TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\sum \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN ĐẶNG TIẾN ĐÔNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG HAI ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC – ĐẲNG CẤP

- **ĐẶT HAI ẨN PHỤ – PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC BẬC HAI.**
- **ĐẶT HAI ẨN PHỤ – PHÂN TÍCH NHÂN TỬ.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

"Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em"

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).

"…Tiếng giày gõ vang lên một âm điệu đều đặn, rất khó nhận ra trong tiếng xe cộ ồn ào và dòng thác âm thanh của thành phố. Nhưng ở giữa hai bước đi vội vã, người ta vẫn có thể nghe thấy nó. Cũng giống như vào một giây phút ít ngờ nhất, người ta sẽ nhận ra những hồi âm xa thẳm của cuộc đời, của khoảng thời gian trùng điệp ở phía sau lưng mỗi người."

(Chàng trai trên sân thượng – Dương Thu Hương).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN ĐẶNG TIẾN ĐÔNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ẩn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán cồng kềnh. Tiếp theo lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức (các phần 1 đến 3), kết thúc ý tưởng sử dụng một căn thức duy nhất, tác giả xin trình bày tới quý độc giả lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức (phần 4), chủ yếu xoay quanh một lớp các bài toán chứa căn thức được giải thông ý tưởng sử dụng hai ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc – đẳng cấp bậc hai cơ bản kết hợp phân tích nhân tử – phương trình tích. Kỹ năng này đồng hành cùng việc giải hệ phương trình hữu tỷ đồng bậc – đẳng cấp, hệ phương trình chứa căn quy về đẳng cấp, ngày một nâng cao kỹ năng giải phương trình – hệ phương trình cho các bạn học sinh.

Mức độ các bài toán đã nâng cao một chút, do đó độ khó đã tăng dần so với các phần 1 đến 3, đồng nghĩa đòi hỏi sự tư duy logic, nhạy bén kết hợp với vốn kiến thức nhất định của độc giả. Tài liệu nhỏ phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ẩn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x^2+6x-3=4x\sqrt{2x-1}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét $x\left(x^2+6x-3\right)>0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+30x^2+12x^3-36x+9=16x^2(2x-1)\Leftrightarrow x^4-20x^3+46x^2-36x+9=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2-18x(x-1)^2+9(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-18x+9\right)(x-1)^2=0\Leftrightarrow x\in\left\{9-6\sqrt{2};1;9+6\sqrt{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S=\left\{9-6\sqrt{2};1;9+6\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x\left(x-\sqrt{2x-1}\right)=3x^2-6x+3\Leftrightarrow\frac{4x(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}=3(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\left(3\sqrt{2x-1}-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\sqrt{2x-1}\quad(*)\end{array}\right.$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-18x+9=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{9-6\sqrt{2};9+6\sqrt{2}\right\}$. Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-4x\sqrt{2x-1}+3(2x-1)=0$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=y\ (y\ge0)$ thu được $x^2-4xy+3y^2=0\Leftrightarrow x(x-y)-3y(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)(x-3y)=0$

- $x-y=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\(x-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $x-3y=0\Leftrightarrow x=3\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-18x+9=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{9-6\sqrt{2};9+6\sqrt{2}\right\}$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$, kết luận tập nghiệm $S=\left\{9-6\sqrt{2};1;9+6\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-4x\sqrt{2x-1}+4(2x-1)=2x-1\Leftrightarrow\left(x-2\sqrt{2x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\sqrt{2x-1}\\x=\sqrt{2x-1}\end{array}\right.$$

❖ Với $x=3\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-18x+9=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{9-6\sqrt{2};9+6\sqrt{2}\right\}$.

- Với $x=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ (x-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu với điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$, kết luận tập nghiệm $S=\left\{9-6\sqrt{2};1;9+6\sqrt{2}\right\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 1 và 4 sử dụng phép biến đổi tương đương thuần túy, trong đó lời giải 1 nâng lũy thừa trực tiếp có kèm theo điều kiện hai vế không âm thông qua nhận xét dựa trên điều kiện. Lời giải 4 thêm bớt hạng tử đưa về hiệu hai bình phương cũng cho kết quả nhanh chóng.*
- *Lời giải 2 dựa trên phép nhẩm nghiệm, sử dụng đẳng thức liên hợp đưa phương trình đã cho về dạng tích, tác giả đã trình bày tại Lý thuyết sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời.*
- *Lời giải 3 là hướng trọng tâm của tài liệu, mặc dù chỉ sử dụng một ẩn phụ y nhưng thực tế đưa phương trình đã cho về phương trình hai ẩn x và y. Các bạn có thể thấy đa thức hai ẩn* $x^2-4xy+3y^2$ *dễ dàng phân tích thành hai nhân tử, cụ thể là* $(x-y)(x-3y)$.
- *Sở dĩ như vậy vì đây là dạng phương trình hai ẩn đồng bậc hai* $x^2-4xy+3y^2=0$. *Ngoài cách giải trên, các bạn có thể tham khảo thêm cách trình bày cùng bản chất sau*

  Biến đổi về..... $x^2-4xy+3y^2=0$.

  Xét $y=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, *không nghiệm đúng phương trình ban đầu.*

  Xét trường hợp $y\ne 0$ *thì ta có* $x^2-4xy+3y^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\left(\frac{x}{y}\right)+3=0$

  Đặt $\frac{x}{y}=t$ *ta có* $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow(t-1)(t-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2x-1}\\ x=3\sqrt{2x-1}\end{array}\right.$

Bài toán 2. Giải phương trình $3(x^2-1)+4x=4x\sqrt{4x-3}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với $3x^2+4x-3=4x\sqrt{4x-3}$.

Đặt $\sqrt{4x-3}=y\ \ (y\ge 0)$ thu được $3x^2-4xy+y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(3x-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ 3x=y\end{array}\right.$

- $x=y\Leftrightarrow x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{1;3\}$.
- $3x=y\Leftrightarrow 3x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 9x^2-4x+3=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$ ta thu được tập nghiệm $S=\{1;3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2+4x-3=4x\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{4x-3}+4x-3=x^2\Leftrightarrow\left(2x-\sqrt{4x-3}\right)^2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{4x-3}\\ 3x=\sqrt{4x-3}\end{array}\right.$$

❖ $x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{1;3\}$.

❖ $3x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9x^2-4x+3=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\{1;3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$. Nhận xét $x\ge\frac{3}{4}\Rightarrow(3x^2+4x-3)x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^4+24x^3-2x^2-24x+9=16x^2(4x-3)\Leftrightarrow 9x^4-40x^3+46x^2-24x+9=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-3)(9x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện thu được hai nghiệm, $S=\{1;3\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x\left(x-\sqrt{4x-3}\right)=x^2-4x+3\Leftrightarrow\frac{4x(x^2-4x+3)}{x+\sqrt{4x-3}}=x^2-4x+3\Leftrightarrow(x^2-4x+3)\left(\sqrt{4x-3}-3x\right)=0.$$

- $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$
- $3x=\sqrt{4x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9x^2-4x+3=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\{1;3\}$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $2x^2-3x+2\le x\sqrt{3x-2}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$. Đặt $\sqrt{3x-2}=t\ (t\ge 0)$, ta thu được

$$2x^2-t^2\le xt\Leftrightarrow 2x(x-t)+t(x-t)\le 0\Leftrightarrow(2x+t)(x-t)\le 0\qquad(*).$$

Ta có $x\ge\frac{2}{3};t\ge 0\Rightarrow 2x+t>0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow x-t\le 0\Leftrightarrow x\le\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{2}{3}\\x^2-3x+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2-12x+8\le 4x\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow 9x^2\le x^2+4x\sqrt{3x-2}+4(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow(3x)^2\le\left(x+2\sqrt{3x-2}\right)^2\Leftrightarrow\left(2x+\sqrt{3x-2}\right)\left(x-\sqrt{3x-2}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{3x-2}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}3x\ge 2\\x^2-3x+2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 2$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$.

Nhận xét $x\ge\frac{2}{3}\Rightarrow\left(2x^2-3x+2\right)x>0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4+(3x-2)^2-4x^2(3x-2)\le x^2(3x-2)$$
$$\Leftrightarrow 4x^4-5x^2(3x-2)+(3x-2)^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(4x^2-3x+2\right)\le 0\quad(1)$$

Ta có $4x^2-3x+2=4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{23}{16}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x\left(x-\sqrt{3x-2}\right)+x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow\frac{x\left(x^2-3x+2\right)}{x+\sqrt{3x-2}}+x^2-3x+2\le 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(2x+\sqrt{3x-2}\right)}{x+\sqrt{3x-2}}\le 0\quad(2)$$

Nhận xét $x\ge\frac{2}{3}\Rightarrow 2x+\sqrt{3x-2}>0;x+\sqrt{3x-2}>0$. Do đó $(2)\Leftrightarrow x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[1;2]$.

Bài toán 4. Giải bất phương trình $4x^2+3x+3\le 8x\sqrt{x+1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $4x^2-8x\sqrt{x+1}+3(x+1)\le 0$.

Đặt $\sqrt{x+1}=y\ (y\ge 0)$ thu được $4x^2-8xy+3y^2\le 0\Leftrightarrow 2x(2x-3y)-y(2x-3y)\le 0\Leftrightarrow(2x-y)(2x-3y)\le 0$

- $\begin{cases}2x-y\le 0\\2x-3y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\le\sqrt{x+1}\\2x\ge 3\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-x-1\le 0\\4x^2-9x-9\ge 0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $\begin{cases}2x-y\ge 0\\2x-3y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge\sqrt{x+1}\\2x\le 3\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-x-1\ge 0\\4x^2-9x-9\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{17}}{8}\le x\le 3$.

Kết luận tập nghiệm $S=\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8};3\right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2-8x\sqrt{x+1}+4(x+1)\le x+1\Leftrightarrow\left(2x-2\sqrt{x+1}\right)^2\le\left(\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow\left(2x-3\sqrt{x+1}\right)\left(2x-\sqrt{x+1}\right)\le 0$$

Xét hai trường hợp

❖ $\begin{cases}2x\le\sqrt{x+1}\\2x\ge 3\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-x-1\le 0\\4x^2-9x-9\ge 0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

❖ $\begin{cases}2x\ge\sqrt{x+1}\\2x\le 3\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-x-1\ge 0\\4x^2-9x-9\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\le x\le 3$.

Kết luận tập nghiệm $S=\left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};3\right]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge -1$.

Nhận xét rằng $4x^2+3x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x>0\\16x^4+9(x+1)^2+24x^2(x+1)\le 64x^2(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\16x^4-40x^2(x+1)+9(x+1)^2\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(4x^2-x-1\right)\left(4x^2-9x-9\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}-\dfrac{3}{4}\le x\le\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\\\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\le x\le 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\le x\le 3$$

So sánh điều kiện, kết luận tập nghiệm cần tìm $S=\left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{8};3\right]$.

Bài toán 5. Giải bất phương trình $\sqrt{2-x}+x\ge\dfrac{4-2x}{x}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\ne x\le 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+x\sqrt{2-x}-2(2-x)}{x}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(x-\sqrt{2-x}\right)\left(x+2\sqrt{2-x}\right)}{x}\ge 0\quad(*)$$

Xét hai trường hợp

- $0<x\le 2\Rightarrow x+2\sqrt{2-x}>0$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow x-\sqrt{2-x}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\x^2+x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.
- $x<0\Rightarrow x-\sqrt{2-x}<0$; $(*)\Leftrightarrow x+2\sqrt{2-x}\ge 0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}\ge -x\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2+4x-8\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2-2\sqrt{3}\le x<0$.

Kết luận nghiệm $S=\left[-2-2\sqrt{3};0\right)\cup[1;2]$.

Bài toán 6. Giải bất phương trình $3x^2+2x+7=3(x+1)\sqrt{x^2+3}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^2-3(x+1)\sqrt{x^2+3}+2(x^2+3)=0$.

Đặt $x+1=a;\sqrt{x^2+3}=b\quad(b>0)$. Phương trình trên trở thành

$$a^2-3ab+2b^2=0\Leftrightarrow a(a-b)-2b(a-b)=0\Leftrightarrow(a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=2b\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2+2x+1=x^2+3\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $a=2b\Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2+2x+1=4x^2+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\3x^2-2x+11=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(x+1)^2-3(x+1)\sqrt{x^2+3}=4x-4\Leftrightarrow3(x+1)\left(x+1-\sqrt{x^2+3}\right)=4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6(x+1)(x-1)}{x+1+\sqrt{x^2+3}}=4(x-1)\Leftrightarrow(x-1)\left(2\sqrt{x^2+3}-x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x+1=2\sqrt{x^2+3}\end{array}\right.$$

Với $x+1=2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2+2x+1=4x^2+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\3x^2-2x+11=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$12x^2+8x+28=12(x+1)\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow4(x^2+2x+1)-12(x+1)\sqrt{x^2+3}+9(x^2+3)=x^2+3$$

$$\Leftrightarrow\left(2x+2-3\sqrt{x^2+3}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=2\sqrt{x^2+3}\\x+1=\sqrt{x^2+3}\end{array}\right.$$

- $x+1=2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2+2x+1=4x^2+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\3x^2-2x+11=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $x+1=\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\x^2+2x+1=x^2+3\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $3x^2+2x+7=2x^2+(x+1)^2+6>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x+1>0\\9x^4+12x^3+46x^2+28x+49=9(x+1)^2(x^2+3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\3x^3-5x^2+13x-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\(x-1)(3x^2-2x+11)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 7. Giải phương trình $7x+\dfrac{2}{x}+1=7\sqrt{x^2+x+2}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2+x+2=7x\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow x^2+x+2-7x\sqrt{x^2+x+2}+6x^2=0 \qquad (1).$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+2}=t$ $(t>0)$, phương trình (1) trở thành

$$t^2-7xt+6x^2=0\Leftrightarrow t(t-x)-6x(t-x)=0\Leftrightarrow (t-x)(t-6x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=x\\ \sqrt{x^2+x+2}=6x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x^2+x+2=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0\\ x^2+x+2=36x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{281}}{70}$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2+x+2=7x\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow 28x^2+4x+8=28x\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+x+2\right)-28x\sqrt{x^2+x+2}+49x^2=25x^2\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+x+2}-7x\right)^2=(5x)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=x\\ \sqrt{x^2+x+2}=6x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x^2+x+2=x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0\\ x^2+x+2=36x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{281}}{70}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, hay $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $7x^2+x+2=7x\sqrt{x^2+x+2}$ $\qquad$ (*).

Nhận xét $7x^2+x+2>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 49x^4+14x^3+29x^2+4x+4=49x^2\left(x^2+x+2\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ 35x^3+69x^2-4x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ (x+2)\left(35x^2-x-2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{281}}{70}$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}\right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2+\frac{x+2}{x}=7x\sqrt{x^2+x+2}\Leftrightarrow 7\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)=\frac{x+2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\frac{x+2}{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ \sqrt{x^2+x+2}=6x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ \begin{cases}x\ge 0\\ 35x^2-x-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}\end{array}\right.$$

Thử lại nghiệm, kết luận $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{281}}{70}\right\}$.

Bài toán 8. Giải phương trình $\dfrac{6x^2+4x+8}{x+1}=5\sqrt{2x^2+3}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2+4x+8=5(x+1)\sqrt{2x^2+3}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x+1\right)-5(x+1)\sqrt{2x^2+3}+2\left(2x^2+3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2-5(x+1)\sqrt{2x^2+3}+2\left(2x^2+3\right)=0$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{2x^2+3}=v\ (v>0)$ thu được

$$2u^2-5uv+2v^2=0\Leftrightarrow(u-2v)(2u-v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2v\\ v=2u\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- ✓ $u=2v\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+2x+1=8x^2+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 7x^2-2x+11=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- ✓ $v=2u\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x^2+3=4\left(x^2+2x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x^2+8x+1=0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{-4+\sqrt{14}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=\dfrac{-4+\sqrt{14}}{2}$.

Bài toán 9. Giải phương trình $x^2-5x\sqrt{2x-3}+4(2x-3)=0\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-3}=y\ (y\ge 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$x^2-5xy+4y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x-4y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ x=4y\end{array}\right.$$

- $x=y\Leftrightarrow x=\sqrt{2x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ (x-1)^2=-2\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $x=4y\Leftrightarrow x=4\sqrt{2x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-32x+48=0\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{16+4\sqrt{13};16-4\sqrt{13}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 10. Giải bất phương trình $5x^2+2x+2\le 5x\sqrt{x^2+x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x^2-5x\sqrt{x^2+x+1}+2\left(x^2+x+1\right)\le 0$.

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=y\ \left(y>0\right)\Rightarrow \frac{2}{3}y<y$. Thu được

$$3x^2-5xy+2y^2\le 0\Leftrightarrow 3x^2-3xy-2xy+2y^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(x-y\right)-2y\left(x-y\right)\le 0\Leftrightarrow \left(3x-2y\right)\left(x-y\right)\le 0\Leftrightarrow \frac{2}{3}y\le x\le y$$

Nhận xét $y>0;\frac{2}{3}y\le x\le y\Rightarrow x>0$. Xét hai trường hợp

- $2y\le 3x\Leftrightarrow \begin{cases}4\left(x^2+x+1\right)\le 9x^2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-4x-4\ge 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge \dfrac{2+2\sqrt{6}}{5}$.
- $x\le y\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x^2\le x^2+x+1\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Kết hợp hai trường hợp ta có nghiệm $x>0$.

Nhận xét.

- *Các bài toán từ 2 đến 10 đều được giải bằng khá nhiều phương pháp, bao gồm biến đổi tương đương (nâng lũy thừa trực tiếp, thêm bớt đưa về hiệu hai bình phương), sử dụng đẳng thức liên hợp và trọng tâm là đặt ẩn phụ không hoàn toàn.*
- *Điểm đặc biệt trong các bài toán trên, khi đặt ẩn phụ hoàn toàn (hoặc không hoàn toàn) đều đưa về các phương trình (hoặc bất phương trình) bậc hai có tính chất đồng bậc bậc hai* $ax^2-bxy+cy^2=0$, *thao tác phân tích nhân tử trở nên đơn giản. Các bạn có thể lựa chọn một trong các phương án sau*
  - *Tính nghiệm, đưa trực tiếp về nhân tử* $\left(mx-ny\right)\left(px-qy\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}mx=ny\\ px=qy\end{array}\right.$
  - *Xét trường hợp* $y=0$ *(hoặc* $x=0$*) có là nghiệm của phương trình ban đầu hay không.*

    Xét trường hợp $y\ne 0$ *(tương ứng* $x\ne 0$*), chia hai vế cho* $y^2\ne 0$ *thu được*

    $$a\left(\frac{x}{y}\right)^2-b\left(\frac{x}{y}\right)+c=0\ \left(\text{tương ứng } c\left(\frac{y}{x}\right)^2-b\left(\frac{y}{x}\right)+a=0\right).$$

    Đặt $\frac{x}{y}=t$ *(tương ứng* $\frac{y}{x}=t$*) quy về phương trình cơ bản* $at^2-bt+c=0$ *(*$ct^2-bt+a=0$*).*

    Quan sát thấy tính chất đồng bậc, đặt trực tiếp $x=ky$ *đưa về*

    $$ak^2y^2-bky^2+cy^2=0\Leftrightarrow y^2\left(ak^2-bk+c\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ ak^2-bk+c=0\end{array}\right.$$

    Suy ra hai trường hợp Giải phương trình bậc hai ẩn k sẽ thu được tỷ lệ giữa x và y.

  Lưu ý do vai trò của x và y bình đẳng nên các bạn có thể chia cho x hoặc y mà không ảnh hưởng tới kết quả của bài toán. Nếu bài toán là bất phương trình thì trước khi chia cần xét dấu của y (tương ứng x). Tùy theo từng trường hợp có thể chọn phép chia hợp lý và tiết kiệm nhất, sử dụng các đánh giá thông thường đảm bảo cho lời giải được gọn gàng (điển hình bài toán 10).

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $4x^2+12x=9+7x\sqrt{4x-3}$.
2. $\dfrac{2}{x}+4x+2=5\sqrt{x^2+x+1}$.
3. $4x^2+10x+5\geq 4x\sqrt{x^2+4x+2}$.
4. $5\sqrt{4-x}+x^2-4x+4=6(2-x)\sqrt{4-x}$
5. $7x^2+4x+10\leq 7(x+2)\sqrt{x^2+1}$.
6. $x\sqrt{1-x}+2(1-x)=x^2$
7. $6x^2-6x+5\leq 5(x-1)\sqrt{2x^2+2x+1}$.
8. $2008x^2-4x+3=2007x\sqrt{4x-3}$.
9. $\dfrac{2x^2-4x+5}{x-2}\leq 3\sqrt{x^2+1}$.
10. $6x^2-x\geq 21+(x-3)\sqrt{x^2+x-6}$.
11. $2012x+\dfrac{4}{x}=2011\sqrt{5x-4}+5$.
12. $x^2+11x+42=2x\sqrt{11x+42}$.
13. $4x^2+12x\sqrt{1+x}\geq 27(x+1)$.
14. $4x^2+1+5x\sqrt{1-x}=x$.
15. $(3x-1)(3x+1)-8x\sqrt{x+1}=x$.
16. $7+3(1-x)\sqrt{2-x}=x^2+2x$.
17. $6x-3+\dfrac{2}{x}\leq 6\sqrt{x^2-3x+2}$.
18. $3x+4-\dfrac{4}{x}=7\sqrt{x-1}$.
19. $5x^2-5x\sqrt{x^2+x+4}+2x+5=0$.
20. $\dfrac{3x^2+22x+47}{x+3}\leq 7\sqrt{5+x}$.
21. $2x^2-3x+2=x\sqrt{3x-2}$.
22. $2\left(x^2+6\right)-5x\sqrt{6-x}\leq 2x$.
23. $2(x+1)^2-7(x+1)\sqrt{4-x}+4=x$.
24. $5x^2-5x\sqrt{x^2+x+1}=x+1$.
25. $3x+5\left(1+\dfrac{3}{x}\right)<8\sqrt{3+x}$.
26. $9x^2+8x+9=9(x+1)\sqrt{2x^2+1}$.
27. $12+5(x-2)\sqrt{3x^2+x}>5x^2+20x$.
28. $3x+\dfrac{1}{x}+2=3\sqrt{x^2+4x+2}$.

Bài toán 11. Giải phương trình $x^2+5x+7=7\sqrt{x^3+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-x+1-7\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-x+1}+6x+6=0$.

Đặt $\sqrt{x^2-x+1}=u;\sqrt{x+1}=v\ (u>0;v\ge 0)$ ta thu được $u^2-7uv+6u^2=0\Leftrightarrow (u-v)(u-6v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v\\ u=6v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ x^2-x+1=x+1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$
- $u=6v\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=6\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1\\ x^2-37x-35=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{37+\sqrt{1509}}{2};\dfrac{37-\sqrt{1509}}{2}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{0;2;\dfrac{37+\sqrt{1509}}{2};\dfrac{37-\sqrt{1509}}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -1$.

Nhận xét $x^2+5x+7>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+10x^3+39x^2+70x+49=49\left(x^3+1\right)\Leftrightarrow x^4-39x^3+39x^2+70x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\left(x^2-37x-35\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;2;\frac{37+\sqrt{1509}}{2};\frac{37-\sqrt{1509}}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{0;2;\dfrac{37+\sqrt{1509}}{2};\dfrac{37-\sqrt{1509}}{2}\right\}$.

Nhận xét.

Lời giải 1 đặt ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc bậc hai với hai ẩn u và v. Đối với các căn thức có thể khai phương theo hằng đẳn thức, các bạn chú ý

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\text{và } a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Bài toán 12. Giải bất phương trình $(x-1)^2+3\le 2\sqrt{x^3-1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2-2x+4\le 2\sqrt{x^3-1}\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{x-1}-3(x-1)\le 0$.

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=u;\sqrt{x-1}=v(u>0;v\ge 0)$ thu được

$$u^2-2uv-3v^2\le 0\Leftrightarrow (u+v)(u-3v)\le 0\Leftrightarrow u\le 3v\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}\le 3\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x^2+x+1\le 9x-9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x^2-8x+10\le 0\end{cases}\Leftrightarrow 4-\sqrt{6}\le x\le 4+\sqrt{6}$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left[4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 1$.

Nhận xét $(x-1)^2+3>0\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-4x^3+12x^2-16x+16\le 4x^3-4 \Leftrightarrow x^4-8x^3+12x^2-16x+20\le 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+10\right)\left(x^2+2\right)\le 0 \Leftrightarrow 4-\sqrt{6}\le x\le 4+\sqrt{6}$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left[4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge 1$.

- Xét trường hợp $x=1$ không thỏa mãn bất phương trình ban đầu.
- Xét trường hợp $x>1$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2\le 2x-2+2\sqrt{x^3-1} \Leftrightarrow x^2+2\le 2\left(\sqrt{x^3-1}+x-1\right) \Leftrightarrow x^2+2\le \frac{2\left(x^3-x^2+2x-2\right)}{\sqrt{x^3-1}-x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\le 2\left(x^2+2\right)\frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}-x+1} \Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{x^3-1}-x+1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x-1}}\ge 1 \quad (*)$$

Nhận xét: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x-1}}>0\forall x>1$. Do đó

$$(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\ge \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}\ge \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-8x+10\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right].$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left[4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right]$.

Nhận xét.

- *Bài toán 12 thuộc lớp bất phương trình giải được thông qua phép đặt ẩn phụ, đưa về phương trình đồng bậc bậc hai, kết quả phân tích nhân tử rất đẹp mắt. Trong thao tác giải bất phương trình, các bạn cần chú ý điều kiện xác định (hoặc điều kiện có nghiệm), điều kiện của ẩn phụ để giảm thiểu các trường hợp xảy ra, giảm nhẹ tính toán và làm cho lời giải trở nên súc tích.*
- *Lời giải 2 sử dụng phép nâng lũy thừa trực tiếp (sau khi nhận xét hai vế không âm).*
- *Lời giải 3 sử dụng đẳng thức liên hợp, nhóm hạng tử phân tích thành thừa số, giản ước đưa về bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức. Tuy nhiên, sử dụng linh hoạt đẳng thức liên hợp "thêm một lần", hệ quả thu được đã trở nên đơn giản.*

Bài toán 13. Giải bất phương trình $x^2+13+3\sqrt{x^3+2x-3}\ge 9x \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3+2x-3\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+3\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2+x+3+3\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+x+3}-10(x-1)\ge 0$

Đặt $\sqrt{x^2+x+3}=a;\sqrt{x-1}=b \quad (a>0;b\ge 0)$ thu được

$$a^2+3ab-10b^2\ge 0 \Leftrightarrow a(a+5b)-2b(a+5b)\ge 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a+5b)\ge 0 \Leftrightarrow a-2b\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3}\ge 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x+7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3+2x-3\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+3\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x^3+2x-3}\ge -\left(x^2-9x+13\right)$ (1).

- Xét $x^2-9x+13>0$, bất phương trình (1) nghiệm đúng.

- Xét $x^2-9x+13\le 0$, ta có

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+13\le 0\\9\left(x^3+2x-3\right)\ge x^4-18x^3+107x^2-234x+169\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+13\le 0\\x^4-27x^3+107x^2-252x+196\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+13\le 0\\\left(x^2-3x+7\right)\left(x^2-24x+28\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+13\le 0\\x^2-24x+28\le 0\end{cases}\quad(*)$$

Ta có $x^2-9x+13\le 0;x\ge 1\Rightarrow x^2-9x+13-15(x-1)\le 0\Leftrightarrow x^2-24x+28\le 0$.

Vậy (*) nghiệm đúng với $x^2-9x+13\le 0$.

