+8} = 0. \quad (2.60)$$

Đặt

$$a = \sqrt{(x-4)(x+1)} \geq 0, \quad b = \sqrt{x+8} \geq 0$$

(2.60) trở thành

$$a^2 - 6ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = 5b.$$

Trở lại ẩn x , với chú ý

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ hoặc } B \geq 0, \\ A = B, \end{cases}$$

các nghiệm của (2.57) là

$$x = -6 \vee x = -2 \vee x = 6 \vee x = 34. \quad \square$$

Lời bình. Ngoài biểu diễn như (2.59), ta còn có

$$x^2 + 2x + 36 = (x + 1)(x + 8) - 7(x - 4). \quad \clubsuit$$

Ví dụ 2.33

Giải phương trình

$$6(2x^2 - x - 43) \cdot \sqrt{x - 7} = (x^2 + 38x - 291) \cdot \sqrt{x^2 - 3x - 4}. \quad (2.61)$$

Lời giải. Đặt

$$a = \sqrt{x^2 - 3x - 4} \geq 0, \quad b = \sqrt{x - 7} \geq 0.$$

Ta có

$$2x^2 - x - 43 = 2(x^2 - 3x - 4) + 5(x - 7) = 2a^2 + 5b^2$$

và

$$x^2 + 38x - 291 = (x^2 - 3x - 4) + 41(x - 7) = a^2 + 41b^2.$$

(2.61) thành

$$6(2a^2 + 5b^2)b = (a^2 + 41b^2)a.$$

Khai triển phương trình trên, ta thu được

$$a^3 - 12a^2b + 41ab^2 - 30b^3 = 0. \quad (2.62)$$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc ba theo a và b . Các nghiệm của (2.62)

$$a = b \vee a = 5b \vee a = 6b.$$

Trở lại ẩn x , các nghiệm của (2.61) là

$$x = 8 \vee x = 9 \vee x = 19 \vee x = 31. \quad \square$$

Lời bình. Nếu yêu cầu của đề bài là giải phương trình

$$\frac{6(2x^2 - x - 43)}{x^2 + 38x - 291} = \sqrt{\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 7}},$$

thì các nghiệm của phương trình này là

$$x = 1 \vee x = 3 \vee x = 8 \vee x = 9 \vee x = 19 \vee x = 31. \quad \clubsuit$$

Ví dụ 2.34

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 42x + 312} = 2 \cdot (x + 10) - \sqrt{x^2 + 9x - 6}. \quad (2.63)$$

Lời giải. Phương trình (2.63) tương đương với

$$\sqrt{3(x + 10)^2 - 2(x^2 + 9x - 6)} = 2 \cdot (x + 10) - \sqrt{x^2 + 9x - 6}. \quad (2.64)$$

Đặt $a = x + 10$, $b = \sqrt{x^2 + 9x - 6}$, phương trình (2.64) thành

$$\sqrt{3a^2 - 2b^2} = 2a - b. \quad (2.65)$$

Bình phương (2.65), ta được phương trình hệ quả

$$a^2 - 4ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = 3b.$$

- Với $a = b$, ta có

$$x + 10 = \sqrt{x^2 + 9x - 6} \Leftrightarrow x = -\frac{106}{11}.$$

- Với $a = 3b$, ta có

$$x + 10 = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 9x - 6} \Leftrightarrow x = -\frac{77}{8} \vee x = 2.$$

Thử lại, ta thấy các giá trị $x = -\frac{106}{11}$, $x = -\frac{77}{8}$ và $x = 2$ đều thoả (2.63).Vậy (2.63) có ba nghiệm $x = -\frac{106}{11} \vee x = -\frac{77}{8} \vee x = 2$. □**Ví dụ 2.35**

Giải phương trình

$$\sqrt{12x^2 + 133x + 193} - 2\sqrt{x^2 - x - 20} = 11\sqrt{x + 1}. \quad (2.66)$$

Lời giải. Điều kiện bất phương trình có nghĩa là $x \geq 5$.

(2.66) tương đương với

$$\sqrt{12x^2 + 133x + 193} = 2\sqrt{x^2 - x - 20} + 11\sqrt{x + 1}. \quad (2.67)$$

Bình phương (2.67) ta được

$$12x^2 + 133x + 193 = 4x^2 + 117x + 41 - 44\sqrt{x + 1}\sqrt{x^2 - x - 20}. \quad (2.68)$$

hay

$$2(x^2 + 2x + 19) = 11\sqrt{(x + 1) \cdot (x^2 - x - 20)}. \quad (2.69)$$

Tới đây, ta nghĩ tới việc biểu diễn $x^2 + 2x + 19$ qua $x + 1$ và $x^2 - x - 20$, nhưng ta không thể làm được việc này.

Một hướng suy nghĩ khác với để ý

$$x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4).$$

Như vậy, ta thử biểu diễn $x^2 + 2x + 19$ qua $(x + 1)(x - 5)$ và $x - 4$ xem sao. Và công việc này thì thực hiện được.

$$x^2 + 2x + 19 = (x + 1)(x - 5) + 6(x + 4).$$

Cũng có thể biểu diễn $x^2 + 2x + 19$ qua $(x + 1)(x - 4)$ và $x - 5$, ta được

$$x^2 + 2x + 19 = (x + 1)(x + 4) - 3(x - 5).$$

Công việc cuối cùng trở nên đơn giản khi ta có những biểu diễn này.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 8 \vee x = 23$. □

Lời bình. Ta có thể bình phương (2.69) để được phương trình

$$4x^4 - 105x^3 + 168x^2 + 2845x + 3864 = 0$$

và phân tích được

$$(x - 23)(x - 8)(x + 3)(4x + 7) = 0. \quad \clubsuit$$

Bài tập 2.42. ¹⁷ Giải các phương trình sau:

1) $(x^2 + 4x + 18)^2 + 12x \cdot (x^2 + 4x + 18) + 35x^2 = 0;$

Đáp số. $x = -9 \vee x = -6 \vee x = -3 \vee x = -2.$

2) $(x^2 + 6x - 12)^2 - 7x \cdot (x^2 + 6x - 12) + 10x^2 = 0;$

Đáp số. $x = -6 \vee x = -4 \vee x = 2 \vee x = 3.$

3) $(x^2 + 6x - 12)^2 - 9x \cdot (x^2 + 6x - 12) + 14x^2 = 0;$

Đáp số. $x = -6 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = 4.$

4) $(x^2 + 10x - 12)^2 - 5x \cdot (x^2 + 10x - 12) - 6x^2 = 0.$

Đáp số. $x = -12 \vee x = -6 \vee x = 1 \vee x = 2.$

Bài tập 2.43. Giải các phương trình sau:

1) $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1};$

Đáp số. $\{4 + \sqrt{6}; 4 - \sqrt{6}\}.$

¹⁷Trần Văn Toàn

2) $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$;

Đáp số. {2}.

3) $x^2 - 4x - 2 = 2\sqrt{x^3 + 1}$;

Đáp số. $\{5 + \sqrt{33}; 5 - \sqrt{33}\}$.

4) $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$;

Đáp số. $\{3 + \sqrt{13}; 3 - \sqrt{13}\}$.

5) $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Đáp số. $\left\{ \frac{5 + \sqrt{37}}{2}; \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \right\}$.

6) $x^2 + 8 - 3\sqrt{x^3 + 8} = 0$;

Đáp số. $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 - \sqrt{13} \vee x = 3 + \sqrt{13}$.**Bài tập 2.44.** ¹⁸ Giải các phương trình sau:

1) $7x^2 - 15x + 35 = 5\sqrt{x^4 + x^2 + 25}$;

Đáp số. $x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$.

2) $9x^2 - 3x + 9 - 11\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 0$;

Đáp số. $x = \frac{1}{10}(-13 - \sqrt{69}) \vee x = \frac{1}{10}(-13 + \sqrt{69})$.

3) $7x^2 - 10x + 14 = 5\sqrt{x^4 + 4}$;

Đáp số. $x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}, x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$.

4) $\sqrt{3x^2 + 22x + 44} = 2 \cdot (x + 4) - \sqrt{x + 2}$;

Đáp số. $x = -1 \vee x = 2$.

5) $\sqrt{3x^2 + 16x - 63} = 2 \cdot (x - 1) + \sqrt{x - 3}$;

Đáp số. $x = 4 \vee x = 7$.

6) $\sqrt{3(x^2 - 16x + 75)} = 2 \cdot (x - 9) + \sqrt{x - 3}$;

Đáp số. $x = 12$.

7) $\sqrt{3x^2 + 4x + 5} = 2 \cdot (x + 1) - \sqrt{x - 1}$;

Đáp số. $x = 2 \vee x = 5$.

8) $3\sqrt{x^2 + 12x + 23} = 2 \cdot (x + 9) - \sqrt{x^2 + 9x - 6}$;

Đáp số. $x = 1$.

9) $\sqrt{x^2 + 6x + 60} = 2 \cdot (x + 4) - \sqrt{x^2 + 9x - 6}$;

Đáp số. $x = \frac{7}{8} \vee x = 22$.

10) $\sqrt{4x^2 + 69x + 186} = 3 \cdot (x + 6) - 2\sqrt{x^2 - 9x - 6}$;

Đáp số. $x = -1 \vee x = 14$.

11) $\sqrt{x^2 + 42x + 312} = 2 \cdot (x + 10) - \sqrt{x^2 + 9x - 6}$.

Đáp số. $x = -\frac{106}{11} \vee x = -\frac{77}{8} \vee x = 2$.**Bài tập 2.45.** ¹⁹ Giải các phương trình sau:¹⁸Trần Văn Toàn¹⁹Trần Văn Toàn

$$1) (x^2 - 6x + 11) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \cdot \sqrt{x - 2} (x^2 - 4x + 7);$$

$$\text{Đáp số. } x = 5 - \sqrt{6} \vee x = 5 + \sqrt{6}.$$

$$2) (6x^2 - x - 2) \cdot \sqrt{3x^2 - 4x + 1} = (10x^2 - 11x + 2) \cdot \sqrt{x^2 + x - 1};$$

$$\text{Đáp số. } x = 2.$$

$$3) 6(x^2 - 10x + 1) \cdot \sqrt{x - 5} = (x^2 - 49) \cdot \sqrt{x^2 - 11x + 6};$$

$$\text{Đáp số. } x = 11 \vee x = 13 \vee x = 17.$$

$$4) 14(x^2 - 2x - 39) \sqrt{x - 11} = (x^2 + 50x - 611) \cdot \sqrt{x^2 - 5x - 6};$$

$$\text{Đáp số. } x = 13 \vee x = 15 \vee x = 26 \vee x = 41.$$

2.5 Phương pháp đánh giá

Ví dụ 2.36

Giải phương trình

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}. \quad (2.70)$$

Lời giải. Phương trình (2.70) tương đương với

$$\sqrt{4 - (x - 2)^2} + \sqrt{1 - (x - 2)^2} = 3 + \sqrt{2x - x^2}. \quad (2.71)$$

Ta có

$$\sqrt{4 - (x - 2)^2} + \sqrt{1 - (x - 2)^2} \leq 3$$

và

$$3 + \sqrt{2x - x^2} \geq 3,$$

nên (2.71) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{4 - (x - 2)^2} + \sqrt{1 - (x - 2)^2} \leq 3, \\ 3 + \sqrt{2x - x^2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình (2.70) có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Ví dụ 2.37

Giải phương trình

$$\sqrt{x(x - 2)} + \sqrt{1 + \frac{16}{x^2}} = \sqrt{9 - 2x}. \quad (2.72)$$

Lời giải. Điều kiện phương trình (2.72) có nghĩa là $x \leq 0 \vee 2 \leq x \leq \frac{9}{2}$. Bình phương (2.72), ta được

$$x^2 + \frac{16}{x^2} + 2\sqrt{x(x-2)\left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} = 8.$$

Ta có

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8 \quad \text{và} \quad 2\sqrt{x(x-2)\left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 + \frac{16}{x^2} = 8, \\ 2\sqrt{x(x-2)\left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình (2.72) có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Đáp số. {2}.

Ví dụ 2.38

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{1 - x - x^2} = x^2 + x + 2.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad a, b \geq 0,$$

$$\sqrt{(x^2 - x - 1) \cdot 1} \leq \frac{(x^2 - x - 1) + 1}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$$

và

$$\sqrt{(1 - x - x^2) \cdot 1} \leq \frac{(1 - x - x^2) + 1}{2} = \frac{2 - x - x^2}{2}$$

Do đó

$$\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{1 - x - x^2} \leq 1 - x.$$

Vậy phương trình đã cho xảy ra nếu

$$x^2 + x + 2 \leq 1 - x \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Thử lại, ta thấy $x = -1$ thỏa phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$. □

Ví dụ 2.39

Giải phương trình

$$16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}. \quad (2.73)$$

Phân tích. Dùng máy tính ta thấy (2.73) có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Để đảm bảo cho bất đẳng thức xảy ra tại $x = \frac{1}{2}$, ta phải viết $\sqrt[3]{4x^3 + x}$ sao cho biểu thức dưới dấu căn là tích của ba thừa số và cả ba thừa số ấy đều bằng nhau khi $x = \frac{1}{2}$. Do đó, nếu ta viết

$$\sqrt[3]{4x^3 + x} = \sqrt[3]{x \cdot (4x^2 + 1)},$$

thì biểu thức dưới dấu căn mới là tích của hai thừa số x và $4x^2 + 1$. Hơn nữa x nhận giá trị bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$, trong khi đó $4x^2 + 1$ nhận giá trị là 2 khi $x = \frac{1}{2}$. Với những phân tích ở trên, ta viết

$$\sqrt[3]{4x^3 + x} = \frac{\sqrt[3]{(4x) \cdot (4x^2 + 1) \cdot 2}}{2}. \quad \triangleleft$$

Lời giải. Ta viết (2.73) dưới dạng

$$16x^4 + 5 = 6 \cdot \frac{\sqrt[3]{(4x) \cdot (4x^2 + 1) \cdot 2}}{2}.$$

hay

$$16x^4 + 5 = 3 \cdot \sqrt[3]{(4x) \cdot (4x^2 + 1) \cdot 2}.$$

Vì $16x^4 + 5 \geq 5$, nên ta phải có $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$3 \cdot \sqrt[3]{(4x) \cdot (4x^2 + 1) \cdot 2} \leq (4x) + (4x^2 + 1) + 2 = 4x^2 + 4x + 3.$$

Từ phương trình đã cho suy ra

$$16x^4 + 5 \leq 4x^2 + 4x + 3.$$

Hay

$$16x^4 - 4x^2 - 4x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 2x^2 - 2x + 1 \leq 0. \quad (2.74)$$

Điều này tương đương

$$(2x - 1)^2 (2x^2 + 2x + 1) \leq 0.$$

Vì $(2x - 1)^2 \geq 0$ và $2x^2 + 2x + 1 > 0$, nên (2.74) xảy ra khi và chỉ khi

$$(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Thử lại, ta thấy $x = \frac{1}{2}$ thoả phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{2}$. □

Ví dụ 2.40

Giải phương trình

$$\sqrt{-5x^2 + 36x - 36} + \sqrt[3]{15x^3 + 94x^2 + 20x - 24} = x^2 + x + 6. \quad (2.75)$$

Lời giải. Để ý rằng

$$-5x^2 + 36x - 36 = (-x + 6)(5x - 6)$$

và

$$15x^3 + 94x^2 + 20x - 24 = (x + 6)(3x + 2)(5x - 2).$$

Điều kiện phương trình đã cho có nghĩa là

$$-5x^2 + 36x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \leq x \leq 6.$$

Với điều kiện này, các số $x + 6$, $3x + 2$, $5x - 2$ đều dương.

Ta có

$$\sqrt{-5x^2 + 36x - 36} = \sqrt{(-x + 6)(5x - 6)} \leq \frac{(-x + 6) + (5x - 6)}{2} = 2x,$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{15x^3 + 94x^2 + 20x - 24} &= \sqrt[3]{(x + 6)(3x + 2)(5x - 2)} \\ &\leq \frac{(x + 6) + (3x + 2) + (5x - 2)}{3} \\ &= 3x + 2. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\text{VT(2.75)} \leq 2x + 3x + 2 = 5x + 2.$$

Từ phương trình đã cho, ta suy ra rằng, nếu x là nghiệm của phương trình, thì x phải thoả

$$x^2 + x + 6 \leq 5x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ta thấy $x = 2$ chính là nghiệm của phương trình đã cho. □

Ví dụ 2.41

Giải phương trình

$$2\left(\sqrt{x^3 - 7x^2 + 17x - 14} + \sqrt{x^4 - 7x^3 + 23x^2 - 37x + 28}\right) = 4x^2 - 17x + 25 \quad (2.76)$$

Lời giải. Note that

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 14 = (x - 2) \cdot (x^2 - 5x + 7)$$

and

$$x^4 - 7x^3 + 23x^2 - 37x + 28 = (x^2 - 4x + 7) \cdot (x^2 - 3x + 4).$$

The conditions of the (2.76) are

$$\begin{cases} (x - 2) \cdot (x^2 - 5x + 7) \geq 0, \\ (x^2 - 4x + 7) \cdot (x^2 - 3x + 4) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

We have

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3 - 7x^2 + 17x - 14} &= \sqrt{(x-2)(x^2 - 5x + 7)} \\ &\leq \frac{(x-2) + (x^2 - 5x + 7)}{2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 5}{2}.\end{aligned}$$

Another way

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4 - 7x^3 + 23x^2 - 37x + 28} &= \sqrt{(x^2 - 4x + 7) \cdot (x^2 - 3x + 4)} \\ &\leq \frac{(x^2 - 4x + 7) + (x^2 - 3x + 4)}{2} \\ &= \frac{2x^2 - 7x + 11}{2}.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\text{LHS(2.76)} \leq (x^2 - 4x + 5) + (2x^2 - 7x + 11) = 3x^2 - 11x + 16.$$

From the given equation, we have

$$4x^2 - 17x + 25 \leq 3x^2 - 11x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 0 \leq (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

We see that, $x = 3$ satisfies the given equation.

Thus, the the given equation has only solution is $x = 3$. □

Ví dụ 2.42

Giải phương trình ^a

$$\frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{5x^2 + 4x + 3}} + \frac{8x^2 + 9x + 10}{\sqrt{10x^2 + 9x + 8}} = 5.$$

^aTrần Văn Toàn

Lời giải. ²⁰ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{5x^2 + 4x + 3}}$ tại điểm $x = -1$ là $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ và phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{8x^2 + 9x + 10}{\sqrt{10x^2 + 9x + 8}}$ tại điểm $x = -1$ là $y = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}$. Ta chứng minh

$$\frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{5x^2 + 4x + 3}} \geq \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \quad (2.77)$$

và

$$\frac{8x^2 + 9x + 10}{\sqrt{10x^2 + 9x + 8}} \geq \frac{5}{2} - \frac{x}{2}. \quad (2.78)$$

²⁰Dựa trên bài giải của thầy Nguyễn Văn Thiện và gợi ý của thầy Nguyễn Tất Thu.

Bất đẳng thức (2.77) tương đương với

$$2(3x^2 + 4x + 5) \geq (x + 5)\sqrt{5x^2 + 4x + 3}. \quad (2.79)$$

Nếu $x + 5 \leq 0$, (2.79) luôn đúng.

Nếu $x + 5 > 0$, bình phương (2.79), ta được

$$31x^4 + 42x^3 + 16x^2 + 30x + 25 \geq 0.$$

Hay

$$(x + 1)^2 \cdot (31x^2 - 20x + 25) \geq 0. \quad (2.80)$$

Một cách tương tự, bất đẳng thức thứ hai cũng luôn đúng nếu $x \geq 5$. Trường hợp $x < 5$, bình phương ta được bất đẳng thức tương đương

$$(x + 1)^2 \cdot (246x^2 + 175x + 200) \geq 0. \quad (2.81)$$

Đẳng thức trong (2.80) và (2.81) đồng thời xảy ra tại $x = -1$.

Cộng các bất đẳng thức (2.77) và (2.78), ta được

$$\frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{5x^2 + 4x + 3}} + \frac{8x^2 + 9x + 10}{\sqrt{10x^2 + 9x + 8}} \geq 5.$$

Phương trình

$$\frac{3x^2 + 4x + 5}{\sqrt{5x^2 + 4x + 3}} + \frac{8x^2 + 9x + 10}{\sqrt{10x^2 + 9x + 8}} = 5.$$

xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$. Đáp số. $x = -1$. □

Bài tập 2.46. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt[4]{2x-1} = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$. Đáp số. $x = 1$.

2) $\sqrt[4]{2-x^4} = x^2 - 3x + 3$. Đáp số. $x = 1$.

3) $2 \cdot \sqrt[4]{2x-1} = x^2 - x + 2$. Đáp số. $x = 1$.

4) $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} = 4x + \frac{3}{x}$. Đáp số. $x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$.

5) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$. Đáp số. $x = 3$.

6) $4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2 - x + 1}$. Đáp số. Phương trình vô nghiệm.

7) $\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} = 2$. Đáp số. $x = -1 \vee x = 1$.

8) $\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}+3} + \frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})} = 1$. Đáp số. $x = -\frac{\sqrt{11}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

9) $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} = x^2 - 6x + 7.$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 5.$

10) (Dự bị 1, A, 2008) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2};$

Đáp số. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$

11) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8;$

Đáp số. $\{0\}.$

12) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) = 8.$

Đáp số. $\{1\}.$

13) $\sqrt{2x^2-4x+3} + \sqrt{3x^2-6x+7} = 2x+2-x^2;$

Đáp số. $\{1\}.$

14) $\sqrt{4x^3+3x^2+2} + \sqrt{2x^2-4x^3+4x-1} = 3x^2+3x+2;$

Đáp số. $x = -1.$

15) $\sqrt{x^4+x^3-2x^2+2x-1} + \sqrt{3x^2-x^4-x^3} = \frac{1}{2}(3x^2-2x+3);$

Đáp số. $x = 1.$

16) $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-3x+3} = \frac{4x^2}{3} - \frac{9x}{2} + \frac{17}{3};$

Đáp số. $x = 2.$

17) $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-3x+3} = x^3 - \frac{8x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{17}{3};$

Đáp số. $x = 2.$

18) $\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt[3]{x^3+7x^2+17x+15} = \frac{11x^2}{6} + \frac{43x}{6} + 9;$

Đáp số. $x = -2.$

19) $\sqrt{(5x+2)(-5x+6)} + \sqrt[3]{5x^2-2x+1} = \frac{80x^2}{3} - \frac{62x}{3} + 9;$

Đáp số. $x = \frac{2}{5}.$

20) $2\sqrt{3x-1} + \sqrt[3]{9x^4-39x^3+61x^2-38x+6} = 9x^3-19x^2-\frac{47x}{6}+\frac{175}{6}.$

Đáp số. $x = \frac{5}{3}.$ **Bài tập 2.47.** Giải các phương trình sau:

1) (T6/403) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 4\sqrt{17-x} + 8\sqrt[4]{17-x} = 34;$

Đáp số. $x = 1.$

2) (T6/407)
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y, \\ x \cdot \sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3. \end{cases}$$

Đáp số. $(3, 3).$

2.6 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 2.43

Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 - 18x + 25} + \sqrt{4x^2 - 24x + 29} = 6x - x^2 - 4.$$

Ví dụ 2.44

Giải phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 9.$$

Ví dụ 2.45

Giải phương trình

$$(x^2 + 2x + 3) \cdot \sqrt{4x + 5} + (6x^2 + 7x + 8) \cdot \sqrt{9x + 10} = 9.$$

Lời giải. Điều kiện phương trình có nghĩa là $x \geq -\frac{10}{9}$. Xét hàm số

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3) \cdot \sqrt{4x + 5} + (6x^2 + 7x + 8) \cdot \sqrt{9x + 10}, \quad x \geq -\frac{10}{9}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 2) \cdot \sqrt{4x + 5} + \frac{2(x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{4x + 5}} + (12x + 7) \cdot \sqrt{9x + 10} + \frac{9(6x^2 + 7x + 8)}{2\sqrt{9x + 10}} \\ &= \frac{2(5x^2 + 11x + 8)}{\sqrt{4x + 5}} + \frac{270x^2 + 429x + 212}{2\sqrt{9x + 10}} \end{aligned}$$

Ta thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x > -\frac{10}{9}$, nên f đồng biến trên khoảng $g\left(-\frac{10}{9}; +\infty\right)$. Lại thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, nên $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. \square

Ví dụ 2.46

Giải phương trình

$$3(2x - 3) \cdot \sqrt{3x - 5} = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 3. \quad (2.82)$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{3x - 5} \geq 0$, suy ra $x = \frac{t^2 + 5}{3}$.

Ta có

$$3(2x - 3) \cdot \sqrt{3x - 5} = 3 \left(\frac{2t^2 + 10}{3} - 3 \right) t = 2t^3 + t.$$

Mặt khác

$$2x^3 - 6x^2 + 7x - 3 = 2(x-1)^3 + x - 1.$$

(2.82) có dạng

$$2t^3 + t = 2(x-1)^3 + x - 1. \quad (2.83)$$

Xét hàm số

$$f(a) = 2a^3 + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$f'(a) = 6a^2 + 1 > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f đồng biến trên \mathbb{R} . Từ (2.83), ta suy ra $t = x - 1$ hay

$$\sqrt{3x-5} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 3x-5 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \vee x=3. \quad \square$$

Ví dụ 2.47

Giải phương trình

$$2x^3 - 12x^2 + 13x + 18 = 3 \cdot \sqrt[3]{7x-20}. \quad (2.84)$$

Lời giải. Đặt $y = \sqrt[3]{7x-20}$, ta có hệ

$$\begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 13x + 18 = 3y, \\ 7x - 20 = y^3. \end{cases} \quad (2.85)$$

Lấy phương trình thứ nhất của hệ (2.85) nhân với 2 rồi cộng với phương trình thứ hai, ta được

$$2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 3(x-2) = 2y^3 + 3y. \quad (2.86)$$

Hay

$$2(x-2)^3 + 3(x-2) = 2y^3 + 3y. \quad (2.87)$$

Xét hàm số

$$f(t) = 2t^3 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ta có,

$$f'(t) = 6t^2 + 3 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó, f đồng biến trên \mathbb{R} .

Mặt khác, (2.87) có dạng

$$f(x-2) = f(y), \quad (2.88)$$

nên (2.87) xảy ra khi và chỉ khi $y = x - 2$ hay $\sqrt[3]{7x-20} = x - 2$. Khi đó

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$. □

Ví dụ 2.48

Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{2x+3}-3} = \frac{1}{x+3}. \quad (2.89)$$

Lời giải. Điều kiện phương trình có nghĩa là $x \geq -2$ và $x \neq 12$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+3) \cdot (\sqrt{x+2}-2) = \sqrt[3]{2x+3}-3.$$

Hay

$$(x+2) \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} = 2x+3 + \sqrt[3]{2x+3}. \quad (2.90)$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ có

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

nên đồng biến trên \mathbb{R} . Phương trình (2.90) có dạng

$$f(\sqrt{x+2}) = f(\sqrt[3]{2x+3}),$$

nên xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ (x+2)^3 = (2x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Vậy (2.89) có hai nghiệm $x = -1 \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. □

Ví dụ 2.49

Giải phương trình

$$(x-3) \cdot \sqrt{x^3-2x^2+5x-3} = 3x-5. \quad (2.91)$$

Lời giải. Ta thấy $x = 3$ không là nghiệm của (2.91). Chia (2.91) cho $x-3$, ta được

$$\sqrt{x^3-2x^2+5x-3} = \frac{3x-5}{x-3}. \quad (2.92)$$

Từ (2.92) ta phải có

$$\frac{3x-5}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3} \vee x > 3.$$

Gọi $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup (3; +\infty)$. Hàm số $f(x) = \sqrt{x^3-2x^2+5x-3}$ có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{3x^2-4x+5}{2\sqrt{x^3-2x^2+5x-3}} > 0,$$

nên đồng biến trên mỗi khoảng của \mathcal{D} .

Hàm số $g(x) = \frac{3x-5}{x-3}$ có đạo hàm

$$g'(x) = -\frac{4}{(x-3)^2} < 0,$$

nên nghịch biến trên mỗi khoảng của \mathcal{D} .

Hơn nữa, trên khoảng $(-\infty; \frac{5}{3}]$, (2.92) có nghiệm $x = 1$ và trên khoảng $(3; +\infty)$ (2.92) có nghiệm $x = 4$. Do đó, (2.92) có đúng hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$.

Vậy (2.91) có đúng hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$. □

Ví dụ 2.50

Tìm tổng các nghiệm của phương trình

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{60}{x^2+28x+267}\right) = 0.$$

Lời giải.

- Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right) = \sin\left(\frac{60}{x^2+28x+267}\right). \quad (2.93)$$

- Ta biết rằng hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Ta chỉ ra rằng các hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$ và $g(x) = \frac{60}{x^2+28x+267}$ nhận giá trị trong khoảng này.

Thật vậy

$$\left|\frac{x}{x^2+9}\right| \leq \left|\frac{x}{2\sqrt{9x^2}}\right| = \frac{1}{6}.$$

Mặt khác

$$0 < \frac{60}{x^2+28x+267} = \frac{60}{(x+14)^2+71} \leq \frac{60}{71}.$$

- Từ những đánh giá trên, (2.93) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+9} = \frac{60}{x^2+28x+267} \Leftrightarrow x^3 - 32x^2 + 267x - 540 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9 \vee x = 20.$$

Tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $3 + 9 + 20 = 32$. □

Bài tập 2.48. ²¹ Giải các phương trình sau:

1) $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (5x + 1) \cdot \sqrt{5x - 1}$;

Đáp số. $x = 1 \vee x = 2$.

²¹Trần Văn Toàn

2) $2x^3 + 6x^2 + 9x + 5 = (6x + 7) \cdot \sqrt{-3x - 5};$

Đáp số. $x = -3 \vee x = -2.$

3) $(16x + 5) \cdot \sqrt{8x + 1} = 2x^3 + 12x^2 + 27x + 22;$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 3.$

4) $(21x - 8) \cdot \sqrt{7x - 3} = 3x^3 + 9x^2 + 10x + 4;$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 4.$

5) $(6x + 17) \cdot \sqrt{3x + 7} = 2x^3 + 18x^2 + 57x + 63;$

Đáp số. $x = -2 \vee x = -1.$

6) $2x^3 - 12x^2 + 27x - 22 + (17 - 12x) \cdot \sqrt{7 - 6x} = 0;$

Đáp số. $x = -3 \vee x = 1.$

7) $x \cdot (\sqrt{x^2 + 3} + 1) + (x + 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 1) = 0;$

Đáp số. $x = 0.$

8) $2x + 1 + x \cdot \sqrt{x^2 + 2} + (x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0;$

Đáp số. $x = -\frac{1}{2}.$

Bài tập 2.49. ²² Giải các phương trình sau:

1) $2x^3 - 12x^2 + 21x - 14 = 3\sqrt[3]{3x - 4};$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 4..$

2) $2x^3 - 12x^2 + 13x + 18 = 3\sqrt[3]{7x - 20};$

Đáp số. $x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4.$

3) $x^3 + 12x^2 + 43x + 50 = 2\sqrt[3]{7x + 22};$

Đáp số. $x = -7 \vee x = -3 \vee x = -2.$

4) $x^3 - 13x^2 + 54x - 68 = 2\sqrt[3]{x^2 - 4x - 4};$

Đáp số. $x = 2 \vee x = 5 \vee x = 6.$

5) $x^3 - 4x^2 + 2x + 5 = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 7};$

Đáp số. $x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3.$

6) $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}.$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3.$

Bài tập 2.50. (Thi Quốc gia 2015) Giải phương trình

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} = (x + 1) \cdot (\sqrt{x + 2} - 2).$$

Đáp số. $x = 2 \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}).$

Bài tập 2.51. ²³ Giải các phương trình sau:²²Trần Văn Toàn²³Trần Văn Toàn

$$1) (x-2) \cdot \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5x + 1} - 3x + 5 = 0;$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 \vee x = 3.$$

$$2) (x-1) \cdot \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 5} = 2x + 1;$$

$$\text{Đáp số. } x = -2 \vee x = 2.$$

$$3) (x-2) \cdot \sqrt{x^3 - x^2 + x + 4} = 2x - 1;$$

$$\text{Đáp số. } x = -1 \vee x = 3.$$

$$4) (x-3) \cdot \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x - 3} = 3x - 5.$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 \vee x = 4.$$

Bài tập 2.52. ²⁴ Giải các phương trình sau:

$$1) (x+1) \cdot \sqrt{x+2} = 8x^3 - 8x^2 - x - 1;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{41}).$$

$$2) \sqrt{x+2} \cdot (2x+5) = 16x^3 - 20x^2 + 9x - 4;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{8}(5 + \sqrt{41}).$$

$$3) 27x^3 - 43x^2 + 42x - 8 = \sqrt{x^2 + 3x} \cdot (x^2 + 3x + 5).$$

$$\text{Đáp số. } x = 1.$$

$$4) 16x^3 + 21x^2 + 12x + 7 = \sqrt{x^2 + 2x + 5} \cdot (2x^2 + 4x + 11);$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{3}(\sqrt{13} - 1).$$

$$5) x(3x-2) \cdot \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x^3 + 8x^2 + 7x + 5;$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{19}) \vee x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{19}).$$

$$6) 55x^3 - 114x^2 + 91x - 25 = (2x^3 + 6x^2 - 4x + 5) \cdot \sqrt{x^3 + 3x^2 - 2x + 1};$$

$$\text{Đáp số. } x = 3 \vee x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

$$7) 2x^3 + 7x^2 - 4x + 6 + 2\sqrt{-7 + 8x} \cdot (9 - 8x) = 0.$$

$$\text{Đáp số. } x = 2 \vee x = 4.$$

Bài tập 2.53. (Thi thử THPT Quốc gia 2016, trường THPT chuyên Hạ Long, lần 3)

Giải phương trình

$$x^4 + 1 + 2\sqrt{x+1} = (x^2 + x)(\sqrt{x+1} + 1).$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

²⁴Trần Văn Toàn

Bài tập 2.54. (Lấy ý đề thi thử THPT Quốc gia 2016, trường THPT Triệu Sơn, Thanh Hoá)
Giải phương trình

$$\sqrt{x+1} = \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}.$$

Đáp số. $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Bài tập 2.55. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (23 - 3x)\sqrt{7-x} + (3y - 20)\sqrt{6-y} = 0, \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. (5; 4).

Bài tập 2.56. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2}, \\ \sqrt{6x+3} + \sqrt{y-10} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. (1; 11).

Bài tập 2.57. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (14 - 6x)\sqrt{4-2x} + (6y - 11)\sqrt{3-2y} = 0, \\ \sqrt{x} + \sqrt{3-3x+2y} = x^2 - 2x + 3; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 2.58. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (53 - 5x) \cdot \sqrt{10-x} + (5y - 48) \cdot \sqrt{9-y} = 0, \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 = \sqrt{-2x+y+11} + 2x + 66. \end{cases}$$

Đáp số. (9; 8).

Bài tập 2.59. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 3\sqrt{3x+y+17} = 11 - y^3 - xy, \\ x^3 - y^3 = (3y+1)(y+1) + 1 - x; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 0 \wedge y = -1$.

Bài tập 2.60. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + 3\sqrt{x+3y+19} = 105 - y^3 - xy, \\ x^3 - y^3 = (3y+1)(y+1) + 1 - x; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 5 \wedge y = 4$.