Kết hợp hai trường hợp, (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định, hay $x\ge 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^3+2x-3\ge 0\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+3\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-3x+7+3\left(\sqrt{x^3+2x-3}-2x-2\right)\ge 0\Leftrightarrow x^2-3x+7+\frac{3\left(x^3-4x^2+10x-7\right)}{\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+7+\frac{3(x-1)\left(x^2-3x+7\right)}{\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2}\ge 0\Leftrightarrow\left(x^2-3x+7\right)\left[1+\frac{3(x-1)}{\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2}\right]\ge 0\quad(2)$$

Nhận xét $x^2-3x+7>0\forall x\in\mathbb{R};x\ge 1\Rightarrow 1+\dfrac{3(x-1)}{\sqrt{x^3+2x-3}+2x+2}>0$. Vậy (2) nghiệm đúng với $x\ge 1$.

Kết luận tập nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Nhận xét.

- *Lời giải 1 sử dụng phép đặt ẩn phụ đưa về bất phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc hai. Khi đó với điều kiện mới của ẩn, chúng ta dễ dàng lập luận loại bỏ một trường hợp.*
- *Lời giải 2 nâng lũy thừa trực tiếp, thu được bất phương trình đa thức bậc 4, sử dụng hệ số bất định đưa về nhân tử. Các bạn chú ý kết hợp điều kiện xác định để tránh được các phép biến đổi căn thức phức tạp.*

Bài toán 14. Giải bất phương trình $3x^2+27\ge 7\sqrt{x^3+x-10}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3+x-10\ge 0\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\left(x^2+2x+5\right)-6(x-2)\ge 7\sqrt{x^2+2x+5}.\sqrt{x-2}$

Đặt $\sqrt{x^2+2x+5}=u;\sqrt{x-2}=v\quad(u\ge 13;v\ge 0)$, quy về

$$3u^2-7uv-6v^2\ge 0\Leftrightarrow 3u(u-3v)+2v(u-3v)\ge 0\Leftrightarrow (u-3v)(3u+2v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge 3v$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+5}\ge 3\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-7x+23\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3+x-10\ge 0\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$9x^4+162x^2+729\ge 49x^3+49x-490\Leftrightarrow 9x^4-49x^3+162x^2-49x+1219\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-7x+23\right)\left(9x^2+14x+53\right)\ge 0\quad(1)$$

Ta có $x^2-7x+23>0\forall x\in\mathbb{R};9x^2+14x+53>0\forall x\in\mathbb{R}$ nên (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.
Kết luận tập hợp nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x^3+x-10\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+5)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

- Nhận xét $x=2$ không là nghiệm của bất phương trình ban đầu.
- Xét trường hợp $x>2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2-21x+69\ge 7\left(\sqrt{x^3+x-10}-3x+6\right)\Leftrightarrow 3\left(x^2-7x+23\right)\ge \frac{7\left(x^3-9x^2+37x-46\right)}{\sqrt{x^3+x-10}+3x-6}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-7x+23\right)\ge \frac{7(x-2)\left(x^2-7x+23\right)}{\sqrt{x^3+x-10}+3x-6}\Leftrightarrow \left(x^2-7x+23\right)\left[\frac{7(x-2)}{\sqrt{x^3+x-10}+3x-6}-3\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7(x-2)}{\sqrt{(x-2)\left(x^2+2x+5\right)}+3(x-2)}\le 3\Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2+2x+5}+3\sqrt{x-2}}\le 3$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{x-2}\le 3\sqrt{x^2+2x+5}+9\sqrt{x-2}\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+2x+5}+2\sqrt{x-2}\ge 0\quad (2)$$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.
Do đó ta có tập nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Nhận xét.

- *Lời giải 2 sử dụng phép bình phương trực tiếp và hệ số bất định, phân tích phương trình bậc bốn hệ quả về hai phương trình bậc hai, hết sức may mắn khi hai tam thức bậc hai luôn luôn dương với mọi giá trị của biến, suy ra tập nghiệm chính là tập xác định của phương trình ban đầu. Lời giải 3 sử dụng đẳng thức liên hợp kết hợp điều kiện xác định, tránh được việc biện luận dấu mẫu thức của phương trình hệ quả, và cho kết quả hoàn toàn tương tự.*
- *Lời giải 1 ngắn gọn, súc tích dựa trên quan sát* $\sqrt{x^3+x-10}=\sqrt{x-2}.\sqrt{x^2+2x+5}$. *Có thể thấy phía ngoài căn thức là* $3x^2+27$, *dễ dàng đặt ẩn phụ và phân tích nhân tử. Trong một số trường hợp, điều này không đơn giản, mời các bạn theo dõi các thí dụ tiếp theo.*

Bài toán 15. Giải phương trình $5x^2-x+5=5\sqrt{x^4+x^2+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.
Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x^2+x+1\right)+3\left(x^2-x+1\right)=5\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{x^2-x+1}$
Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=u;\sqrt{x^2-x+1}=v\ \ (u>0;v>0)$ thu được

$$2u^2+3v^2=5uv\Leftrightarrow 2u(u-v)=3v(u-v)\Leftrightarrow (2u-3v)(u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\2u=3v\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow x^2+x+1=x^2-x+1\Leftrightarrow x=0$.
- $2u=3v\Leftrightarrow 4x^2+4x+4=9x^2-9x+9\Leftrightarrow 5x^2-13x+5=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{13+\sqrt{69}}{10};\frac{13-\sqrt{69}}{10}\right\}$.

Kết luận tập nghiệm $S=\left\{0;\frac{13-\sqrt{69}}{10};\frac{13+\sqrt{69}}{10}\right\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Nhận xét $5x^2 - x + 5 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$25x^4 + 50x^2 + 25 - 10x\left(x^2+1\right) + x^2 = 25\left(x^4 + x^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 10x^3 - 26x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x\left(5x^2 - 13x + 5\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{13-\sqrt{69}}{10}; \frac{13+\sqrt{69}}{10}\right\}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{13-\sqrt{69}}{10}; \frac{13+\sqrt{69}}{10}\right\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 1 đặt ẩn đưa về phương trình đồng bậc dựa trên quan sát* $\sqrt{x^4+x^2+1} = \sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{x^2-x+1}$.
  Tuy nhiên để có được biểu thị đẹp mắt $5x^2 - x + 5 = 2\left(x^2+x+1\right) + 3\left(x^2-x+1\right)$ *là một vấn đề không đơn giản, nguyên do cả hai nhân tử đều có dạng tam thức bậc hai. Ngoài cặp hệ số* $(2;3)$, *các cặp số khác cũng khá khả thi, chẳng hạn* $(4;1),(1;4),(3;2),(6;-1),(-2;7),\ldots$
- *Các bạn có thể sử dụng đồng nhất thức để tìm được các hệ số 2 và 3.*
  Đặt ẩn phụ $\sqrt{x^2+x+1} = u; \sqrt{x^2-x+1} = v \quad (u>0; v>0)$, *giả định*
  $$5x^2 - x + 5 = mu^2 + nv^2 = m\left(x^2+x+1\right) + n\left(x^2-x+1\right) = (m+n)x^2 + (m-n)x + m + n.$$
  Đồng nhất $\begin{cases} m+n=5 \\ m-n=-1 \\ m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$
- *Lưu ý một số phép biến đổi đồng nhất quen thuộc sau đây*
  $$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$$
  $$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = \left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(2x^2 + 2x + 1\right)$$
  $$x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = \left(x^2 - 4x + 8\right)\left(x^2 + 4x + 8\right)\ldots$$

Bài toán 16. Giải phương trình $2x^2 - x + 1 = \sqrt{4x^4+1} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4 - 4x^3 + x^2 + 2\left(2x^2 - x\right) + 1 = 4x^4 + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2 - 5x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 5x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình $4x^2 - 5x + 2 = 0$ vô nghiệm do $\Delta < 0$. Kết luận tập nghiệm $S = \{0\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2 - 4x + 4 = 4\sqrt{\left(2x^2-2x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right)} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 + 3\left(2x^2 - 2x + 1\right) = 4\sqrt{2x^2-2x+1}.\sqrt{2x^2+2x+1}$$

Đặt $\sqrt{2x^2+2x+1} = u; \sqrt{2x^2-2x+1} = v \quad (u>0; v>0)$ ta thu được

$$u^2 + 3v^2 = 4uv \Leftrightarrow (u-v)(u-3v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = 3v \end{array}\right.$$

- $u = v \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

- $u=3v \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+1}=3\sqrt{2x^2-2x+1} \Leftrightarrow 2x^2+2x+1=9\left(2x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow 16x^2-20x+8=0$ (Vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{0\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình $8x^2+20x+1=\sqrt{64x^4+1} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $64x^4+1=\left(8x^2+1\right)^2-16x^2=\left(8x^2+4x+1\right)\left(8x^2-4x+1\right)$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3\left(8x^2+4x+1\right)-2\left(8x^2-4x+1\right)=\sqrt{8x^2+4x+1}.\sqrt{8x^2-4x+1}$$

Đặt $\sqrt{8x^2+4x+1}=a;\sqrt{8x^2-4x+1}=b \quad \left(a>0;b>0\right)$ ta thu được

$$3a^2-2b^2=ab \Leftrightarrow 3a\left(a-b\right)+2b\left(a-b\right)=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(3a+2b\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \sqrt{8x^2+4x+1}=\sqrt{8x^2-4x+1} \Leftrightarrow 8x^2+4x+1=8x^2-4x+1 \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{0\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}8x^2+20x+1\ge 0\\ 64x^4+16x^2+1+40x\left(8x^2+1\right)+400x^2=64x^4+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x^2+20x+1\ge 0\\ 320x^3+416x^2+40x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8x^2+20x+1\ge 0\\ x\left(40x^2+52x+5\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \begin{cases}8x^2+20x+1\ge 0\\ 40x^2+52x+5\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{0\}$.

Bài toán 18. Giải bất phương trình $3\sqrt{81x^4+4}\ge 27x^2+42x+6 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $81x^4+4=81x^4+36x^2+4-36x^2=\left(9x^2+2\right)^2-\left(6x\right)^2=\left(9x^2-6x+2\right)\left(9x^2+6x+2\right)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{9x^2-6x+2}.\sqrt{9x^2+6x+2}\ge 5\left(9x^2+6x+2\right)-2\left(9x^2-6x+2\right).$$

Đặt $\sqrt{9x^2+6x+2}=u;\sqrt{9x^2-6x+2}=v \quad \left(u>0;v>0\right)$ quy về

$$3uv\ge 5u^2-2v^2 \Leftrightarrow u\left(5u+2v\right)-v\left(5u+2v\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(5u+2v\right)\le 0 \Leftrightarrow u\le v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2+6x+2}\le\sqrt{9x^2-6x+2} \Leftrightarrow 9x^2+6x+2\le 9x^2-6x+2 \Leftrightarrow x\le 0$$

Kết luận nghiệm $S=\left(-\infty;0\right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Xét hai trường hợp

- $27x^2+42x+6<0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- $27x^2+42x+6\ge 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}27x^2+42x+6\ge 0\\ 9\left(81x^4+4\right)\ge 729x^4+324x^2+36+84x\left(27x^2+6\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27x^2+42x+6\ge 0\\ 2268x^3+324x^2+504x\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}27x^2+42x+6\ge 0\\ x\left(63x^2+9x+14\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27x^2+42x+6\ge 0\\ x\le 0\end{cases}$$

Kết hợp hai trường hợp thu được nghiệm $S=\left(-\infty;0\right]$.

Bài toán 19. Giải bất phương trình $x^2-4x+2\ge\sqrt{x^4+4}$ $\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2-8x+4\ge 2\sqrt{x^4+4}\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x+2\right)-\left(x^2+2x+2\right)\ge 2\sqrt{x^2-2x+2}.\sqrt{x^2+2x+2}.$$

Đặt $\sqrt{x^2-2x+2}=a;\sqrt{x^2+2x+2}=b\quad\left(a>0;b>0\right)$ ta thu được

$$3a^2-b^2\ge 2ab\Leftrightarrow a\left(3a+b\right)-b\left(3a+b\right)\ge 0\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(3a+b\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a\ge b\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+2}\ge\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+2\ge x^2+2x+2\Leftrightarrow x\le 0$$

Kết luận: Bất phương trình ban đầu có tập nghiệm $S=\left(-\infty;0\right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x^2-4x+2\ge 0\\ x^4+4x^2+4-8x\left(x^2+2\right)+16x^2\ge x^4+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+2\ge 0\\ x\left(2x^2-5x+4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+2\ge 0\\ x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\le 0.$$

Kết luận: Bất phương trình ban đầu có tập nghiệm $S=\left(-\infty;0\right]$.

Bài toán 20. Giải phương trình $3x^2-4x+23=3\sqrt{x^4-8x+63}$ $\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^4-8x+63\ge 0$.

Nhận xét $x^4-8x+63=x^4+16x^2+64-\left(16x^2+8x+1\right)=\left(x^2+8\right)^2-\left(4x+1\right)^2=\left(x^2+4x+9\right)\left(x^2-4x+7\right)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(x^2-4x+7\right)+x^2+4x+9=3\sqrt{x^2-4x+7}.\sqrt{x^2+4x+9}$$

Đặt $\sqrt{x^2-4x+7}=u;\sqrt{x^2+4x+9}=v\quad\left(u>0;v>0\right)$ ta thu được

$$2u^2+v^2=3uv\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(2u-v\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ 2u=v\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2-4x+7}=\sqrt{x^2+4x+9} & (1)\\ 2\sqrt{x^2-4x+7}=\sqrt{x^2+4x+9} & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow x^2-4x+7=x^2+4x+9\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$.
- $(2)\Leftrightarrow 4\left(x^2-4x+7\right)=x^2+4x+9\Leftrightarrow 3x^2-20x+19=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{10-\sqrt{43}}{3};\dfrac{10+\sqrt{43}}{3}\right\}$.

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{-\frac{1}{4};\frac{10-\sqrt{43}}{3};\frac{10+\sqrt{43}}{3}\right\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x^4-8x+63\ge 0$.
Nhận xét $3x^2-4x+23>0\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^4-24x^3+16x^2+46\left(3x^2-4x\right)+23^2=9\left(x^4-8x+63\right)\Leftrightarrow 24x^3-154x^2+112x-38=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3-77x^2+56x-19=0\Leftrightarrow\left(4x+1\right)\left(3x^2-20x+19\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{0;\frac{10-\sqrt{43}}{3};\frac{10+\sqrt{43}}{3}\right\}$$

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{-\frac{1}{4};\frac{10-\sqrt{43}}{3};\frac{10+\sqrt{43}}{3}\right\}$.

Bài toán 21. Giải phương trình $x^2+5x-2=4\sqrt{x^3-8}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 2$.
- Xét $x=2$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Xét $x>2$, phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+4+3\left(x-2\right)=4\sqrt{x^2+2x+4}.\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\frac{x^2+2x+4}{x-2}+3=4\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x-2}}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x-2}}=t\quad\left(t>0\right)$ thu được $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow x^2+2x+4=x-2\Leftrightarrow x^2+x+6=0$ (Vô nghiệm).

Với $t=3\Leftrightarrow x^2+2x+4=9x-18\Leftrightarrow x^2-7x+22=0$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $2x^2+5x-1>7\sqrt{x^3-1}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải.
Điều kiện $x\ge 1$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\left(x-1\right)+2\left(x^2+x+1\right)>7\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+x+1}.$$

Đặt $\sqrt{x-1}=a;\sqrt{x^2+x+1}=b\quad\left(a\ge 0;b>0\right)$ thu được

$$3a^2-7ab+2b^2>0\Leftrightarrow\left(3a-b\right)\left(a-2b\right)>0\Leftrightarrow\frac{9a^2-b^2}{3a+b}.\frac{a^2-4b^2}{a+2b}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(9a^2-b^2\right)\left(a^2-4b^2\right)>0\Leftrightarrow\left(8x^2-19x+8\right)\left(3x^2+6x+3\right)<0$$

$$\Leftrightarrow\left(8x^2-19x+8\right)\left(x+1\right)^2<0\Leftrightarrow\frac{19-\sqrt{105}}{16}<x<\frac{19+\sqrt{105}}{16}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $1<x<\frac{19+\sqrt{105}}{16}$.

Bài tập tương tự.
Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $5x^2+6x+4=6\sqrt{x^3-1}$.
2. $4x^2+7x+1=7\sqrt{x^3-1}$.
3. $x^2+3x+5\le 5\sqrt{x^3+1}$.
4. $\dfrac{5x^2-2x+8}{\sqrt{x^3+1}}<8$.
5. $\dfrac{10\sqrt{x^3-8}}{x^2+11x-14}\le 1$.
6. $3x^2-\sqrt{2}x+3=3\sqrt{x^4+1}$.
7. $11x^2+6x+22\le 11\sqrt{x^4+4}$.
8. $\dfrac{5\sqrt{4x^4+1}}{10x^2-6x+5}>1$.
9. $72x^2-4x+9\le 9\sqrt{64x^4+1}$.
10. $5x^2-6x+28=9\sqrt{x^3+8}$.
11. $4x^2+15x+45\le 7\sqrt{x^3-27}$.
12. $x^2+x+21<5\sqrt{x^3+27}$.
13. $\dfrac{x^2+x+36}{\sqrt{x^3+64}}=6$.
14. $\sqrt{x^3-64}\le 3x^2+10x+56$.
15. $x^2+4x+1=\sqrt{x^4+x^2+1}$.
16. $7x^2-5x+7>7\sqrt{x^4+x^2+1}$.
17. $\dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{3x^2-5x+3}\le \dfrac{1}{3}$.
18. $4x^2-4x+1\le 2\sqrt{16x^4+4x^2+1}$.
19. $x^2+6x-1>5\sqrt{x^3+3x-14}$.
20. $\dfrac{6x^2+14x+35}{\sqrt{2x^3+5x-26}}>5$.
21. $4x^2+17x+99\le \sqrt{x^3+4x^2-24}$.
22. $x^2+2\sqrt{2}x+1\le \sqrt{1+x^4}$.
23. $4x^2-4x+31\le 4\sqrt{x^4-8x+63}$.
24. $1\le \dfrac{\sqrt{x^4-x^2+4}}{3x^2-7\sqrt{5}x+6}$.
25. $4x^2-\sqrt{7}x+1\le 2\sqrt{4x^4-3x^2+1}$.
26. $20x^2-3x+5=5\sqrt{16x^4-x^2+1}$.
27. $\dfrac{7\sqrt{x^2(x+1)-2}}{5x^2+12x+8}>1$.

Bài toán 23. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2-x}=3\sqrt[4]{(2x-1)(2-x)}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2}\le x\le 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2-x}=3\sqrt[4]{2x-1}.\sqrt[4]{2-x}$.

Đặt $\sqrt[4]{2x-1}=u;\sqrt[4]{2-x}=v\ \ (u\ge 0;v\ge 0)$ ta có $u^2+2v^2=3uv\Leftrightarrow (u-v)(u-2v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=2v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow 2x-1=2-x\Leftrightarrow x=1$.
- $u=2v\Leftrightarrow \sqrt[4]{2x-1}=2\sqrt[4]{2-x}\Leftrightarrow 2x-1=16(2-x)\Leftrightarrow \frac{11}{6}$.

So sánh điều kiện $\frac{1}{2}\le x\le 2$ ta thu được tập nghiệm $S=\left\{\frac{11}{6};1\right\}$.

Bài toán 24. Giải phương trình $3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{4x-3}=7\sqrt[4]{12x^2-17x+6}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{3x-2}+4\sqrt{4x-3}=7\sqrt[4]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}$ $\quad (*)$

Đặt $\sqrt[4]{3x-2}=u;\sqrt[4]{4x-3}=v\ \ (u>0;v\ge 0)$ thì (*) trở thành

$$3u^2+4v^2=7uv\Leftrightarrow (u-v)(3u-4v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\3u=4v\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow \sqrt[4]{3x-2}=\sqrt[4]{4x-3}\Leftrightarrow 3x-2=4x-3\Leftrightarrow x=1$.
- $3u=4v\Leftrightarrow 3\sqrt[4]{3x-2}=4\sqrt[4]{4x-3}\Leftrightarrow 27(3x-2)=256(4x-3)\Leftrightarrow x=\frac{714}{943}$.

Đối chiếu điều kiện $x\ge\frac{3}{4}$ ta có tập hợp nghiệm $S=\left\{\frac{714}{943};1\right\}$.

Bài toán 25. Giải bất phương trình $2\sqrt{5x-2}\ge 3\sqrt[4]{30x^2-17x+2}-\sqrt{6x-1}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{5x-2}\ge 3\sqrt[4]{5x-2}.\sqrt[4]{6x-1}-\sqrt{6x-1}$.

Đặt $\sqrt[4]{5x-2}=a;\sqrt[4]{6x-1}=b\ \ (a\ge 0;b>0)$ thu được

$$2a^2\ge 3ab-b^2\Leftrightarrow a(2a-b)-b(2a-b)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)(2a-b)\ge 0\quad (1)$$

Ta có $x\ge\frac{2}{5}\Rightarrow 0<5x-2<6x-1\Rightarrow \sqrt[4]{5x-2}<\sqrt[4]{6x-1}\Leftrightarrow a<b$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow 2a\le b\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{5x-2}\le\sqrt[4]{6x-1}\Leftrightarrow 16(5x-2)\le 6x-1\Leftrightarrow x\le\frac{31}{74}$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge\frac{2}{5}$, kết luận tập nghiệm $S=\left[\frac{2}{5};\frac{31}{74}\right]$.

Bài toán 26. Giải phương trình $\frac{x^3-8}{x-2}=3\sqrt{x^3+4x}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $0 \le x \ne 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x} \Leftrightarrow x^2+4+2x=3\sqrt{x}.\sqrt{x^2+4}$.

Đặt $\sqrt{x^2+4}=u;\sqrt{x}=v\;\left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được

$$u^2+2v^2=3uv \Leftrightarrow u\left(u-v\right)-2v\left(u-v\right)=0 \Leftrightarrow \left(u-v\right)\left(u-2v\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=2v \end{array}\right.$$

- $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+4=x \Leftrightarrow x^2-x+4=0$ (Vô nghiệm).
- $u=2v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+4=4x \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=2$.

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.
Điều kiện $0 \le x \ne 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x}$ (1).

Nhận xét $x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ nên

$$\left(1\right) \Leftrightarrow x^4+4x^3+4x^2+8x^2+16x+16=9x^3+36x \Leftrightarrow x^4-5x^3+12x^2-20x+16=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-4x+4\right)-x\left(x^2-4x+4\right)+4\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x+4\right)\left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}\le 5\sqrt[4]{\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2}$ $\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}\le 5\sqrt[4]{1-x}.\sqrt[4]{1-x^2}$.

Đặt $\sqrt[4]{1-x}=a;\sqrt[4]{1-x^2}=b\;\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$ ta có $2a^2+2b^2\le 5ab \Leftrightarrow 2a\left(a-2b\right)-b\left(a-2b\right) \Rightarrow \left(2a-b\right)\left(a-2b\right)\le 0$.

Xét hai trường hợp

- $$\left\{\begin{array}{l} 2a-b\le 0 \\ a-2b\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ 2\sqrt[4]{1-x}\le\sqrt[4]{1-x^2} \\ \sqrt[4]{1-x}\ge 2\sqrt[4]{1-x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-16x+15\le 0 \\ 16x^2-x-15\ge 0 \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1\le x\le 15 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -\dfrac{15}{16} \end{array}\right. \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ -1\le x\le -\dfrac{15}{16} \end{array}\right.$$

- $$\left\{\begin{array}{l} 2a-b\ge 0 \\ a-2b\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ 2\sqrt[4]{1-x}\ge\sqrt[4]{1-x^2} \\ \sqrt[4]{1-x}\le 2\sqrt[4]{1-x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-16x+15\ge 0 \\ 16x^2-x-15\le 0 \\ -1\le x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{15}{16}\le x\le 1 \\ -1\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 15 \\ x\le 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{15}{16}\le x\le 1.$$

Kết luận tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[-1;1\right]$.

Nhận xét.
Ngoài cách xử lý "thủ công" phần cuối bài toán 24, các bạn có thể thử sức với cách sử dụng đẳng thức liên hợp.

Bài toán 28. Giải phương trình $\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}+3\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2}=4\sqrt[3]{x^2-4}$ $\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Đặt $\sqrt[3]{x+2} = a; \sqrt[3]{x-2} = b$, phương trình đã cho trở thành

$$a^2 + 3b^2 = 4ab \Leftrightarrow a(a-b) - 3b(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-3b)(a-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 3b \end{array}\right.$$

- $a = b \Leftrightarrow x - 2 = x + 2 \Leftrightarrow 0x = 4$ (Vô nghiệm).
- $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} = 3\sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow x + 2 = 27(x-2) \Leftrightarrow x = \dfrac{28}{13}$.

Kết luận phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{28}{13}\right\}$.

Bài toán 29. Giải phương trình $4\sqrt[3]{(2x+1)^2} + 3\sqrt[3]{(1-2x)^2} = 8\sqrt[3]{4x^2-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Đặt $\sqrt[3]{2x+1} = u; \sqrt[3]{2x-1} = v$, phương trình đã cho trở thành

$$4u^2 + 3v^2 = 8uv \Leftrightarrow 2u(2u-3v) - v(2u-3v) = 0 \Leftrightarrow (2u-v)(2u-3v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2u = v \\ 2u = 3v \end{array}\right.$$

- $2u = v \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 8(2x+1) = 2x - 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{14}$.
- $2u = 3v \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{2x+1} = 3\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 8(2x+1) = 27(2x-1) \Leftrightarrow x = \dfrac{35}{38}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\dfrac{9}{14}$ hoặc $x = \dfrac{35}{38}$.

Bài toán 30. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x^2+6x+9} - 4\sqrt[3]{6x-x^2-9} + 5\sqrt[3]{9-x^2} < 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{(x+3)^2} + 4\sqrt[3]{(x-3)^2} < 5\sqrt[3]{x^2-9}$.
Đặt $\sqrt[3]{x+3} = u; \sqrt[3]{x-3} = v$ ta thu được

$$u^2 + 4v^2 < 5uv \Leftrightarrow u(u-v) - 4v(u-v) < 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-4v) < 0 \quad (1).$$

Nhận xét $x + 3 > x - 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x+3} > \sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow u > v$.
Do đó $(1) \Leftrightarrow u - 4v > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} > 4\sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow x + 3 > 64(x-3) \Leftrightarrow x < \dfrac{65}{21}$.
Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \dfrac{65}{21}\right]$.

Nhận xét.
Các bài toán từ $23 \to 30$ về hình thức gợi ý chúng ta đặt ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc (bậc hai), ngoài ra có thể nâng lũy thừa trực tiếp cũng cho kết quả tương tự. Đối với lớp bất phương trình, các bạn chú ý chia các trường hợp chính xác hoặc linh hoạt sử dụng tập xác định (điều kiện có nghiệm) để lập luận, đánh giá nhân tử, giảm thiểu các nghiệm ngoại lai và một số tính toán cồng kềnh, không cần thiết.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^2+5x+7=6\sqrt{x^3+7x}$.
2. $6x^2+7x+8>9\sqrt{3x^3+4x}$.
3. $16x^2+7x+4\le 11\sqrt{4x^3+x}$.
4. $(x+1)^2+3=2\sqrt{x^3+4x}$.
5. $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$.
6. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+5\sqrt[3]{(x-1)^2}=6\sqrt[3]{x^2-1}$.
7. $2\left(x^2+2x+3\right)<5\sqrt{x^3+5x^2+3x+2}$.
8. $7\sqrt{1+x^3}=\sqrt{6}\left(x^2+2\right)$.
9. $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$.
10. $3x^2-9x+3+\sqrt{3\left(x^4+x^2+1\right)}=0$.
11. $5x^2+4x+3=5\sqrt{5x^3+3x}$.
12. $\sqrt{1-x}+2\sqrt{1-x^2}=3\sqrt[4]{(1-x)^2(1+x)}$.
13. $3\sqrt{x+2}+8\sqrt{x+3}\le 11\sqrt[4]{x^2+5x+6}$.
14. $5x+5+6\sqrt{x}\ge 11\sqrt[4]{x(x+1)^2}$.
15. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{(1-x)^2}=4\sqrt[3]{x^2-1}$.
16. $2\sqrt[3]{(x-5)^2}+2\sqrt[3]{(x+5)^2}\le 5\sqrt[3]{x^2-25}$.
17. $4\sqrt{x}<11\sqrt[4]{x(3-x)}-7\sqrt{3-x}$.
18. $10\sqrt[3]{(3x-2)^2}-7\sqrt[3]{(3x+2)^2}\le 3\sqrt[3]{9x^2-4}$.
19. $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)^2}\ge \sqrt[3]{2x^2-3x+1}$.
20. $2\sqrt[3]{(3x-1)^2}+3\sqrt[3]{(4x-1)^2}=5\sqrt[3]{12x^2-7x+1}$.
21. $3\sqrt{x^2+2x+2}+2\sqrt{x-2}\ge 5\sqrt[4]{x^3-2x-4}$.
22. $2\sqrt[3]{(x-2)^2}\le \sqrt[3]{\left(x^2+2x+4\right)^2}+\sqrt[3]{x^3-8}$.
23. $5\sqrt[3]{(x+1)^2}=8\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}-3\sqrt[3]{x^3+1}$.
24. $17\sqrt[3]{(x-3)^2}>4\sqrt[3]{\left(x^2+3x+9\right)^2}+13\sqrt[3]{x^3-27}$.
25. $6\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}=5\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$.
26. $2\sqrt{3x-2}+\sqrt{2+x}\ge 3\sqrt[4]{(3x-2)(x+2)}$.
27. $5x^4+3x^2-3=8x^2\sqrt{(x-1)(x+1)}$.
28. $\sqrt{x^2+1}+4\sqrt{x-1}<5\sqrt[4]{x^3-x^2+x-1}$.

Bài toán 31. Giải phương trình $x^2+7x+3=3\sqrt{x^3+4x^2-5}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+4x^2-5\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+5)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+5x+5+2(x-1)=3\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2+5x+5}$ $\quad$ (1).

Đặt $\sqrt{x-1}=u;\sqrt{x^2+5x+5}=v\ (u\ge 0;v>0)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2u^2+v^2=3uv\Leftrightarrow (u-v)(2u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ v=2u\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+5x+5}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2+4x+5=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $2u=v\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+5x+5}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2+5x+5=4x-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 1\\ x^2+x+9=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 32. Giải phương trình $x^2-3x+4=3\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-5x+6+2(x-1)=3\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2-5x+6}$ $\quad$ (1).

Đặt $\sqrt{x-1}=a;\sqrt{x^2-5x+6}=b\quad (a\ge 0;b\ge 0)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow a^2+2b^2=3ab\Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=2b\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow x-1=x^2-5x+6\Leftrightarrow x^2-6x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{2}\\ x=3-\sqrt{2}\end{array}\right.$
- $a=2b\Leftrightarrow x-1=4(x^2-5x+6)\Leftrightarrow 4x^2-21x+25=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{21-\sqrt{41}}{8};\frac{21+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được bốn nghiệm $S=\left\{3-\sqrt{2};3+\sqrt{2};\frac{21-\sqrt{41}}{8};\frac{21+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$

Nhận xét $x=1$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-5x+6+2(x-1)=3\sqrt{(x-1)(x^2-5x+6)}\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1}+2=3\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}\quad (*)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x-1}}=t\ (t\ge 0)$ ta có $(*)\Leftrightarrow t^2+2=3t\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.$

- $t=1\Leftrightarrow x-1=x^2-5x+6\Leftrightarrow x^2-6x+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{2}\\ x=3-\sqrt{2}\end{array}\right.$

- $t = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4\left(x^2 - 5x + 6\right) \Leftrightarrow 4x^2 - 21x + 25 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{21-\sqrt{41}}{8};\dfrac{21+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được bốn nghiệm $S = \left\{3-\sqrt{2};3+\sqrt{2};\dfrac{21-\sqrt{41}}{8};\dfrac{21+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Bài toán 33. Giải phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 3\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x^2 - 3x + 2\right) + (x-3) = 3\sqrt{\left(x^2 - 3x + 2\right)(x-3)}$ $\quad (*)$

Đặt $x^2 - 3x + 2 = a; x - 3 = b$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 2a + b = 3\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b \ge 0 \\ 4a^2 + 4ab + b^2 = 9ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b \ge 0 \\ (a-b)(4a-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2a + b \ge 0 \\ a = b \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2a + b \ge 0 \\ 4a = b \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $(2) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \ge 0 \\ 4\left(x^2 - 3x + 2\right) = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \ge 0 \\ 4x^2 - 13x + 11 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right.$

Nhận xét $x = 3$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) + (x-3) = 3\sqrt{\left(x^2 - 3x + 2\right)(x-3)} \Leftrightarrow 2.\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} + 1 = 3\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}} \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}} = t$ $\ (t \ge 0)$ thì (*) trở thành: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Xét hai trường hợp

- $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0; \Delta' = -1 < 0$, phương trình vô nghiệm.
- $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4\left(x^2 - 3x + 2\right) = x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 11 = 0; \Delta = -7 < 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

- *Các bài toán $31 \to 33$ đều được giải được bằng phép sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc và tìm tỷ lệ giữa hai ẩn thông qua phương trình bậc hai. Ngoài ra các bạn có thể sử dụng nâng lũy thừa trực tiếp kết hợp hệ số bất định cũng cho lời giải "khỏe mạnh, chớp nhoáng, bất ngờ".*
- *Quan sát và thực hành các thí dụ phía trước một cách có hệ thống, dạng toán này có thể đã trở nên quen thuộc với một số bạn học sinh, hai bài toán 32 và 33 về hình thức vẫn chưa có điều gì mới lạ, tuy nhiên có một sự khác biệt nho nhỏ trong lập luận, điểm nhấn trọng tâm của hai thí dụ này là: Đa thức trong căn thức khó có thể phân tích thành các nhân tử độc lập (nếu không chia trường hợp theo điều kiện xác định).*
  Cụ thể trong hai bài toán 32 và 33 ta đều có phân tích
  $$\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{(x-1)[(x-2)(x-3)]}=\sqrt{(x-1)(x^2-5x+6)}\\ \sqrt{(x-2)[(x-1)(x-3)]}=\sqrt{(x-2)(x^2-4x+3)}\\ \sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)}=\sqrt{(x^2-3x+2)(x-3)}\end{array}\right..$$
  Xin nhắc lại kiến thức cơ bản: $\sqrt{ABC...}=\sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}...\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\ B\ge 0\end{cases}...$
- *Đối với bài toán 32 ta có quan sát* $x^2-3x+4=x^2-5x+6+2(x-1)$ *nên hướng xây dựng ẩn phụ đồng bậc sẽ là* $\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}=\sqrt{(x-1)[(x-2)(x-3)]}=\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2-5x+6}$ (*).
  Lưu ý điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$
  Dễ thấy (*) xảy ra hiển nhiên. Kết quả thu được lời giải 1 bài toán 32.
- *Đối với bài toán 33 ta có quan sát* $2x^2-5x+1=2(x^2-3x+2)+x-3$ *nên hướng xây dựng ẩn phụ đồng bậc sẽ là* $\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}=\sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)}=\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x-3}$ (**).
  Lưu ý điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$
  Trong trường hợp này (**) không đúng, nói khác nó chỉ xảy ra khi $x\ge 3$.
  Điều này đặt ra một nghi vấn: Phải chăng chúng ta đang gặp một chướng ngại vật ?
  Bởi vì hai nhân tử này luôn dính với nhau như "hình với bóng", nếu tách ra sẽ rất phức tạp.
  Vậy có nên dừng lại hay không ? Không, trường kỳ kháng chiến nhất định thắng lợi !
  Đoàn kết, đoàn kết, đại đoàn kết ! Thành công, thành công, đại thành công !
  Có một số phương án lựa chọn như sau
  - *Dùng vũ lực, tách biệt hoàn toàn hai nhân tử bằng cách chia trường hợp*
    Trường hợp 1: $x\ge 3$, *(**) xảy ra, chúng ta "mãn nguyện" với hai ẩn phụ*
    $$\sqrt{x^2-3x+2}=u;\sqrt{x-3}=v\ \ (u\ge 0;v\ge 0)\Rightarrow 2u^2+v^2=3uv$$
    Trường hợp 2: $1\le x\le 2$, *(**) không xảy ra nhưng lại có mũi vu hồi bất ngờ*
    $$\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}=\sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)}=\sqrt{-x^2+3x-2}.\sqrt{3-x}$$
    Chúng ta không được "hài lòng" lắm với hai ẩn phụ $\sqrt{-x^2+3x-2}=a;\sqrt{3-x}=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)$.
    Phương trình khi đó có dạng $-2a^2-b^2=3ab\Leftrightarrow(a+b)(2a+b)=0\Leftrightarrow a=b=0$
    Sở dĩ như vậy vì $a\ge 0;b\ge 0$. *Và tất nhiên trường hợp này sẽ vô nghiệm.*
    Phương án 1 rất khả thi, song chưa phải tối ưu vì phải chia hai trường hợp, hai lần đặt ẩn phụ, mặt khác một trường hợp mang tính chất "thủ tục" vì lý do vô nghiệm, song nếu không có nó thì bài toán coi như không trọn vẹn về "tư tưởng".

- *Thỏa hiệp, tâm lý chiến, gián tiếp: Không tách biệt riêng biệt hai nhân tử, vẫn để chúng "dính kép" vào nhau. Sử dụng phép đặt ẩn phụ phía trong căn, sau phép bình phương trực tiếp (kéo theo điều kiện) chúng ta đã có quyền sinh quyền sát, thực hiện đưa về nhân tử, lúc này có "dính kép" cũng không quan trọng nữa. Kết quả chúng ta đã thu được lời giải 1 bài toán 32. Tuy nhiên việc giải các hệ hỗn tạp cũng gây không ít trở ngại.*
- *Chiến tranh du kích, mềm dẻo, linh hoạt: Không tách riêng hai nhân tử, nhưng mục tiêu trung gian là tìm tỷ lệ giữa hai nhân tử, vậy tại sao không để chúng "dính kép" với nhau theo "tỷ lệ" ấy, không ảnh hưởng nhiều đến việc độc lập hay ly khai phức tạp. Chúng ta hãy tác thành cho họ !*

  Các bạn lưu ý : $\sqrt{AB}$ xác định thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}}$ $(B\neq 0)$ cũng xác định.

  Kết quả ý tưởng thu được lời giải 2 bài toán 32.
  Nhận xét $x=3$ không là nghiệm, đây sẽ là "cái cớ" để chia hai vế cho biểu thức $x-3$, hệ quả dẫn đến ẩn phụ rất gọn gàng. Có thể nói với dạng toán này, phương án 3 là tối ưu.
  Các bạn hoàn toàn có thể chia hai vế cho $x^2-3x+2=0$, nhưng không nên, vì như vậy sẽ phải xét hai trường hợp $x=1;x=2$ có là nghiệm của phương trình hay không.
  Giả định có một chú kiến "phải" bò từ đỉnh này sang đỉnh kia (hai đỉnh của hai góc nhọn) của một tam giác vuông thực, kiến sẽ chọn bò theo cạnh huyền hay theo hai cạnh góc vuông, hay là theo đường gấp khúc hoặc một đường cong nào đó ?
  Với điều kiện trên các con đường của ta không có một giọt mật nào.
  Hy vọng các bạn thông minh hơn kiến nhé !
  Sự linh hoạt này các bạn có thể áp dụng trong việc giải bất phương trình chứa căn, loại bỏ đi khá nhiều tiểu tiết không cần thiết. Mời quý độc giả theo dõi các thí dụ tiếp theo.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $3x^2-4x-5>5\sqrt{x^3-7x-6}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-7x-6\geq 0\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+2)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3\\ -2\leq x\leq -1\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3(x^2-2x-3)+2(x+2)>5\sqrt{x^2-2x-3}.\sqrt{x+2}$

Đặt $\sqrt{x^2-2x-3}=u;\sqrt{x+2}=v\ (u\geq 0;v\geq 0)$ ta có $3u^2+2v^2>5uv\Leftrightarrow (u-v)(3u-2v)>0$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases} u-v>0\\ 3u-2v>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2x-3>x+2\\ 9(x^2-2x-3)>4(x+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-3x-5>0\\ 9x^2-22x-35>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x>\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\\ x<\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$
- $\begin{cases} u-v<0\\ 3u-2v<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-2x-3<x+2\\ 9(x^2-2x-3)<4(x+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-3x-5<0\\ 9x^2-22x-35<0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{11-2\sqrt{109}}{9}<x<\dfrac{11+2\sqrt{109}}{9}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\left[-2;\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11-2\sqrt{109}}{9};-1\right]\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 35. Giải phương trình $2x^2+13x=36+7\sqrt{x^3-24x+32}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-24x+32\geq 0$.
Nhận xét $x=4$ không là nghiệm của phương trình ban đầu.
Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(x^2+4x-8\right)+5\left(x-4\right)=7\sqrt{\left(x^2+4x-8\right)\left(x-4\right)} \Leftrightarrow 2.\frac{x^2+4x-8}{x-4}+5=7\sqrt{\frac{x^2+4x-8}{x-4}} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+4x-8}{x-4}}=t\ \left(t\ge 0\right)$ thì $(1)\Leftrightarrow 2t^2-7t+5=0\Leftrightarrow (t-1)(2t-5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{5}{2}\end{array}\right.$

- $t=1\Leftrightarrow x^2+4x-8=x-4\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow (x-1)(x+4)=0\Leftrightarrow x\in\{-4;1\}$.
- $t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 4\left(x^2+4x-8\right)=25(x-4)\Leftrightarrow 4x^2-9x+68=0;\Delta=-1007<0$. Phương trình vô nghiệm.

So sánh điều kiện, ta thu được tập nghiệm $S=\{-4;1\}$.

Bài toán 36. Giải bất phương trình $4x^2-25x+14\le 3\sqrt{x^3-31x+30}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-31x+30\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x+6)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 5 \\ -6\le x\le 1\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(x^2-6x+5\right)-(x+6)\le 3\sqrt{\left(x^2-6x+5\right)(x+6)}$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x^2-6x+5\right)-(x+6)\le 3\sqrt{x^2-6x+5}.\sqrt{x+6}$$

Đặt $\sqrt{x^2-6x+5}=a;\sqrt{x+6}=b$ $\quad (a\ge 0;b\ge 0)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow 4a^2-b^2\le 3ab\Leftrightarrow (a-b)(4a+b)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a+b=0 \\ a\le b\end{array}\right.$$

- $4a+b=0\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \\ x=-6\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $a\le b\Leftrightarrow x^2-6x+5\le x+6\Leftrightarrow x^2-7x-1\le 0\Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{53}}{2}\le x\le\frac{7+\sqrt{53}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\left[\frac{7-\sqrt{53}}{2};1\right]\cup\left[5;\frac{7+\sqrt{53}}{2}\right]$.

Bài toán 37. Giải bất phương trình $3x^2+14x-14\ge 2\sqrt{x^3+x^2-26x+24}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+x^2-26x+24\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(x+6)(x-4)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ -6\le x\le 1\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\left(x^2+5x-6\right)-(x-4)\ge 2\sqrt{\left(x^2+5x-6\right)(x-4)}$

Đặt $x^2+5x-6=u;x-4=v$ ta thu được

$$3u-v\ge 2\sqrt{uv}\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v\ge 0 \\ 9u^2-6uv+v^2\ge 4uv\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v\ge 0 \\ 9u^2-10uv+v^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v\ge 0 \\ (u-v)(9u-v)\ge 0\end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases} 3u-v\ge 0 \\ u-v\ge 0 \\ 9u-v\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x-14\ge 0 \\ x^2+4x-2\ge 0 \\ 9x^2+44x-50\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{-22-\sqrt{934}}{9} \\ x\ge \dfrac{-22+\sqrt{934}}{9} \end{array}\right.$

- $\begin{cases} 3u-v\ge 0 \\ u-v\le 0 \\ 9u-v\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x-14\ge 0 \\ x^2+4x-2\le 0 \\ 9x^2+44x-50\le 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy ta có nghiệm $S=\left[-6;\dfrac{-22-\sqrt{934}}{9}\right]\cup\left[4;+\infty\right)$.

Bài toán 38. Giải phương trình $3x^2+5x-5=2\sqrt{x^3-2x^2-11x+12}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(x-4\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ -3\le x\le 1 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3\left(x^2+2x-3\right)-\left(x-4\right)=2\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)\left(x-4\right)}\Leftrightarrow 3.\frac{x^2+2x-3}{x-4}-1=2\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-4}}\quad (1)$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x-4}}=t\ \left(t\ge 0\right)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow 3t^2-1=2t\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(3t+1\right)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^2+2x-3=x-4\Leftrightarrow x^2+x+1=0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 39. Giải phương trình $5x^2+11x-2=2\sqrt{x^3-4x}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left(x^2-4\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ -2\le x\le 0 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$5\left(x^2+2x\right)+\left(x-2\right)=6\sqrt{x\left(x^2-4\right)}\Leftrightarrow 5.\frac{x^2+2x}{x-2}+1=6\sqrt{\frac{x^2+2x}{x-2}}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x-2}}=t\ \left(t\ge 0\right)$ ta thu được $5t^2+1=6t\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(5t-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ 5t=1 \end{array}\right.$

Xét hai khả năng xảy ra

- $t=1\Leftrightarrow x^2+2x=x-2\Leftrightarrow x^2+x+2=0$. Phương trình vô nghiệm.
- $5t=1\Leftrightarrow 25\left(x^2+2x\right)=x-2\Leftrightarrow 25x^2+49x+2=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-49+\sqrt{2201}}{50};\dfrac{-49-\sqrt{2201}}{50}\right\}$

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{-49+\sqrt{2201}}{50};\dfrac{-49-\sqrt{2201}}{50}\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $4x^2-15x+10=5\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$.
2. $4x^2-x-19=5\sqrt{\left(4x^2-5x+1\right)\left(x-5\right)}$.
3. $x^2+6x-7=4\sqrt{x^3-x^2-7x-20}$.
4. $5x^2-22x+12>3\sqrt{\left(x^2-4x+2\right)\left(x-1\right)}$.
5. $7x^2-24x+19\le 4\sqrt{x^3-7x^2+13x-4}$.
6. $x^2-2x\le 3\sqrt{\left(x^2-4x+1\right)\left(x-3\right)}+5$.
7. $5x^2+6x-1\le 6\sqrt{x\left(x^2-1\right)}$.
8. $3x^2+13x=7\sqrt{x^3-5x-12}$.
9. $3x^2+17x+22=2\sqrt{\left(x^2+6x+5\right)\left(x-7\right)}$.
10. $3x^2-10x+5\ge 5\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$.
11. $3x^2+8x-13=5\sqrt{x^3-7x+6}$.
12. $3x^2-10x-2\ge 8\sqrt{x^3-9x^2+26x-24}$.
13. $x^2-2x+4=2\sqrt{\left(2x^2-x-1\right)\left(x-3\right)}$.
14. $2x^2+3x-5=2\sqrt{2x\left(x^2-4x-5\right)}$.
15. $x^2+5x+12=4\sqrt{\left(x-3\right)\left(2x^2+3x\right)}$.
16. $2x^2+7x+3>5\sqrt{5x^3-22x^2+23x-6}$.
17. $6x^2+7x+2=7\sqrt{x\left(x^2+3x+2\right)}$.
18. $12x^2+17x-10=5\sqrt{3x^3+22x^2+20x-24}$.
19. $2x^2+9x-22\le 9\sqrt{x^3-3x^2-x-12}$.
20. $2x^2+x-1=2\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^3+2x^2+x+2\right)}$.
21. $x^2+10x=10+6\sqrt{x^3-2x+1}$.
22. $18x^2-13x+46\ge 11\sqrt{6x^3+29x^2-33x+10}$.
23. $x^2-4x+19=4\sqrt{x^3-7x^2+7x+15}$.
24. $x^2+9x-2=4\sqrt{2x^3+3x^2-11x-6}$.
25. $3x^2+4x-2>4\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}$.
26. $4x^2+7x+17=7\sqrt{x^3+4x^2+5x+6}$.
27. $4x^2+12x=5\sqrt{6x^3+7x^2-1}$.
28. $5x^2+5x-16>11\sqrt{5x^3-31x^2+50x-24}$.
29. $4x^2+22x=6\sqrt{4x^3+5x^2-47x-12}+11$.
30. $x^3+2x^2+3x+2=2\sqrt{2x^5+3x^4+x^3+2x^2+3x+1}$.

Bài toán 40. Giải phương trình $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x^2+8x+4}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases}2x+1\ge 0\\ 3x^2+8x+4\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3\left(x^2+2x+1\right)+2x+1}$.

Đặt $x+1=a;\sqrt{2x+1}=b\ (a>0;b\ge 0)$ ta thu được

$$a+b=\sqrt{3a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow a=b\ \text{ (Do } a>0\text{)}.$$

Do đó $x+1=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+2x+1=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=0$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3x^2+8x+4\ge 0;2x+1\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+1+2(x+1)\sqrt{2x+1}+2x+1=3x^2+8x+4\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{2x+1}=2x^2+4x+2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2x+1}=(x+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \sqrt{2x+1}=x+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \begin{cases}x\ge -1\\ 2x+1=x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $x=0$.

Bài toán 41. Giải phương trình $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x^2-12x+8}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ 5x^2-12x+8\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5\left(x^2-2x+1\right)-(2x-3)}\quad (1)$

Đặt $x-1=u;\sqrt{2x-3}=v\ \ (u>0;v\ge 0)$ thì

$$(1)\Leftrightarrow u+v=\sqrt{5u^2-v^2}\Leftrightarrow u^2+2uv+v^2=5u^2-v^2\Leftrightarrow 2u^2-uv-v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(2u+v)=0$$

$$\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x+1=2x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-4x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $5x^2-12x+8\ge 0;x\ge\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-2x+1+2x-3+2(x-1)\sqrt{2x-3}=5x^2-12x+8\Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{2x-3}=4x^2-12x+10$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3}=2x^2-6x+5\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3}=2\left(x^2-2x+1\right)-(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3}=2(x-1)^2-(2x-3)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x-3}}{x-1}=2-\frac{2x-3}{x-1}\qquad (2)$$

Đặt $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-1}=t\ \left(t>0\right)$ thì $\left(2\right)\Leftrightarrow t=2-t^2\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}=x-1\Leftrightarrow x=2$.
Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 42. Giải phương trình $2x+\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{4x^2+2x+4}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{\left(4x^2-4x+1\right)+3\left(2x+1\right)}\Leftrightarrow 2x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{\left(2x-1\right)^2+3\left(2x+1\right)}\qquad(*).$$

Đặt $2x-1=u;\sqrt{2x+1}=v\ \left(v\ge 0\right)$ ta có $\left(*\right)\Leftrightarrow u+v=\sqrt{u^2+3v^2}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ u^2+2uv+v^2=u^2+3v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ v\left(v-u\right)=0\end{cases}$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $\begin{cases}u+v\ge 0\\ v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1+\sqrt{2x+1}\ge 0\\ 2x+1=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- Do $v\ge 0$ nên $\begin{cases}u+v\ge 0\\ u=v\end{cases}\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x+1=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ x\left(2x-3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{4x^2+2x+4}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1+\sqrt{2x+1}-2\ge 0\\ 4x^2-4x+1+2x+1+2\left(2x-1\right)\sqrt{2x+1}=4x^2+2x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\ge 0\\ 2\left(2x-1\right)\sqrt{2x+1}=4x+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x+1}\ge 1\\ \left(2x-1\right)\sqrt{2x+1}=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2x-1=\sqrt{2x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x+1=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 43. Giải phương trình $x-1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2}.\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(2x+1\right)}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Đặt $x-1=a;\sqrt{2x+1}=b\ \left(b\ge 0\right)$ phương trình đã cho trở thành

$$a+b=\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\ a^2+b^2+2ab=2a^2+2b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\ \left(a-b\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\{4\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$. Để ý rằng $\forall a\in\mathbb{R}; b\in\mathbb{R}$ ta có

$$(a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a+b)^2\le 2(a^2+b^2) \quad (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\left(x-1+\sqrt{2x+1}\right)^2\le 2\left[(x-1)^2+(2x+1)\right]$$

$$\Rightarrow \left|x-1+\sqrt{2x+1}\right|\le\sqrt{2\left[(x-1)^2+(2x+1)\right]}$$

$$\Rightarrow x-1+\sqrt{2x+1}\le\sqrt{2}.\sqrt{(x-1)^2+(2x+1)} \quad (1)$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi tại (1) xảy ra dấu đẳng thức

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{2x+1}\ge 0 \\ x-1=\sqrt{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{2x+1}\ge 0 \\ x\ge 1 \\ x^2-2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\{4\}$.

Bài toán 44. Giải bất phương trình $1+x+\sqrt{x}\ge\sqrt{2(1+3x+x^2)} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$1+x+\sqrt{x}\ge\sqrt{2(1+2x+x^2)+2x} \Leftrightarrow 1+x+\sqrt{x}\ge\sqrt{2(1+x)^2+2x} \quad (1).$$

Đặt $1+x=u; \sqrt{x}=v \quad (u\ge 1; v\ge 0)$ thì (1) trở thành

$$u+v\ge\sqrt{2(u^2+v^2)} \Leftrightarrow u^2+2uv+v^2\ge 2(u^2+v^2) \Leftrightarrow (u-v)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)^2=0 \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 1+x=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+2x+1=x \Leftrightarrow x^2+x+1=0$$

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai cặp số dương $(1;1),(1+x;\sqrt{x})$ ta có

$$\left(1+x+\sqrt{x}\right)^2\le(1^2+1^2)\left[(1+x)^2+x\right]=2(1+3x+x^2) \Rightarrow 1+x+\sqrt{x}\le\sqrt{2(1+3x+x^2)} \quad (2)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) xảy ra đẳng thức

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \frac{1+x}{1}=\frac{\sqrt{x}}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4} \end{cases} \text{(Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge 0$.