Bài tập 2.61. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 87 - y^3 - xy, \\ x^3 - y^3 = (3y+1)(y+1) + 1 - x; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 5 \wedge y = 4$.

Bài tập 2.62. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4}, \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\left(x = \frac{3}{4} \wedge y = \frac{1}{4}\right) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = \frac{1}{2}\right).$$

Bài tập 2.63. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2}) \cdot (y + \sqrt{1+y^2}) = 1, \\ x \cdot \sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(\frac{3 - \sqrt{11}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}\right), (1; -1).$$

Bài tập 2.64. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1, \\ \sqrt{y^2 + 2y + 22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1. \end{cases}$$

Đáp số. (1; 1).

Bài tập 2.65. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^6 + 2x^2 - y^3 - 9y^2 - 33 = 29y, \\ x + \sqrt{2x+3} = y. \end{cases}$$

Đáp số. $(x = 3 \wedge y = 6) \vee (x = -\sqrt{2} \wedge y = -1)$.

Bài tập 2.66. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6, \\ x^2y(2\sqrt{4y^2 + 1} + 2) = \sqrt{x^2 + 1} + x. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 2.67. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y(1 + \sqrt{y^2 + 1}) = 2x + 2\sqrt{x^2 + 4}, \\ 2\sqrt{y^2 + 3} + \sqrt{4 + 3x^2} = 4x. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 2 \wedge y = 1$.

Bài tập 2.68. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y(2y^2 + x^2) = 16x^6 + 2x^4, \\ \sqrt{x + y + 1} + \sqrt{x - y + 5} = 3. \end{cases}$$

Đáp số. $x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{1}{2}$.

Bài tập 2.69. (A, 2010) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0, \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài tập 2.70. (Chuyên Vĩnh Phúc, lần III, 2014)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 1) \cdot \sqrt{1 - 2y} = 0, \\ 4x^2 + y^2 + 4y + 2\sqrt{3 - 4x} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Bài tập 2.71. (Thi thử chuyên KHTN, Hà Nội, Khối A, lần bốn 2014)

$$\begin{cases} (12x - 7)\sqrt{3x - 2} + (4y^2 + 1)y = 0, \\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} = (x - 1)(y^2 - 2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $(x; y) = (2; -2)$

Bài tập 2.72. (A, 2012) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y, \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $\left(x = \frac{1}{2} \wedge y = -\frac{3}{2}\right) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{1}{2}\right)$.

Bài tập 2.73. (A, 2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y, \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0, \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. (1;0) (2;1).

Bài tập 2.74. (Thi thử Đặng Thúc Hứa, Khối A, B, lần một, 2014)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - y = (2x+1)(y-1), \\ \sqrt{3x-8} - \sqrt{y} = \frac{5}{x+y-12} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $(x; y) = (3; 4), (x; y) = (8; 9)$.

Bài tập 2.75. (Thi thử Chuyên Vĩnh Phúc, Khối A, B, lần IV, 2014)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3x^2 + 3y^2 + 8 = (y-x)(x^2 + xy + y^2 + 6), \\ (x+y-13) \cdot (\sqrt{3y-14} - \sqrt{x+1}) = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $(x = 3 \wedge y = 5) \vee (x = 8 \wedge y = 10)$.

Bài tập 2.76. (Thi thử THPT Quốc gia 2016, Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1 - xy, \\ (2x - 7xy)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3xy}) = 5. \end{cases}$$

Đáp số. $(x = 1 \wedge y = 1) \vee \left(x = 6 \wedge y = \frac{1}{6}\right)$.

Bài tập 2.77. (Thi thử Chuyên Lí Tự Trọng, Cần Thơ, khối B, 2014)

$$\begin{cases} x^3 \cdot (3y + 55) = 64, \\ xy \cdot (y^2 + 3y + 3) = 12 + 51x. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = 3$.

Bài tập 2.78.

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+1} = \frac{\sqrt{y}}{y-1}, \\ (3x-4)\sqrt{y+1} = 3. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 2 \wedge y = \frac{5}{4}$.

Bài tập 2.79.

$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{\sqrt{y}}{y-1}, \\ (3x-1)\sqrt{y+1} = 3. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = \frac{5}{4}$.

Bài tập 2.80.

$$\begin{cases} 8(x+y) - 3xy = 2y^2 + x^2, \\ 4\sqrt{2-x} + \sqrt{3-y} = 2x^2 - y^2 + 5. \end{cases}$$

Đáp số. $(x = -2 \wedge y = 2) \vee (x = 1 \wedge y = -1)$.

Bài tập 2.81. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2+2}, \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2 - 4x. \end{cases}$$

Đáp số. $x = -\frac{1}{2} \wedge y = 1$.

Bài tập 2.82. (Olympic 30/04/2015) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x-1) \cdot \sqrt{x+y} = (6-x-y) \cdot \sqrt{2-x}, \\ y+3 + 2\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x} = (x-1)^3. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 2 \wedge y = -2$

Bài tập 2.83. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - \sqrt[3]{x+y-2} - x + 2 = 0, \\ y^3 - 8x^3 + y^2 + 32x^2 + 2(y-23x) = -24. \end{cases}$$

Đáp số. $(x = 2 \wedge y = 1) \vee \left(x = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{3}) \wedge y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})\right) \vee \left(x = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{3}) \wedge y = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\right)$.

Bài tập 2.84. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x(x^2 - 3x + 3)} = \sqrt[3]{y+2} + \sqrt{y+3} + 1, \\ 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = \sqrt[3]{y+2} + 1. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(x = \frac{5}{4} \wedge y = -\frac{127}{64}\right) \vee (x = 5 \wedge y = 62)$.

Bài tập 2.85. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x(x+6y-4) + 3y(3y-4) + 8} + 2(x+y) = \sqrt{(x+y)^2 + 4(1-xy)} + 2, \\ \sqrt{3x-xy+22} - \sqrt{1-y} = x^2 - 2y + 3. \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = 0$.

Bài tập 2.86.
$$\begin{cases} x^4 \cdot y + y^5 = x^{10} + x^6, \\ 4 \cdot \sqrt{1+x} - 2 \cdot \sqrt{1-x} - 3x = 1 + \sqrt{1-y}. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{3}{5} \wedge y = \frac{9}{25}\right) \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

Bài tập 2.87.
$$\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1}, \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{2}{3} \wedge y = \frac{1}{6}\right) \vee (x = 1 \wedge y = 1)$.

Bài tập 2.88.
$$\begin{cases} (x^2 + 5y^2)^2 = 2\sqrt{xy} \cdot (6 - x^2 - 5y^2) + 36, \\ \sqrt{5y^4 - x^4} = 6x^2 + 2xy - 6y^2. \end{cases}$$

Đáp số. $(x = -1 \wedge y = -1) \vee (x = 1 \wedge y = 1)$.

Bài tập 2.89. (Thi thử THPT Quốc gia 2016, lần hai, trường THPT Hoà Bình)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 + 2y(x-5) = y^2 + 2\sqrt{y}, \\ x + 2y(x-4) = 2\sqrt{x-1}. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2}; \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài tập 2.90. (Thi thử THPT Quốc gia 2016, lần hai, trường THPT Đào Duy Từ)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2}, \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1}. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(x = -\frac{3}{5} \wedge y = -\frac{5}{6}\right) \vee x = 0$.

Bài tập 2.91. ²⁵ Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sin\left(\frac{x}{x^2+16}\right) - \sin\left(\frac{5}{x^2-14x+98}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 8 \vee x = 10.$ |
| 2) $\sin\left(\frac{x}{x^2+3}\right) - \sin\left(\frac{5}{x^2-4x+23}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5.$ |
| 3) $\sin\left(\frac{x}{x^2+4}\right) - \sin\left(\frac{30}{x^2+14x+79}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 5 \vee x = 8.$ |
| 4) $\sin\left(\frac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\frac{3}{x^2-6x+23}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5.$ |
| 5) $\sin\left(\frac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\frac{6}{x^2-4x+31}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 5.$ |
| 6) $\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right) - \sin\left(\frac{5}{x^2-6x+39}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 5.$ |
| 7) $\sin\left(\frac{x}{x^2+14}\right) - \sin\left(\frac{10}{x^2-18x+167}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 7 \vee x = 20.$ |
| 8) $\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right) - \sin\left(\frac{60}{x^2+28x+267}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 9 \vee x = 20.$ |
| 9) $\sin\left(\frac{x}{x^2+2}\right) - \sin\left(\frac{30}{x^2+6x+83}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |
| 10) $\sin\left(\frac{x}{x^2+3}\right) - \sin\left(\frac{20}{x^2-4x+83}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |
| 11) $\sin\left(\frac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\frac{12}{x^2-12x+83}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |
| 12) $\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) - \sin\left(\frac{10}{x^2-14x+83}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |
| 13) $\sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) - \sin\left(\frac{50}{x^2+22x+175}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 5 \vee x = 20.$ |
| 14) $\sin\left(\frac{x}{x^2+8}\right) - \sin\left(\frac{15}{x^2-10x+106}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |
| 15) $\sin\left(\frac{x}{x^2+9}\right) - \sin\left(\frac{60}{x^2+28x+267}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 9 \vee x = 20.$ |
| 16) $\sin\left(\frac{x}{x^2+15}\right) - \sin\left(\frac{12}{x^2-14x+129}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 20.$ |
| 17) $\sin\left(\frac{x}{x^2+18}\right) - \sin\left(\frac{10}{x^2-16x+129}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 3 \vee x = 20.$ |
| 18) $\sin\left(\frac{x}{x^2+24}\right) - \sin\left(\frac{5}{x^2-20x+106}\right) = 0.$ | Đáp số. $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 20.$ |

²⁵Trần Văn Toàn

$$19) \sin\left(\frac{x}{x^2+30}\right) - \sin\left(\frac{6}{x^2-20x+129}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 20$.

$$20) \sin\left(\frac{x}{x^2+30}\right) - \sin\left(\frac{10}{x^2-18x+175}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 5 \vee x = 20$.

$$21) \sin\left(\frac{x}{x^2+40}\right) - \sin\left(\frac{9}{x^2-20x+198}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 6 \vee x = 20$.

$$22) \sin\left(\frac{x}{x^2+2}\right) - \sin\left(\frac{60}{x^2+16x+163}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 40$.

$$23) \sin\left(\frac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\frac{24}{x^2-20x+163}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 1 \vee x = 3 \vee x = 40$.

$$24) \sin\left(\frac{x}{x^2+5}\right) - \sin\left(\frac{72}{x^2+26x+249}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 3 \vee x = 40$.

$$25) \sin\left(\frac{x}{x^2+6}\right) - \sin\left(\frac{80}{x^2+32x+332}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 2 \vee x = 6 \vee x = 40$.

$$26) \sin\left(\frac{x}{x^2+18}\right) - \sin\left(\frac{100}{x^2+46x+605}\right) = 0.$$

Đáp số. $x = 5 \vee x = 9 \vee x = 40$.

2.7 Sử dụng hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ 2.51

Giải phương trình

$$(x^2 + 5x + 3)^2 + 5(x^2 + 5x + 3) + 3 = x.$$

Lời giải. Đặt $f(x) = x^2 + 5x + 3$, thì phương trình đã cho có dạng $f(f(x)) = x$. Dẫn đến

$$x^2 + 5x + 3 = x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1. \quad \square$$

Ví dụ 2.52

Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = x.$$

Ví dụ 2.53

Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6.$$

Ví dụ 2.54

Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2-x} = x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 6.$$

Lời giải. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2 - \sqrt[3]{2-x}}} = x.$$

thì phương trình đã cho có dạng $f(f(f(x))) = x$. Dẫn đến

$$\sqrt[3]{2-x} = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \quad \square$$

Bài tập 2.92. ²⁶ Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 9x - 4 = y, \\ y^3 - 5y^2 + 9y - 4 = z, \\ z^3 - 5z^2 + 9z - 4 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1, 1, 1) \vee (2, 2, 2).$$

$$2) \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 6x - 2 = y, \\ y^3 - 4y^2 + 6y - 2 = z, \\ z^3 - 4z^2 + 6z - 2 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1, 1, 1) \vee (2, 2, 2).$$

$$3) \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 6x + 2 = y, \\ y^3 + 4y^2 + 6y + 2 = z, \\ z^3 + 4z^2 + 6z + 2 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-2, -2, -2) \vee (-1, -1, -1).$$

$$4) \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 9x + 4 = y, \\ y^3 + 5y^2 + 9y + 4 = z, \\ z^3 + 5z^2 + 9z + 4 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-2, -2, -2) \vee (-1, -1, -1).$$

$$5) \begin{cases} x^3 + 7x^2 + 17x + 12 = y, \\ y^3 + 7y^2 + 17y + 12 = z, \\ z^3 + 7z^2 + 17z + 12 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-3, -3, -3) \vee (-2, -2, -2).$$

$$6) \begin{cases} x^3 + 10x^2 + 34x + 36 = y, \\ y^3 + 10y^2 + 34y + 36 = z, \\ z^3 + 10z^2 + 34z + 36 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-4, -4, -4) \vee (-3, -3, -3).$$

$$7) \begin{cases} x^3 + 11x^2 + 41x + 48 = y, \\ y^3 + 11y^2 + 41y + 48 = z, \\ z^3 + 11z^2 + 41z + 48 = x. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-4, -4, -4) \vee (-3, -3, -3).$$

²⁶Trần Văn Toàn

Ta có thể tạo ra các bài tập tương tự như trên dựa vào các phương trình sau:

- 1) $\frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 13x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 2) $\frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 + 13x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 3) $\frac{1}{3}(x^3 - 7x^2 + 17x - 8) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 4).$
- 4) $\frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 14x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 5) $\frac{1}{3}(x^3 - 2x^2 + 2x + 2) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2).$
- 6) $\frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 + 2x - 2) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 7) $\frac{1}{3}(x^3 + 6x^2 + 14x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 8) $\frac{1}{3}(x^3 + 7x^2 + 17x + 8) = x.$ Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 9) $\frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 18x - 8) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 4).$
- 10) $\frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 15x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 11) $\frac{1}{4}(x^3 - 2x^2 + 3x + 2) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2).$
- 12) $\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 + 3x - 2) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 13) $\frac{1}{4}(x^3 + 6x^2 + 15x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 14) $\frac{1}{4}(x^3 + 7x^2 + 18x + 8) = x.$ Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 15) $\frac{1}{5}(x^3 - 7x^2 + 19x - 8) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 4).$
- 16) $\frac{1}{5}(x^3 - 6x^2 + 16x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 17) $\frac{1}{5}(x^3 - 4x^2 + 6x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 18) $\frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 + 4x + 3) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3).$
- 19) $\frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 + 4x + 2) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2).$
- 20) $\frac{1}{5}(x^3 - x^2 + x + 4) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2).$

- 21) $\frac{1}{5}(x^3 + x^2 + x - 4) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2).$
- 22) $\frac{1}{5}(x^3 + 2x^2 + 4x - 2) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 23) $\frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 + 4x - 3) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 24) $\frac{1}{5}(x^3 + 4x^2 + 6x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1).$
- 25) $\frac{1}{5}(x^3 + 6x^2 + 16x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 26) $\frac{1}{5}(x^3 + 7x^2 + 19x + 8) = x.$ Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 27) $\frac{1}{6}(x^3 - 7x^2 + 20x - 8) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 4).$
- 28) $\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 17x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 29) $\frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 + 7x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 30) $\frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 5x + 3) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3).$
- 31) $\frac{1}{6}(x^3 - 2x^2 + 5x + 2) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2).$
- 32) $\frac{1}{6}(x^3 - x^2 + 2x + 4) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2).$
- 33) $\frac{1}{6}(x^3 + x^2 + 2x - 4) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2).$
- 34) $\frac{1}{6}(x^3 + 2x^2 + 5x - 2) = x.$ Đáp số. $(x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 35) $\frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 5x - 3) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1).$
- 36) $\frac{1}{6}(x^3 + 4x^2 + 7x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1).$
- 37) $\frac{1}{6}(x^3 + 6x^2 + 17x + 6) = x.$ Đáp số. $(x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 38) $\frac{1}{6}(x^3 + 7x^2 + 20x + 8) = x.$ Đáp số. $(x = -4 \vee x = -2 \vee x = -1).$
- 39) $\frac{1}{7}(x^3 - 6x^2 + 18x - 6) = x.$ Đáp số. $(x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3).$
- 40) $\frac{1}{7}(x^3 - 5x^2 + 9x + 8) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4).$
- 41) $\frac{1}{7}(x^3 - 4x^2 + 6x + 4) = x.$ Đáp số. $(x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4).$

42) $\frac{1}{7}(x^3 - 4x^2 + 8x + 6) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).

43) $\frac{1}{7}(x^3 - 3x^2 + 6x + 3) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).

44) $\frac{1}{7}(x^3 - 2x^2 + 2x + 6) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$).

45) $\frac{1}{7}(x^3 - 2x^2 + 6x + 2) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).

46) $\frac{1}{7}(x^3 - x^2 + 3x + 4) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$).

47) $\frac{1}{7}(x^3 + x^2 + 3x - 4) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$).

48) $\frac{1}{7}(x^3 + 2x^2 + 2x - 6) = x.$

Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2$).

49) $\frac{1}{7}(x^3 + 2x^2 + 6x - 2) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$).

50) $\frac{1}{7}(x^3 + 3x^2 + 6x - 3) = x.$

Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$).

51) $\frac{1}{7}(x^3 + 4x^2 + 6x - 4) = x.$

Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1$).

52) $\frac{1}{7}(x^3 + 4x^2 + 8x - 6) = x.$

Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$).

53) $\frac{1}{7}(x^3 + 5x^2 + 9x - 8) = x.$

Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1$).

54) $\frac{1}{7}(x^3 + 6x^2 + 18x + 6) = x.$

Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1$).

55) $\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 13x + 12) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).

56) $\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 19x - 6) = x.$

Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$).

57) $\frac{1}{8}(x^3 - 5x^2 + 10x + 8) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$).