Nhận xét $x=0$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Xét $x>0$, bất phương trình ban đầu trở thành $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+1\ge\sqrt{2\left(\dfrac{1}{x}+3+x\right)}$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=t\ \ (t>0)\Rightarrow t^2=\dfrac{1}{x}+x+2$; ta được

$$t+1\ge\sqrt{2\left(t^2+1\right)}\Leftrightarrow t^2+2t+1\ge 2t^2+2\Leftrightarrow (t-1)^2\le 0\Leftrightarrow t=1\ t=1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=1\quad (3)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}}=2$. Dẫn đến (3) vô nghiệm.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

- *Các bài toán từ 40 đến 44 đều giải được bằng cách sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc (bậc hai), điểm nhấn trọng tâm là không thể đưa về dạng đồng bậc trực tiếp mà trước tiên phải thực hiện phép biến đổi tương đương và nâng lũy thừa hợp lý. Mặc dù cùng một phương hướng nhưng mỗi lời giải đều có những nét riêng đáng lưu ý (hai lời giải của bài toán 43). Ngoài ra các bạn có thể sử dụng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa trực tiếp hay đưa về phương trình tích, vẫn rất khả thi đối với lớp bài toán dạng này.*
- *Hai bài toán 43 và 44 tác giả trình bày phương pháp sử dụng đánh giá – hàm số – bất đẳng thức để các bạn có cách nhìn toàn diện, đầy đủ và bao quát hơn trong quá trình lựa chọn lời giải. Hai lời giải 2 tương ứng của bài 43 và 44 có cùng bản chất sử dụng hình thức bất đẳng thức Bunyakovsky, tuy nhiên lời giải 2 bài 40 có lập luận theo hằng đẳng thức mang tính chất "cơ bản", vì lẽ đó phần nào được ưa chuộng hơn.*

Bài toán 45. Giải phương trình $\dfrac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2\left(x^2-3x+4\right)}}=1\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3-x+\sqrt{x}=1+\sqrt{2\left(x^2-3x+4\right)}\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2-3x+4\right)}\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2-4x+4+x\right)}$$

Đặt $2-x=u;\sqrt{x}=v\ \ (u\ge 0)$ ta thu được

$$u+v=\sqrt{2\left(u^2+v^2\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ u^2+v^2+2uv=2\left(u^2+v^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ (u-v)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow 2-x=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 0$. Biến đổi về $3-x+\sqrt{x}=1+\sqrt{2\left(x^2-3x+4\right)}\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2-3x+4\right)}$.

Đặt $\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)$ ta có $2-t^2+t=\sqrt{2\left(t^4-3t^2+4\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ t^2-t-2\le 0\\ t^4+t^2+4t+4-2t^2(t+2)=2\left(t^4-3t^2+4\right)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ (t+1)(t-2)\le 0\\ t^4+2t^3-3t^2-4t+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le t\le 2\\ t^4+4+2\left(t^3-2t\right)-3t^2=0\end{cases}\ (*).$$

Nhận xét $t=0$ không là nghiệm của hệ. Do vậy ta có

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 2\\ t^2+\dfrac{4}{t^2}+2\left(t-\dfrac{2}{t}\right)-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 2\\ \left(t-\dfrac{2}{t}\right)^2+2\left(t-\dfrac{2}{t}\right)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 2\\ \left(t-\dfrac{2}{t}+1\right)^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 2\\ t-\dfrac{2}{t}+1=0\end{cases}\begin{cases}0<t\le 2\\ t^2+t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 2\\ (t-1)(t+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=1$$

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge 0$. Phương trình đã cho quy về $3-x+\sqrt{x}=1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x}=\sqrt{2(x^2-3x+4)}$.

Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét trường hợp $x>0$ thu được $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1=\sqrt{2\left(x-3+\dfrac{4}{x}\right)}$. Đặt $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=t\Rightarrow\dfrac{4}{x}+x=t^2+4$. Suy ra

$$t+1=\sqrt{2(t^2+1)}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ t^2+2t+1=2t^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ (t-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=1$$

$$\Leftrightarrow 2-x=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-2\\ \sqrt{x}=1\end{array}\right.\Rightarrow x=1$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $x=1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge 0$. Đưa phương trình về dạng $3-x+\sqrt{x}=1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x}=\sqrt{2(x^2-3x+4)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(2-x+\sqrt{x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left[(2-x)^2+x\right]=2\left(x^2-3x+4\right)$$

$$\Rightarrow\left|2-x+\sqrt{x}\right|\le\sqrt{2(x^2-3x+4)}\Rightarrow 2-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2(x^2-3x+4)}$$

Phương trình đề bài có nghiệm khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là

$$2-x=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

- *Bài toán 45 sau khi biến đổi có dạng tương tự bài toán 44. Lời giải 1 sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc quen thuộc, lời giải 2 về bản chất nâng lũy thừa trực tiếp có kéo theo điều kiện, việc đặt đặt ẩn phụ $\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)$ chỉ làm cho bài toán gọn gàng về hình thức. Hệ quả đưa về hương trình đa thức bậc bốn, tuy nhiên đã có một sự may mắn xuất hiện, bởi đây là phương trình đối xứng hồi quy, phương pháp giải có lẽ đã rất quen thuộc với một số bạn. Kết quả thu được hoàn toàn trùng hợp với lời giải 1.*
- *Ngoài ra hình thức bài toán 45 cũng có sự đặc biệt do đây là trường hợp xảy ra đẳng thức của bài toán áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, các bạn có thể giải tương tự theo lời giải 2 bài toán số 43. Phương pháp đặt ẩn phụ trong lời giải 3 các bài toán 44 và 45 thường xuất hiện trong các kỳ thi tuyển sinh đại học môn Toán những năm gần đây, cụ thể là Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2010 môn Toán chính thức và Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2012 môn Toán chính thức. Về dạng toán này, tác giả chỉ xin nhắc lại, hiện tại đã được trình bày cặn kẽ tại Lý thuyết đặt ẩn phụ các phần 2 và 3.*

Bài toán 46. Giải bất phương trình $\dfrac{2-x+\sqrt{x}}{\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}-1}\le 1 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-5x+9\ge 0 \\ 2\left(x^2-5x+9\right)\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$.

Nhận xét rằng: $\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}-1=\dfrac{2x^2-10x+17}{\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}+1}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}-1\Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}\Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2-6x+9+x\right)}.$$

Đặt $3-x=a;\sqrt{x}=b\ \left(b\ge 0\right)$ ta thu được $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \qquad (1)$

Chú ý rằng $\forall a\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R}$ ta có

$$\left(a-b\right)^2\ge 0\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Rightarrow a+b\le\left|a+b\right|\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

Do đó (1) nghiệm đúng với $\forall a\in\mathbb{R};b\ge 0$. Kết luận nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 0;x^2-5x+9\ge 0;2\left(x^2-5x+9\right)\ne 1\Leftrightarrow x\ge 0$.

Nhận xét $2\left(x^2-5x+9\right)-1=2x^2-10x+17=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}-1>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}-1\Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)} \qquad (1)$$

Dễ thấy (1) thỏa mãn với $x=0$. Xét trường hợp $x>0$ ta có $\left(1\right)\Leftrightarrow\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1\le\sqrt{2\left(x-5+\dfrac{9}{x}\right)}$

Đặt $\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=t\Rightarrow\dfrac{9}{x}+x=t^2+6$ ta thu được

$$t+1\le\sqrt{2\left(t^2+1\right)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ \begin{cases} t\ge -1 \\ t^2+2t+1\le 2t^2+2 \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ \begin{cases} t\ge -1 \\ \left(t-1\right)^2\ge 0 \end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t\ge -1 \end{array}\right.\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 0$.

Nhận xét.

Xin nhắc lại hai dạng tổng quát đồng bậc hai và dạng đồng bậc ba như các bài toán trước

$$af^2\left(x\right)+bf\left(x\right)g\left(x\right)+cg^2\left(x\right)=0;\ af^2\left(x\right)+bf^2\left(x\right)g\left(x\right)+cf\left(x\right)g^2\left(x\right)+dg^3\left(x\right)=0.$$

Áp dụng cho dạng tổng quát chứa căn: $af\left(x\right)+bg\left(x\right)=c\sqrt{df^2\left(x\right)+eg^2\left(x\right)}$.

Các bạn thực hiện bình phương hai vế kèm theo điều kiện để quy về dạng phương trình đồng bậc bậc hai có hình thức rõ ràng hơn.

Bài toán 47. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}-2x} \ge \dfrac{1}{2} \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-2x+4 \ge 0 \\ \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)} \ne 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$

Nhận xét $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}-2x = \dfrac{6\left(x^2-2x+4\right)-4x^2}{\sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}+2x} = \dfrac{2\left(x-3\right)^2+6}{\sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}+2x} > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\sqrt{x}-2\right) \ge \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}-2x \Leftrightarrow 2x-4+2\sqrt{x} \ge \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)} \Leftrightarrow 2\left(x-2\right)+2\sqrt{x} \ge \sqrt{6\left(x-2\right)^2+12x}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt{x}=v$ thu được

$$2u+2v \ge \sqrt{6u^2+12v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ 4u^2+8uv+4v^2 \ge 6u^2+12v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ \left(u-2v\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ u=2v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=2v \ \left(u \ge 0; v \ge 0\right) \Rightarrow \begin{cases} u=2v \\ u \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2\sqrt{x} \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-1\right)^2=3 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{3}+1 \Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4+2\sqrt{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-2x+4 \ge 0 \\ \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)} \ne 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$.

Nhận xét $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)} = \sqrt{4x^2+2\left(x-3\right)^2+6} > \sqrt{4x^2} = 2\left|x\right| = 2x \Rightarrow \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}-2x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\sqrt{x}-2\right) \ge \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)}-2x \Leftrightarrow 2x-4+2\sqrt{x} \ge \sqrt{6\left(x^2-2x+4\right)} \qquad (1).$$

Xét $x=0$ không thỏa mãn bất phương trình (1).

Xét trường hợp $x>0$ ta có $\left(1\right) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)+2 \ge \sqrt{6\left(x-2+\dfrac{4}{x}\right)}$ (2).

Đặt $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=t \Rightarrow t^2=x+\dfrac{4}{x}-4$; (2) trở thành

$$2t+2 \ge \sqrt{6\left(t^2+2\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+2 \ge 0 \\ 4t^2+8t+4 \ge 6t^2+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ 2\left(t-2\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ \left(t-2\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ t^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x+\dfrac{4}{x}-4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x^2-8x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4+2\sqrt{3}$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $x=4+2\sqrt{3}$.

Bài toán 48. Giải phương trình $x-1+\sqrt{x}=\sqrt{7x^2-17x+7}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0;7x^2-17x+7\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x-1+\sqrt{x}=\sqrt{7\left(x^2-2x+1\right)-3x}$. Đặt $x-1=u;\sqrt{x}=v\ \ (v\ge 0)$ ta thu được

$$u+v=\sqrt{7u^2-3v^2}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\u^2+2uv+v^2=7u^2-3v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\3u^2-uv-2v^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\(u-v)(3u+2v)=0\end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $\begin{cases}u+v\ge 0\\u=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge 0;v\ge 0\\u=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x-1=\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- $\begin{cases}u+v\ge 0\\3u+2v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\le 0;v\ge 0\\2\sqrt{x}=3-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\4x=9x^2-18x+9\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}$.

So sánh điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài toán 49. Giải bất phương trình $2(2-x)\ge\sqrt{x}+\sqrt{4x^2-19x+16}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\4x^2-19x+16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le\dfrac{19-\sqrt{105}}{8}\\x\ge\dfrac{19+\sqrt{105}}{8}\end{array}\right.$

Bất phương trình biến đổi về $2(2-x)-\sqrt{x}\ge\sqrt{4(x-2)^2-3x}$. Đặt $x-2=a;\sqrt{x}=b\ \ (b\ge 0)$ ta thu được

$$2a-b\ge\sqrt{4a^2-3b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b\ge 0\\4a^2-4ab+b^2\ge 4a^2-3b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b\ge 0\\b(b-a)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a\ge b\\\left[\begin{array}{l}b=0\\b\ge a\end{array}\right.\end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases}2a\ge b\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{x}\le 4\\\sqrt{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.
- $\begin{cases}2a\ge b\\b\ge a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{x}-4\le 0\\\sqrt{x}\ge 2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{x}-4\le 0\\\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x}\le\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}\\x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{17-\sqrt{33}}{8}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\{0\}\cup\left[1;\dfrac{19-\sqrt{105}}{8}\right]$.

Nhận xét.

Để tìm các hệ số ẩn phụ trong căn thức các bạn nên sử dụng đồng nhất thức như các bài toán trước. Trong trường hợp bất phương trình, cần có nhận xét, đánh giá, lập luận để giảm bớt một số trường hợp, thành thử nếu không thì lời giải sẽ rườm rà, tốn kém thời gian, công sức. Ngoài ra các bạn cần tìm điều kiện và kết hợp nghiệm chính xác, bởi nghiệm thông thường là một khoảng, đoạn hoặc hợp các khoảng và điểm, thao tác thử nghiệm tỏ ta khá khó khăn, do đó rất dễ dẫn đến sai lầm và ngộ nhận.

Bài toán 50. Giải phương trình $6=3x+\sqrt{x}+2\sqrt{3x^2-14x+12}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\ 3x^2-14x+12\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(2-x)-\sqrt{x}=2\sqrt{3(x^2-4x+4)-2x}\Leftrightarrow 3(2-x)-\sqrt{x}=2\sqrt{3(2-x)^2-2x}$$

Đặt $2-x=u;\sqrt{x}=v\ \ (v\ge 0)$ thu được

$$3u-v=2\sqrt{3u^2-2v^2}\Leftrightarrow\begin{cases}3u-v\ge 0\\ 9u^2-6uv+v^2=12u^2-8v^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3u-v\ge 0\\ u^2+2uv-3v^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u-v\ge 0\\ (u-v)(u+3v)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u-v\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}u=v\\ u=-3v\end{array}\right.\end{cases}$$

- $\begin{cases}3u-v\ge 0\\ u=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge 0;v\ge 0\\ u=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ 2-x=\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $\begin{cases}3u-v\ge 0\\ u=-3v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10v\ge 0\\ u=-3v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v\le 0\\ u=-3v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=0\\ u=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 51. Giải phương trình $1=\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{4x^2-2x+3}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+2x-3\ge 0\\ 4x^2-2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -3\end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với $x+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{5x^2-(x^2+2x-3)}$.

Đặt $\sqrt{x^2+2x-3}=y\ \ (y\ge 0)$ ta thu được

$$x+y=\sqrt{5x^2-y^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\ x^2+y^2+2xy=5x^2-y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\ 2x^2-xy-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\ (x-y)(2x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=y\\ 2x+y=0\end{array}\right.\end{cases}$$

- $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\sqrt{x^2+2x-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.
- $\begin{cases}x+y\ge 0\\ 2x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ -2x=\sqrt{x^2+2x-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 3x^2-2x+3=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 52. Giải bất phương trình $2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(4x^2-3x+1\right)}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(4x^2-4x+1\right)+2x}\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(2x-1\right)^2+2x}\qquad(1)$$

Đặt $2x-1=a;\sqrt{x}=b\ \left(b\ge 0\right)$ thu được

$$a-b\le\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\ \begin{cases}a\ge b\\ a^2-2ab+b^2\le 2a^2+2b^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\ \begin{cases}a\ge b\\ \left(a+b\right)^2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\ a\ge b\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định, tức là $S=\left[0;+\infty\right)$.

Bài toán 53. Giải bất phương trình $x-3\sqrt{x}+2\le\sqrt{x^2+7x+4}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x+2-3\sqrt{x}\le\sqrt{x^2+4x+4+3x}\Leftrightarrow x+2-3\sqrt{x}\le\sqrt{\left(x+2\right)^2+3x}$.

Đặt $x+2=a;\sqrt{x}=b\ \left(a>0;b\ge 0\right)$ ta thu được

$$a-3b\le\sqrt{a^2+3b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<3b\\ \begin{cases}a\ge 3b\\ a^2-6ab+9b^2\le a^2+3b^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<3b\\ \begin{cases}a\ge 3b\\ b\left(a-b\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $a<3b\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)<0\Leftrightarrow 1<\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 1<x<4$.
- $\begin{cases}a\ge 3b\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\sqrt{x}+2\ge 0\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.
- $\begin{cases}a\ge 3b\\ a-b\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3\sqrt{x}+2\ge 0\\ x-\sqrt{x}+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}\ge 2\\ \sqrt{x}\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ x\le 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x\ge 0$.

Bài toán 54. Giải bất phương trình $2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{4x^2-7x+1}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\ 4x^2-7x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{7+\sqrt{33}}{8}\\ 0\le x\le\dfrac{7-\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{4x^2-4x+1+3x}\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x}\le\sqrt{\left(2x-1\right)^2+3x}$.

Đặt $2x-1=a;\sqrt{x}=b\ \left(b\ge 0\right)$ thu được $a-b\le\sqrt{a^2+3b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\ \begin{cases}a\ge b\\ a^2-2ab+b^2\le a^2+3b^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\ \begin{cases}a\ge b\\ b\left(a+b\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

Xét hai trường hợp

- $a<b \Leftrightarrow 2x-\sqrt{x}-1<0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<1 \Leftrightarrow x<1$.
- $\begin{cases} a\ge b \\ b\left(a+b\right)\ge 0 \end{cases}$ (Nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định).

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{7+\sqrt{33}}{8} \\ 0\le x\le \dfrac{7-\sqrt{33}}{8} \end{array}\right.$

Bài toán 55. Giải bất phương trình $x+1-\sqrt{x-2}\le \sqrt{x^2+5} \quad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Nhận xét $x+1-\sqrt{x-2}=\dfrac{x^2+x+3}{x+1+\sqrt{x-2}}>0\ \forall x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+1+x-2-2\left(x+1\right)\sqrt{x-2}\le x^2+5 \Leftrightarrow 3x-6\le 2\left(x+1\right)\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 3\sqrt{x-2}\le 2\left(x+1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 4x^2-x+22\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{2\right\}$.

Bài toán 56. Giải bất phương trình $2x+2\le \sqrt{x-1}+\sqrt{3x^2+4x+5} \quad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Nhận xét $2x+2-\sqrt{x-1}=x+\left(\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0\ \ \forall x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x+2-\sqrt{x-1}\le \sqrt{3x^2+4x+5} \Leftrightarrow 4x^2+8x+4+x-1-4\left(x+1\right)\sqrt{x-1}\le 3x^2+4x+5$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-2-4\left(x+1\right)\sqrt{x-1}\le 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-4\left(x+1\right)\sqrt{x-1}+3\left(x-1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2-4\left(x+1\right)\sqrt{x-1}+3\left(x-1\right)\le 0 \Leftrightarrow 1-4.\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}+3.\dfrac{x-1}{\left(x+1\right)^2}\le 0$$

Đặt $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}=t\ \left(t\ge 0\right)$ ta có $1-4t+3t^2\le 0 \Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(3t-1\right)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le t\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}\le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}\le x+1 \\ 3\sqrt{x-1}\ge x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\le x^2+2x+1 \\ 9x-9\ge x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+2\ge 0 \\ x^2-7x+10\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 5.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left[2;5\right]$.

Bài toán 57. Giải bất phương trình $x+1-2\sqrt{2x-1}\le \sqrt{2x^2+12x-2} \quad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \dfrac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-2\sqrt{2x-1}\le\sqrt{2\left(x^2+2x+1\right)+4\left(2x-1\right)}\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{2x-1}\le\sqrt{2\left(x+1\right)^2+4\left(2x-1\right)}$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{2x-1}=v\ \left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được

$$u-2v\le\sqrt{2u^2+4v^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u-2v<0\\ \begin{cases}u-2v\ge 0\\ u^2-4uv+4v^2\le 2u^2+4v^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u<2v\\ \begin{cases}u\ge 2v\\ u^2+4uv\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u<2v\\ \begin{cases}u\ge 2v\\ u\left(u+4v\right)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u<2v\\ u\ge 2v\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge\frac{1}{2}$.

Bài toán 58. Giải bất phương trình $2\left(x+1\right)\le 3\sqrt{x-1}+\sqrt{4x^2+9x+3}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương $2\left(x+1\right)-3\sqrt{x-1}\le\sqrt{4\left(x^2+2x+1\right)+x-1}\qquad(1)$

Đặt $x+1=a;\sqrt{x-1}=b\ \left(a>0;b\ge 0\right)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2a-3b\le\sqrt{4a^2+b^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a<3b\\ \begin{cases}2a\ge 3b\\ 4a^2-12ab+9b^2\le 4a^2+b^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a<3b\\ \begin{cases}2a\ge 3b\\ b\left(2b-3a\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra sau

- $2a<3b\Leftrightarrow 2x+2<3\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 4x^2+8x+4<9x-9\Leftrightarrow 4x^2-x+13<0$ (Vô nghiệm).
- $\begin{cases}2a\ge 3b\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\ge 3\sqrt{x-1}\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $\begin{cases}2a\ge 3b\\ 2b\le 3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\ge 3\sqrt{x-1}\\ 3x+3\ge 2\sqrt{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+8x+4\ge 9x-9\\ 9x^2+18x+9\ge 4x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-x+13\ge 0\\ 9x^2+14x+13\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x\ge 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương $2\left(x+1\right)-3\sqrt{x-1}\le\sqrt{4\left(x^2+2x+1\right)+x-1}\qquad(1)$

Nhận xét $2\left(x+1\right)-3\sqrt{x-1}=\dfrac{4x^2-x+13}{2\left(x+1\right)+3\sqrt{x-1}}>0\ \forall x\ge 1$.

Đặt $x+1=a;\sqrt{x-1}=b\ \left(a>0;b\ge 0;2a>3b\right)$ thì (1) trở thành

$$(1)\Leftrightarrow 2a-3b\le\sqrt{4a^2+b^2}\Leftrightarrow 4a^2-12ab+9b^2\le 4a^2+b^2\Leftrightarrow b\left(2b-3a\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ 3a\ge 2b\end{array}\right.$$

Xét các khả năng

- $b=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x=1$.
- Trường hợp $3a\ge 2b$ hiển nhiên do $3a>2a>3b>2b$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left[1;+\infty\right)$.

Bài toán 59. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+x\ge 2\sqrt{x^2+3x+3}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+x+1}+x \ge 2\sqrt{3\left(x^2+x+1\right)-2x^2}$.

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=y\ (y>0)$ ta có

$$y+x \ge 2\sqrt{3y^2-2x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x \ge 0 \\ y^2+x^2+2xy \ge 12y^2-8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \ge 0 \\ 9x^2+2xy-11y^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \ge 0 \\ (x-y)(9x+11y) \ge 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \ge 0 \\ 9x+11y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ x \ge y \\ 9x+11y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$.
- $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \le 0 \\ 9x+11y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \ge 0 \\ x \le \sqrt{x^2+x+1} \\ 20x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} \ge -x \\ \sqrt{x^2+x+1} \ge x \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} \ge -x \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$.

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta thu được nghiệm $x \ge -1$.

Bài toán 60. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x=2+\sqrt{4x^2-x-2}\quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-2 \ge 0 \\ 4x^2-x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -2 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x-2}+x-2=\sqrt{3\left(x^2+x-2\right)+\left(x^2-4x+4\right)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}+x-2=\sqrt{3\left(x^2+x-2\right)+\left(x-2\right)^2}$$

Đặt $\sqrt{x^2+x-2}=u; x-2=v\ \left(u \ge 0\right)$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow u+v=\sqrt{3u^2+v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ u^2+2uv+v^2=3u^2+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ u\left(u-v\right)=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases} u+v \ge 0 \\ u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}+x-2 \ge 0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}+x-2 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $\begin{cases} u+v \ge 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 0; v \ge 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \sqrt{x^2+x-2}=x-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2+x-2=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 61. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{9x^2+23x+19}\quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5\left(x^2+3x+3\right)+4\left(x^2+2x+1\right)}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5\left(x^2+3x+3\right)+4\left(x+1\right)^2}$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+3}=a;x+1=b\ \left(a>0\right)$ ta thu được phương trình

$$2a+b=\sqrt{5a^2+4b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b\ge 0\\4a^2+4ab+b^2=5a^2+4b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b\ge 0\\a^2-4ab+3b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b\ge 0\\\left[\begin{array}{l}a=b\\a=3b\end{array}\right.\end{cases}$$

Xét hai trường hợp

❖ $\begin{cases}2a+b\ge 0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0;b\ge 0\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+3x+3=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x=-2\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

❖ $\begin{cases}2a+b\ge 0\\a=3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge 0;b\ge 0\\a=3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+3x+3=9\left(x^2+2x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\8x^2+15x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-1$ không thỏa mãn phương trình ban đầu. Xét trường hợp $x\ne -1$, phương trình trở thành

$$2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5\left(x^2+3x+3\right)+4\left(x+1\right)^2}\Leftrightarrow 2\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}+1=\sqrt{\frac{5\left(x^2+3x+3\right)}{\left(x+1\right)^2}+4}$$

Đặt $\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}=t$ ta thu được $2t+1=\sqrt{5t^2+4}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+1\ge 0\\4t^2+4t+1=5t^2+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t+1\ge 0\\t^2-4t+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

➢ $t=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x+3}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+3x+3=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x=-2\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

➢ $t=3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x+3}=3\left(x+1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\x^2+3x+3=9\left(x^2+2x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\8x^2+15x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{\sqrt{33}-15}{16}\right\}$.

Bài toán 62. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{14x^2-12x+1}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-1\le x\le 1;4x^2-12x+1\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{3\left(4x^2-4x+1\right)-2\left(1-x^2\right)}\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{3\left(1-2x\right)^2-2\left(1-x^2\right)}$$

Đặt $\sqrt{1-x^2}=a;1-2x=b\quad\left(a\ge 0\right)$ ta có

$$a+b=2\sqrt{3a^2-2b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\a^2+2ab+b^2=12a^2-8b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\11a^2-2ab-9b^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\\left(a-b\right)\left(11a+9b\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\\left[\begin{array}{l}a=b\\11a+9b=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b\ge 0\\a=b\end{cases}\vee\begin{cases}a+b\ge 0\\11a+9b=0\end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $\begin{cases} a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0;b\ge 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 1-x^2=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x(5x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.
- $\begin{cases} a\ge 0 \\ a+b\ge 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ -\dfrac{2}{9}a\ge 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ a\le 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-2x=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 63. Giải phương trình $x^2+2\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{3x^4-2x^2+2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x|\ge 1$.

Phương trình đã cho biến đổi về $x^2+2\sqrt{x^2-1}=3\sqrt{3x^4-2(x^2-1)}$

Đặt $x^2=a;\sqrt{x^2-1}=b\ (a\ge 1;b\ge 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} a\ge 1;b\ge 0 \\ a+2b=3\sqrt{3a^2-2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1;b\ge 0 \\ a^2+4ab+4b^2=9(3a^2-2b^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1;b\ge 0 \\ 13a^2-2ab-11b^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1;b\ge 0 \\ (a-b)(13a+11b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x^2=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^4-x^2+1=0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3x^2+4x-18}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-6\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 3x^2+4x-18\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$.

Phương trình đã cho quy về $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3(x^2+x-6)+x}$.

Đặt $\sqrt{x^2+x-6}=u;\sqrt{x}=v\ (u\ge 0;v>0)$ thu được

$$\begin{cases} u\ge 0;v>0 \\ u+v=\sqrt{3u^2+v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 0;v>0 \\ u^2+2uv+v^2=3u^2+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 0;v>0 \\ u(u-v)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=v \end{array}\right.$$

- $u=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{-3;2\}$.
- $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2-6=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{6};\sqrt{6}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{2;\sqrt{6}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-6\ge 0;x\ge 0 \\ 3x^2+4x-18\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x}}+1=\sqrt{\dfrac{3x^2+4x-18}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}+1=\sqrt{3\left(x-\dfrac{6}{x}+1\right)+1}$

Đặt $\sqrt{x-\dfrac{6}{x}+1}=t\ (t\geq 0)$ thu được $t+1=\sqrt{3t^2+1} \Leftrightarrow t^2+2t+1=3t^2+1 \Leftrightarrow t(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$

- $t=0 \Leftrightarrow x^2+x=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$
- $t=1 \Leftrightarrow x-\dfrac{6}{x}=0 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\sqrt{6} \vee x=-\sqrt{6}$.

Quan sát điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{2;\sqrt{6}\right\}$.

Bài toán 65. Giải phương trình $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5x^2+9x-10} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5\left(x^2+x-2\right)+4x}$

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{x^2+x-2}=b\ \ (a>0;b\geq 0)$ ta quy về

$$\begin{cases} a+2b=\sqrt{5a^2+4b^2} \\ a>0;b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4ab+4b^2=5a^2+4b^2 \\ a>0;b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-b)=0 \\ a>0;b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2+x-2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$.