58) $\frac{1}{8}(x^3 - 4x^2 + 7x + 4) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$).

59) $\frac{1}{8}(x^3 - 4x^2 + 9x + 6) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).

60) $\frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 + 4x + 12) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 2 \vee x = 3$).

61) $\frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 + 7x + 3) = x.$

Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).

62) $\frac{1}{8}(x^3 - 2x^2 + 3x + 6) = x.$

Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$).

- 63) $\frac{1}{8}(x^3 - 2x^2 + 7x + 2) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 64) $\frac{1}{8}(x^3 - x^2 + 4x + 4) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 65) $\frac{1}{8}(x^3 + x^2 + 4x - 4) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 66) $\frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 + 3x - 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 67) $\frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 + 7x - 2) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 68) $\frac{1}{8}(x^3 + 3x^2 + 7x - 3) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 69) $\frac{1}{8}(x^3 + 4x^2 + 7x - 4) = x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 70) $\frac{1}{8}(x^3 + 4x^2 + 9x - 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 71) $\frac{1}{8}(x^3 + 5x^2 + 10x - 8) = x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 72) $\frac{1}{8}(x^3 + 6x^2 + 19x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1$).
- 73) $\frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 + 14x + 12) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 74) $\frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 + 20x - 6) = x$. Đáp số. ($x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 75) $\frac{1}{9}(x^3 - 5x^2 + 11x + 8) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 76) $\frac{1}{9}(x^3 - 4x^2 + 8x + 4) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 77) $\frac{1}{9}(x^3 - 4x^2 + 10x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 78) $\frac{1}{9}(x^3 - 3x^2 + 5x + 12) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 79) $\frac{1}{9}(x^3 - 3x^2 + 8x + 3) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 80) $\frac{1}{9}(x^3 - 2x^2 + 4x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 81) $\frac{1}{9}(x^3 - 2x^2 + 8x + 2) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 82) $\frac{1}{9}(x^3 - x^2 + 5x + 4) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 83) $\frac{1}{9}(x^3 + x^2 + 5x - 4) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$).

- 84) $\frac{1}{9}(x^3 + 2x^2 + 4x - 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 85) $\frac{1}{9}(x^3 + 2x^2 + 8x - 2) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 86) $\frac{1}{9}(x^3 + 3x^2 + 8x - 3) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 87) $\frac{1}{9}(x^3 + 4x^2 + 8x - 4) = x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 88) $\frac{1}{9}(x^3 + 4x^2 + 10x - 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 89) $\frac{1}{9}(x^3 + 5x^2 + 11x - 8) = x$. Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 90) $\frac{1}{9}(x^3 + 6x^2 + 20x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = -1$).
- 91) $\frac{1}{10}(x^3 - 7x^2 + 17x + 15) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 3 \vee x = 5$).
- 92) $\frac{1}{10}(x^3 - 6x^2 + 13x + 10) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 5$).
- 93) $\frac{1}{10}(x^3 - 6x^2 + 15x + 12) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 3 \vee x = 4$).
- 94) $\frac{1}{10}(x^3 - 5x^2 + 9x + 5) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 5$).
- 95) $\frac{1}{10}(x^3 - 5x^2 + 12x + 8) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 96) $\frac{1}{10}(x^3 - 4x^2 + 6x + 16) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$).
- 97) $\frac{1}{10}(x^3 - 4x^2 + 9x + 4) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 98) $\frac{1}{10}(x^3 - 4x^2 + 11x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 99) $\frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 + 4x + 8) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 4$).
- 100) $\frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 + 6x + 12) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 2 \vee x = 3$).
- 101) $\frac{1}{10}(x^3 - 3x^2 + 9x + 3) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 102) $\frac{1}{10}(x^3 - 2x^2 + 5x + 6) = x$. Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 3$).
- 103) $\frac{1}{10}(x^3 - 2x^2 + 9x + 2) = x$. Đáp số. ($x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 104) $\frac{1}{10}(x^3 - x^2 + x + 9) = x$. Đáp số. ($x = -3 \vee x = 1 \vee x = 3$).

- 105) $\frac{1}{10}(x^3 - x^2 + 6x + 4) = x.$ Đáp số. ($x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$).
- 106) $\frac{1}{10}(x^3 + x^2 + 1x - 9) = x.$ Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 3$).
- 107) $\frac{1}{10}(x^3 + x^2 + 6x - 4) = x.$ Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 108) $\frac{1}{10}(x^3 + 2x^2 + 5x - 6) = x.$ Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 109) $\frac{1}{10}(x^3 + 2x^2 + 9x - 2) = x.$ Đáp số. ($x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 110) $\frac{1}{10}(x^3 + 3x^2 + 4x - 8) = x.$ Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2$).
- 111) $\frac{1}{10}(x^3 + 3x^2 + 9x - 3) = x.$ Đáp số. ($x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 112) $\frac{1}{10}(x^3 + 4x^2 + 9x - 4) = x.$ Đáp số. ($x = -4 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 113) $\frac{1}{10}(x^3 + 4x^2 + 11x - 6) = x.$ Đáp số. ($x = -3 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 114) $\frac{1}{10}(x^3 + 5x^2 + 9x - 5) = x.$ Đáp số. ($x = -5 \vee x = -1 \vee x = 1$).
- 115) $\frac{1}{10}(x^3 + 5x^2 + 12x - 8) = x.$ Đáp số. ($x = -4 \vee x = -2 \vee x = 1$).
- 116) $\frac{1}{10}(x^3 + 6x^2 + 13x - 10) = x.$ Đáp số. ($x = -5 \vee x = -2 \vee x = 1$).

Bài tập 2.93. Tìm tất cả các giá trị thực của a để các phương trình sau có nghiệm:

- 1) $\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2.$ Đáp số. $-\frac{1}{12} \leq a \leq 0.$
- 2) $\sqrt{1 + a + \sqrt{a + 2\cos^2 x}} = \cos 2x.$ Đáp số. $-\frac{5}{4} \leq a \leq -1.$
- 3) $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x.$ Đáp số. $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0.$
- 4) $\sqrt{5a + \sqrt{5a - x - \frac{x^2}{4}}} + x + \frac{x^2}{4} = 0.$ Đáp số. $-\frac{1}{20} \leq a \leq 0.$

2.8 Phương pháp hình học

Ví dụ 2.55

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 5x + 25} + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = 7. \quad (2.94)$$

Lời giải. Cách 1. Viết phương trình (2.94) dưới dạng

$$\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7. \quad (2.95)$$

Xét các vectơ $\vec{u} = \left(x - \frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\vec{v} = \left(\frac{3}{2} - x, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, thì $\vec{u} + \vec{v} = (1, 4\sqrt{3})$. Ta có

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad |\vec{u} + \vec{v}| = 7.$$

Như vậy, (2.95) có dạng

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi \vec{u} và \vec{v} cùng hướng, tức là

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2} - x} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}.$$

Cách 2. Từ phương trình (2.95), mỗi căn thức, gọi cho ta nghĩ đến độ dài của một đoạn thẳng.

Đặt

$$A\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), \quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right), \quad M(x, 0).$$

Với cách đặt này, (2.95) viết được dưới dạng

$$AM + BM = AB.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB và trục hoành.

Phương trình đường thẳng AB là $y = 4\sqrt{3}x - \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng AB có hoành độ là $x = \frac{15}{8}$.

Cách 3. Xét tam giác ABC có độ dài ba cạnh $AB = 3, AC = 5, BC = 7$. Theo định lí hàm số côsin, ta có

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi D là điểm sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 60^\circ$. Đặt $AD = x$. Áp dụng định lí hàm số côsin cho các tam giác ABD và ACD , ta có

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}} = \sqrt{x^2 - 3x + 9},$$

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD}} = \sqrt{x^2 - 5x + 25}.$$

Như vậy, (2.94) trở thành $AD + DC = BC$. Tức là D thuộc cạnh BC . Ta có

$$\begin{aligned} S_{BAC} = S_{BAD} + S_{CAD} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \widehat{CAD} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 60^\circ \\ &\Leftrightarrow x = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.56

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} = \sqrt{2}.$$

Đáp số. $x = \sqrt{3} - 1$.**Ví dụ 2.57**

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9} = \sqrt{19}.$$

Đáp số. $x = \frac{6\sqrt{3}}{7}$.**Ví dụ 2.58**

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} = \sqrt{7}.$$

Đáp số. $x = \frac{3\sqrt{3}}{5}$.**Ví dụ 2.59**^a Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + yz = 0, \\ x^2 + x + 2yz - 2y = 0, \\ 3x^2 + 8xy + 8y^2 + 8yz - 2x + 8z - 5 = 0. \end{cases} \quad (2.96)$$

^aTrần Văn Toàn, 2017

Lời giải. Viết hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} x(x + y) + y(y + z) = 0, \\ x(x + 1) + y(2z - 2) = 0, \\ 4[(x + y)^2 + (y + z)^2] = (x + 1)^2 + (2z - 2)^2. \end{cases} \quad (2.97)$$

Xét các vectơ $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{b} = (x + y, y + z)$, $\vec{c} = (x + 1, 2z - 2)$. Hệ (2.97) trở thành

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \\ 4|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2. \end{cases} \quad (2.98)$$

- Nếu $\vec{a} = \vec{0}$, tức $x = 0$ và $y = 0$. Thay vào hệ (2.96), ta tìm được $z = \frac{5}{8}$.
- Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$, từ hai phương trình đầu của hệ (2.98) suy ra \vec{b} và \vec{c} là hai vectơ cùng phương. Từ phương trình thứ ba của hệ (2.98) suy ra, hoặc $\vec{c} = 2\vec{b}$ hoặc $\vec{c} = -2\vec{b}$. Xét cụ thể hai trường hợp này, ta được các nghiệm của hệ đã cho là

$$\left(x = -\frac{1}{5} \wedge y = -\frac{1}{5} \wedge z = \frac{3}{5}\right) \vee \left(x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = \frac{5}{8}\right) \vee \left(x = 1 \wedge y = -2 \wedge z = \frac{3}{2}\right) \vee (x = 3 \wedge y = -1 \wedge z = 7).$$

□

Bài tập 2.94. ²⁷ Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$. | Đáp số. $\sqrt{21}$, $x = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. |
| 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$. | Đáp số. $\sqrt{19}$, $x = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. |
| 3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$. | Đáp số. $\sqrt{19}$, $x = \frac{15\sqrt{3}}{7}$. |
| 4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$. | Đáp số. $\sqrt{21}$, $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$. |
| 5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$. | Đáp số. $\sqrt{31}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{11}$. |
| 6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$. | Đáp số. $2\sqrt{7}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$. |
| 7) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$. | Đáp số. $3\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$. |
| 8) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$. | Đáp số. $2\sqrt{7}$, $x = 3\sqrt{3}$. |
| 9) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$. | Đáp số. $\sqrt{43}$, $x = \frac{7\sqrt{3}}{13}$. |
| 10) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$. | Đáp số. $\sqrt{39}$, $x = \frac{7}{2\sqrt{3}}$. |
| 11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$. | Đáp số. $\sqrt{37}$, $x = \frac{21\sqrt{3}}{11}$. |

²⁷Trần Văn Toàn

12) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $\sqrt{37}$, $x = \frac{14\sqrt{3}}{5}$.

13) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

Đáp số. $\sqrt{57}$, $x = \frac{8}{5\sqrt{3}}$.

14) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $2\sqrt{13}$, $x = \frac{8\sqrt{3}}{7}$.

15) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. 7, $x = \frac{24\sqrt{3}}{13}$.

16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $4\sqrt{3}$, $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

17) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

Đáp số. $\sqrt{73}$, $x = \frac{9\sqrt{3}}{17}$.

18) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $\sqrt{67}$, $x = \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

19) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $3\sqrt{7}$, $x = \frac{9\sqrt{3}}{5}$.

20) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $\sqrt{61}$, $x = \frac{18\sqrt{3}}{7}$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} - \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$.

Đáp số. $\sqrt{91}$, $x = \frac{10\sqrt{3}}{19}$.

22) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $2\sqrt{21}$, $x = \frac{10}{3\sqrt{3}}$.

23) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} - \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{79}$, $x = \frac{30\sqrt{3}}{17}$.

24) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} - \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $2\sqrt{19}$, $x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Lời bình. Từ Bài tập trên, ta có thể thiết lập các bài tập khác với yêu cầu giải phương trình $f(x) = \max f(x)$. ♣

Bài tập 2.95. ²⁸ Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9} = 5$.

Đáp số. $x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

2) $\sqrt{x^2 - 12\sqrt{2}x + 144} + \sqrt{x^2 - 5\sqrt{2}x + 25} = 13$.

Đáp số. $x = \frac{60\sqrt{2}}{17}$.

3) $\sqrt{x^2 - 24\sqrt{2}x + 576} + \sqrt{x^2 - 7\sqrt{2}x + 49} = 25$.

Đáp số. $x = \frac{168\sqrt{2}}{31}$.

²⁸Trần Văn Toàn

$$4) \sqrt{x^2 - 15\sqrt{2}x + 225} + \sqrt{x^2 - 8\sqrt{2}x + 64} = 17. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{120\sqrt{2}}{23}.$$

$$5) \sqrt{x^2 - 3x + 9} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16} = 5. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{24}{11}(3\sqrt{3} - 4).$$

$$6) \sqrt{x^2 - 5x + 25} + \sqrt{x^2 - 12\sqrt{3}x + 144} = 13. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{-40}{23}(5\sqrt{3} - 12).$$

$$7) \sqrt{x^2 - 7x + 49} + \sqrt{x^2 - 24\sqrt{3}x + 576} = 25. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{-112}{143}(7\sqrt{3} - 24).$$

$$8) \sqrt{x^2 - 8x + 64} + \sqrt{x^2 - 15\sqrt{3}x + 225} = 17. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{-80}{11}(8\sqrt{3} - 15).$$

Bài tập 2.96. ²⁹ Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$1) f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{7}, \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{13}, \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{21}, \quad x = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{31}, \quad x = \frac{5\sqrt{3}}{11}.$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{43}, \quad x = \frac{6\sqrt{3}}{13}.$$

$$6) f(x) = \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{57}, \quad x = \frac{7}{5\sqrt{3}}.$$

$$7) f(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{73}, \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{17}.$$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 + 81} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{91}, \quad x = \frac{9\sqrt{3}}{19}.$$

$$9) f(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{111}, \quad x = \frac{10}{7\sqrt{3}}.$$

$$10) f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}. \quad \text{Đáp số. } 2\sqrt{3}, \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$11) f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{19}, \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$12) f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}. \quad \text{Đáp số. } 2\sqrt{7}, \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

$$13) f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{39}, \quad x = \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

²⁹Trần Văn Toàn

14) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $2\sqrt{13}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{7}$.

15) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $\sqrt{67}$, $x = \frac{7\sqrt{3}}{8}$.

16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $2\sqrt{21}$, $x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$.

17) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $\sqrt{103}$, $x = \frac{9\sqrt{3}}{10}$.

18) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4}$.

Đáp số. $2\sqrt{31}$, $x = \frac{10\sqrt{3}}{11}$.

19) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{19}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{7}$.

20) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $3\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{37}$, $x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$.

22) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. 7, $x = \frac{15\sqrt{3}}{13}$.

23) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $3\sqrt{7}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

24) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{79}$, $x = \frac{21\sqrt{3}}{17}$.

25) $f(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{97}$, $x = \frac{24\sqrt{3}}{19}$.

26) $f(x) = \sqrt{x^2 + 81} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $3\sqrt{13}$, $x = \frac{9\sqrt{3}}{7}$.

27) $f(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9}$.

Đáp số. $\sqrt{139}$, $x = \frac{30\sqrt{3}}{23}$.

28) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $2\sqrt{7}$, $x = \sqrt{3}$.

29) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $\sqrt{37}$, $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

30) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $4\sqrt{3}$, $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

31) $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $\sqrt{61}$, $x = \frac{10\sqrt{3}}{7}$.

32) $f(x) = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $2\sqrt{19}$, $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

33) $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}$.

Đáp số. $\sqrt{93}$, $x = \frac{14}{3\sqrt{3}}$.

$$34) f(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}. \quad \text{Đáp số. } 4\sqrt{7}, \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

$$35) f(x) = \sqrt{x^2 + 81} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}. \quad \text{Đáp số. } \sqrt{133}, \quad x = \frac{18\sqrt{3}}{11}.$$

$$36) f(x) = \sqrt{x^2 + 100} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{3}x + 16}. \quad \text{Đáp số. } 2\sqrt{39}, \quad x = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Lời bình. Từ Bài tập trên, ta có thể thiết lập các bài tập khác với yêu cầu giải phương trình $f(x) = \min f(x)$. ♣

Bài tập 2.97. ³⁰ Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{x^2 - 5x + 25} + \sqrt{x^2 - 3x + 9} = 7. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{15}{8}.$$

$$2) \sqrt{x^2 - 8x + 64} + \sqrt{x^2 - 7x + 49} = 13. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{56}{15}.$$

$$3) \sqrt{x^2 - 16x + 256} + \sqrt{x^2 - 5x + 25} = 19. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{80}{21}.$$

$$4) \sqrt{x^2 - 24x + 576} + \sqrt{x^2 - 11x + 121} = 31. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{264}{35}.$$

$$5) \sqrt{x^2 - 8\sqrt{3}x + 64} + \sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} = 7. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{40\sqrt{3}}{13}.$$

$$6) \sqrt{x^2 - 8\sqrt{3}x + 64} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9} = 7. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{24\sqrt{3}}{11}.$$

$$7) \sqrt{x^2 - 15\sqrt{3}x + 225} + \sqrt{x^2 - 7\sqrt{3}x + 49} = 13. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{105\sqrt{3}}{22}.$$

$$8) \sqrt{x^2 - 24\sqrt{3}x + 576} + \sqrt{x^2 - 9\sqrt{3}x + 81} = 21. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{72\sqrt{3}}{11}.$$

$$9) \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3}x + 9} = 7. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{15\sqrt{3}}{13}.$$

$$10) \sqrt{x^2 + 49} + \sqrt{x^2 - 8\sqrt{3}x + 64} = 13. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{28\sqrt{3}}{11}.$$

$$11) \sqrt{x^2 + 256} + \sqrt{x^2 - 5\sqrt{3}x + 25} = 19. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{80\sqrt{3}}{37}.$$

$$12) \sqrt{x^2 + 121} + \sqrt{x^2 - 24\sqrt{3}x + 576} = 31. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{132\sqrt{3}}{23}.$$

³⁰Trần Văn Toàn

2.9 Phương pháp lượng giác

Bài tập 2.98. Giải các phương trình sau:

$$1) 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}. \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9} \right\}.$$

$$2) 4x^3 - 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \right\}.$$

$$3) x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(2x^2 - 1). \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

$$4) x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(1 - 2x^2). \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

$$5) \sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \vee x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$6) \sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \vee x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$7) \sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = \cos 54^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}.$$

$$8) \sqrt{1+x} = 2x^2 - 1 - 2x\sqrt{1-x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}.$$

$$9) \sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 - 2x\sqrt{1-x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}.$$

$$10) \sqrt{1+x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}.$$

$$11) \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2+x}}} = x. \quad \text{Đáp số. } x = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

$$12) \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 2x\sqrt{1-x^2})} + 2x^2 = 1. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$13) \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2x\sqrt{1-x^2})} + 2x^2 = 1. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$14) \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} - 6x \cdot \sqrt{1-x^2} = 2. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$15) \sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad \text{Đáp số. } x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}.$$

$$16) \sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{3}{4}.$$

$$17) 6x \cdot \sqrt{1-9x^2} + 18x^2 - 3\sqrt{2}x - 1 = 0. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{3\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{12}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

$$18) 2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$19) 4x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (2x^2 - 1) = 8x^2(1-x^2) + \sqrt{2} - 1. \\ \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$20) 64x^7 - 112x^5 - 8x^4 + 56x^3 + 8x^2 - 7x - 1 = 0. \\ \text{Đáp số. } \left\{ -\frac{1}{2}, 1, \frac{10\pi}{11}, \frac{8\pi}{11}, \frac{6\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \frac{2\pi}{11} \right\}$$

$$21) x^2\sqrt{4-x^2} = |x|^3 - 4|x| + 4\sqrt{2}. \quad \text{Đáp số. } x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}.$$

$$22) x \cdot (2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{8}. \quad \text{Đáp số.} \\ x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

$$23) x \cdot (2x^2 - 1) \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad \text{Đáp số. } x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \vee x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$24) \sqrt{1-x^2}(1-4x^2) + x(3-4x^2) = \sqrt{2}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Bài tập 2.99. ³¹ Giải các phương trình sau:

$$1) x \left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} + 1 \right) = \frac{35}{24}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{8} \vee x = \frac{5}{6}.$$

$$2) x \left(\frac{1}{\sqrt{9x^2-1}} + 1 \right) = \frac{35}{36}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{12} \vee x = \frac{5}{9}.$$

$$3) x \left(\frac{1}{\sqrt{16x^2-1}} + 1 \right) = \frac{35}{48}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{16} \vee x = \frac{5}{12}.$$

$$4) x \left(\frac{1}{\sqrt{25x^2-1}} + 1 \right) = \frac{7}{12}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{3}.$$

$$5) x \left(\frac{1}{\sqrt{36x^2-1}} + 1 \right) = \frac{35}{72}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{24} \vee x = \frac{5}{18}.$$

$$6) x \left(\frac{1}{\sqrt{49x^2-1}} + 1 \right) = \frac{5}{12}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{28} \vee x = \frac{5}{21}.$$

$$7) x \left(\frac{1}{\sqrt{64x^2-1}} + 1 \right) = \frac{35}{96}. \quad \text{Đáp số. } x = \frac{5}{32} \vee x = \frac{5}{24}.$$

³¹Trần Văn Toàn. Các phương trình có dạng $x \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot x^2 - 1}} + 1 \right) = \frac{35}{12a}$.

$$8) x \left(\frac{1}{\sqrt{81x^2 - 1}} + 1 \right) = \frac{35}{108}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{5}{36} \vee x = \frac{5}{27}.$$

$$9) x \left(\frac{1}{\sqrt{100x^2 - 1}} + 1 \right) = \frac{7}{24}.$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{8} \vee x = \frac{1}{6}.$$

Bài tập 2.100. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2x + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(\tan \frac{k\pi}{7}; \tan \frac{2k\pi}{7}; \tan \frac{4k\pi}{7} \right), k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

$$3) \begin{cases} \frac{y}{x} - xy = 1, \\ \frac{z}{y} - 4yz = 2, \\ \frac{x}{z} - 4zx = 4. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(\tan \alpha, \frac{\tan 2\alpha}{2}, \frac{\tan 4\alpha}{2} \right), \alpha = \pm \frac{\pi}{7}; \pm \frac{2\pi}{7}; \pm \frac{3\pi}{7}.$$

$$4) \begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \frac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(\frac{\tan \alpha}{3}, \frac{\tan 2\alpha}{3}, \tan 4\alpha \right), \alpha = \pm \frac{\pi}{7}; \pm \frac{2\pi}{7}; \pm \frac{3\pi}{7}.$$

Chủ đề 3

Bất phương trình

3.1 Giải bất phương trình nhờ tính liên tục của hàm số

Để giải bất phương trình $f(x) > 0$. Ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số f .
- Bước 2. Giải phương trình $f(x) = 0$ trên \mathcal{D} .
- Xét dấu của $f(x)$ trên \mathcal{D} . Từ bảng xét dấu này, tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$ (nếu có) là hợp của các khoảng chứa x mà $f(x) > 0$.

Cách giải trên vẫn đúng cho các bất phương trình dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Ví dụ 3.1

Giải bất phương trình $2 - 3x < \sqrt{-9x^2 + 9x + 4}$.

Lời giải.

- Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là

$$-9x^2 + 9x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

- Giải phương trình $2 - 3x = \sqrt{-9x^2 + 9x + 4}$, ta được nghiệm $x = 0$.
- Bảng xét dấu của biểu thức

$$f(x) = 2 - 3x - \sqrt{-9x^2 + 9x + 4}, \quad \text{với } -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3},$$

như sau:

x	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
$f(x)$	$+$	0	$-$

ta được $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{4}{3}$.

- Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 < x \leq \frac{4}{3}$. □

Ví dụ 3.2

Giải bất phương trình

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^2-3x+2} \leq 0.$$

Lời giải.

- Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 2.$$

- Xét $f(x) = (x+3)\sqrt{x^2-3x+2}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

- Bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x \leq -3 \vee x = 1 \vee x = 2. \quad \square$$

Lời bình.

- Nếu lí luận rằng vì $\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$, với mọi $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$, nên bất phương trình đã cho xảy ra khi và chỉ khi $x+3 \leq 0$ hay $x \leq -3$, thì lời giải trên sai.
- Chú ý rằng, hệ bất phương trình

$$\begin{cases} A \cdot B \geq 0, \\ A \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0, \\ B \geq 0. \end{cases} \quad \clubsuit$$

Ví dụ 3.3

Giải bất phương trình

$$2(1-x) \cdot \sqrt{x^2+2x-1} \leq x^2 - 2x - 1. \quad (3.1)$$

Lời giải. Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là

$$x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 - \sqrt{2} \vee x \geq -1 + \sqrt{2}.$$

Xét phương trình

$$2(1-x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^2 - 2x - 1. \quad (3.2)$$

Bình phương phương trình (3.2), ta được phương trình hệ quả

$$3x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 12x - 5 = 0. \quad (3.3)$$

Dùng máy tính bỏ túi, (3.3) phân tích được

$$(x^2 + 2x - 5) \cdot (3x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Từ đây, ta tìm được hai nghiệm $x = -1 - \sqrt{6} \vee x = -1 + \sqrt{6}$.

Cả hai nghiệm này đều thỏa phương trình (3.2).

Đặt

$$f(x) = 2(1-x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 1} - (x^2 - 2x - 1)$$

với $x \leq -1 - \sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} - 1$. Bảng xét dấu của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{6}$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$-1 - \sqrt{6} \leq x \leq -1 - \sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{6} - 1. \quad \square$$

Bài tập 3.1. Giải các bất phương trình sau:

- 1) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq -x + 7;$ Đáp số. $x \leq 1 \vee 4 \leq x \leq 5$.
- 2) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} < 3x - 1;$ Đáp số. $1 < x \leq 2 \vee x \geq 5$.
- 3) $\sqrt{x^2 - 9x + 18} \leq 5x - 8;$ Đáp số. $2 \leq x \leq 3 \vee x \geq 6$.
- 4) $\sqrt{x^2 - 12x + 27} - 3x - 1 < 0;$ Đáp số. $1 < x \leq 3 \vee x \geq 9$.
- 5) $\sqrt{x^2 - 14x + 40} - 5x + 6 \leq 0;$ Đáp số. $2 \leq x \leq 4 \vee x \geq 10$.
- 6) $\sqrt{x^2 + 9x + 18} + 3x + 4 \leq 0;$ Đáp số. $x \leq -6 \vee -3 \leq x \leq -2$.
- 7) $\sqrt{x^2 - 8x - 20} + 3x + 10 > 0;$ Đáp số. $-6 < x \leq -2 \vee x \geq 10$.
- 8) $\sqrt{x^2 - 11x + 28} + 3x - 11 > 0;$ Đáp số. $3 < x \leq 4 \vee x \geq 7$.

- 9) $\sqrt{x^2+4x-5}-3x+5 > 0$; Đáp số. $x \leq -5 \vee 1 \leq x < 3$.
- 10) $\sqrt{x^2+2x-15}-4x+13 > 0$; Đáp số. $x \leq -5 \vee 3 \leq x < 4$.
- 11) $\sqrt{x^2+14x+40}-5x-14 \geq 0$; Đáp số. $x \leq -10 \vee -4 \leq x \leq -2$.
- 12) $\sqrt{x^2-9x+18} \geq -3x+8$; Đáp số. $2 \leq x \leq 3 \vee x \geq 6$.
- 13) $\sqrt{x^2+2x-35}-3x+19 \geq 0$; Đáp số. $x \leq -7 \vee 5 \leq x \leq 9$.
- 14) $\sqrt{x^2-4x-5}+5x+11 \geq 0$; Đáp số. $-3 \leq x \leq -1 \vee x \geq 5$.
- 15) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{5}{\sqrt{x-3}}$; Đáp số. $(5; +\infty)$.
- 16) (A, 2004) $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.
Đáp số. $(10 - \sqrt{34}; +\infty)$.

Bài tập 3.2. Giải các bất phương trình sau:

- 1) $\sqrt{x^2-6x-7}-\sqrt{x^2-4x-5} \geq -4$; Đáp số. $x \leq -1 \vee x \geq 7$.
- 2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$;
Đáp số. $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3} \vee -2 < x \leq -1$.
- 3) $\sqrt{x^2-6x-7}-\sqrt{x^2+4x+5} < 2$.
Đáp số. $-2 < x \leq -1 \vee x \geq 7$.

Bài tập 3.3. ¹ Giải các bất phương trình sau:

- 1) $\sqrt{10-3x}+\sqrt{5x-6} \leq 4$; Đáp số. $\frac{6}{5} \leq x \leq 2 \vee 3 \leq x \leq \frac{10}{3}$.
- 2) $\sqrt{10-3x}+\sqrt{5x-6} \geq 4$; Đáp số. $2 \leq x \leq 3$.
- 3) $\sqrt{7-3x}+\sqrt{5x-1} \leq 4$; Đáp số. $\frac{1}{5} \leq x \leq 1 \vee 2 \leq x \leq \frac{7}{3}$.
- 4) $\sqrt{7-3x}+\sqrt{5x-1} \geq 4$; Đáp số. $1 \leq x \leq 2$.
- 5) $\sqrt{10-3x}+\sqrt{2x+5} \leq 5$; Đáp số. $-\frac{5}{2} \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$.
- 6) $\sqrt{10-3x}+\sqrt{2x+5} \geq 5$; Đáp số. $-2 \leq x \leq 2$.
- 7) $\sqrt{10-6x}+\sqrt{4x+5} \leq 5$; Đáp số. $-\frac{5}{4} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \frac{5}{3}$.
- 8) $\sqrt{10-6x}+\sqrt{4x+5} \geq 5$; Đáp số. $-1 \leq x \leq 1$.

¹Trần Văn Toàn

9) $\sqrt{10-3x} + \sqrt{9x-2} \leq 6;$

Đáp số. $\frac{2}{9} \leq x \leq 2 \vee 3 \leq x \leq \frac{10}{3}.$

10) $\sqrt{10-3x} + \sqrt{9x-2} \geq 6;$

Đáp số. $2 \leq x \leq 3.$

11) $\sqrt{10-3x} + \sqrt{11x+3} \leq 7;$

Đáp số. $-\frac{3}{11} \leq x \leq 2 \vee 3 \leq x \leq \frac{10}{3}.$

12) $\sqrt{10-3x} + \sqrt{11x+3} \geq 7.$

Đáp số. $2 \leq x \leq 3.$

Bài tập 3.4. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{-6x+10} \leq \sqrt{2x-1};$

Đáp số. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$

2) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{-6x+10} \geq \sqrt{4x-3};$

Đáp số. $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{31}{33} \vee 1 \leq x \leq \frac{5}{3}.$

3) $\sqrt{7x+2} + \sqrt{-3x+7} \geq \sqrt{9x+7};$

Đáp số. $-\frac{2}{7} \leq x \leq 2.$

4) $\sqrt{5x-1} + \sqrt{-3x+7} \leq \sqrt{5x+6};$

Đáp số. $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{14}{69} \vee 2 \leq x \leq \frac{7}{3}.$

5) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{-3x+10} \geq \sqrt{-8x+9};$

Đáp số. $-2 \leq x \leq \frac{9}{8}.$

6) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{-3x+10} \leq \sqrt{8x+9};$

Đáp số. $-\frac{9}{8} \leq x \leq \frac{10}{3}.$

7) (Dự bị 2, B, 2002) $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1};$

Đáp số. $[3; 4].$

8) (A, 2005) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4};$

Đáp số. $[2; 10].$

9) (Dự bị 1, A, 2005) $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}.$

Đáp số. $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup \left[\frac{14}{3}; 5\right].$

Bài tập 3.5. Giải các bất phương trình sau:

1) $\frac{2}{x} + 3 \leq \sqrt{41 - \frac{16}{x}};$

Đáp số. $x < 0$ hoặc $x \geq 1.$

2) $\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \geq \frac{x+1}{3};$

Đáp số. $(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup (7; 8].$

3) $\frac{\sqrt{x^2-4x-12}}{x-6} \geq \frac{x+2}{3};$

Đáp số. $(-\infty; -3] \cup \{-2\} \cup (6; 7].$

4) $(x+1)(2x+\sqrt{x+6}) > \sqrt{x+6};$

Đáp số. $[-6; -2) \cup (0; +\infty);$

5) $(2x+1)(2x+\sqrt{x+2}) > \sqrt{x+2};$

Đáp số. $(-1; 0).$

6) $\sqrt{3x+\sqrt{9-x^2}} < \sqrt{3x+3}.$

Đáp số. $-\frac{3}{\sqrt{10}} \leq x < 0$ hoặc $0 < x \leq 3.$

Bài tập 3.6. Giải các bất phương trình sau:

$$1) \text{ (A, 2010) } \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1. \quad \text{Đáp số. } \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$2) \text{ (B, 2012) } x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}. \quad \text{Đáp số. } \left[0; \frac{1}{4} \right] \cup [4; +\infty).$$

$$3) x + 2\sqrt{x} - 4 \leq \sqrt{2x^2 - 5x + 4}; \quad \text{Đáp số. } 0 \leq x \leq 4 \vee x \geq 9.$$

$$4) x + 2\sqrt{x} - 2 \leq \sqrt{2x^2 + x - 2}. \quad \text{Đáp số. } 1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 9.$$

Bài tập 3.7. ² Giải các bất phương trình sau:

$$1) (x - 2) \cdot (x + 5) - 6\sqrt{x^2 + 3x - 3} \leq -12; \quad \text{Đáp số. } -7 \leq x \leq -4 \vee 1 \leq x \leq 4.$$

$$2) (x + 9) \cdot (x - 2) - 6\sqrt{x^2 + 7x + 7} \leq -30; \quad \text{Đáp số. } -9 \leq x \leq -6 \vee -1 \leq x \leq 2.$$

$$3) (x + 3) \cdot (x + 6) - 4\sqrt{x^2 + 9x + 9} \leq 6; \quad \text{Đáp số. } -9 \leq x \leq -8 \vee -1 \leq x \leq 0.$$

$$4) (x + 3) \cdot (x + 8) - 4\sqrt{x^2 + 11x + 19} \leq 2; \quad \text{Đáp số. } -10 \leq x \leq -9 \vee -2 \leq x \leq -1.$$

$$5) (x - 2) \cdot (x - 10) - 6\sqrt{x^2 - 12x + 12} \leq 3. \quad \text{Đáp số. } -1 \leq x \leq 1 \vee 11 \leq x \leq 13.$$

Bài tập 3.8. ³ Giải các bất phương trình sau:

$$1) x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} \geq \frac{35}{4}; \quad \text{Đáp số. } 3 < x \leq \frac{15}{4} \vee x \geq 5.$$

$$2) x - \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} \geq \frac{5}{4}; \quad \text{Đáp số. } -\frac{15}{4} \leq x < -3 \vee x \geq 5.$$

$$3) x + \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 16}} \geq -\frac{35}{3}; \quad \text{Đáp số. } -\frac{20}{3} \leq x \leq -5 \vee x > 4.$$

$$4) x - \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 16}} \leq \frac{5}{3}. \quad \text{Đáp số. } x \leq -5 \vee 4 < x \leq \frac{20}{3}.$$