Biến đổi về dạng $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5\left(x^2+x-2\right)+4x} \Leftrightarrow 1+2\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x}}=\sqrt{5.\dfrac{x^2+x-2}{x}+4}$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x}}=t\ (t>0)$ ta thu được

$$1+2t=\sqrt{5t^2+4} \Leftrightarrow 4t^2+4t+1=5t^2+4 \Leftrightarrow t(t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Rightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}.$$

Quan sát và kết hợp điều kiện, suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Bài toán 66. Giải bất phương trình $\dfrac{6-x+2\sqrt{x}}{3-\sqrt{3x^2-14x+27}}\geq 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ 3-\sqrt{3x^2-14x+27}\neq 0 \end{cases}$

Nhận xét $3-\sqrt{3x^2-14x+27}=3-\sqrt{3\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{32}{3}}\le 3-\sqrt{\frac{32}{3}}<0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$6-x+2\sqrt{x}\ge 3-\sqrt{3x^2-14x+27}\Leftrightarrow 3-x+2\sqrt{x}\ge\sqrt{3\left(x^2-6x+9\right)+4x}\qquad (1).$$

Đặt $3-x=u;2\sqrt{x}=v\ (v\ge 0)$ ta có $(1)\Leftrightarrow u+v\ge\sqrt{3u^2+v^2}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ u^2+v^2+2uv\ge 3u^2+v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ u(u-v)\le 0\end{cases}$

Xét các khả năng xảy ra

- $\begin{cases}u+v\ge 0\\ u\ge 0\\ u\le v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x+2\sqrt{x}\ge 0\\ 3-x\ge 0\\ 3-x\le 2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\sqrt{x}-3\le 0\\ x\le 3\\ x+2\sqrt{x}-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\le 3\\ x\le 3\\ \sqrt{x}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.
- $\begin{cases}u+v\ge 0\\ u\le 0\\ u\ge v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x+2\sqrt{x}\ge 0\\ 3-x\le 0\\ 3-x\ge 2\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\sqrt{x}-3\le 0\\ x\ge 3\\ x+2\sqrt{x}-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\le 3\\ x\ge 3\\ \sqrt{x}\le 1\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;3]$.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\le 1\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $1+\sqrt{x}\le x+\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow 1-x+\sqrt{x}\le\sqrt{(1-x)^2+3x}$.

Đặt $1-x=u;\sqrt{x}=v\ \ (v\ge 0)$ thì $u+v\le\sqrt{u^2+3v^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u+v<0\\ \begin{cases}u+v\ge 0\\ u^2+3v^2\ge u^2+2uv+v^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u+v<0\\ \begin{cases}u+v\ge 0\\ v(v-u)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v\ge 0\\ v=0\end{cases}\\ u+v<0\\ \begin{cases}u+v\ge 0\\ v\ge u\end{cases}\end{array}\right.$

Xét các trường hợp

- $\begin{cases}u+v\ge 0\\ v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x+\sqrt{x}\ge 0\\ \sqrt{x}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.
- $u+v<0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}-1>0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x}\ge\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- $\begin{cases}u+v\ge 0\\ v\ge u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x+\sqrt{x}\ge 0\\ 1-x\ge\sqrt{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{x}-1\le 0\\ x+\sqrt{x}-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x}\le\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp tất cả các trường hợp ta có nghiệm $S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 68. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5}\le\sqrt{2x^2+4x+8}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)}$.

Đặt $\sqrt{x-1}=a;\sqrt{x^2+x+5}=b\ (a\ge 0;b>0)$ ta được

$$a+b\le \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0 \text{ (Hằng bất đẳng thức).}$$

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định, tức là $S=[1;+\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+5}}+1 \le \sqrt{2.\frac{x-1}{x^2+x+5}+2}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+x+5}}=t\ (t\ge 0)$ ta thu được $t+1\le\sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+1\le 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2\ge 0 \quad (*)$

Nhận thấy (*) nghiệm đúng với mọi giá trị thực t nên suy ra tập nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+x^2+x+5+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \le 2x^2+4x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \le x^2+2x+4 \quad (1)$$

$\forall a\ge 0;b\ge 0:\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}\le a+b \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \le (x-1)(x^2+x+5)=x^2+2x+4$

Do đó (1) nghiệm đúng với mọi $x\ge 1$. Kết luận $S=[1;+\infty)$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5}\right)^2=\left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{x^2+x+5}\right)^2 \le (1^2+1^2)(x-1+x^2+x+5)=2x^2+4x+8$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5} \le \left|\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x+5}\right| \le \sqrt{2x^2+4x+8}$$

Như vậy bất phương trình đã cho hiển nhiên đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.

Kết luận tập hợp nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Bài toán 69. Giải bất phương trình $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \ge \sqrt{2}(1+x) \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x+1\ge 0\\ x(x-2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{4}\le x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \ge \sqrt{2}\,|x+1| \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \ge \sqrt{2(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \ge \sqrt{2(x^2-2x)+2(4x+1)} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{4a+1}=a;\sqrt{x^2-2x}=b\ (a\ge 0;b\ge 0)$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow a+b \geq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 2\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+1 = x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Nhận xét bất phương trình không thỏa mãn với $x=-\dfrac{1}{4}$.

Ngoài trường hợp trên ta có $\sqrt{4x+1}>0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2}|x+1| \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2\left(x^2-2x\right)+2(4x+1)} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{x^2-2x}{4x+1}} \geq \sqrt{2.\frac{x^2-2x}{4x+1}+2}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{4x+1}}=t\ (t \geq 0)$ thu được

$$1+t \geq \sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+2 \geq 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow 4x+1=x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $\begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2\right)\left(4x+1+x^2-2x\right)=2\left(x^2+2x+1\right)=2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x}\right| \leq \sqrt{2}|x+1| \Rightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2-2x} \leq \sqrt{2}|x+1| \quad \left(\forall x \geq -\frac{1}{4}\right) \quad (*)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi (*) xảy ra dấu đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x+1}}{1}=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{1} \Leftrightarrow 4x+1=x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}.$$

Quan sát điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right\}$.

Bài toán 70. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+9x-4} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{3(2x-1)+x^2+3x-1}$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=a;\sqrt{x^2+3x-1}=b\ (a \geq 0;b>0)$ ta thu được

$$a+b=\sqrt{3a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=b\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $a=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.
- $a=b\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+3x-1}\Leftrightarrow 2x-1=x^2+3x-1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 71. Giải phương trình $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x^2+19x-28}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4}$.

Đặt $\sqrt{2x-3}=a;\sqrt{x^2+3x-4}=b\ (a\ge 0;b>0)$ thu được

$$2a+b=\sqrt{8a^2+b^2}\Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=8a^2+b^2\Leftrightarrow a(a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=b\end{array}\right.$$

- $a=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.
- $a=b\Leftrightarrow\sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+3x-4}\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Nhận xét $x=\dfrac{3}{2}$ là một nghiệm của phương trình ban đầu. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4}\Leftrightarrow 2+\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{2x-3}}=\sqrt{8+\frac{x^2+3x-4}{2x-3}}.$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{2x-3}}=t\,(t\ge 0)$ ta thu được $2+t=\sqrt{8+t^2}\Leftrightarrow t^2+4t+4=t^2+8\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^2+x=1\quad(1)$.

Phương trình (1) vô nghiệm với $x\ge\dfrac{3}{2}$. So sánh điều kiện và kết luận nghiệm $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 72. Giải bất phương trình $\dfrac{2\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+x-7}}{\sqrt{10x^2+9x+2}-7}\ge 1\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$.

Nhận xét $x\ge 2\Rightarrow 10x^2+9x+2\ge 60>49\Rightarrow\sqrt{10x^2+9x+2}>7$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+x}-7\ge\sqrt{10x^2+9x+2}-7$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+x}\ge\sqrt{10\left(x^2+x\right)-\left(x-2\right)}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}}+1\ge\sqrt{10-\frac{x-2}{x^2+x}}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}}=t\left(t\ge 0\right)$ ta thu được $2t+1\ge\sqrt{10-t^2}\Leftrightarrow 4t^2+4t+1\ge 10-t^2\Leftrightarrow 5t^2+4t-9\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(5t+9\right)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}}\ge 1\Leftrightarrow x-2\ge x^2+x\Leftrightarrow x^2+2\le 0 \quad (1)$$

Bất phương trình (1) vô nghiệm. Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 73. Giải bất phương trình $\dfrac{3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}-5}{2\sqrt{5x^2-2x+6}-5}\le 1 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2} \\ 2\sqrt{5x^2-2x+6}\ne 5 \end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Do đó $\forall x>\frac{1}{2}\Rightarrow\left(2x-1\right)\left(10x+1\right)>0\Leftrightarrow 10x^2-8x-1>0\Rightarrow 4\left(5x^2-2x+6\right)>25\Rightarrow 2\sqrt{5x^2-2x+6}>5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}-5\le 2\sqrt{5x^2-2x+6}-5\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}\le 2\sqrt{5\left(x^2+1\right)-\left(2x-1\right)}.$$

Đặt $\sqrt{2x-1}=v;\sqrt{x^2+1}=u\ \left(u>0;v>0\right)$ ta thu được

$$u+3v\le 2\sqrt{5u^2-v^2}\Leftrightarrow u^2+6uv+9v^2\le 4\left(5u^2-v^2\right)\Leftrightarrow 19u^2-6uv-13v^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(19u+13v\right)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\ge\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2-2x+2\ge 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

Kết hợp tất cả các trường hợp ta thu được nghiệm $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 74. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6}{\sqrt{11x^2+5x+35}-6}\ge 1 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{3}$.

Nhận xét $11x^2+5x+35>36\Rightarrow\sqrt{11x^2+5x+35}-6>0\forall\ge\frac{1}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}-6\ge\sqrt{11x^2+5x+35}-6\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}+2\sqrt{x^2+x+3}\ge\sqrt{11\left(x^2+x+3\right)-2\left(3x-1\right)}.$$

Đặt $\sqrt{3x-1}=a;\sqrt{x^2+x+3}=b\quad\left(a\ge 0;b>0\right)$ ta thu được

$$a+2b\ge\sqrt{11b^2-2a^2}\Leftrightarrow a^2+4ab+4b^2\ge 11b^2-2a^2\Leftrightarrow 3a^2+4ab-7b^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(3a+7b\right)\le 0\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow\sqrt{3x-1}\le\sqrt{x^2+x+3}\Leftrightarrow x^2-2x+4\ge 0 \quad (*)$$

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định. Vậy $S=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Bài toán 75. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}\le\sqrt{9x^2+13x+17}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}\le\sqrt{5(x^2+x+1)+4(x^2+2x+3)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=a;\sqrt{x^2+2x+3}=b\ (a>0;b\ge1)$ ta thu được

$$a+2b\le\sqrt{5a^2+4b^2}\Leftrightarrow a^2+4ab+b^2\le5a^2+4b^2\Leftrightarrow a(a-b)\ge0$$

$$\Leftrightarrow a\ge b\Leftrightarrow x^2+x+1\ge x^2+2x+3\Leftrightarrow x\le-2$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;-2]$.

Bài toán 76. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{4x^2+6x-10}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge1\\x\le-3\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{2(x^2+2x-3)+2(x^2+x-2)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+2x-3}=a;\sqrt{x^2+x-2}=b\quad(a\ge0;b\ge0)$ ta thu được

$$a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<2a^2+2b^2\Leftrightarrow(a-b)^2>0\Leftrightarrow a\ne b$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}\ne\sqrt{x^2+x-2}\Leftrightarrow x^2+2x-3\ne x^2+x-2\Leftrightarrow x\ne1$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x>1\\x\le-3\end{array}\right.$

Lời giải 2.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge1\\x\le-3\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{2(x^2+2x-3)+2(x^2+x-2)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\right)^2\le(1^2+1^2)(x^2+2x-3+x^2+x-2)=2(2x^2+3x-5)$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\le\sqrt{4x^2+6x-10}\qquad(1)$$

Bất phương trình đã cho là trường hợp (*) không xảy ra đẳng thức

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}\ne\sqrt{x^2+x-2}\Leftrightarrow x^2+2x-3\ne x^2+x-2\Leftrightarrow x\ne1.$$

Kết luận nghiệm tương tự lời giải 1.

Lời giải 3.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge1\\x\le-3\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{(x-1)(x+3)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}<\sqrt{2(x-1)(2x+5)}\qquad(1)$.

Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn (1).

- Xét trường hợp $x>1$ thì

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}<\sqrt{2(2x+5)} \Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}<4x+10$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5x+6}<2x+5 \Leftrightarrow 4(x^2+5x+6)<4x^2+20x+25 \text{ (Hiển nhiên).}$$

- Xét trường hợp $x\le -3$ thì

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{-(x+3)}+\sqrt{-(x+2)}<\sqrt{-2(2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow -2x-5+2\sqrt{x^2+5x+6}<-4x-10 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5x+6}<-2x-5 \qquad (2)$$

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với $x\le -3$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình đề bài là $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x\le -3 \end{array}\right.$

Bài toán 77. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5x+4}\le\sqrt{4x^2-16x+8} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-3x+x^2-5x+4+2\sqrt{x(x-3)(x-1)(x-4)}\le 4x^2-16x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-3)(x-1)(x-4)}\le 2x^2-8x+4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x)+(x^2-5x+4)-2\sqrt{(x^2-3x)(x^2-5x+4)}\ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5x+4}\right)^2\ge 0 \qquad (*)$$

Bất phương trình (*) hiển nhiên. Do đó ta có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

Lời giải 2.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5x+4}\le\sqrt{2(x^2-3x)+2(x^2-5x+4)}$

Đặt $\sqrt{x^2-3x}=u;\sqrt{x^2-5x+4}=v\ (u\ge 0;v\ge 0)$ ta thu được $u+v\le\sqrt{2u^2+2v^2} \qquad (1)$

$$\forall a\ge 0;b\ge 0:(a-b)^2\ge 0\Rightarrow 2ab\le a^2+b^2\Rightarrow (a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Do đó (1) hiển nhiên. Vậy ta có tập nghiệm $S=(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải 3.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le 0 \end{array}\right.$

Nhận xét $x=0$ thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Ngoài trường hợp trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-5x+4}\le\sqrt{2(x^2-3x)+2(x^2-5x+4)} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x}}\le\sqrt{2+2.\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x}}$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x}}=t\ (t\ge 0)$ ta được $1+t\le\sqrt{2t^2+2}\Leftrightarrow t^2+2t+1\le 2t^2+2\Leftrightarrow (t-1)^2\ge 0$ (Hiển nhiên).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 4\vee x\le 0$.

Bài toán 78. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-2}\le\sqrt{5x^2-6x+2} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5\left(x^2-x\right)-\left(x-2\right)} \Leftrightarrow 1+\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-x}} \leq \sqrt{5-\dfrac{x-2}{x^2-x}}$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-x}}=t\ \left(t \geq 0\right)$ ta thu được

$$1+t \leq \sqrt{5-t^2} \Leftrightarrow t^2+2t+1 \leq 5-t^2 \Leftrightarrow t^2+t-2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t+2\right) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \leq x^2-x \Leftrightarrow x^2+2 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên).}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[2;+\infty\right)$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-2+2\sqrt{x^3-3x^2+2x} \leq 5x^2-6x+2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-3x^2+2x} \leq 2x^2-3x+2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x \leq 4x^4+8x^2+4-12x\left(x^2+1\right)+9x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^4-13x^3+20x^2-14x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^4-14x^3+20x^2-14x+4+x \geq 0 \qquad (*)$$

Nhận thấy

$$4x^4-14x^3+20x^2-14x+4+x \geq 0 = 2\left(x^2-2x+1\right)\left(2x^2-3x+2\right)+x=2\left(x-1\right)^2\left(2x^2-3x+2\right)+x>0, \forall x \geq 2.$$

Do đó (*) nghiệm đúng với $x \geq 2$. Kết luận nghiệm $S=\left[2;+\infty\right)$.

Bài toán 79. Giải phương trình $x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{3x^3+4x^2-6} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+x^2-2 \geq 0 \\ 3x^3+4x^2-6 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{3\left(x^3+x^2-2\right)+x^2}$

Đặt $\sqrt{x^3+x^2-2}=y\ \left(y \geq 0\right)$ ta thu được $x+y=\sqrt{3y^2+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x^2+2xy+y^2=3y^2+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ y\left(x-y\right)=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ x^3+x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ \left(x-1\right)\left(x^2+2x+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ x=\sqrt{x^3+x^2-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}.$

Thử lại nghiệm, kết luận $S=\left\{1;\sqrt[3]{2}\right\}$.

Bài toán 80. Giải phương trình $4x=\sqrt{x^3+4x^2-5}+\sqrt{2\left(x^3+2x^2-5\right)} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+4x^2-5 \geq 0 \\ 2x^3+4x^2-10 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $2.2x-\sqrt{x^3+4x^2-5}=\sqrt{2\left(x^3+4x^2-5\right)-4x^2} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Đặt $2x = u; \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} = v \ (v \ge 0)$ ta thu được

$$2u - v = \sqrt{2v^2 - u^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \ge 0 \\ 4u^2 - 4uv + v^2 = 2v^2 - u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \ge 0 \\ 5u^2 - 4uv - v^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \ge 0 \\ (u - v)(5u + v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2u \ge v \\ u = v \end{cases} \\ \begin{cases} 2u - v \ge 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} 2u \ge v \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 = x^3 + 4x^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$.
- $\begin{cases} 2u - v \ge 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u \ge 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 0; v \ge 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Thử lại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{\sqrt[3]{5}\right\}$.

Bài toán 81. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x - 2} \le \sqrt{3x^3 + 4x - 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ x^3 + x - 2 \ge 0 \\ 3x^3 + 4x - 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ (x-1)(x^2 + x + 2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1 \\ 3x^3 + 4x - 4 \ge 0 \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x - 2} \ge \sqrt{3(x^3 + x - 2) + x + 2}$

Đặt $\sqrt{x+2} = a; \sqrt{x^3 + x - 2} = b \ (a > 0; b \ge 0)$ ta thu được

$$a + b \ge \sqrt{3a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge 3a^2 + b^2 \Leftrightarrow a(a - b) \le 0 \Leftrightarrow a \le b$$

$$\Leftrightarrow x + 2 \le x^3 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 \ge 4 \Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{4}$$

Kết luận nghiệm $S = \left[\sqrt[3]{4}; +\infty\right)$.

Bài toán 82. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} = \sqrt{3x^3 + 18x - 27} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x^3 + 18x - 27 \ge 0 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^3 + 2x - 7 \ge 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} = \sqrt{6(2x-1) + 3(x^3 + 2x - 7)}.$$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \sqrt{x^3 + 2x - 7} = b \ (a \ge 0; b \ge 0)$ thu được

$$2a + b = \sqrt{6a^2 + 3b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 6a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow 2(a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 2x - 1 = x^3 + 2x - 7 \Leftrightarrow x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

Thử lại thấy giá trị này thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S=\left\{\sqrt[3]{6}\right\}$.

Bài toán 83. Giải bất phương trình

$$2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}\le\sqrt{6x^3+9x^2+9x-16}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+x+1\ge 0\\x^3+x^2+x-3\ge 0\\6x^3+9x^2+9x-16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2+2x+3)\ge 0\\6x^3+9x^2+9x-16\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}\le\sqrt{3(x^2+x+1)+6(x^3+x^2+x-3)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=u;\sqrt{x^3+x^2+x-3}=v\ (u>0;v\ge 0)$ ta thu được

$$2u+v\le\sqrt{3u^2+6v^2}\Leftrightarrow 4u^2+4uv+v^2\le 3u^2+6v^2\Leftrightarrow u^2+4uv-5v^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow(u-v)(u+5v)\le 0\Leftrightarrow u\le v\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}\le\sqrt{x^3+x^2+x-3}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1\le x^3+x^2+x-3\Leftrightarrow x^3\ge 4\Leftrightarrow x\ge\sqrt[3]{4}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left[\sqrt[3]{4};+\infty\right)$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình

$$2\sqrt{x^2-2x}+3\sqrt{3x^3+x^2-2x-2}\ge\sqrt{9x^3+25x^2-50x-18}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x(x-2)\ge 0\\3x^3+x^2-2x-2\ge 0\\9x^3+25x^2-50x-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)\ge 0\\(x-1)(3x^2+4x+2)\ge 0\\(9x^3+25x^2-50x)-18\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2-2x}+3\sqrt{3x^3+x^2-2x-2}\ge\sqrt{16(x^2-2x)+9(x^3+x^2-2x-2)}$$

Đặt $\sqrt{x^2-2x}=a;\sqrt{3x^3+x^2-2x-2}=b\ (a\ge 0;b>0)$ ta thu được

$$2a+3b\ge\sqrt{16a^2+9b^2}\Leftrightarrow 4a^2+12ab+9b^2\ge 16a^2+9b^2\Leftrightarrow 12a(a-b)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a\le b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=0\\x^2-2x\le 3x^3+x^2-2x-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x(x-2)=0\\3x^3\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\vee x=2\\x\ge\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x\ge 2$.

Bài toán 85. Giải phương trình

$$3\sqrt{2x^2+x}=\sqrt{5x^3+13x^2+4x-10}+\sqrt{x^3+3x^2+x-2}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2+x\ge 0\\x^3+3x^2+x-2\ge 0\\5x^3+13x^2+4x-10\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^3+3x^2+x-2}=\sqrt{5\left(x^3+3x^2+x-2\right)-\left(2x^2+x\right)}$

Đặt $\sqrt{2x^2+x}=a;\sqrt{x^3+3x^2+x-2}=b\quad\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$ ta có

$$3a-b=\sqrt{5b^2-a^2}\Rightarrow 9a^2-6ab+b^2=5b^2-a^2\Leftrightarrow 5a^2-3ab-2b^2=0$$
$$\Leftrightarrow(a-b)(5a+2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\5a+2b=0\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow 2x^2+x=x^3+3x^2+x-2\Leftrightarrow x^3+x^2-2=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+2x+2\right)=0\Leftrightarrow x=1$.
- $\begin{cases}5a+2b=0\\a\ge 0;b\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x=0\\x^3+3x^2+x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\x^3+3x^2+x-2=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Thử lại thấy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 86. Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}-4}{\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}-4}\le 1\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2\ge 4\\x^3+2x-3\ge 0\\x^3+8x^2+2x-27\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x+2)\ge 0\\(x-1)\left(x^2+x+3\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2.\\x^3+8x^2+2x-27\ge 0\end{cases}$

Nhận xét

$$x^3+8x^2+2x-27=x(x-2)(x+10)+22x-27\ge 22.3-27=17\Rightarrow\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}>\sqrt{17}>4.$$

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}\le\sqrt{x^3+2x-3+8\left(x^2-4\right)}$

Đặt $\sqrt{x^2-4}=u;\sqrt{x^3+2x-3}=v\quad\left(u\ge 0;v>0\right)$ ta thu được

$$2u+v\le\sqrt{8u^2+v^2}\Leftrightarrow 4u^2+4uv+v^2\le 8u^2+v^2\Leftrightarrow 4u(u-v)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u\ge v\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$
- $u\ge v\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4}\ge\sqrt{x^3+2x-3}\Leftrightarrow x^3-x^2+2x+1\ge 0\Leftrightarrow x\left(x^2-x+2\right)+1\ge 0\quad(*)$

Dễ thấy (*) nghiệm đúng với mọi $x\ge 2$.

So sánh và thử lại, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán 83, trong thao tác nhận xét và phần lập luận (*), các bạn THPT có thể dùng kiến thức liên quan đến đạo hàm – tính đơn điệu của hàm số của chương trình Giải tích lớp 12, chú ý rằng các hàm số liên quan $f(x)=x^3+8x^2+2x-27;g(x)=x^3-x^2+2x+1$ *đều đồng biến trên miền* $D=[2;+\infty)$.

Bài toán 87. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x-10}+\sqrt{x^3+x^2-2}\le\sqrt{4x^3+3x^2+x-16}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+x-10\ge 0 \\ x^3+x^2-2\ge 0 \\ 4x^3+3x^2+x-16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+2x+5)\ge 0 \\ (x-1)(x^2+2x^2+2)\ge 0 \\ 4x^3+3x^2+x-16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3+x-10}+\sqrt{x^3+x^2-2}\le\sqrt{3(x^3+x^2-2)+x^3+x-10}$ (1)

Đặt $\sqrt{x^3+x-10}=a;\sqrt{x^3+x^2-2}=b\ (a\ge 0;b>0)$ thì

$$(1)\Leftrightarrow a+b\le\sqrt{3b^2+a^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 3b^2+a^2\Leftrightarrow b(b-a)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3+x^2-2}\ge\sqrt{x^3+x-10}\Leftrightarrow x^2-x+8\ge 0 \qquad (*)$$

Nhận thấy (*) hiển nhiên. Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 88. Giải phương trình $2\sqrt{x^3+x-2}=\sqrt{x^3+2x+2}+\sqrt{x^3+5x+14} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+x-2\ge 0 \\ x^3+2x+2\ge 0 \\ x^3+5x+14\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{x^3+x-2}-\sqrt{x^3+2x+2}=\sqrt{4(x^3+2x+2)-3(x^3+x-2)}$ (1)

Đặt $\sqrt{x^3+x-2}=a;\sqrt{x^3+2x+2}=b\ (a\ge 0;b\ge 0)$ thì (1) trở thành

$$2a-b=\sqrt{4a^2-3b^2}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-b\ge 0 \\ 4a^2-4ab+b^2=4a^2-3b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-b\ge 0 \\ a(a-b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a-b\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=b\end{array}\right.\end{cases}$$

- ✓ $a=0\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow x=1$.
- ✓ $a=b\Leftrightarrow\sqrt{x^3+x-2}=\sqrt{x^3+2x+2}\Leftrightarrow x-2=2x+2\Leftrightarrow x=-4$.

So sánh và thử lại nghiệm, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 89. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^3+2x-3}+2(x+1)\le\sqrt{5x^3+4x^2+18x-11} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+2x-3\ge 0 \\ 5x^3+4x^2+18x-11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3+2x-3}+2(x+1)\le\sqrt{5(x^3+2x-3)+4(x^2+2x+1)}$

Đặt $\sqrt{x^3+2x-3}=u;x+1=v\ (u\ge 0;v>0)$ thu được

$$u+2v\le\sqrt{5u^2+4v^2}\Leftrightarrow u^2+4uv+4v^2\le 5u^2+4v^2\Leftrightarrow u(u-v)\ge 0$$

- ➢ $u=0\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$.
- ➢ $u\ge v\Leftrightarrow\sqrt{x^3+2x-3}\ge x+1\Leftrightarrow x^3+2x-3\ge x^2+2x+1\Leftrightarrow x^3-x^2-4\ge 0\Leftrightarrow(x-2)(x^2+x+2)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$

Kết luận nghiệm $S=\{1\}\cup[2;+\infty)$.

Bài toán 90. Giải phương trình $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $|x|\ge 1$.

Nhận xét phương trình đã cho không có nghiệm $x=1$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt[6]{(x+1)^2}-\sqrt[6]{(x-1)^2}=\sqrt[6]{x^2-1}\Leftrightarrow 2\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-1=\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$

Đặt $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=t\ (t\ge 0)$ ta thu được $2t^2-1=t\Leftrightarrow (t-1)(2t+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow t=1\Leftrightarrow x+1=x-1$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 91. Giải phương trình $2\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[3]{x-1}=5\sqrt[6]{x^2-1}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $|x|\ge 1$.