Bài tập 3.9. Giải các bất phương trình sau:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{4x-4} \leq \sqrt{3-x}; \quad \text{Đáp số. } x = 1.$$

$$2) \sqrt{5-3x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{x+1}; \quad \text{Đáp số. } x = 1.$$

²Trần Văn Toàn

³Trần Văn Toàn

3) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-8} \leq \sqrt{3-x};$

Đáp số. $x = 2.$

4) $\sqrt{10-2x} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{x+1}.$

Đáp số. $x = 3.$ **Bài tập 3.10.** Giải các bất phương trình sau:

1) $\frac{\sqrt{(2x+2)(x^2-3x+2)}}{x-2} \geq 2x-2;$

Đáp số. $-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee 2 < x \leq 3.$

2) $\frac{\sqrt{(7-x)(x^2-4x+3)}}{x-1} \leq x-3;$

Đáp số. $-1 \leq x < 1 \vee x = 3 \vee 4 \leq x \leq 7.$

3) $\frac{\sqrt{(1-x)(x^2+8x+15)}}{x+5} \leq x+3;$

Đáp số. $-7 \leq x < -5 \vee x = -3 \vee -2 \leq x \leq 1.$

4) $\frac{\sqrt{(2x-2)(x^2-7x+12)}}{x-4} \leq 2x-6.$

Đáp số. $\frac{5}{2} \leq x \leq 3 \vee x \geq 5.$

Chủ đề 4

Hệ phương trình

4.1 Biến đổi hệ phương trình

Bài tập 4.1. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} xy^2 - 2y^2 + 3x = 18, \\ 3xy + 5x - 6y = 24; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (3; 3); \left(\frac{75}{13}; -\frac{3}{7} \right) \right\}.$$

$$2) \begin{cases} x^3 + 6y^2 + 3x = -2, \\ 2y^3 - 3x^2 + 6y = 1; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-\sqrt[3]{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \right\}.$$

$$3) \begin{cases} \frac{x(y^2 + 1)}{x^2 + y^2} = \frac{3}{5}, \\ \frac{y(x^2 - 1)}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (3; 1); \left(\frac{1}{3}; -1 \right) \right\}.$$

$$4) \begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1, \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

$$5) \begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-2; -8).$$

$$6) \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 65, \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3).$$

$$7) \begin{cases} (\sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x^2 + 3}) \cdot x = y - 3, \\ \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x} = x + 3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1; 8).$$

$$8) \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1, \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1;0);(-2;3)\}.$$

$$9) \begin{cases} \sqrt{25-x^2} - \sqrt{25-y^2} = 1, \\ \sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2} = y^2 - 2x^2 + 2x + 3; \end{cases}$$

Đáp số. (3;4), (3;-4), (-1;2 $\sqrt[4]{6}$), (-1;-2 $\sqrt[4]{6}$).

$$10) \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 3y - 5 = 0, \\ \sqrt{2y+1} - \sqrt{x+y} + 2y^2 - x - 9y - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3;-4).$$

Bài tập 4.2. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \frac{y^3}{2x} + 3xy = 25; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (4;2), (-4;-2).$$

$$2) \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \frac{y^4}{x^2} + xy = 9; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (4;2), (-4;-2).$$

$$3) \begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (2;4), (-2;-4).$$

$$4) \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{3y}{4x} = 2, \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{6x}{y} = 5. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (2;4), \left(\frac{256}{375}; -\frac{2048}{5625}\right).$$

Bài tập 4.3. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^3 = 3xy + 20, \\ y^3 = xy - 4; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (2;-2).$$

$$2) \begin{cases} x^3 + 2y^3 - 3xy - 20 = 0, \\ 4y^3 + 5y^3 - xy - 6 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3;1).$$

$$3) \begin{cases} 2x^3 + y^3 + xy + 28 = 0, \\ x^3 - 2y^3 - 5xy - 70 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1;-3).$$

$$4) \begin{cases} x^3 + 2y^3 = 2xy + 1, \\ x^3 + y^3 = 3xy - 1. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1;1), (-3;2).$$

Bài tập 4.4. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} + x^4 y = \frac{1}{xy^2} + x^2, \\ \frac{1}{x} + x^2 y^2 + 4y^2 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left(-2; \frac{1}{4}\right).$$

$$2) \begin{cases} x + \frac{1}{x^3 y^3} = x^3 y + \frac{1}{xy^2}, \\ \frac{1}{x} + x^3 y^3 + 10y^2 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left(-2; \frac{1}{4}\right).$$

$$3) \begin{cases} xy + \frac{y^4}{x} = \frac{x^2}{y} + y^2, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (4; -2).$$

Bài tập 4.5. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^5 + 4x^4 + 5y^2 = 0, \\ x^3 - \frac{y^3}{x^2} = xy - y^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-9; 81); (-5; 5\sqrt{5}); (-5; -5\sqrt{5}).$$

$$2) \begin{cases} x^9 - x^8 - 2y^2 = 0, \\ x^7 + \frac{y^3}{x^4} = y^2 + yx^3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3; 81); (2; 8\sqrt{2}); (2; -8\sqrt{2}).$$

$$3) \begin{cases} y^7 + y^6 - 6x^2 = 0, \\ y^5 + \frac{x^3}{y^3} = x^2 + xy^2 \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (125; 5); (4\sqrt{2}; 2); (-4\sqrt{2}; 2).$$

$$4) \begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \frac{x^3}{y^4} - \frac{x^2}{y}. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-125; -5); (9\sqrt{3}; -3); (-9\sqrt{3}; -3).$$

★ Trong một số hệ phương trình, từ hệ phương trình đã cho, ta có thể dẫn đến một phương trình đẳng cấp.

Ví dụ 4.1

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} = y\sqrt{y} + \sqrt{y}, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x} = u \geq 0$, $\sqrt{y} = v \geq 0$. Hệ phương trình (4.1) trở thành

$$\begin{cases} v^3 + v = 5u - u^3, \\ u^2 - v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3 + u^3 = 5u - v, \\ u^2 - v^2 = 3. \end{cases}$$

Suy ra

$$3(v^3 + u^3) = (5u - v)(u^2 - v^2)$$

Hay

$$2u^3 - vu^2 - 5uv^2 - 2v^3 = 0 \Leftrightarrow u = 2v \vee u = -\frac{1}{2}v \vee u = -v.$$

Nhận xét rằng $(0;0)$ không là nghiệm của hệ đã cho và u, v cùng dương, nên ta chỉ nhận $u = 2v$. Thay vào phương trình $u^2 - v^2 = 3$, ta được $u^2 = 4v^2$. Do đó, $x = 4y$. Lại có $x - y = 3$, suy ra $x = 4$ và $y = 1$. Ta thấy $x = 4$ và $y = 1$ thoả hệ đã cho. Vậy hệ có nghiệm $(4; 1)$.

Chú ý. Có thể giải hệ phương trình đã cho bằng phương pháp thế.

Bài tập 4.6. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (0;0); (5;1); \left(-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

$$2) \begin{cases} x^2 + 2xy - 2y^2 = 2x + y, \\ 2x^2 + xy - y^2 = x + y; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (0;0); \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

$$3) \begin{cases} y(xy + 24) = x^3, \\ x(xy - 6) = y^3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(0;0); (4;2); (-4;-2)\}.$$

$$4) \begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y}, \\ x = y + 5; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (9;4).$$

$$5) \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ \frac{1+y^2}{1+x^2} = 5 \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1;-3), (-1;3), (0;2), (0;-2)\}.$$

$$6) \begin{cases} xy = x - y, \\ 2(x+y)^2 = 3(x-2y); \end{cases} \quad \text{Đáp số. } [x=0, y=0], [x=-1/2, y=-1]$$

$$7) \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6, \\ (x+2) \cdot \sqrt{y+1} = (x+1)^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(-\sqrt{3};3), (\sqrt{3};3)\}.$$

$$8) \begin{cases} x^3y + xy^3 = 2, \\ 2x^2 - 3y^2 = -1; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (x = -1 \wedge y = -1) \vee (x = 1 \wedge y = 1).$$

$$9) \begin{cases} x^3y + xy^3 = 10, \\ 2x^2 - 3y^2 = 5; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (x = -2 \wedge y = -1) \vee (x = 2 \wedge y = 1).$$

$$10) \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (0;0), (4;2); (2;4).$$

Bài tập 4.7. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \frac{x^2(1+y)}{y^2} = 2x + 3y, \\ x^2 + 2xy = x - y^2. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = \frac{1}{4} \wedge y = \frac{1}{4}\right) \vee \left(x = \frac{9}{4} \wedge y = -\frac{3}{4}\right).$$

$$2) \begin{cases} \frac{x^2(1-2y)}{y^2} = 4x + 2y, \\ 2x^2 + xy = x + y^2; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -\frac{1}{4} \wedge y = \frac{1}{2}\right) \vee \left(x = \frac{4}{9} \wedge y = \frac{2}{9}\right).$$

$$3) \begin{cases} \frac{y^2(2+x)}{x^2} = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -\frac{8}{15} \wedge y = \frac{16}{15}\right) \vee (x = 6 \wedge y = 9).$$

$$4) \begin{cases} \frac{y^2(3+2x)}{x^2} = 3y - x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{1}{2}\right) \vee \left(x = -\frac{12}{35} \wedge y = \frac{8}{35}\right).$$

4.2 Sử dụng phương pháp thế

Ví dụ 4.2

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y\sqrt{1-x^2} = 1 + (1-y)\sqrt{x}. \end{cases}$$

Lời giải. Cách 1.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$\begin{cases} 2x^2 \leq 1, \\ y^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Khi đó, điều kiện của x và y là

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Ta có $x^2 + y^2 = 1 - x^2$, nên $x^2 + y^2 \leq 1$. Mặt khác,

$$1 - x^2 = y\sqrt{1-x^2} - (1-y)\sqrt{x} \leq y\sqrt{1-x^2}.$$

Vì

$$y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{y^2 + 1 - x^2}{2}.$$

Suy ra

$$1 - x^2 \leq \frac{y^2 + 1 - x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1.$$

Từ $x^2 + y^2 \leq 1$ và $x^2 + y^2 \geq 1$, ta có $x^2 + y^2 = 1$. Giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x^2 + y^2 = 1, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Cách hai. Ta có $2x^2 + y^2 = 1$, do đó $y = \sqrt{1-2x^2}$ hoặc $y = -\sqrt{1-2x^2}$.

Trường hợp một, $y = \sqrt{1-2x^2}$, thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$x^2 + \sqrt{1-2x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 + (1 - \sqrt{1-2x^2})\sqrt{x}.$$

tương đương

$$\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-2x^2}) + (1 - \sqrt{1-2x^2})\sqrt{x} = 0.$$

hay

$$\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2 - 1 + 2x^2)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2}} + \frac{(1-1+2x^2)\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-2x^2}} = 0$$

tương đương

$$x^2 \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2}} + \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-2x^2}} \right) = 0.$$

Ta có

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2}} + \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-2x^2}} > 0,$$

nên $x = 0$.

Trường hợp hai. $y = -\sqrt{1-2x^2}$. Để kiểm tra rằng

$$x^2 + y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{1}{2}$$

và

$$1 + (1 - y)\sqrt{x} > 1.$$

Trong trường hợp này, hệ vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(0, 1)$. □

Ví dụ 4.3

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 2\left(1 + \frac{1-y^2}{x}\right), \\ 4y^2 = (y^2 - x^3 + 3x - 2) \cdot (\sqrt{2-x^2} + 1). \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$(2+x) \cdot (-1+x^2+y^2) = 0.$$

Với điều kiện $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, ta thu được $x^2 + y^2 = 1$ hay $y^2 = 1 - x^2$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$4(1-x^2) + (x^3 + x^2 - 3x + 1) \cdot (\sqrt{2-x^2} + 1) = 0$$

hay

$$4(1-x^2) + (x-1)(x^2+2x-1) \cdot (\sqrt{2-x^2} + 1) = 0$$

tương đương

$$(1-x) \cdot \left[(-x^2+2x+5) - (x^2+2x-1) \cdot \sqrt{2-x^2} \right] = 0.$$

- Với $1-x=0$, ta có $(1,0)$ là một nghiệm của hệ.
- Trường hợp

$$(-x^2+2x+5) - (x^2+2x-1) \cdot \sqrt{2-x^2} = 0$$

hay

$$\frac{-x^2+2x+5}{x^2+2x-1} = \sqrt{2-x^2}. \quad (4.2)$$

Chú ý rằng $x^2 + y^2 = 1$, nên $x^2 \leq 1$ hay $-1 \leq x \leq 1$.

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+5}{x^2+2x-1}, \quad x \in [-1, 1] \setminus \{-1+\sqrt{2}\}.$$

Ta có

$$f'(x) = -\frac{4(x^2+2x+3)}{(x^2+2x-1)^2} < 0, \quad \forall x \neq -1+\sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	$-1 + \sqrt{2}$	1
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-1	$-\infty$	3

Từ bảng biên thiên, ta thấy $f(x) \leq -1$ hoặc $f(x) \geq 3$.

Mặt khác, với $0 \leq x^2 \leq 1$, ta có $1 \leq \sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{2}$.

Từ những đánh giá ở trên, phương trình (4.2) vô nghiệm. \square

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1, 0).

Bài tập 4.8. ¹ Chứng minh rằng đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (\mathcal{C}) và tìm tọa độ tiếp điểm M của chúng trong mỗi trường hợp sau:

1) $\Delta: 3x + 4y - 16 = 0$, (\mathcal{C}): $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$;

Đáp số. (4, 1).

2) $\Delta: 4x - 3y - 63 = 0$, (\mathcal{C}): $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 100$;

Đáp số. (9, -9).

3) $\Delta: 4x - 3y - 28 = 0$, (\mathcal{C}): $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 80 = 0$;

Đáp số. (4, -4).

4) $\Delta: 12x - 5y - 162 = 0$, (\mathcal{C}): $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 167 = 0$;

Đáp số. (11, -6).

5) $\Delta: 3x + 4y - 58 = 0$, (\mathcal{C}): $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 199 = 0$.

Đáp số. (10, 7).

Bài tập 4.9. ² Tìm tọa độ các giao điểm của hai đường tròn (\mathcal{C}) và (\mathcal{C}') trong mỗi trường hợp sau:

1) (\mathcal{C}): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$, (\mathcal{C}'): $(x - 2)^2 + (y + 9)^2 = 125$;

Đáp số. $(x = -3 \wedge y = 1) \vee (x = 4 \wedge y = 2)$.

2) (\mathcal{C}): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 125$, (\mathcal{C}'): $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 100$;

Đáp số. $(x = -9 \wedge y = -7) \vee (x = 3 \wedge y = 9)$.

¹Trần Văn Toàn

²Trần Văn Toàn

$$3) (\mathcal{C}): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 125, \quad (\mathcal{C}'): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 100;$$

$$\text{Đáp số. } (x = -7 \wedge y = -9) \vee (x = 5 \wedge y = 7).$$

$$4) (\mathcal{C}): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x-9)^2 + (y-7)^2 = 100;$$

$$\text{Đáp số. } (x = -1 \wedge y = 7) \vee (x = 3 \wedge y = -1).$$

$$5) (\mathcal{C}): (x-5)^2 + (y-6)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x-9)^2 + (y-2)^2 = 49;$$

$$\text{Đáp số. } (x = 2 \wedge y = 2) \vee (x = 9 \wedge y = 9).$$

$$6) (\mathcal{C}): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x-5)^2 + (y-2)^2 = 100;$$

$$\text{Đáp số. } (x = -3 \wedge y = -4) \vee (x = 5 \wedge y = -8).$$

$$7) (\mathcal{C}): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x+4)^2 + (y+2)^2 = 125.$$

$$\text{Đáp số. } (x = 6 \wedge y = -7) \vee (x = 7 \wedge y = -4).$$

$$8) (\mathcal{C}): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x+5)^2 + (y+3)^2 = 125;$$

$$\text{Đáp số. } (x = 5 \wedge y = -8) \vee (x = 6 \wedge y = -1).$$

$$9) (\mathcal{C}): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25, \quad (\mathcal{C}'): (x-7)^2 + (y-7)^2 = 125;$$

$$\text{Đáp số. } (x = -3 \wedge y = 2) \vee (x = 5 \wedge y = -4).$$

Bài tập 4.10. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) (\text{Cao đẳng, 2014}) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2 - xy - 2y^2 = -x + 2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } (x = -3 \wedge y = 2) \vee (x = -2 \wedge y = -1) \vee (x = 2 \wedge y = -3) \vee (x = 2 \wedge y = 1).$$

$$2) (\text{A, 2008}) \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9, \\ x^2 + 2xy = 6x + 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-4; \frac{17}{4} \right) \right\}.$$

$$3) (\text{D, 2008}) \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2, \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } \{(5; 2)\}.$$

$$4) (\text{A, 2011}) \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0, \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R});$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ (1; 1), (-1; -1), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right), \left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}; -\frac{\sqrt{10}}{5} \right) \right\}.$$

$$5) \text{ (D, 2012)} \begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } (1; 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5} \right), \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5} \right).$$

$$6) \text{ (A, 2014)} \begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12, \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2}; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } x = 3 \wedge y = 3.$$

7) (B, 2014)

$$\begin{cases} (1-y) \cdot \sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1) \cdot \sqrt{y}, \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3}; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (x = 3 \wedge y = 1) \vee \left(x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \wedge y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - 1 \right).$$

$$8) \begin{cases} y(y-x+2) = 3x+3, \\ x^2 - 5y + 3 + 6\sqrt{y^2 - 7x + 4} = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (x = 1 \wedge y = 2) \vee (x = 4 \wedge y = 5).$$

$$9) \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{2}{x+y} = \frac{1}{xy}, \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{x+y} = -x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

Đáp số.

$$\begin{aligned} & \left(x = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{7}) \wedge y = 1 + \frac{1}{3}(-2 + \sqrt{7}) \right) \\ & \vee \left(x = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{7}) \wedge y = 1 + \frac{1}{3}(-2 - \sqrt{7}) \right). \end{aligned}$$

$$10) \begin{cases} 2\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{2y+1} = (x-y)^2, \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{3}{2} \right) \vee \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{1}{2} \right).$$

$$11) \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6, \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (x = -\sqrt{3} \wedge y = 3) \vee (x = \sqrt{3} \wedge y = 3).$$

$$12) \begin{cases} (x^2 + 9)(x^2 + 9y) - 22(y - 1)^2 = 0, \\ x^2 - 2 - 4y\sqrt{y+1} = 0; \end{cases}$$

Đáp số. $(x = -\sqrt{2} \wedge y = 0) \vee (x = \sqrt{2} \wedge y = 0)$.

$$13) \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2, \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8; \end{cases}$$

Đáp số. $(x = -1 \wedge y = -3) \vee (x = 2 \wedge y = 0)$.

$$14) \begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8, \\ \sqrt{3y^2 + 13} - \sqrt{15 - 2x} = \sqrt{x+1}; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 3 \wedge (y = -2 \vee y = 2)$.

$$15) \begin{cases} 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0; \end{cases}$$

Đáp số. $x = -\frac{14}{9} \wedge y = \frac{5}{18}$.

$$16) \begin{cases} x^3 - 3x(y+2) + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 0, \\ 4x + 2\sqrt{x+2} + y = 14; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 2 \wedge y = 2$.

$$17) \begin{cases} 1 + \sqrt{2x+y+1} = 4(2x+y)^2 + \sqrt{6x+3y}, \\ (x+1)\sqrt{2x^2-x+4} + 8x^2 + 4xy = 4; \end{cases}$$

Đáp số. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

$$18) \begin{cases} x^3 - 16x = y^3 - 4y, \\ 5x^2 = y^2 - 4; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(1; -3), (-1; 3), (0; 2), (0; -2)\}$.

$$19) \begin{cases} x^3 + 2x^2 + (y-1)x + y - 2 = 0, \\ \sqrt{3x+1} - \sqrt{x^2+y} + x - y - 2 = 0; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = 0$.

$$20) \begin{cases} x(y-1) + 2y = 4(x+1), \\ x^3 + 3x + 3 = 4\sqrt{x+3x} + 2\sqrt{2x-1}; \end{cases}$$

Đáp số. $x = 1 \wedge y = 1$.

$$21) \text{ (Dự bị 2, B, 2008)} \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3, \\ (x-1)^4 = y; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(2; 1)\}$.

$$22) \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(26; -6), (-9; 29)\}$.

$$23) \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1, \\ x - y - 22 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(28; 6), (-7; -29)\}.$$

$$24) \begin{cases} x + 4 \cdot \sqrt{x-y} = y + 12, \\ |2(x+1) + y| + 2|2x + (y-1)| = 3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3} \right) \right\}.$$

$$25) \begin{cases} y + 2 \cdot \sqrt{x+y} = 15 - x, \\ |x - 2(2y+1)| + 3|x - 4(y-1)| = 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{32}{5}; \frac{13}{5} \right) \right\}.$$

$$26) \begin{cases} x + y + 3 \cdot \sqrt{x+y} = 18, \\ x^2 + y^2 = 125; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } [[x = -2, y = 11], [x = 11, y = -2]].$$

$$27) \begin{cases} 2x + y^2 + x^2 + y^4 = 1, \\ x^2 + 2y^2 + 3y^4 + 2x = 4; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(-1; 1); (-1; -1)\}.$$

$$28) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (4; 1); \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64} \right) \right\}.$$

$$29) \begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{5}{16}; -\frac{3}{16} \right); \left(\frac{5}{16}; \frac{13}{16} \right) \right\}.$$

$$30) \begin{cases} \sqrt{5x-y} - \sqrt{2y-x} = 1, \\ 2\sqrt{2y-x} + 3xy = 2x^2 + y^2 + 3x - 1; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (1; 1), \left(\frac{22}{3}; \frac{35}{3} \right) \right\}.$$

$$31) \begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ xy - x = 16; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } x = -1 \wedge y = -15.$$

$$32) \begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + 5x - 2y = -3, \\ \sqrt{2x-5} + 2\sqrt{y} - 2x^2 = -13. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3; 4);$$

Bài tập 4.11. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (12; -2); \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{9} \right).$$

$$2) \begin{cases} 3x - 1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y + \sqrt{x+y}} = y - 3x + 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(2;2), (3;6)\}.$$

$$3) \begin{cases} 3 + 21x = \frac{y}{x} + 4\sqrt{y-3x}, \\ \sqrt{y - \sqrt{y-3x}} = y - 7x - 2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1, 12).$$

$$4) \begin{cases} 1 - 5y = \frac{x}{y} - 6\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{x - \sqrt{x-y}} = x - 5y + 6. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(6;2), (12;3)\}.$$

Bài tập 4.12. (Thi Thử trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, lần IV, 2014)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 8 = (y-x)(y^2 + xy + x^2 + 6), \\ (x+y-13) \cdot (\sqrt{3y-14} - \sqrt{x+1}) = 5. \end{cases}$$

Đáp số. $(x=3 \wedge y=5) \vee (x=8 \wedge y=10)$.

4.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 4.4

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2(x-4y) = -7, \\ xy + 2(x-2) + y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 2(y+2)^2 = -14, \\ (x+1)(y+2) = 6. \end{cases}$$

Đặt $a = x+1$ và $b = y+2$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = -14, \\ a \cdot b = 6. \end{cases} \quad \Leftrightarrow (a=2 \wedge b=3) \vee (a=-2 \wedge b=-3).$$

Từ đó, hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (1, 1)$ và $(x, y) = (-3, -5)$. □

Ví dụ 4.5

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2 - 6xy - 7y^2 + 36 = 0, \\ x^2y - y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Cách 1. Ta thấy rằng, mọi cặp $(x; 0)$ hoặc $(0; y)$ đều không là nghiệm của hệ đã cho. Chia phương trình thứ nhất cho y^2 và phương trình thứ hai cho xy , ta được

$$\begin{cases} x^2 + \frac{36}{y^2} - 6\frac{x}{y} - 7 = 0, \\ x - \frac{6}{y} - \frac{y}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{6}{y}\right)^2 + 6\frac{x}{y} - 7 = 0, \\ x - \frac{6}{y} - \frac{y}{x} = 0. \end{cases}$$

Đặt $a = x - \frac{6}{y}$ và $b = \frac{x}{y}$, ta có

$$\begin{cases} a^2 + 6b - 7 = 0, \\ a - \frac{1}{b} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left(a = -3 \wedge b = -\frac{1}{3}\right) \vee (a = 1 \wedge b = 1) \vee \left(a = 2 \wedge b = \frac{1}{2}\right).$$

Trở lại ẩn (x, y) , hệ đã cho có tập nghiệm là

$$\{(-2; -2), (-2; 6), (-1; -2), (-1; 3), (3; 3), (3; 6)\}.$$

Cách 2.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy(xy - 6) - 7y^2 + 36 = 0, \\ x(xy - 6) = y^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Thay phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$y^3 - 7y^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 3 \vee y = 6.$$

- Với $y = -2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ (4.3), ta được

$$-2x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1.$$

- Với $y = 3$, thay vào phương trình thứ hai của hệ (4.3), ta được

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3.$$

- Sau cùng, với $y = 6$, thay vào phương trình thứ hai của hệ (4.3), ta được

$$6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3.$$

Vậy hệ đã cho có tập nghiệm là

$$\{(-2; -2), (-2; 6), (-1; -2), (-1; 3), (3; 3), (3; 6)\}.$$

□

Ví dụ 4.6

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 8 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y}, \\ (x-1)^4 = y. \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Điều kiện $x \geq 1$ và $y \geq 1$.

Từ giả thiết, ta có $\sqrt{y} = (x-1)^2$. Do đó, phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại thành

$$x^3 - 8 + \sqrt{x-1} = (x-1)^2,$$

tương đương

$$(x^3 - x^2 + 2x - 8) + (\sqrt{x-1} - 1) = 0.$$

Bằng cách tách nhân tử và trục căn thức, ta thu được

$$(x-2) \left(x^2 + x + 4 + \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = 0.$$

Do $x \geq 1$ nên phương trình cuối được thỏa mãn khi và chỉ khi $x = 2$. Như vậy, ta có $x = 2$ và $y = (2-1)^4 = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

Cách 2. Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x-1} + x^3 - x^2 + 2x - 9, \quad x \geq 1.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 3x^2 - 2x + 2 > 0, \quad x > 1.$$

Vậy f đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Mà $x = 2$ là một nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x-1} + x^3 - x^2 + 2x - 9 = 0 \tag{4.4}$$

Từ đó suy ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất phương trình (4.4).

Với $x = 2$, ta có $y = 1$.

Cách 3. Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0$, phương trình (4.4) trở thành

$$(t-1)(t^5 + t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 6t + 7) = 0.$$

Do $t \geq 0$, nên

$$t^5 + t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 6t + 7 > 0.$$

Vậy ta có $t = 1$, hay $x = 2$.

□

Ví dụ 4.7

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$$

Lời giải. Cách 1. Điều kiện $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ \sqrt{a^2 + 5} + \sqrt{b^2 + 3} = 5. \end{cases}$$

Thay $b = 3 - a$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{a^2 + 5} + \sqrt{(3-a)^2 + 3} = 5,$$

hay tương đương

$$\sqrt{a^2 - 6a + 12} = 5 - \sqrt{a^2 + 5}.$$

Phương trình này tương đương với hệ

$$\begin{cases} 5 - \sqrt{a^2 + 5} \geq 0, \\ a^2 - 6a + 12 = 30 + a^2 - 10\sqrt{a^2 + 5}. \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 5 - \sqrt{a^2 + 5} \geq 0, \\ 10\sqrt{a^2 + 5} = 18 + 6a. \end{cases}$$

Do $a \geq 0$, bình phương phương trình thứ hai của hệ này ta có

$$16a^2 - 54a + 44 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $a = 2$ và $a = \frac{11}{8}$. Cả hai nghiệm này đều thỏa bất phương trình $5 - \sqrt{a^2 + 5} \geq 0$.

- Với $a = 2$, ta có $b = 1$. Từ đó, có $x = 4$ và $y = 1$.
- Với $a = \frac{11}{8}$, ta có $b = \frac{13}{8}$. Từ đó, có $x = \frac{121}{64}$ và $y = \frac{169}{64}$.

Cách 2. Điều kiện $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Đặt $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$, khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ \sqrt{a^2 + 5} + \sqrt{b^2 + 3} = 5. \end{cases}$$

Thay $b = 3 - a$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{a^2 + 5} + \sqrt{(3 - a)^2 + 3} = 5,$$

hay tương đương

$$5\sqrt{a^2 + 5} + 5\sqrt{a^2 - 6a + 12} = 25.$$

Phương trình này có thể biến đổi lại thành

$$\left[5\sqrt{a^2 + 5} - (3a + 9) \right] + \left[5\sqrt{a^2 - 6a + 12} + (3a - 16) \right] = 0,$$

tương đương (chú ý rằng $0 \leq a \leq 3$)

$$\frac{25(a^2 + 5) - (3a + 9)^2}{5\sqrt{a^2 + 5} + 3a + 9} + \frac{25(a^2 - 6a + 12) - (3a - 16)^2}{5\sqrt{a^2 - 6a + 12} + 16 - 3a} = 0.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$2(8a - 11)(a - 2) \left(\frac{1}{5\sqrt{a^2 + 5} + 3a + 9} + \frac{1}{5\sqrt{a^2 - 6a + 12} + 16 - 3a} \right) = 0.$$

Do $0 \leq a \leq 3$ nên đại lượng trong dấu ngoặc thứ ba luôn dương, và như vậy ta có $a = \frac{11}{8}$ (tương ứng $b = \frac{13}{8}$) hoặc $a = 2$ (tương ứng $b = 1$). Cuối cùng, ta tìm được

$$(x; y) = \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64} \right) \quad \text{hoặc} \quad (x; y) = (4; 1)$$

là nghiệm của hệ đã cho. □

Ví dụ 4.8

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{30 + x} - \sqrt{18 - y} = 1, \\ \sqrt{45 + 2y} - \sqrt{20 - x} = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{30 + x} \geq 0$, $b = \sqrt{18 - y} \geq 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ \sqrt{81 - 2b^2} - \sqrt{50 - a^2} = 2. \end{cases}$$

Thay $b = a - 1$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{-2a^2 + 4a + 79} = 2 + \sqrt{50 - a^2}.$$

Bình phương hai vế phương trình trên, ta được

$$-a^2 + 4a + 25 = 4 \cdot \sqrt{50 - a^2}.$$

Bình phương hai vế phương trình cuối này, ta được phương trình hệ quả

$$a^4 - 8a^3 - 18a^2 + 200a - 175 = 0.$$

Giải phương trình này, ta có

$$a = -5, \quad a = 1, \quad a = 5, \quad a = 7.$$

Các giá trị $a = 1, a = 5, a = 7$ đều thoả $-a^2 + 4a + 25 \geq 0$ nên ta nhận và loại $a = -5$.

- Với $a = 1$, ta có $b = 0$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (-29; 18)$;
- Với $a = 5$, ta có $b = 4$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (-5; 2)$;
- Với $a = 7$, ta có $b = 6$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (19; -18)$.

Vậy hệ có tập nghiệm là $\mathcal{S} = \{(-29; 18); (-5; 2); (19; -18)\}$. □

Ví dụ 4.9

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x - y)^2 - 1 = 0, \\ (2x - 7)(x - y) - 1 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Lời giải. Hệ (4.5) tương đương với

$$\begin{cases} [4(x - y)^2 + 4xy - 51](x - y)^2 - 1 = 0, \\ [(x + y) + (x - y) - 7](x - y) - 1 = 0. \end{cases}$$

Đặt $a = x + y, b = x - y$. Ta có, $4x \cdot y = a^2 - b^2$. Hệ (4.5) trở thành

$$\begin{cases} (a^2 + 3b^2 - 51)b^2 - 1 = 0, \\ (a + b - 7)b - 1 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, suy ra $a = \frac{1}{b} - b + 7$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta được

$$2b^3 - 7b^2 - 2b + 7 = 0 \Leftrightarrow b = -1 \vee b = 1 \vee b = \frac{7}{2}.$$

Do đó, hệ (4.6) có nghiệm

$$\left(a = \frac{53}{14} \wedge b = \frac{7}{2}\right) \vee (a = 7 \wedge b = -1) \vee (a = 7 \wedge b = 1).$$

Vậy hệ (4.5) có các nghiệm là

$$(x = 3 \wedge y = 4) \vee \left(x = \frac{51}{14} \wedge y = \frac{1}{7}\right) \vee (x = 4 \wedge y = 3).$$
 □

Bài tập 4.13. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3, \\ (x-2)^4 + 1 = y; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3; 2).$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y+4} = 8 - x^3, \\ (x-2)^4 - 4 = y. \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (2; 3).$$

Bài tập 4.14. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \text{ (Cao đẳng 2010)} \begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Đáp số. $\{(1; -1); (-3; 7)\}$.

$$2) \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + 3x + 2y - 7 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(2; 1)\}.$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x+2y+5} - \sqrt{x-y} = 2, \\ x^2 + xy - 2y^2 + 6x - 3y - 13 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(2; 1)\}.$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{x-y} + \sqrt{x+2y+2} = 4, \\ x^2 + xy + 2x - 2y^2 - 2y - 9 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (3; 2), \left(\frac{17}{3}; -\frac{10}{3} \right) \right\}.$$

$$5) \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + 2xy = \frac{51}{5}, \\ \frac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \frac{21}{4}; \end{cases}$$

Đáp số. $(2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

$$6) \begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4 + xy; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (1; 5), \left(\frac{5}{2}; 2 \right) \right\}.$$

$$7) \begin{cases} \frac{17}{2x^2+3y} + \frac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2-2y} + \frac{34}{2x^2+3y} = 3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(2; 3); (-2; 3)\}.$$

$$8) \begin{cases} y + xy^2 = 6x^2, \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (1; 2), \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \right\}.$$

$$9) \text{ (B, 2009) } \begin{cases} xy + x + 1 = 7y, \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (3; 1), \left(1; \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

$$10) \begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3, \\ y + xy^2 = -6x^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-\frac{1}{2}; 3\right), \left(\frac{1}{3}; -2\right) \right\}.$$

$$11) \text{ (Dự bị 1, khối D, 2010) } \begin{cases} 27x^3 \cdot y^3 + 7y^3 = 8, \\ 9x^2y + y^2 = 6x; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{1}{3}; 1\right), \left(-\frac{2}{3}; -2\right) \right\}.$$

$$12) \text{ (D, 2009) } \begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0, \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (1; 1), \left(2; -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

$$13) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y, \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-2; 5); (1; 2).$$

$$14) \begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0, \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(0; 0), (1; 1)\}$$

$$15) \begin{cases} x(x + 2)(2x + y) = 9, \\ x^2 + 4x + y = 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1; 1), (-3; 9)\}.$$

$$16) \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 5, \\ (x + y) \cdot \frac{x}{y} = 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (2; 1), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

$$17) \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(1; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(1; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 1\right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1\right) \right\}$$

$$18) \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8, \\ xy(x + 1)(y + 1) = 12; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1; 2), (1; -3), (2; 1), (2; -2), (-2; 2); (-2; -3), (-3; 1), (-3; -2)\}.$$

$$19) \begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2, \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1; 3), (-1; 3).$$

$$20) \begin{cases} xy + x + 3y = 1, \\ x^2y + 3xy^2 + 3x + 9y = 4; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (-1; 1), \left(3; -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

$$21) \begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-\frac{1}{2}; 2 \right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3} \right) \right\}.$$

$$22) \begin{cases} xy + 2x - 3y + 2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy^2 - 12x + 18y = 16; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-3; -\frac{2}{3} \right), (1; 2) \right\}.$$

$$23) \begin{cases} 1 + xy = \frac{x^2y^2}{2x-y} + \frac{2x-y}{xy}, \\ \frac{(2x-y) \cdot \sqrt{2x-y}}{xy} = 4 - 3xy; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-\frac{1}{2}; -2 \right), (1; 1) \right\}.$$

$$24) \begin{cases} 1 + \sqrt{2x-y} = \frac{2x-y}{xy} + \frac{xy}{\sqrt{2x-y}}, \\ xy\sqrt{\frac{xy}{2x-y}} = 4 - 3\sqrt{2x-y}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(-\frac{1}{2}; -2 \right), (1; 1) \right\}.$$

$$25) \begin{cases} 1 + xy + \sqrt{xy} = x, \\ \frac{1}{x\sqrt{x}} + y\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{y}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (1; 0).$$

$$26) \begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (5; 3); (5; 4).$$

$$27) \begin{cases} x - \sqrt{y+2} = \frac{3}{2}, \\ y + 2(x-2)\sqrt{x+2} = -\frac{7}{4} \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left(2; -\frac{7}{4} \right).$$

$$28) \begin{cases} x + \sqrt{y+2} = \frac{3}{2}, \\ y + 2(x-2)\sqrt{x+2} = -\frac{7}{4} \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left(-1; \frac{17}{4} \right).$$