Nhận xét phương trình đã cho không có nghiệm $x=1$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt[6]{(x+1)^2}+2\sqrt[6]{(x-1)^2}=5\sqrt[6]{x^2-1}\Leftrightarrow 2\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+2=5\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$

Đặt $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=t\ (t\ge 0)$ ta có $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

- $t=1\Leftrightarrow x+1=x-1\Leftrightarrow 0x=2$ (Vô nghiệm).
- $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{64}\Leftrightarrow x=-\frac{65}{63}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\frac{65}{63}\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x-1+3\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2+7x+1\right)}$.
2. $x-3+\sqrt{x}=\sqrt{2\left(x^2-5x+9\right)}$.
3. $2x-1+\sqrt{x}\le\sqrt{2\left(4x^2-3x+1\right)}$.
4. $3-x+2\sqrt{x}=\sqrt{8+(1+x)^2}$.
5. $3\sqrt{x}+2\le\sqrt{10x^2-34x+40}+x$.

6. $2(1-x)+\sqrt{x}=\sqrt{x^2+5x+1}$.
7. $3(5-x)+\sqrt{x-1}>\sqrt{2x^2-6x+51}$.
8. $\sqrt{x-2}+6=2x+\sqrt{2x^2-15x+29}$.
9. $\sqrt{2x-1}+3x>\sqrt{15x^2+2x-1}$.
10. $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\geq 1$.
11. $2\sqrt{2x-1}+x=\sqrt{3\left(x^2+4x-2\right)}$.
12. $\dfrac{x-5+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2-3x+9}-2}<1$.
13. $2\left(1+\sqrt{x}\right)\leq x+\sqrt{5x^2-24x+20}$.
14. $\dfrac{2\sqrt{x}+x-1}{2-\sqrt{6x^2-33x+54}}\leq 1$.
15. $3+\sqrt{2x+1}\leq x+\sqrt{5x^2-32x+44}$.
16. $x+2+2\sqrt{2-x}\leq\sqrt{8x^2+31x+34}$.
17. $\dfrac{3x-5+\sqrt{4x-3}}{\sqrt{9x^2+6x-8}-4}<1$.
18. $\sqrt{x-1}+x+1\geq 2\sqrt{3x^2+4x+5}$.
19. $x+2+\sqrt{x^2+x+1}\leq 2\sqrt{x^2+10x+10}$.
20. $\dfrac{x-2+\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{2x^2-4x+4}-1}\leq 1$.
21. $\dfrac{x-1+\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{4x^2+3x-6}-1}<1$.
22. $x-1+\sqrt{3-x^2}\leq\sqrt{6x^2-10x+25}$.
23. $2x-3+2\sqrt{x^2+x}>\sqrt{15x^2-17x+18}$.
24. $\dfrac{x+2\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x^2+26x-7}-1}>1$.
25. $x+1+3\sqrt{2-x}=\sqrt{13x^2+23x+19}$.
26. $\dfrac{2x-10+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{9x^2-22x+33}-4}\leq 1$.
27. $x+\sqrt{x^2-2}=\sqrt{4x^2-6x+3}+3$.
28. $\dfrac{x-5+\sqrt{x^2+3x-4}}{\sqrt{4x^2-15x+23}-2}>1$.
29. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+x+1}\leq 2\sqrt{4x^2+x+10}$.
30. $2\sqrt{x^2+2x+5}\leq\sqrt{5x^2+18x+21}-\sqrt{2x-1}$.
31. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x}\geq\sqrt{5x^2+4x+1}$.

32. $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2-x}\le\sqrt{2x^2+12x-21}$.
33. $2\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-1}\le\sqrt{7x^2-12x-2}$.
34. $3\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{2-x}\le\sqrt{5x^2-14x-2}$.
35. $3\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x+1}>\sqrt{6x^2-20x+10}$.
36. $\dfrac{\sqrt{x^2+x}+4\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x^2+25x-48}-2}\ge 1$.
37. $\sqrt{x^2+3x}\ge\sqrt{4x^2+18x+6}-\sqrt{x^2-3}$.
38. $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+3x}\ge\sqrt{4x^2+6x-6}$.
39. $\sqrt{7x^2-11x+3}-\sqrt{x^2-2x}\ge\sqrt{2x^2-3x+1}$.
40. $2\sqrt{x^2+1}+3\sqrt{x^2+2x-8}\le\sqrt{25x^2+18x-56}$.
41. $3\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x+1}\le\sqrt{4x^2-6x+5}$.
42. $2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-1}\le\sqrt{4x^2-3x-13}$.
43. $3\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2+x-2}\ge\sqrt{61x^2+x+13}$.
44. $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x^2-3x+1}\le\sqrt{9x^2-13x+5}$.
45. $\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{1+x^2}\ge\sqrt{2x^2+x+5}$.
46. $x+\sqrt{x^3+x^2-2}=\sqrt{x^3+4x^2-2}$.
47. $x-1+\sqrt{x^3+x^2-2x}\le\sqrt{x^3+4x^2-8x+3}$.
48. $x+1+\sqrt{2x^3+x^2+2x}\le\sqrt{2x^3+x^2+5x+3}$.
49. $x+1+2\sqrt{x^3+1}>\sqrt{4x^3+5x^2+10x+9}$.
50. $2x+\sqrt{x^3-4x+1}=1+\sqrt{x^3+2x-2}$.
51. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^3+x-2}=\sqrt{2\left(x^3+2x-1\right)}$.
52. $\sqrt{2-x}+\sqrt{x^3-x+10}=\sqrt{x^3-4x+16}$.
53. $\dfrac{2\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+2x-3}-2}{\sqrt{x^3+18x-11}-2}>1$.
54. $2\sqrt{x-2}+3\sqrt{x^3+x-6}\le\sqrt{9x^3+25x-86}$.
55. $\sqrt{4x-1}+\sqrt{x^3+2}\le\sqrt{x^3+12x-1}$.
56. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^3+2x-9}=\sqrt{x^3+8x-12}$.
57. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x^3+x-11}\le\sqrt{3x^3+4x-36}$.
58. $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^3+x^2+x-3}=\sqrt{x^3+4x^2+4x}$.
59. $\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x^3+x^2-2}\le\sqrt{x^3+4x^2+7}$.
60. $3\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{x^3+x^2-12}\le\sqrt{4x^3+25x^2-69}$.
61. $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{2x^3+x^2+2x-5}\le\sqrt{2x^3+4x^2+8x+4}$.
62. $\dfrac{\sqrt{x^2+3}+3\sqrt{x^3+x^2-2}-5}{\sqrt{9x^3+16x^2+3}-5}<1$.
63. $x+3+\sqrt{x^3+6x+9}=\sqrt{x^3+3x^2+24x+36}$.

64. $\sqrt{x}+\sqrt{x^3+x-30}\ge\sqrt{2\left(x^3+2x-30\right)}$.

65. $\sqrt{3x^2+3x+1}+\sqrt{(x+1)^3-8}\le\sqrt{(x+1)^3+9x^2+9x-5}$.

66. $\sqrt{x}+\sqrt{x^3-8}>\sqrt{3x^3+x-24}$.

67. $\sqrt{2x^2+x+2}+\sqrt{x^3+2x^2+x-4}\ge\sqrt{x^3+8x^2+4x+2}$.

68. $\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{2x^3+3x^2-x-4}>\sqrt{2x^3+12x^2-4x+2}$.

69. $2\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{3x^3+x^2+x-5}<\sqrt{3x^3+9x^2+9x-13}$.

70. $3x+\sqrt{x^3+9x^2-6x}\le 1+\sqrt{x^3+36x^2-24x+3}$.

71. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^3-3x-2}\le\sqrt{2\left(x^3+x^2-6x\right)}$.

72. $2\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^3+x^2+3x-4}\ge\sqrt{x^3+9x^2+27x+36}$.

73. $4\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^3+x^2-x-10}\ge\sqrt{x^3+16x^2-16x-10}$.

74. $3\sqrt{2x^2+2x+5}+\sqrt{x^3+2x^2+2x-5}\le\sqrt{x^3+32x^2+32x+70}$.

75. $\sqrt{3x^2+x+1}+\sqrt{x^3+3x^2+x-5}\ge\sqrt{x^3+12x^2+4x-2}$.

76. $\sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt{x^3+2x+2}=\sqrt{2\left(2x^3+4x+3\right)}$.

77. $\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3+x-2}\ge\sqrt{2\left(2x^3+x\right)}$.

78. $\sqrt{x^3+3x^2+2}+\sqrt{x^3+x^2+4}=2\sqrt{x^3+2x^2+3}$.

79. $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x-2}\le\sqrt{2\left(2x^3+x-1\right)}$.

80. $2\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3+2x^2-3}\ge\sqrt{4x^3+2x^2-6}$.

81. $\dfrac{\sqrt{x^3+x-2}+2\sqrt{x^3+x-10}-6}{\sqrt{9x^3+9x-50}-6}\ge 1$.

82. $3\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+3x+5}\ge\sqrt{16x^3+30x+35}$.

83. $\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3+3x-14}\le\sqrt{4x^3-14}$.

84. $\sqrt{x^3+x^2+x-3}+\sqrt{x^3+2x^2+x-4}\ge\sqrt{4x^3+5x^2+4x-13}$.

85. $2\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x^3+x-2}\ge\sqrt{9x^3+3x-54}$.

86. $2\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{x^3+4x-5}\ge\sqrt{9x^3+24x-15}$.

87. $\dfrac{2\sqrt{x^3+4x}+\sqrt{x^3+5x-6}-5}{\sqrt{9x^3+39x-18}-5}<1$.

88. $2\sqrt{x^3+6x}+\sqrt{x^3+x^2+3x-5}=\sqrt{9x^3+3x^2+45x-15}$.

89. $\sqrt{x^3+5x}+\sqrt{x^3+7x-6}\ge 2\sqrt{x^3+6x-3}$.

90. $2\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-x-6}\le\sqrt{3\left(3x^3+x-6\right)}$.

91. $2\sqrt{5x^2+x+1}+\sqrt{x^3+5x^2+x-7}\le\sqrt{x^3+20x^2+4x-4}$.

92. $\sqrt{3x^2+2x+5}+\sqrt{x^3+3x^2+2x-6}>\sqrt{2\left(x^3+6x^2+4x-1\right)}$.

93. $\sqrt{x^3-2x}+\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{x^3+3x^2-8x+12}$.

Bài toán 92. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+24x+28}=5\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+x-20}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}5x^2+24x+28\ge 0\\ x\ge -2\\ x^2+x-20\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5x^2+24x+28=25(x+2)+x^2+x-20+10\sqrt{(x+2)(x-4)(x+5)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-x-1=5\sqrt{(x+5)(x^2-2x-8)}\Leftrightarrow 2(x^2-2x-8)+3(x+5)=5\sqrt{x+5}.\sqrt{x^2-2x-8}$$

Đặt $\sqrt{x+5}=a;\sqrt{x^2-2x-8}=b\ (a>0;b\ge 0)$ ta thu được

$$3a^2+2b^2=5ab\Leftrightarrow (a-b)(3a-2b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ 3a=2b\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow \sqrt{x+5}=\sqrt{x^2-2x-8}\Leftrightarrow x^2-3x-13=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3+\sqrt{61}}{2};\frac{3-\sqrt{61}}{2}\right\}$.
- $3a=2b\Leftrightarrow 3\sqrt{x+5}=2\sqrt{x^2-2x-8}\Leftrightarrow 4x^2-17x-77=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{11}{4};7\right\}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{7;\frac{3+\sqrt{61}}{2}\right\}$.

Bài toán 93. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}5x^2+14x+9\ge 0\\ x^2-x-20\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(5x+9)\ge 0\\ (x+4)(x-5)\ge 0\\ x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=x^2-x-20+25(x+1)+10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{x+4}.\sqrt{x^2-4x-5}\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{x+4}.\sqrt{x^2-4x-5}\quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x+4}=b;\sqrt{x^2-4x-5}=a\ (a\ge 0;b>0)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow 2a^2+3b^2=5ab\Leftrightarrow (a-b)(2a-3b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ 2a=3b\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow x+4=x^2-4x-5\Leftrightarrow x^2-5x-9=0\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}\vee x=\frac{5-\sqrt{61}}{2}$.
- $2a=3b\Leftrightarrow 4(x^2-4x-5)=9(x+4)\Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0\Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}\vee x=8$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{8;\frac{\sqrt{61}+5}{2}\right\}$.

Bài toán 94. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6+9(x-1)+6\sqrt{(x-2)(x+3)(x-1)}=3x^2-6x+19$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2+2x-3)(x-2)}=x^2-8x+17$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2+2x-3)(x-2)}=(x^2+2x-3)-10(x-2) \quad (*)$$

Nhận xét (*) không thỏa mãn nghiệm $x=2$.

Trong trường hợp $x>2$ thì $(*)\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}}=\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}-10$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}}=t\ (t>0)$ ta được $(*)\Leftrightarrow 3t=t^2-10\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\t=5\end{array}\right.$

Loại nghiệm $t=-2<0$. Với $t=5\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-3}{x-2}=25\Leftrightarrow x^2-23x+47=0\Leftrightarrow x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2}\vee x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{\dfrac{23-\sqrt{341}}{2};\dfrac{23+\sqrt{341}}{2}\right\}$.

Bài toán 95. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-3x-2}=\sqrt{18x^2+16x-39}-5\sqrt{x-1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5\sqrt{x-1}+\sqrt{2x^2-3x-2}=\sqrt{18x^2+16x-39}$$

$$\Leftrightarrow 25(x-1)+2x^2-3x-2+10\sqrt{x-1}.\sqrt{(2x+1)(x-2)}=18x^2+16x-39$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{(x-1)(2x+1)(x-2)}=16x^2-6x-12$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x-1)(2x+1)}.\sqrt{x-2}=8x^2-3x-6$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{2x^2-x-1}.\sqrt{x-2}=4(2x^2-x-1)+x-2$$

Đặt $\sqrt{2x^2-x-1}=u;\sqrt{x-2}=v\ (u>0;v\ge 0)$ ta thu được

$$5uv=4u^2+v^2\Leftrightarrow (u-v)(4u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=4v\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\2x^2-x-1=x-2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\2x^2-2x+1=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $u=4v\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\2x^2-x-1=16x-32\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\2x^2-17x+31=0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{17+4\sqrt{3}}{4}$.

Vậy phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{17+4\sqrt{3}}{4}$.

Nhận xét.

Trọng tâm nội dung của tài liệu là đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp – đồng bậc, do vậy các bài toán từ 92 đến 95 cũng không nằm ngoài phạm vi đó. Độ khó của bài toán đã tăng dần so với các bài toán trước, nguyên do tính chất đồng bậc tiềm ẩn, các ẩn phụ chỉ xuất hiện sau khi nâng lũy thừa và ghép nhóm thích hợp. Lời giải bài toán 94 vẫn giữ bản chất cùng hai bài toán 92, 93 mặc dù hình thức trình bày có hơi khác một chút.

Để cụ thể hơn nữa, tác giả xin lấy thí dụ điển hình bài toán 93, mặc dù đã khá cũ nhưng vẫn còn giữ nguyên giá trị, lần đầu tiên bài toán xuất hiện trong Đề ra kỳ này (Các lớp THCS) Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Số 267 – Tháng 9 năm 1999. Tác giả bài toán là nhà giáo Huỳnh Tấn Châu, trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên, một cộng tác viên trung thành lâu năm của Tạp chí THTT và Toán tuổi thơ.

- *Về điều kiện các bạn cần tìm chính xác* $\begin{cases} 5x^2+14x+9\ge 0 \\ x^2-x-20\ge 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(5x+9)\ge 0 \\ (x+4)(x-5)\ge 0 \\ x\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 5$.

Điều này đôi khi ảnh hưởng mạnh mẽ tới lập luận hoặc chính là chìa khóa mở ra cánh cửa lời giải.

- *Biến đổi tương đương phương án 1:* $\sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$.

Có thể một số bạn tư duy theo hướng đồng bậc dạng $k\sqrt{ma^2+nb^2}=pa+qb$. *Chúng ta cùng thử nghiệm*

Giả định $\sqrt{a\left(x^2-x-20\right)+b\left(x+1\right)}=\sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$.

Chưa cần sử dụng đồng nhất thức có thể thấy ngay $a=5$, *tuy nhiên b không tồn tại. Thất bại.*

- *Biến đổi tương đương phương án 2:* $\sqrt{5x^2+14x+9}-5\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x-20}$.

Theo đường lối cũ, giả định $\sqrt{5x^2+14x+9}-5\sqrt{x+1}=\sqrt{a\left(5x^2+14x+9\right)+b\left(x+1\right)}=\sqrt{x^2-x-20}$.

Và tương tự, thấy ngay rằng $a=\frac{1}{5}$, *b cũng không tồn tại. Phải chăng phương pháp này không còn phù hợp ?*

- *Biến đổi tương đương và nâng lũy thừa theo các căn thức đơn giản nhất*

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=x^2-x-20+25\left(x+1\right)+10\sqrt{\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)} \\ &\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{\left(x+4\right)\left(x-5\right)\left(x+1\right)} \qquad (*) \end{aligned}$$

Vế phải phương trình (*) có hình thức đa chiều, từ đây xảy ra nhiều phương án nhỏ khi đưa về dạng đồng bậc, để tạo ra các sự lựa chọn này cũng chính là yếu điểm, là điểm nhấn của bài toán: $x^2-x-20=\left(x+4\right)\left(x-5\right)$.

Do điều kiện $x\ge 5$ *nên có thể ghép hai trong ba thừa số trong căn thức với nhau, giảm bớt xuống còn hai nhân tử, và thực hiện thử nghiệm theo "chiêu bài" đồng bậc thông qua đồng nhất thức. Trong trường hợp điều kiện không cho phép "ly khai" nhân tử chúng ta vẫn có thể lập luận được, bằng cách để chúng "dính kép" vào nhau theo kiểu phân thức như lời giải bài toán 94, điều này đã trình bày trong các phần phía trước của tài liệu.*

Lưu ý khả năng $\sqrt{\left(x+4\right)\left(x-5\right)}.\sqrt{x+1}$ *đã xét ở trên. Các khả năng còn lại gồm*

$$\sqrt{x-5}.\sqrt{\left(x+4\right)\left(x+1\right)}=\sqrt{x+5}.\sqrt{x^2+5x+4}$$

$$\Rightarrow a\left(x^2+5x+4\right)+b\left(x+5\right)=2x^2-5x+2 \text{ (Không tồn tại a và b).}$$

Hoặc là

$$\sqrt{x+4}.\sqrt{\left(x-5\right)\left(x+1\right)}=\sqrt{x+4}.\sqrt{x^2-4x-5}$$

$$\Rightarrow a\left(x^2-4x-5\right)+b\left(x+4\right)=2x^2-5x+2\Rightarrow a=2;b=3$$

Đây chính là trường hợp các hệ số "đẹp" nhất. Như vậy lời giải bài toán 93 là tổng hợp của cả một quá trình thử chọn, thực tế cũng chông gai lắm, và để tạo lập được một đề bài "hội tụ" yếu tố như thế này chắc chắn cũng không phải một công việc đơn giản.

Mời quý bạn theo dõi các ví dụ tiếp theo, bài toán 96, một lần nữa dạng toán này lại xuất hiện trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ thân yêu, tọa lạc tại Đề ra kỳ này (Các lớp THCS) số 410 – Tháng 8 năm 2011, chào mừng đội tuyển Việt Nam trở về từ Hà Lan sau kỳ thi IMO lần thứ 52. Tác giả bài toán cũng là một cộng tác viên thân thiết của THTT, nhà giáo Thới Ngọc Ánh, trường THCS Phổ Minh, huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi. Một chặng đường lịch sử 12 năm tư duy kế thừa !

Bài toán 96. Giải phương trình $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}7x^2+25x+19\ge 0\\ x+2\ge 0\\ x^2-2x-35\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 7$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{7x^2+25x+19}=7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35}$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+25x+19=49(x+2)+x^2-2x-35+14\sqrt{x+2}.\sqrt{(x+5)(x-7)}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x-7)}.\sqrt{x+5}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{x^2-5x-14}.\sqrt{x+5}$$

Đặt $\sqrt{x^2-5x-14}=a;\sqrt{x+5}=b\quad (a>0;b>0)$ thì thu được

$$3a^2-7ab+4b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(3a-4b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ 3a=4b\end{array}\right.$$

❖ $a=b\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\ x^2-5x-14=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\ x^2-6x-19=0\end{cases}\Rightarrow x=3-2\sqrt{7}$.

❖ $3a=4b\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\ 9(x^2-5x-14)=16(x+5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 7\\ 9x^2-61x-206=0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$.

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm $x=3+2\sqrt{7};x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$.

Bài toán 97. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+11x-27}=\sqrt{x^2-1}+3\sqrt{x-2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2\ge 1\\ x\ge 2\\ 3x^2+11x-27\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2+11x-27=x^2-1+9(x-2)+6\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-8=6\sqrt{(x+1)(x-2)(x-1)}$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-4=3\sqrt{(x+1)(x-2)}.\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2+2(x-1)=3\sqrt{x^2-x-2}.\sqrt{x-1}\qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2-x-2}=a;\sqrt{x-1}=b\quad (a\ge 0;b>0)$ thì (1) trở thành

$$a^2+2b^2=3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right.$$

- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$.
- $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-x-2=4(x-1) \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\frac{5+\sqrt{17}}{2};1+\sqrt{2}\right\}$.

Bài toán 98. Giải phương trình $\sqrt{11x^2+3x-19}=3\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-2} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$11x^2+3x-19=9(x^2-1)+x-2+6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-8=6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} \Leftrightarrow x^2+x-4=3\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2-x-2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2+2(x-1)=3\sqrt{x-1}.\sqrt{x^2-x-2} \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2-x-2}=a;\sqrt{x-1}=b \quad (a\geq 0;b>0)$ thì (1) trở thành

$$a^2+2b^2=3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right.$$

- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}$.
- $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-x-2=4(x-1) \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\frac{5+\sqrt{17}}{2};1+\sqrt{2}\right\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $3\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{3x^2+19x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x+9+x^2-4+6\sqrt{(x+1)(x+2)(x-2)}=3x^2+19x+1$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3x+2}.\sqrt{x-2}=x^2+5x-2$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3x+2}.\sqrt{x-2}=x^2+3x+2+2(x-2)$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+2}=a;\sqrt{x-2}=b \ (a>0;b\geq 0)$ ta thu được

$$3ab=a^2+2b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=2b \end{array}\right.$$

- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2+2x+4=0$ (Vô nghiệm).
- $a=2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}=2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2+3x+2=4x-8 \Leftrightarrow x^2-x+10=0$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 100. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+21x-27}-5\sqrt{x-2}=\sqrt{x^2+2x-3}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x^2+21x-27}=5\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+21x-27=25(x-2)+x^2+2x-3+10\sqrt{(x-2)(x-1)(x+3)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-6x+26=10\sqrt{(x-2)(x-1)}.\sqrt{x+3}\Leftrightarrow 2x^2-3x+13=5\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x+3}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-3x+2\right)+3(x+3)=5\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x+3}$$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+2}=u;\sqrt{x+3}=v$ $(u\ge 0;v>0)$ ta được $2u^2+3v^2=5uv\Leftrightarrow (u-v)(2u-3v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\2u=3v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x\in\left\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right\}$.
- $2u=3v\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-3x+2}=3\sqrt{x+3}\Leftrightarrow 4x^2-21x-19=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{21-\sqrt{745}}{8};\dfrac{21+\sqrt{745}}{8}\right\}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được các nghiệm $S=\left\{\dfrac{21+\sqrt{745}}{8};2+\sqrt{5}\right\}$.

Bài toán 101. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+8x-15}=\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x-1}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5x^2+8x-15=x^2+x-6+x-1+2\sqrt{(x-2)(x+3)(x-1)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+6x-8=2\sqrt{x-2}.\sqrt{x^2+2x-3}\Leftrightarrow 2x^2+3x-4=2\sqrt{x-2}.\sqrt{x^2+2x-3}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x-3\right)-(x-2)=\sqrt{x-2}.\sqrt{x^2+2x-3}\qquad (*)$$

Đặt $\sqrt{x^2+2x-3}=u;\sqrt{x-2}=v$ $(u>0;v\ge 0)$ thì (*) trở thành

$$2u^2-v^2=uv\Leftrightarrow (u-v)(2u+v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\2u+v=0\end{array}\right.\Rightarrow u=v$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-3=x-2\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vee x=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Kết hợp điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 102. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+5x+6}<\sqrt{4x^2+11x-6}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 1\\x^2+5x+6\ge 1\\4x^2+11x-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+x^2+5x+6+2\sqrt{(x-1)(x+2)(x+3)}<4x^2+11x-6$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x+3)}.\sqrt{x+2}<3x^2+5x-11\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2x-3}.\sqrt{x+2}<3\left(x^2+2x-3\right)-(x+2)\qquad (*)$$

Đặt $\sqrt{x^2+2x-3}=a;\sqrt{x+2}=b\ \left(a\ge 0;b>0\right)$ thì (*) trở thành

$$2ab<3a^2-b^2\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(3a+b\right)>0\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}>\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x^2-x-5>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\\ x>\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S=\left[\dfrac{\sqrt{21}+1}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 103. Giải bất phương trình $\sqrt{2\left(4x^2-x-6\right)}<\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x-3}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}8x^2-2x-12\ge 0\\ x\ge\dfrac{3}{2}\\ 2x^2+x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow 8x^2-2x-12<2x^2+x-1+2x-3+2\sqrt{\left(2x-1\right)\left(x+1\right)\left(2x-3\right)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-5x-8<2\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2-x-3}\Leftrightarrow 3\left(2x^2-x-3\right)-\left(2x-1\right)<2\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x^2-x-3}$$

Đặt $\sqrt{2x-1}=u;\sqrt{2x^2-x-3}=v\ \left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được

$$3v^2-u^2<2uv\Leftrightarrow\left(v-u\right)\left(3v+u\right)<0\Leftrightarrow v<u\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-x-3}<\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2x^2-3x-2<0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x<2.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left[\dfrac{3}{2};2\right]$.

Bài toán 104. Giải bất phương trình $2\sqrt{x+1}+\sqrt{3x^2+5x-2}\ge\sqrt{18x^2+18x-5}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge -1\\ 3x^2+5x-2\ge 0\\ 18x^2+18x-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x+4+3x^2+5x-2+4\sqrt{\left(x+1\right)\left(3x-1\right)\left(x+2\right)}\ge 18x^2+18x-5$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\left(x+1\right)\left(3x-1\right)}.\sqrt{x+2}\ge 15x^2+9x-7\Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2+2x-1}.\sqrt{x+2}\ge 5\left(3x^2+2x-1\right)-\left(x+2\right)\qquad(*)$$

Đặt $\sqrt{3x^2+2x-1}=u;\sqrt{x+2}=v\ \left(u\ge 0;v>0\right)$ thì (*) trở thành

$$4uv\ge 5u^2-v^2\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(5u+v\right)\le 0\Leftrightarrow u\le v$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+2x-1}\le\sqrt{x+2}\Leftrightarrow 3x^2+x-3\le 0\Leftrightarrow-\frac{1+\sqrt{37}}{6}\le x\le\frac{\sqrt{37}-1}{6}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}$.

Bài toán 105. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{x-2}<\sqrt{3\left(3x^2-13x+11\right)}$ $\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2-6x+5\ge 0\\ x-2\ge 0\\ 3x^2-13x+11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4\left(x^2-6x+5\right)+x-2+4\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-5\right)\left(x-2\right)}<3\left(3x^2-13x+11\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}.\sqrt{x-5}>5x^2-16x+15$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x-5}>5\left(x^2-3x+2\right)-\left(x-5\right)\qquad(1)$$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+2}=u;\sqrt{x-5}=v\ \left(u>0;v\ge 0\right)$ thì (1) trở thành

$4uv>5u^2-v^2\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(5u+v\right)<0\Leftrightarrow u<v\Leftrightarrow\sqrt{x^2-3x+2}<\sqrt{x-5}\Leftrightarrow x^2-4x+7<0$ (Vô nghiệm).