Bài tập 4.15. ³ Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 8x^2y^2 + 25xy - 9y^2 + 18 = 0, \\ 2x^2y + 3x - 27y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \left(-\frac{9}{2}; \frac{1}{2} \right), \left(3; -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

³Trần Văn Toàn

$$2) \begin{cases} 32x^2y^2 + 49xy - 9y^2 + 18 = 0, \\ 3x + 4x^2y - 27y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \left(-3; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}\right) \right\}.$$

$$3) \begin{cases} 2x^2y^2 + 60xy - 5y^2 + 288 = 0, \\ 2x^2y + 24x - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(-3; 12), (1; -4)\}.$$

$$4) \begin{cases} 2x^2y^2 - 5x^2 + 18 = 0, \\ x^2 - 2xy^2 + 6y = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \left(2; -\frac{1}{2}\right), \left(6; -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

$$5) \begin{cases} -2x^2y^2 + 3x^2 + 4xy - 10y^2 - 2 = 0, \\ x^2y - x + 2y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ (-2; -1), \left(1; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

$$6) \begin{cases} 29x^2y^2 + 16xy^3 - 60xy - 4y^4 - y^2 + 20 = 0, \\ 6x^2y^2 - 3xy^3 - 4xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ (-1; -1), \left(-\frac{1}{6}; -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right), (1; 1) \right\}.$$

$$7) \begin{cases} x^2y^2 + 12xy^3 - 18xy - 18y^4 - 4y^2 + 27 = 0, \\ x^2y^2 - 3xy^3 - 3xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(-5; -1), (-1; -1), (1; 1), (5; 1)\}.$$

Bài tập 4.16. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \sqrt{3x+y} - \sqrt{2x-y} = 2, \\ \sqrt{3x+y} - \sqrt{2y-x} = 1; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (2; 3).$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+3y} - \sqrt{2x-y} = 1, \\ \sqrt{x+3y} - \sqrt{x-y} = 2; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } [[x = 1, y = 1], [x = 3, y = 2]].$$

$$3) \begin{cases} 2\sqrt{2x+3y} + \sqrt{5-x-y} = 7, \\ 3\sqrt{5-x-y} - \sqrt{2x+y-3} = 1; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (3; 1).$$

$$4) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 10, \\ \sqrt{x+y} + 2x + y = 16; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-4; 20).$$

$$5) \begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1, \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Bài tập 4.17. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2xy + \frac{1}{(x-y)^2} = 20, \\ 2x + \frac{1}{x-y} = -1; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{(-1; -2), \left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right), \left(1; \frac{4}{3}\right)\right\}.$$

$$2) \begin{cases} 9(x^2 + y^2) + 2xy + \frac{4}{(x-y)^2} = 13, \\ 2x + \frac{1}{x-y} = 3; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 \wedge y = 0$$

$$3) \begin{cases} 12(x^2 + y^2) + 12xy + \frac{9}{(x+y)^2} = 85, \\ 6x(x+y) + 3 = 13(x+y); \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), (2; 1)\right\}.$$

$$4) \begin{cases} 8(x^2 + y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13, \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(0; 1)\}.$$

$$5) \begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x-y)^2 - 1 = 0, \\ (2x-7)(x-y) - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{(3; 4), \left(\frac{51}{14}; \frac{1}{7}\right), (4; 3)\right\}.$$

Bài tập 4.18. (Thi thử Chuyên Lí Tự Trọng, Cần Thơ, khối B, 2014)

$$\begin{cases} x(1+x) = 4 - \frac{1+y}{y^2}, \\ (xy+1) \cdot (x^2y^2+1) = 4y^3. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } x = 1 \wedge y = 1.$$

4.4 Hệ phương trình đối xứng loại một

Definition 1 Hệ phương trình với hai ẩn x, y được gọi là *hệ phương trình đối xứng loại một* nếu ta thay x bởi y và thay y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi. \square

Để giải hệ phương trình đối xứng loại một thường ta đặt $S = x + y$ và $P = x \cdot y$. Ta có

$$1) x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P;$$

$$2) x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3SP.$$

Chú ý.

- Nếu $(x; y)$ là một nghiệm của hệ (đối xứng), thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ. Do đó, điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $x = y$.
- Do cách đặt $S = x + y$ và $P = xy$, nên x, y là nghiệm (nếu có) của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Từ đó, điều kiện để hệ có nghiệm là $S^2 \geq 4P$.

Bài tập 4.19. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = \frac{1}{2}, \\ xy + x + y = \frac{11}{4}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\},$$

$$2) \begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } [x = 3, y = 2], [x = 2, y = 3], [x = -2, y = -3], [x = -3, y = -2].$$

$$3) \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } [x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2].$$

$$4) \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } [[x = 3, y = 1], [x = -1, y = -3], [x = 1, y = 3], [x = -3, y = -1]].$$

$$5) \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 84, \\ x^2 - xy + y^2 = 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}); (2\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})\}.$$

$$6) \begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1; 3), (-1; -3); (3; 1); (-3; -1)\}.$$

$$7) \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (0; 0), (4; 2); (2; 4).$$

$$8) \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (-2; 3), (3; -2).$$

$$9) \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \left\{ (6; 6); \left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2}; -\frac{3\sqrt{5}-3}{2} \right); \left(\frac{-3\sqrt{5}-3}{2}; \frac{3\sqrt{5}-3}{2} \right) \right\}.$$

$$10) \begin{cases} x^3y + xy^3 = \frac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y + xy^4 = \frac{2}{3}(x+y)^3; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(0; 0), (1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1)\}.$$

$$11) \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{[x = 2, y = 8], [x = 8, y = 2]\}.$$

$$12) \begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{[x = 25, y = 36], [x = 36, y = 25]\}.$$

$$13) \begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{[x = 1, y = 4], [x = 4, y = 1]\}.$$

$$14) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(-9; -4), (-4; -9), (4; 9), (9; 4)\}.$$

Hướng dẫn.

- Điều kiện để hệ phương trình đã cho có nghĩa là x và y cùng dấu.
- Nhận xét rằng nếu $(x; y)$ là một nghiệm của hệ phương trình, thì $(-x; -y)$ cũng là nghiệm của hệ, nên trước hết, ta xét $x > 0$ và $y > 0$.
- Với $x > 0$ và $y > 0$, đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \frac{7}{uv} + 1, \\ u^3v + v^3u = 78. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{y^3x} = 78; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(-81; -16), (-16; -81), (16; 81), (81; 16)\}.$$

Hướng dẫn. Nếu $x > 0$ và $y > 0$, đặt $u = \sqrt[4]{x}$, $v = \sqrt[4]{y}$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \frac{u^2}{v^2} + \frac{v^2}{u^2} = \frac{61}{u^2v^2} + 1, \\ u^3v + v^3u = 78. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + y + xy = 12, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(10 + 6\sqrt{3}; 10 - 6\sqrt{3}), (10 - 6\sqrt{3}; 10 + 6\sqrt{3})\}$.

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$.

$$17) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(1; 8), (8; 1)\}$.

$$18) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5. \end{cases}$$

Đáp số. $(1; 64); (64; 1)$.

$$19) \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy; \end{cases}$$

Đáp số. $(1; 1)$.

$$20) \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4; \end{cases}$$

Đáp số. $(4; 4)$.

$$21) \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2}, \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{5}{2}; \end{cases}$$

Đáp số. $[[x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2], [x = 1, y = 1/2], [x = 1/2, y = 1]]$.

$$22) \begin{cases} (x + y)(1 + xy) = 4xy, \\ (x^2 + y^2)(1 + x^2y^2) = 4x^2y^2; \end{cases}$$

Đáp số. $(1; 1)$.

$$23) \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ (x + 1)^3 + (y + 1)^3 = 35 \end{cases}$$

Đáp số. $\{(1; 2), (2; 1)\}$.

$$24) \begin{cases} \sqrt{1 - 4x^2} - \sqrt{1 - 4y^2} = 2(x + y), \\ x^2 + y^2 + 4xy = -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

Đáp số. $\{(\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4); (-\sqrt{2}/4; \sqrt{2}/4)\}$.

$$25) \begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{3y} = 6, \\ \sqrt{3x + 16} + \sqrt{3y + 16} = 10; \end{cases}$$

Đáp số. $(3; 3)$.

$$26) \begin{cases} \sqrt{x + 2} + \sqrt{y + 2} = 4, \\ \sqrt{4x + 1} + \sqrt{4y + 1} = 6; \end{cases}$$

Đáp số. $(2; 2)$.

$$27) \text{ (A, 2006)} \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } (3; 3).$$

$$28) \text{ (A, 2008)} \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4}, \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \left(1; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt[3]{10}}{2}; -\frac{\sqrt[3]{100}}{4}\right) \right\}.$$

$$29) \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = 1, \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } \{(-1; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; -3), (1; 0)\}.$$

4.5 Hệ phương trình phản xứng

Trường hợp hệ phương trình có chứa lượng $x - y$ và $x \cdot y$, thường ta đặt $S = x - y$ và $P = xy$.

Cũng có thể đặt $t = -y$ để đưa hệ đã cho về hệ đối xứng theo x và t .

Bài tập 4.20. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } (-1; -2), (2; 1), (\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1), (1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2} - 1).$$

$$2) \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 5x + 5y - 4xy - 6 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 12 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(0; -2), (2; 0)\}.$$

$$3) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x + 3y = 86, \\ x^2 + y^2 + xy = 37; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left(\frac{\sqrt{157} - 11}{4}; \frac{\sqrt{157} + 11}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{157} - 11}{4}; \frac{-\sqrt{157} + 11}{4}\right), (3; -7), (7; -3).$$

$$4) \text{ (A, 2012)} \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y, \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đáp số. } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \text{ hoặc } (x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Bài tập 4.21. Giải phương trình

$$(\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x}) \cdot (2 - 3\sqrt[3]{x^2+4x}) + 1 = 0.$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 ; - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right\}.$$

Hướng dẫn. Đặt $a = \sqrt[3]{x+4}$, $b = \sqrt[3]{x}$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} (a-b)(2-3ab)+1=0, \\ a^3-b^3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(2-3ab)+1=0, \\ (a-b)^3+3ab(a-b)=4. \end{cases}$$

4.6 Hệ phương trình đối xứng loại hai

Definition 2 Hệ gồm hai phương trình với hai ẩn x, y được gọi là *hệ phương trình đối xứng loại hai* nếu thay x bởi y và thay y bởi x , thì phương trình này trở thành phương trình kia. \square

Xét hệ phương trình đối xứng loại hai dạng

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Để giải hệ (4.7), ta viết

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Sau đó, phân tích $f(x, y) - g(x, y) = 0$ thành tích, trong đó có một nhân tử là $x - y$.

Bài tập 4.22. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 2x^2 - 3x = y^2 - 2, \\ 2y^2 - 3y = x^2 - 2; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1; 1), (2; 2)\}.$$

$$2) \begin{cases} x^3 + 1 = 2y, \\ y^3 + 1 = 2x; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \left\{ (1; 1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

$$3) \begin{cases} 2x + y = \frac{3}{x^2}, \\ 2y + x = \frac{3}{y^2}; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(1; 1)\}.$$

$$4) \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x}, \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y}; \end{cases}$$

$$\text{Đáp số. } \{(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}); (1; 1), (-1; -1)\}.$$

$$5) \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y}, \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1;1)\}.$$

$$6) \text{ (B, 2003)} \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2}, \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2}; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(1;1)\}.$$

$$7) \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3y} = 5, \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{3x} = 5; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(3;3)\}.$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{3y+x} = -1, \\ \sqrt{y+5} - \sqrt{3x+y} = -1; \end{cases} \quad \text{Đáp số. } \{(4;4)\}.$$

9) (Dự bị A, 2007)

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1, \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1. \end{cases}$$

Đáp số. $\{(1;1)\}$.

10) (Dự bị B, 2007)

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y, \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x. \end{cases}$$

Đáp số. $\{(0;0), (1;1)\}$.

11) (Dự bị B, 2007) Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}, \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$$

có đúng hai nghiệm $(x; y)$ thoả mãn $x > 1, y > 1$.

Bài tập 4.23. Giải các phương trình sau:

1) $x^2 + \sqrt{x+2} = 2;$

Đáp số. $\left\{-1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}.$

2) $x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x-1};$

Đáp số. $\left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$

3) $\sqrt{\sqrt{2x^2 + x - 3} + 2x^2 - 3} = x;$

Đáp số. $\left\{\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right\}.$

Hướng dẫn. Đặt $y = \sqrt{2x^2 + x - 3}$.

4) $\sqrt{6-2\sqrt{6-2x}} = x;$

Đáp số. $\{\sqrt{7}-1\}.$

5) $\sqrt[3]{x+\frac{1}{2}} = 16x^3 - 1.$

Đáp số. $\{13+3\sqrt{2}\}.$ **Hướng dẫn.** Đặt $\sqrt[3]{x+\frac{1}{2}} = 2y.$

6) $\sqrt{17-2\sqrt{45-2x}} = x-14;$

Đáp số. $\{13+3\sqrt{2}\}.$ **Hướng dẫn.** Đặt $y = \sqrt{45-2x}$, phương trình đã cho trở thành

$$2\sqrt{17-2y} = 17-y^2.$$

Lại đặt $z = \sqrt{17-2y}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} z^2 = 17-2y, \\ y^2 = 17-2z. \end{cases}$$

★ Với những phương trình có dạng $\sqrt{ax+b} = cx^2+dx+e$, ta có thể đưa về hệ phương trình đối xứng loại II.

Ví dụ 4.10Giải phương trình $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}.$ **Lời giải.** Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geq 0, \\ (2x^2 - 6x - 1)^2 = 4x + 5. \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{4x+5} = \alpha y + \beta$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = \alpha y + \beta, \\ \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y + \beta^2 = 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x - 2\alpha y = 2\beta + 2 \\ \alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y - 4x = 5 - \beta^2. \end{cases}$$

Đưa hệ phương trình trên về hệ đối xứng loại II bằng cách chọn

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4, \\ 2\alpha\beta = -12, \\ -4 = -2\alpha, \\ 5 - \beta^2 = 2\beta + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -3. \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{4x+5} = 2y - 3$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 5 = 4y^2 - 12y + 9, \\ 2x^2 - 6x - 1 = 2y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y - x + 1 = 0, \\ x^2 - 3x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình sau cùng cho ta các nghiệm là

$$(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}), \quad (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}), \quad (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), \quad (2 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}).$$

Các giá trị của x thoả $2x^2 - 6x - 1 \geq 0$ là $2 + \sqrt{3}$ và $1 - \sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{2}\}$.

Chú ý. Đối với phương trình có dạng

$$\sqrt{ax+b} = cx^2 + dx + e, \quad a, c \neq 0, \quad \neq \frac{1}{c}$$

Xét $f(x) = cx^2 + dx + e$. Ta có

$$f'(x) = 2cx + d, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{2c}.$$

Đặt $\sqrt{ax+b} = 2cy + d$.

Bài tập 4.24. Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 6x = 2\sqrt{2x+3}$;

Đáp số. $\{4 + \sqrt{10}; 2 - \sqrt{6}\}$.

2) $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$;

Đáp số. $\{2 + \sqrt{2}\}$.

3) $-4x^2 + 13x - 5 = \sqrt{3x+1}$.

Đáp số. $\left\{ \frac{15 - \sqrt{97}}{8}; \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \right\}$.

Đồng Nai, năm học 2018 – 2019,
Sắp chữ bằng \LaTeX bởi Trần Văn Toàn,
Giáo viên trường THPT chuyên Lương Thế Vinh,
Biên Hoà, Đồng Nai.

Tài liệu tham khảo

- [1] Suprun V.P, *Toán học cho học sinh trung học (tiếng Nga)*, M.: LKI, 2008.
- [2] Suprun V.P, *Toán học cho học sinh trung học, Phương pháp không mẫu mực để giải toán (tiếng Nga)*, M.: LKI, 2009.
- [3] Balayan E.N, *800 bài tập olympiad toán học để chuẩn bị cho kỳ thi. Lớp 9-11 (tiếng Nga)*, 2008.
- [4] A.I. Kozko, V.S.Panfyorov, I.N.Sergeev, V.G.Chirsky, *Các bài toán có chứa tham số và các bài toán không mẫu mực (tiếng Nga)*, Moscow Publisher Mir, 2016.
- [5] Khoroshilova E.V, *Elementary Mathematics. Textbook for high school students (tiếng Nga)*, M. : MGU Publishing House, 2010.