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 106. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-8x+7}+4\sqrt{x-3}\le\sqrt{2x^2+19x-143}$ $\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2-8x+7\ge 0\\ x-3\ge 0\\ 2x^2+19x-143\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 7$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-8x+7+16x-48+8\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-7\right)\left(x-3\right)}\le 2x^2+19x-143$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}.\sqrt{x-7}\le x^2+11x-102$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{x^2-4x+3}.\sqrt{x-7}\le x^2-4x+3+15\left(x-7\right)\qquad(*)$$

Đặt $\sqrt{x^2-4x+3}=u;\sqrt{x-7}=v\ \left(u>0;v\ge 0\right)$, khi đó (*) trở thành

$$8uv\le u^2+15v^2\Leftrightarrow\left(u-3v\right)\left(u-5v\right)\ge 0\Leftrightarrow\frac{u^2-3v^2}{u+3v}.\frac{u^2-25v^2}{u+5v}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-13x+66\right)\left(x^2-29x+178\right)\ge 0\qquad(1)$$

Do $x^2-13x+66>0,\forall x\in\mathbb{R};x^2-29x+178>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[7;+\infty\right)$.

Bài toán 107. Giải bất phương trình $\sqrt{10x^2-50x-3}\ge\sqrt{2x^2-5x+2}-3\sqrt{x-5}$ $\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}10x^2-50x-3\ge 0\\ 2x^2-5x+2\ge 0\\ x\ge 5\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{25+\sqrt{745}}{10}$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2-5x+2}-3\sqrt{x-5}=\dfrac{2x^2-14x+47}{\sqrt{2x^2-5x+2}+3\sqrt{x-5}}>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$10x^2-50x-3\ge 2x^2-5x+2+9x-45-6\sqrt{(2x-1)(x-2)(x-5)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-27x+20+3\sqrt{(2x-1)(x-5)}.\sqrt{x-2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(2x^2-11x+5\right)-5(x-2)+3\sqrt{2x^2-11x+5}.\sqrt{x-2}\ge 0$$

Đặt $\sqrt{2x^2-11x+5}=u;\sqrt{x-2}=v\ (u>0;v>0)$ ta thu được

$$2u^2-5v^2+3uv\ge 0\Leftrightarrow (u-v)(2u+5v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-11x+5}\ge\sqrt{x-2}\Leftrightarrow 2x^2-12x+7\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{6+\sqrt{22}}{2}\vee x\le\frac{6-\sqrt{22}}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left[3+\dfrac{\sqrt{22}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 108. Giải bất phương trình $\sqrt{3\left(9x^2-20x+9\right)}>2\sqrt{6x^2-11x+3}-\sqrt{x-2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$.

Nhận xét $x\ge 2\Rightarrow 2\sqrt{6x^2-11x+3}-\sqrt{x-2}=\dfrac{4\left(6x^2-11x+3\right)-(x-2)}{2\sqrt{6x^2-11x+3}+\sqrt{x-2}}=\dfrac{24x^2-45x+14}{2\sqrt{6x^2-11x+3}+\sqrt{x-2}}>0$.

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với

$$27x^2-60x+27>4\left(6x^2-11x+3\right)+x-2-4\sqrt{(2x-3)(3x-1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+17+4\sqrt{(3x-1)(x-2)}.\sqrt{2x-3}>0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-7x+2+4\sqrt{3x^2-7x+2}.\sqrt{2x-3}-5(2x-3)>0$$

Đặt $\sqrt{3x^2-7x+2}=a;\sqrt{2x-3}=b\ (a\ge 0;b>0)$ thu được

$$a^2+4ab-5b^2>0\Leftrightarrow (a-b)(a+5b)>0\Leftrightarrow a>b$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-7x+2}>\sqrt{2x-3}\Leftrightarrow 3x^2-9x+5>0\Leftrightarrow x<\frac{9-\sqrt{21}}{6}\vee x>\frac{9+\sqrt{21}}{6}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S=\left(\dfrac{9+\sqrt{21}}{6};+\infty\right)$.

Bài toán 109. Giải bất phương trình $\sqrt{x(8x-15)}\ge\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 2$.

Nhận xét $\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}=\dfrac{4x^2-9x+9}{\sqrt{4x^2-5x+1}+2\sqrt{x-2}}>0,\forall x\ge 2$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương

$$8x^2-15x\ge 4x^2-5x+1+4(x-2)-4\sqrt{(x-1)(4x-1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-14x+7+4\sqrt{(4x-1)(x-2)}.\sqrt{x-1}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-9x+2+4\sqrt{4x^2-9x+2}.\sqrt{x-1}-5(x-1)\ge 0.$$

Đặt $\sqrt{4x^2-9x+2}=u;\sqrt{x-1}=v\ (u\ge 0;v>0)$ ta thu được

$$u^2+4uv-5v^2\ge 0\Leftrightarrow (u-v)(u+5v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-9x+2}\ge\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 4x^2-10x+3\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge\dfrac{5+\sqrt{13}}{4}\\ x\le\dfrac{5-\sqrt{13}}{4}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left[\dfrac{5+\sqrt{13}}{4};+\infty\right)$.

Bài toán 110. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+13x-173}+6\sqrt{x-5}\ge\sqrt{2x^2-x-1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^2+13x-173\ge 0\\ x\ge 5\\ 2x^2-x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{\sqrt{2937}-13}{8}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{4x^2+13x-173}\ge\sqrt{2x^2-x-1}-6\sqrt{x-5}\quad (1)$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2-x-1}-6\sqrt{x-5}=\dfrac{2x^2-37x+179}{\sqrt{2x^2-x-1}+6\sqrt{x-5}}>0,\forall x$ thuộc tập xác định.

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow 4x^2+13x-173\ge 2x^2-x-1+36(x-5)-12\sqrt{(2x+1)(x-1)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-22x+8+12\sqrt{(2x+1)(x-5)}.\sqrt{x-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-9x-5+12\sqrt{2x^2-9x-5}.\sqrt{x-1}-13(x-1)\ge 0\qquad (2)$$

Đặt $\sqrt{2x^2-9x-5}=a;\sqrt{x-1}=b\ (a>0;b>0)$ thì

$$(2)\Leftrightarrow a^2+12ab-13b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)(a+13b)\ge 0\Leftrightarrow a\ge b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-9x-5}\ge\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x^2-5x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{5+\sqrt{33}}{2}\vee x\le\frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 111. Giải bất phương trình $3\sqrt{x-4}\ge 2\sqrt{3x^2-5x+2}-\sqrt{27x^2-98x+29}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}27x^2-98x+29\ge 0\\ 3x^2-5x+2\ge 0\\ x\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{27x^2-98x+29}\ge 2\sqrt{3x^2-5x+2}-3\sqrt{x-4}\qquad (1)$.

Nhận xét: $x\ge 4\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+2}-3\sqrt{x-4}=\dfrac{12x^2-29x+44}{2\sqrt{3x^2-5x+2}-3\sqrt{x-4}}>0$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 27x^2-98x+29 \ge 4\left(3x^2-5x+2\right)+9x-36-12\sqrt{(3x-2)(x-1)(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow 15x^2-87x+57+12\sqrt{(3x-2)(x-4)}.\sqrt{x-1} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(3x^2-14x+8\right)+12\sqrt{3x^2-14x+8}.\sqrt{x-1}-17(x-1) \ge 0 \qquad (2)$$

Đặt $\sqrt{3x^2-14x+8}=u;\sqrt{x-1}=v\ (u>0;v>0)$ thì (2) trở thành

$$5u^2+12uv-17v^2 \ge 0 \Leftrightarrow (u-v)(5u+17v) \ge 0 \Leftrightarrow u \ge v \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-14x+8} \ge \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-15x+9 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-5x+3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{5+\sqrt{13}}{2} \vee x \ge \frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S=\left[\frac{5+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 112. Giải bất phương trình $5\sqrt{x-5}+3\sqrt{2x^2-x-17} \ge 4\sqrt{x^2-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \ge 5 \\ 18x^2-9x-153 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{18x^2-9x-153} \ge 4\sqrt{x^2-1}-5\sqrt{x-5} \qquad (1)$.

Nhận xét $4\sqrt{x^2-1}-5\sqrt{x-5}=\dfrac{16x^2-25x+109}{4\sqrt{x^2-1}+5\sqrt{x-5}}>0\ \forall x \ge 5$. Vì thế

$$(1) \Leftrightarrow 18x^2-9x-153 \ge 16x^2-16+25x-125-20\sqrt{(x+1)(x-1)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-34x-12+20\sqrt{x+1}.\sqrt{(x-1)(x-5)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-17x-6+10\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-6x+5} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+5+10\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-6x+5}-11(x+1) \ge 0 \qquad (2)$$

Đặt $\sqrt{x+1}=a;\sqrt{x^2-6x+5}=b\ \ (a>0;b \ge 0)$ ta có

$$(2) \Leftrightarrow b^2+10ab-11a^2 \ge 0 \Leftrightarrow (b-a)(b+11a) \ge 0 \Leftrightarrow b \ge a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \le \sqrt{x^2-6x+5} \Leftrightarrow x^2-7x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{7+\sqrt{33}}{2} \vee x \le \frac{7-\sqrt{33}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình ban đầu là $x \ge \dfrac{\sqrt{33}+7}{2}$.

Bài toán 113. Giải bất phương trình $\sqrt{6x^2-14x-24}+\sqrt{x-3} \ge x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 6x^2-14x-24 \ge 0 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{7+\sqrt{193}}{6} \qquad (*)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{6x^2-14x-24} \ge x+1-\sqrt{x-3} \qquad (1)$.

Nhận xét $x+1-\sqrt{x-3}=\dfrac{x^2+x+4}{x+1+\sqrt{x-3}}>0, \forall x$ thỏa mãn điều kiện (*). Bởi vậy

$$(1) \Leftrightarrow 6x^2 - 14x - 24 \ge x^2 + 2x + 1 + x - 3 - 2(x+1)\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 17x - 22 + 2(x+1)\sqrt{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(5x - 22 + 2\sqrt{x-3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} \ge 22 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{22}{5} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{22}{5} \\ 4x - 12 \ge 25x^2 - 220x + 484 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{22}{5} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{22}{5} \\ 25x^2 - 224x + 496 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{22}{5} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{22}{5} \\ 4 \le x \le \dfrac{124}{25} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 4$$

So sánh với điều kiện, kết luận nghiệm $x \ge 4$.

Bài toán 114. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-5} + \sqrt{10x^2 - 34x + 21} > 2x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \dfrac{17+\sqrt{79}}{10}$ (*).

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{10x^2 - 34x + 21} > 2x - 2 - \sqrt{2x-5} \quad (1)$.

Nhận xét $2x - 2 - \sqrt{2x-5} = \dfrac{4x^2 - 10x + 9}{2x - 2 + \sqrt{2x-5}} > 0, \forall x$ thỏa mãn (*). Do đó

$$(1) \Leftrightarrow 10x^2 - 34x + 21 > 4x^2 - 8x + 4 + 2x - 5 - 4(x-1)\sqrt{2x-5}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 28x + 22 + 4(x-1)\sqrt{2x-5} > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 11 + 2(x-1)\sqrt{2x-5} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(3x - 11 + 2\sqrt{2x-5}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-5} > 11 - 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{11}{3} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{11}{3} \\ 8x - 20 > 9x^2 - 66x + 121 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{11}{3} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{11}{3} \\ 3 < x < \dfrac{47}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 3$$

Kết luận nghiệm $S = (3; +\infty)$.

Bài toán 115. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 24x + 35} \ge \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 7x + 12} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in D = (-\infty; -4] \cup \left[-\dfrac{5}{2}; -2\right] \cup [-1; +\infty)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 24x + 35 \ge 2x^2 + 10x + 14 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 21 \ge 2\sqrt{(x+2)(x+4)(x+1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 6x + 8) - (x^2 + 4x + 3) \ge 2\sqrt{(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 4x + 3)}$$

Đặt $x^2 + 6x + 8 = a; x^2 + 4x + 3 = b$ thu được

$$3a - b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \ge 0 \\ 9a^2 - 6ab + b^2 \ge 4ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \ge 0 \\ 9a^2 - 10ab + b^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \ge 0 \\ (a-b)(9a-b) \ge 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

❖ $\begin{cases}3a-b\ge 0\\ a-b\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(x^2+6x+8\right)\ge x^2+4x+3\\ x^2+6x+8\ge x^2+4x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+14x+21\ge 0\\ x\ge -\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{\sqrt{7}-7}{2}$.

❖ $\begin{cases}3a-b\ge 0\\ 9a-b\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(x^2+6x+8\right)\ge x^2+4x+3\\ 9\left(x^2+6x+8\right)\ge x^2+4x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+14x+21\ge 0\\ 8x^2+50x+69\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{\sqrt{7}-7}{2}\\ x\le -\dfrac{25+\sqrt{73}}{8}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\left(-\infty;-\dfrac{25+\sqrt{73}}{8}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{7}-7}{2};-2\right]$.

Bài toán 116. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+21x+20}\le\sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{x^2+7x+10}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$ hoặc $x\le -5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&4x^2+22x+30\le 2x^2+11x+13+2\sqrt{(x+1)(x+3)(x+2)(x+5)}\\ &\Leftrightarrow 2x^2+11x+17\le 2\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}\\ &\Leftrightarrow x^2+3x+2+x^2+8x+15-2\sqrt{x^2+3x+2}.\sqrt{x^2+8x+15}\le 0\\ &\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+8x+15}\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+15}\Leftrightarrow x=-\frac{13}{5}\end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 117. Giải bất phương trình $\sqrt{2\left(2x^2+11x+12\right)}\ge\sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x^2+5x+6}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\le -5\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&2\left(2x^2+11x+12\right)\ge 2x^2+11x+11+2\sqrt{(x+1)(x+5)(x+2)(x+3)}\\ &\Leftrightarrow 2x^2+11x+13\ge 2\sqrt{(x+1)(x+3)(x+5)(x+2)}\\ &\Leftrightarrow x^2+4x+3+x^2+7x+10\ge 2\sqrt{x^2+4x+3}.\sqrt{x^2+7x+10}\\ &\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+7x+10}\right)^2\ge 0\ \text{(Hiển nhiên).}\end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left(-\infty;-5\right]\cup\left[-1;+\infty\right)$.

Bài toán 118. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-9x+2}\ge\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x-2}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x^2-9x+2\ge 0\\ x\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)\left(x^2+4x-1\right)\ge 0\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2x^2-9x+2\ge x^3-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-10x+5\ge 2\sqrt{(x-1)(x-2)}.\sqrt{x^2+x+1}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-3x+2)-(x^2+x+1)\ge 2\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x^2+x+1} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+2}=u;\sqrt{x^2+x+1}=v \quad (u\ge 0;v>0)$ thì (1) trở thành

$$3u^2-v^2\ge 2uv\Leftrightarrow (u-v)(3u+v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}\ge\sqrt{x^2+x+1}\Leftrightarrow x^2-3x+2\ge x^2+x+1\Leftrightarrow x\le\frac{1}{4}.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 119. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2+27x+12}-\sqrt{2+x}=\sqrt{1+x^3} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x^2+27x+12\ge 0\\ x\ge -1\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+2x^2+27x+12}=\sqrt{1+x^3}+\sqrt{2+x}$$
$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+27x+12=x^3+x+3+2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+26x+9=2\sqrt{(x+1)(x+2)}.\sqrt{x^2-x+1}$$
$$\Leftrightarrow 7(x^2+3x+2)-5(x^2-x+1)=2\sqrt{x^2+3x+2}.\sqrt{x^2-x+1}$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+2}=u;\sqrt{x^2-x+1}=v \ (u\ge 0;v>0)$ ta thu được

$$7u^2-5v^2=2uv\Leftrightarrow (u-v)(7u+5v)=0\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x^2+3x+2=x^2-x+1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$$

Thử lại, kết luận nghiệm duy nhất $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Bài toán 120. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3+4x^2+4x-19}\ge 2\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^3+4x^2+4x-19\ge 0\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3+4x^2+4x-19\ge 4x^3-32+x-1+4\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+3x-20\ge 4\sqrt{(x-2)(x-1)}.\sqrt{x^2+2x+4}$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+2+3(x^2+2x+4)\ge 4\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x^2+2x+4} \quad [1]$$

Đặt $\sqrt{x^2-3x+2}=a;\sqrt{x^2+2x+4}=b \ (a\ge 0;b>0)$ ta có

$$[1]\Leftrightarrow a^2+3b^2\ge 4ab\Leftrightarrow (a-b)(a-3b)\ge 0\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a+b}.\frac{a^2-9b^2}{a+3b}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2-9b^2)\ge 0\Leftrightarrow (5x+2)(8x^2+21x+34)\ge 0 \quad [2]$$

Nhận thấy [2] nghiệm đúng với mọi $x\ge 2$. Kết luận tập hợp nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 121. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-7x+6}-\sqrt{x}=\sqrt{x^3+1} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+2x^2-7x+6\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3+2x^2-7x+6}=\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-7x+6=x^3+x+1+2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)x} \Leftrightarrow 2x^2-8x+5=2\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2-x+1)-3(x^2+x)=2\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x^2+x} \Leftrightarrow 5-3.\frac{x^2+x}{x^2-x+1}=2\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x+1}} \quad [*]$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-x+1}}=t \ (t\ge 0)$ thì $[*]\Leftrightarrow 5-3t^2=2t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{5}{3} \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow t=1\Leftrightarrow x^2-x+1=x^2+x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta thu được nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+4x^2+10x+20}-\sqrt{x^3-27}\le 2\sqrt{x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+4x^2+10x+20\ge 0 \\ x^3\ge 27 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+4x^2+10x+20\le x^3+4x-27+4\sqrt{(x-3)(x^2+3x+9)x}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+6x+47\le 4\sqrt{x(x-3)}.\sqrt{x^2+3x+9}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+3(x^2+3x+9)\le 4\sqrt{x^2-3x}.\sqrt{x^2+3x+9}\Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x^2+3x+9}+3\le 4\sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2+3x+9}} \quad [1]$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2+3x+9}}=t \ (t\ge 0)$ thì $[1]\Leftrightarrow t^2+3\le 4t\Leftrightarrow (t-1)(t-3)\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 3\Leftrightarrow 1\le\sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2+3x+9}}\le 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+9\le x^2-3x \\ x^2-3x\le 9(x^2+3x+9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9\le 0 \\ 8x^2+30x+81\ge 0 \end{cases} \quad [2]$ (Hệ vô nghiệm do $x\ge 3$).

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3+2x^2+17x+8}+\sqrt{x}\ge 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0 \\ x\ge 1 \\ x^3+2x^2+17x+8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x}\ge\sqrt{x^3+2x^2+17x+8}$$

$$\Leftrightarrow x^3+x-1+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)x}\ge x^3+2x^2+17x+8\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}.\sqrt{x^2+x+1}\ge 2x^2+16x+9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x}.\sqrt{x^2+x+1}\ge 9(x^2+x+1)-7(x^2-x)\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+x+1}}\ge 9-7.\frac{x^2-x}{x^2+x+1}\qquad [*]$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1}}=t\ (t\ge 0)$ thì $[*]\Leftrightarrow 2t\ge 9-7t^2\Leftrightarrow (t-1)(7t+9)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 1\Leftrightarrow x^2-x\ge x^2+x+1\Leftrightarrow x\le -\dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 124. Giải bất phương trình $\sqrt{3x^2-12x+5}\le\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2-2x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}3x^2-12x+5\ge 0\\ x\ge 1\\ x(x-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2-12x+5\le x^3+x^2-2x-1+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)x(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2+10x-6+2\sqrt{(x-1)(x-2)}.\sqrt{(x^2+x+1)x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+x^2+x)-3(x^2-3x+2)+2\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x^3+x^2+x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3.\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}+2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}}\ge 0\qquad [*]$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}}=t\ \ (t\ge 0)$ thì

$$[*]\Leftrightarrow 1-3t^2+2t\ge 0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le t\le 1\Rightarrow t\le 1\Leftrightarrow x^2-3x+2\le x^3+x^2+x\Leftrightarrow x^3+4x+2\ge 0\qquad [1].$$

Nhận thấy [1] nghiệm đúng với $x\ge 2$. Kết luận nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 125. Giải phương trình $\sqrt{x^3+5x^2-7x-2}=\sqrt{x^3+x-2}+\sqrt{2x-1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+5x^2-7x-2\ge 0\\ x^3+x-2\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+5x^2-7x-2\ge 0\\ x\ge 1\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^3+5x^2-7x-2=x^3+3x-3+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-10x+1=2\sqrt{(x-1)(2x-1)}.\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow 3(2x^2-3x+1)-(x^2+x+2)=2\sqrt{2x^2-3x+1}.\sqrt{x^2+x+2}\qquad [1]$$

Đặt $\sqrt{2x^2-3x+1}=u;\sqrt{x^2+x+2}=v\ \ (u\ge 0;v>0)$ thì

$$[1] \Leftrightarrow 3u^2 - v^2 = 2uv \Leftrightarrow (u-v)(3u+v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{5} \\ x = 2+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{2+\sqrt{5}\right\}$.

Bài toán 126. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-32x+17} - \sqrt{x^3-2x-4} = \sqrt{x-3} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+2x^2-32x+17 \ge 0 \\ x^3-2x-4 \ge 0 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-32x+17 \ge 0 \\ x \ge 3 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+2x^2-32x+17} = \sqrt{x^3-2x-4} + \sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2-32x+17 = x^3-2x-4+x-3+2\sqrt{(x-2)(x^2+2x+2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-31x+24 = 2\sqrt{(x-2)(x-3)}.\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2-5x+6) - 3(x^2+2x+2) = 2\sqrt{x^2-5x+6}.\sqrt{x^2+2x+2}$$

Đặt $\sqrt{x^2-5x+6} = a; \sqrt{x^2+2x+2} = b \quad (a \ge 0; b > 0)$ ta có phương trình

$$5a^2 - 3b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)(5a+3b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6} = \sqrt{x^2+2x+2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3-8} \le \sqrt{x^3-2x^2-9} + \sqrt{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3-8 \ge 0 \\ x^3-2x^2-9 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ (x-3)(x^2+x+3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-8 \le x^3-2x^2-9+x-1+2\sqrt{(x-3)(x^2+x+3)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x \le 2\sqrt{(x-3)(x+1)}.\sqrt{x^2+x+3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3-2\sqrt{x^2-2x-3}.\sqrt{x^2+x+3}+x^2+x+3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x-3} - \sqrt{x^2+x+3}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x^2+x+3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3 = x^2+x+3 \Leftrightarrow x = -2$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 128. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}-10}{\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}-10} \ge 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện ban đầu $\begin{cases} x^3+4x-5\ge 0\\ x^3+4x^2-6x-4\ne 10\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x^2+x+5)\ge 0\\ (x-4)(x^2+8x+26)\ne 0\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x\ne 4\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow x>4$.

Xét hàm số $f(x)=x^3+4x^2-6x-4;\ x\in(4;+\infty)$ ta có $f'(x)=3x^2+8x-6>0,\forall x\in(4;+\infty)$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến trên miền $(4;+\infty)$. Do đó $f(x)>\underset{x\in(4;+\infty)}{Min} f(x)=f(4)=100\Rightarrow \sqrt{f(x)}>10$.

Với điều kiện $x>4$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}-10\ge\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}-10$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}\ge\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}$$
$$\Leftrightarrow x^3+4x-5+4x-16+4\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)(x-4)}\ge x^3+4x^2-6x-4$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+17\le 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2+x+5)}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x+4)+x^2+x+5\le 4\sqrt{x^2-5x+4}.\sqrt{x^2+x+5}\Leftrightarrow 3.\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}+1\le 4\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}}=t\ (t\ge 0)$ thu được $3t^2+1\le 4t\Leftrightarrow (t-1)(3t-1)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le t\le 1\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+5}}\le 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+x+5\le 9(x^2-5x+4)\\ x^2-5x+4\le x^2+x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x^2-46x+29\ge 0\\ 6x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\ge\frac{23+\sqrt{297}}{8}\\ x\le\frac{23-\sqrt{297}}{8}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S=\left[\frac{23+\sqrt{297}}{8};+\infty\right)$.

Lời giải 2.

Điều kiện ban đầu $\begin{cases} x^3+4x-5\ge 0\\ x^3+4x^2-6x-4\ne 10\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x^2+x+5)\ge 0\\ (x-4)(x^2+8x+26)\ne 0\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1\\ x\ne 4\\ x\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow x>4$.

Khi đó $x^3+4x^2-6x-4=(x-4)(x^2+8x)+26x-4>26.4-4=100\Rightarrow\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}-10>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}-10\ge\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}-10$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+4x-5}+2\sqrt{x-4}\ge\sqrt{x^3+4x^2-6x-4}$$
$$\Leftrightarrow x^3+4x-5+4x-16+4\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)(x-4)}\ge x^3+4x^2-6x-4$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-2x+17\le 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2+x+5)}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x+4)+x^2+x+5\le 4\sqrt{x^2-5x+4}.\sqrt{x^2+x+5}$$

Đặt $\sqrt{x^2-5x+4}=u;\sqrt{x^2+x+5}=v\ \ (u\ge 0;v>0)$ ta có

$$3u^2+v^2\le 4uv \Leftrightarrow (u-v)(3u-v)\le 0 \Leftrightarrow \frac{u^2-v^2}{u+v}.\frac{9u^2-v^2}{3u+v}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (u^2-v^2)(9u^2-v^2)\le 0 \Leftrightarrow (6x+1)(8x^2-46x+29)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{23+\sqrt{297}}{8}$$

Kết luận nghiệm $S=\left[\frac{23+\sqrt{297}}{8};+\infty\right)$.

Nhận xét.

Bài toán 128 về hình thức có lẽ đã trở nên quen thuộc, bao gồm cả nhận xét mẫu thức luôn lớn hơn 10, dựa theo điều kiện xác định (ban đầu). Theo tác lập luận chứng minh mẫu thức lớn hơn 10 "nhất cử lưỡng tiện", không những giảm thiểu một trường hợp, đồng thời đây cũng là hướng xử lý điều kiện xác định một cách chặt chẽ (lưu ý bài toán là giải bất phương trình). Với điều kiện $x>4$, lời giải 1 trình bày phương án xử lý bằng cách tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số (dành cho các bạn sau khi đã học kiến thức đạo hàm – tính đơn điệu hàm số, chương trình Giải tích lớp 11 – 12 THPT); lời giải 2 có hướng đi bằng việc tách nhân tử và đánh giá thông thường, phù hợp với các bạn học sinh THCS và lớp 10 THPT.

Ngoài ra các bạn có thể chứng minh tính đơn điệu theo định nghĩa: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến. Tùy theo hoàn cảnh và khả năng của bản thân, các bạn có thể lựa chọn cho mình cách giải hợp lý nhất.

Nội dung, cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học và cao đẳng của Bộ giáo dục hiện hành luôn theo phương châm cơ bản, bám sát chương trình sách giáo khoa, theo đúng chuẩn kỹ năng và khung kiến thức, phù hợp, vừa sức với mọi đối tượng dự thi đồng thời phải có tính phân loại thí sinh rất cao. Học, tìm hiểu, thực hành, vận dụng và đánh giá các kiến thức cấp cao hơn là một điều hết sức đáng quý nếu các bạn có khả năng, nhưng đôi khi điều này sẽ làm chúng ta mất đi những tư duy đột phá đáng có !

Bài toán 129. Giải phương trình $\sqrt{x^3+5x^2-11x+3}\le\sqrt{x^3+x^2-3x-6}+2\sqrt{x-3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+5x^2-11x+3\ge 0\\ x^3+x^2-3x-6\ge 0\\ x\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+5x^2-11x+3\ge 0\\ x\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x^2+8x)+13x+3\ge 0\\ x\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3+5x^2-11x+3}\le\sqrt{x^3+x^2-3x-6}+2\sqrt{x-3}$$

$$x^3+5x^2-11x+3\le x^3+x^2-3x-6+4x-12+4\sqrt{(x-2)(x^2+3x+3)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-12x+21\le 4\sqrt{(x-2)(x-3)}.\sqrt{x^2+3x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-5x+6)+x^2+3x+3\le 4\sqrt{x^2-5x+6}.\sqrt{x^2+3x+3}\qquad [1]$$

Đặt $\sqrt{x^2-5x+6}=a;\sqrt{x^2+3x+3}=b\ (a\ge 0;b>0)$ thì [1] trở thành

$$3a^2+b^2\le 4ab\Leftrightarrow (a-b)(3a-b)\le 0\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{a+b}.\frac{9a^2-b^2}{3a+b}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(9a^2-b^2)\le 0\Leftrightarrow (3-8x)(8x^2-48x+51)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{12-\sqrt{42}}{4}\le x\le\frac{3}{8}\\ x\ge\frac{12+\sqrt{42}}{4}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \ge \dfrac{12+\sqrt{42}}{4}$.

Bài toán 130. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-8x^2+32x-19} \ge 2\sqrt{x^3-x^2+x-1}-\sqrt{x-2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4x^3-8x^2+32x-19 \ge 0 \\ x^3-x^2+x-1 \ge 0 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2(x-2)+32x-19 \ge 0 \\ (x-1)(x^2+1) \ge 0 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$.

Nhận xét $2\sqrt{x^3-x^2+x-1}-\sqrt{x-2} = \dfrac{4x^3-4x^2+3x-2}{2\sqrt{x^3-x^2+x-1}+\sqrt{x-2}} = \dfrac{4x^2(x-1)+3x-2}{2\sqrt{x^3-x^2+x-1}+\sqrt{x-2}} > 0\ \forall x \ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^3-8x^2+32x-19} \ge 2\sqrt{x^3-x^2+x-1}-\sqrt{x-2}$$
$$4x^3-8x^2+32x-19 \ge 4(x^3-x^2+x-1)+x-2-4\sqrt{(x-1)(x^2+1)(x-2)}$$
$$\Leftrightarrow -4x^2+27x-13+4\sqrt{(x-1)(x-2)}.\sqrt{x^2+1} \le 0$$
$$\Leftrightarrow 5(x^2+1)+4\sqrt{x^2-3x+2}.\sqrt{x^2+1}-9(x^2-3x+2) \le 0$$
$$\Leftrightarrow 5+4\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}}-9.\frac{x^2-3x+2}{x^2+1} \le 0$$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}} = t\ (t \ge 0)$ thu được $5+4t-9t^2 \le 0 \Leftrightarrow (t-1)(9t+5) \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \ge x^2+1 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{3}$.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 131. Giải bất phương trình $\sqrt{9x^3-6x^2-3x-32}+\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^3-3x-2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 9x^3-6x^2-3x-32 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ (x-2)(x+1)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ (x-2)(9x^2+13x)+23x-32 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{9x^3-6x^2-3x-32} = 3\sqrt{x^3-3x-2}-\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^3-3x-2}-\sqrt{x-1} \ge 0 \\ 9x^3-6x^2-3x-32 = 9(x^3-3x-2)+x-1-6\sqrt{(x-2)(x^2+2x+1)(x-1)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^3-3x-2} \ge \sqrt{x-1} \\ -6x^2+23x-13+6(x+1)\sqrt{x^2-3x+2} = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (x+1)^2+6(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}-7(x^2-3x+2) = 0 \Leftrightarrow 1+6\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}-7.\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} = 0$.

Đặt $\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}=t\ (t\ge 0)$ quy về $\begin{cases}1+6t-7t^2=0\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{1}{7}\end{array}\right.\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-3x+2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 132. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-x-12}>\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3-x-6}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^3-x-12\ge 0\\ x\ge 1\\ x^3-x-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-3)(2x^2+3x+4)\ge 0\\ x\ge 1\\ (x-2)(x^2+2x+3)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 3\\ x\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3-x-12>x^3-1+x^3-x-6+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+3)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-5>2\sqrt{(x-1)(x^2+2x+3)}.\sqrt{(x-2)(x^2+x+1)}$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2+x-3-2\sqrt{x^3+x^2+x-3}.\sqrt{x^3-x^2-x-2}+x^3-x^2-x-2>0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^3+x^2+x-3}-\sqrt{x^3-x^2-x-2}\right)^2>0\Leftrightarrow\sqrt{x^3+x^2+x-3}\ne\sqrt{x^3-x^2-x-2}$$
$$\Leftrightarrow x^3+x^2+x-3\ne x^3-x^2-x-2\Leftrightarrow 2x^2+2x-1\ne 0\qquad [1]$$

Hệ thức [1] nghiệm đúng do $x\ge 2$. Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 2$.

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-4x^2+8x-9}\ge\sqrt{x^3-2x^2+2x-4}+\sqrt{x^3-x^2+x-1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^3-4x^2+8x-9\ge 0\\ x^3-2x^2+2x-4\ge 0\\ x^3-x^2+x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(4x^2+4x)+16x-9\ge 0\\ (x-2)(x^2+2)\ge 0\\ (x-1)(x^2+1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3-4x^2+8x-9\ge x^3-2x^2+2x-4+x^3-x^2+x-1+2\sqrt{(x-2)(x^2+2)(x-1)(x^2+1)}$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2+5x-4\ge 2\sqrt{(x-2)(x^2+1)}.\sqrt{(x-1)(x^2+2)}$$
$$\Leftrightarrow 3(x^3-x^2+2x-2)-(x^3-2x^2+x-2)\ge 2\sqrt{x^3-2x^2+x-2}.\sqrt{x^3-x^2+2x-2}\qquad [*]$$

Đặt $\sqrt{x^3-x^2+2x-2}=u;\sqrt{x^3-2x^2+x-2}=v\ (u>0;v\ge 0)$ thì [*] trở thành

$$3u^2-v^2\ge 2uv\Leftrightarrow(u-v)(3u+v)\ge 0\Leftrightarrow u\ge v$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3-x^2+2x-2}\ge\sqrt{x^3-2x^2+x-2}\Leftrightarrow x^2+x\ge 0\quad [1]$$

Dễ thấy [1] nghiệm đúng với mọi $x\ge 2$. Kết luận bất phương trình có nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $\sqrt{16x^3+8x^2+15x-43}\ge 3\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3-8}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 16x^3 + 8x^2 + 15x - 43 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$16x^3 + 8x^2 + 15x - 43 \geq 9\left(x^3 - 1\right) + x^3 - 8 + 6\sqrt{(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 8x^2 + 15x - 26 \geq 6\sqrt{(x-1)\left(x^2+2x+4\right)}.\sqrt{(x-2)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 7\left(x^3 + x^2 + 2x - 4\right) - \left(x^3 - x^2 - x - 2\right) \geq 6\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4}.\sqrt{x^3 - x^2 - x - 2}$$

Đặt $\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} = u; \sqrt{x^3 - x^2 - x - 2} = v \ (u > 0; v \geq 0)$ ta thu được

$$7u^2 - v^2 \geq 6uv \Leftrightarrow (u-v)(7u+v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} \geq \sqrt{x^3 - x^2 - x - 2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 4 \geq x^3 - x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -2 \end{array}\right.$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 135. Giải phương trình $\dfrac{x+1}{2} = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\dfrac{x}{6}} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+x+1}{6} + \frac{\sqrt{x\left(x^2+1\right)}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{x^2+x+1}{6} = \frac{\sqrt{x\left(x^2+1\right)}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 4\sqrt{x\left(x^2+1\right)} \Leftrightarrow x^2 + 1 - 4\sqrt{x\left(x^2+1\right)} + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 2+\sqrt{3}; x = 2-\sqrt{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ gồm ba cặp số ta có

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 \leq \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\frac{x^2+1}{24} + \frac{x^2+1}{24} + \frac{x}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 \leq \frac{2x^2+4x+2}{8} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}} \leq \frac{x+1}{2} \qquad (*)$$

Phương trình đề bài có nghiệm khi và chỉ khi (*) xảy ra dấu đẳng thức, nghĩa là

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} = \sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3} \\ x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \left\{2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 136. Giải phương trình $3\sqrt{x\left(x^2-6x+12\right)} = 2\left(x^2-7x+12\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left[(x-3)^2+3\right]\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x}.\sqrt{x^2-6x+12}=2\left[\left(x^2-6x+12\right)-x\right]$.

Đặt $\sqrt{x^2-6x+12}=u;\sqrt{x}=v,(u>0;v\ge 0)$ thu được

$$\begin{cases}3uv=2\left(u^2-v^2\right)\\u>0;v\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-2v)(2u+v)=0\\u>0;v\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow u=2v$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+12=4x\Leftrightarrow x^2-10x+12=0\Leftrightarrow x=5+\sqrt{13};x=5-\sqrt{13}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=5+\sqrt{13};x=5-\sqrt{13}$.

Bài toán 137. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}\le x-2\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2-6x+8\ge 0\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương $\sqrt{2\left(x^2-4x+4\right)+2x}\le\sqrt{x}+x-2\Leftrightarrow\sqrt{2(x-2)^2+2x}\le\sqrt{x}+x-2$.

Đặt $\sqrt{x}=u;x-2=v$ thì ta có

$$\sqrt{2u^2+2v^2}\le u+v\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\2u^2+2v^2\le u^2+2uv+v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\(u-v)^2\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u=v\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

Kết luận bất phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=4$.

Bài toán 138. Giải phương trình $\sqrt{x^8-14x^4+1}=x^4-12x^2+1\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận xét $x^8-14x^4+1=\left(x^4+1\right)^2-\left(4x^2\right)^2=\left(x^4-4x^2+1\right)\left(x^4+4x^2+1\right)$ nên ta có điều kiện

$$\left(x^4-4x^2+1\right)\left(x^4+4x^2+1\right)\ge 0\Leftrightarrow x^4-4x^2+1\ge 0.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\left(x^4-4x^2+1\right)\left(x^4+4x^2+1\right)}=x^4-12x^2+1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^4-4x^2+1}.\sqrt{x^4+4x^2+1}=2\left(x^4-4x^2+1\right)-\left(x^4+4x^2+1\right)$$

Đặt $\sqrt{x^4-4x^2+1}=u;\sqrt{x^4+4x^2+1}=v,(u\ge 0;v>0)$ ta thu được

$$\begin{cases}uv=2u^2-v^2\\u\ge 0;v>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-v)(2u+v)=0\\u\ge 0;v>0\end{cases}\Leftrightarrow u=v$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^4-4x^2+1}=\sqrt{x^4+4x^2+1}\Leftrightarrow x^4-4x^2+1=x^4+4x^2+1\Leftrightarrow x=0$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=0$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $3\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x-3}\le\sqrt{11x^2+25x+2}$.
2. $\sqrt{x(2x-5)}\le\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-3}$.
3. $\sqrt{4x^2-15x+7}\ge\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-3}$.
4. $\sqrt{5x^2-13x+2}-\sqrt{x-3}\le 2\sqrt{x^2-3x+2}$.
5. $\sqrt{(x+1)(3x-10)}\ge\sqrt{x^2-3x+2}+2\sqrt{x-4}$.
6. $\sqrt{5x^2-15x+3}\le 2\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x-2}$.
7. $\sqrt{7x^2-23x+13}<\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-4x+3}$.
8. $\sqrt{4x^2-7x-1}-\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x-2}<0$.
9. $\sqrt{x^2-2x}>\sqrt{2(2x^2-6x+3)}-2\sqrt{x-3}$.
10. $\sqrt{(x+1)(5x-14)}<\sqrt{x^2-2x}+2\sqrt{x-3}$.
11. $\sqrt{6x^2-x-19}\le\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{x-2}$.
12. $\sqrt{3x^2+8x-22}-3\sqrt{x-2}\ge\sqrt{x^2-x}$.
13. $\sqrt{6x^2+11x-14}\le\sqrt{x^2+x}+3\sqrt{x-1}$.
14. $\sqrt{x^2+x}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2+14x-11}>0$.
15. $\sqrt{5x^2+11x-12}\le\sqrt{2x^2-x}+3\sqrt{x-1}$.
16. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=2\sqrt{x^2-2x+6}$.
17. $\sqrt{x(4x-13)}+\sqrt{x-5}\ge 2\sqrt{x^2-x}$.
18. $\sqrt{5x^2-17x+5}\ge 2\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x-5}$.
19. $\sqrt{10x^2-57x+29}\le 3\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x-6}$.
20. $\sqrt{2(10x^2-14x+3)}>3\sqrt{x(2x-1)}-\sqrt{x-2}$.
21. $\sqrt{5x^2+8x-42}\ge 2\sqrt{(x-2)(x+3)}+\sqrt{x-3}$.
22. $\sqrt{10x^2-37x+2}>3\sqrt{x(x-3)}-\sqrt{x-1}$.
23. $4\sqrt{x^2-x}>\sqrt{17x^2-26x-40}+3\sqrt{x-5}$.
24. $\sqrt{9x^2-31x+20}>2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}$.
25. $\sqrt{4x^2-12x+5}=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-3x}$.
26. $\sqrt{4x^2-24x+26}=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-3x}$.
27. $\sqrt{9x^2-29x+11}=2\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+2}$.
28. $\sqrt{25x^2-55x+12}=2\sqrt{x^2-3x+2}+3\sqrt{x^2-4x}$.
29. $\sqrt{x^3+2x^2+7x-2}\ge\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x-2}$.
30. $\sqrt{x^3+2x^2-x-3}-\sqrt{x^3+1}>\sqrt{x-2}$.
31. $\sqrt{4x^3+4x^2+4x-19}<2\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x-1}$.
32. $\sqrt{72x^3+24x^2-36x+4}=3\sqrt{8x^3-1}+\sqrt{2x-3}$.

33. $\sqrt{4x^3-4x^2+14x-85} > 2\sqrt{x^3-27}-\sqrt{x-1}$.

34. $\sqrt{x^3+4x^2+2x} \ge \sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$.

35. $\sqrt{9x^3+12x^2+14x-4} \le 3\sqrt{x^3-1}+4\sqrt{x}$.

36. $\sqrt{2x^2+3x-4} \le \sqrt{x^2-3x+2}+2\sqrt{x}$.

37. $\sqrt{4x^3-4x^2+3x-7} \le \sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^3-2x}$.

38. $\sqrt{4x^3-8x^2-29x+18} = \sqrt{x^3+x-2}+\sqrt{x^3-4x}$.

39. $\sqrt{4x^3+12x^2+3x+4} > \sqrt{x^3-1}+\sqrt{x\left(x^2+1\right)}$.

40. $x+2=\sqrt{x^2-2x-2}+2\sqrt{x+1}$.

41. $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{3x}=\sqrt{3\left(x^2+6x+1\right)}$.

42. $2\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x+6}=\sqrt{3\left(2x^2-x+12\right)}$.

43. $\sqrt{x^2-2x+3}+2\sqrt{x+1}=\sqrt{3\left(x^2+5\right)}$.

44. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+7x+12}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5x^2+42x+61}$.

45. $3\sqrt{3x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{5x^2+36x-51}$.

46. $2\sqrt{3x+5}+\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{3\left(x^2+7x+13\right)}$.

47. $2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{3x+1} > \sqrt{3\left(2x^2+x+1\right)}$.

48. $2\sqrt{3x^2-x+1}+\sqrt{4x+3} \le \sqrt{3\left(6x^2+2x+5\right)}$.

49. $\sqrt{4x^3-5x^2+11x-6}=\sqrt{2x-1}+2\sqrt{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}$.

50. $\sqrt{4x^3+x^2+18x-1}-\sqrt{2x-1}=2\sqrt{x^3-1}$.

51. $\sqrt{9x^2+17x-24} \le \sqrt{3x^2+7x-6}+2\sqrt{x-1}$.

52. $2\sqrt{x-1}=\sqrt{3\left(3x^2+x+1\right)}-\sqrt{3x^2-x+3}$.

53. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x} \ge \sqrt{3\left(2x^2+x-1\right)}$.

54. $\sqrt{5x^2+x+2} \ge \sqrt{3\left(5x^2+8x+2\right)}-\sqrt{14x}$.

55. $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{6x}=\sqrt{2\left(x^2+7x+3\right)}$.

56. $\sqrt{x^3+x+1}+3\sqrt{x^2+1} \le \sqrt{4\left(x^3+3x^2+x+4\right)}$.

57. $3\sqrt{2x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+2}=2\sqrt{9x^2-3x+8}$.

58. $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x+3} \le 2\sqrt{x^2+4x+1}$.

59. $2\sqrt{8x^2-6x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{28x^2-8x-3}$.

60. $\sqrt{37x^2+196x+157}=5\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x+5}$.

61. $\sqrt{x^2+5x}+3\sqrt{x+6}=2\sqrt{x^2+8x+18}$.

62. $2\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{1+3x^2}=\sqrt{3\left(5x^2+2x+3\right)}$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7\Leftrightarrow 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}-2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{x+\frac{3}{x}}\right)^2=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$$

- $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$
- $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^3+3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\(x-1)(x^2+x+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S=\{1;3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x+2)\sqrt{x^2+3}=(x^2+7)\sqrt{x}$.

Đặt $\sqrt{x^2+3}=u;\sqrt{x}=v$ $(u>0;v>0)$ ta thu được $(2v^2+2)u=(u^2+4)v\Leftrightarrow uv(2v-u)=2(2v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv=2\\2v=u\end{array}\right.$

- $uv=2\Leftrightarrow\sqrt{x^3+3x}=2\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1$.
- $2v=u\Leftrightarrow x^2+3=4x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

Kết luận tập nghiệm $S=\{1;3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=\frac{x^2+7}{2(x+1)}-2\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}\right)}=\frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+3=0 & (1)\\\sqrt{x^3+3x}=2 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow(x-1)(x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$
- $(2)\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 4.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x+\frac{3}{x}=\frac{x^4+14x^2+49}{4(x^2+2x+1)}\Leftrightarrow 4(x^2+3)(x^2+2x+1)=x(x^4+14x^2+49)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^4+2x^3+4x^2+6x+3)=x^5+14x^3+49x\Leftrightarrow x^5-4x^4+6x^3-16x^2+25x-12=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+3\right)\left(x^3+3x-4\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)\left(x^2+x+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Kết luận phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S=\{1;3\}$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\dfrac{x^2+1}{2+x} \le \dfrac{1}{3}\sqrt{3x+\dfrac{1}{x}} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(3x^2+3\right)\sqrt{x} \le (x+2)\sqrt{3x^2+1}$.

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{3x^2+1}=b \ (a>0;b>0)$ thì thu được

$$\left(b^2+2\right)a \le \left(a^2+2\right)b \Leftrightarrow 2(a-b) \le ab(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(ab-2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2b^2-4}{ab+2} \ge 0 \Leftrightarrow \left(3x^2-x+1\right)\left(3x^3+x-4\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+3x+4\right) \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm $S=(0;1]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2+3 \le (x+2)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x+\frac{3}{x} \le \left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x+\frac{1}{x}-\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \le \frac{2}{x}\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+\frac{1}{x}}\left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-1\right) \le \frac{2}{x}\left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-1\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-1\right)\left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-\frac{2}{x}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3x^3+x}-2\right) \le 0 \qquad (1)$$

Nhận xét $3x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 3x^2+1>x,\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{3x^2+1}>\sqrt{x},\forall x>0$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x} \le 2 \Leftrightarrow 3x^3+x-4 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+3x+4\right) \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$. Kết luận nghiệm $S=(0;1]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x>0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+1}{2+x}-\frac{1}{3} \le \frac{1}{3}\sqrt{3x+\frac{1}{x}}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{3(x+2)} \le \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{3x^2+1}{x}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{x+2} \le \frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{x+2} \le \frac{3x^2-x+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x}\right)} \qquad (*)$$

Dễ thấy $3x^2-x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $x>0$ nên (*) trở thành

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x}\right) \le x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x}+x \le x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x} \le 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^3+x-4 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+3x+4\right) \le 0 \Leftrightarrow x \le 1$$

Đối chiếu với điều kiện đi đến tập nghiệm $S=(0;1]$.

Bài toán 141. Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(x^2+3\right)}{x+3}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x>0$.
Đặt $\sqrt{x}=u;\sqrt{3x^2+6}=v,\left(u>0;v>0\right)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\left(v^2+3\right)u=\left(u^2+3\right)v\Leftrightarrow v^2u-u^2v+3\left(u-v\right)=0\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(vu-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\uv=3\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow 3x^2-x+6=0,\Delta<0$, trường hợp này vô nghiệm.
- $uv=3\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\sqrt{x\left(3x^2+6\right)}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^3+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(x-1\right)\left(x^2+x+3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{3x^2+6}}{\sqrt{x}}=\frac{3\left(x^2+3\right)}{x+3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x^2+6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{3\left(x^2+3\right)}{x+3}-1\Leftrightarrow\frac{3x^2-x+6}{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^2+6}+\sqrt{x}\right)}=\frac{3x^2-x+6}{x+3}\quad\left[1\right].$$

Nhận xét $3x^2-x+6>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\left[1\right]\Leftrightarrow\sqrt{x\left(3x^2+6\right)}+x=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^3+2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(x-1\right)\left(x^2+x+3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x>0$.
Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{3}\left(x^2+3\right)}{x+3}\Leftrightarrow\frac{x^2+2}{x}=\frac{3\left(x^4+6x^2+9\right)}{x^2+6x+9}$$
$$\Leftrightarrow x^4+6x^3+11x^2+12x+18=3x^5+18x^3+27x$$
$$\Leftrightarrow 3x^5-x^4+12x^3-11x^2+15x-18=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2\left(x^3+2x-3\right)-x\left(x^3+2x-3\right)+6\left(x^3+2x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(3x^2-x+6\right)\left(x^3+2x-3\right)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+3\right)=0\Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\dfrac{2x^2-x+5}{2+x}=\sqrt{2x+\dfrac{3}{x}-1}\quad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x>0$.
Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x}\left(2x^2-x+5\right)=\left(2+x\right)\sqrt{2x^2-x+3}$.

Đặt $\sqrt{x}=u;\sqrt{2x^2-x+3}=v,\left(u>0;v>0\right)$ ta thu được

$$u\left(v^2+2\right)=\left(v^2+2\right)u\Leftrightarrow uv^2-v^2u+2u-2v=0\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(uv-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\uv=2\end{array}\right.$$

- $u=v\Leftrightarrow x=2x^2-x+3\Leftrightarrow 2x^2-2x+3=0,\Delta<0$.

➢ $uv=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\sqrt{x\left(2x^2-x+3\right)}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2x^3-x^2+3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(x-1\right)\left(2x^2+x+4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x>0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-x+5}{2+x}=\frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\frac{2x^2-x+5}{2+x}-1=\frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{\sqrt{x}}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-2x+3}{x+2}=\frac{\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\frac{2x^2-2x+3}{x+2}=\frac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{x\left(2x^2-x+3\right)}+x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2x^3-x^2+3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(x-1\right)\left(2x^2+x+4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x>0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2-x+5}{2+x}=\sqrt{2x+\frac{3}{x}-1}\Leftrightarrow 2x^2-x+5=\left(x+2\right)\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2-x+5}{x}=\left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}\Leftrightarrow\frac{2x^2-x+3}{x}+\frac{2}{x}=\left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}\left(\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}-1\right)=\frac{2}{x}\left(\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{2x^2-x+3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{2x^2-x+3}=\sqrt{x} & (1)\\\sqrt{x\left(2x^2-x+3\right)}=2 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow 2x^2-2x+3=0,\Delta<0$, trường hợp này vô nghiệm.
- $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2x^3-x^2+3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left(x-1\right)\left(2x^2+x+4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 143. Giải bất phương trình $\sqrt{x\left(x+2\right)}+\sqrt{x}\ge\sqrt{\left(x+1\right)^3}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+x+2x\sqrt{x+2}\ge x^3+3x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+2}\ge x^3+2x^2+1\Leftrightarrow\left(x\sqrt{x+2}\right)^2-2x\sqrt{x+2}+1\le 0\Leftrightarrow\left(x\sqrt{x+2}-1\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+2}=1\Leftrightarrow x^3+2x^2-1=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(x^2+x-1\right)=0\Rightarrow x\in\left\{-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

So sánh với điều kiện đi đến nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài toán 144. Giải phương trình $2\left(2x^2+13\right)\sqrt{x}=\left(x+5\right)\sqrt{4x^2+21} \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\ge 0$.
Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{4x^2+21}=b$ $\left(a\ge 0;b>0\right)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\left(b^2+5\right)a=\left(a^2+5\right)b\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(ab-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ab=5\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow 4x^2-x+21=0$ (Vô nghiệm).
- $ab=5\Leftrightarrow x\left(4x^2+21\right)=25\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4x^2+4x+25\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\{1\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\ge 0$.
Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình ban đầu. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2\left(2x^2+13\right)}{x+5}=\frac{\sqrt{4x^2+21}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\frac{2\left(2x^2+13\right)}{x+5}-1=\frac{\sqrt{4x^2+21}}{\sqrt{x}}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2-x+21}{x+5}=\frac{4x^2-x+21}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4x^2+21}+\sqrt{x}\right)}\Leftrightarrow x+5=\sqrt{4x^3+21x}+x$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+21x-5=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4x^2+4x+25\right)=0\Leftrightarrow x=1$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 145. Giải phương trình $\left(3+x\right)\sqrt{2x+\frac{7}{x}}=2\left(x^2+5\right) \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x>0$.
Phương trình đã cho tương đương với $\left(x+3\right)\sqrt{2x^2+7}=2\left(x^2+5\right)\sqrt{x}$.

Đặt $\sqrt{2x^2+7}=u;\sqrt{x}=v$ $\left(u>0;v>0\right)$ ta có $\left(v^2+3\right)u=\left(u^2+3\right)v\Leftrightarrow\left(u-v\right)\left(uv-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\uv=3\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow 2x^2-x+7=0$ (Vô nghiệm).
- $uv=3\Leftrightarrow 2x^3+7x-9=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(2x^2+2x+9\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\{1\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{x}}=\frac{2\left(x^2+5\right)}{x+3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x^2+7}}{\sqrt{x}}-1=\frac{2\left(x^2+5\right)}{x+3}-1\Leftrightarrow\frac{2x^2-x+7}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2x^2+7}+\sqrt{x}\right)}=\frac{2x^2-x+7}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^3+7x}+x=x+3\Leftrightarrow 2x^3+7x=9\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(2x^2+2x+9\right)=0\Leftrightarrow x=1$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{2x+\frac{7}{x}}=2x+\frac{10}{x}\Leftrightarrow 2x+\frac{7}{x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{2x+\frac{7}{x}}+\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x}+1\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x}+1\right)-\frac{3}{x}$$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{2x+\frac{7}{x}}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+1\right)\right]^2=\left(\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+\frac{7}{x}}-1\right)\left(\sqrt{2x+\frac{7}{x}}-\frac{3}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+\frac{7}{x}}=1\\ \sqrt{2x+\frac{7}{x}}=\frac{3}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-x+7=0\\ 2x^3+7x-9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Bài toán 146. Giải phương trình $\frac{x+2}{3}\sqrt{3x+\frac{1}{x}}=x^2+1 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(3x^2+3)\sqrt{x}=(x+2)\sqrt{3x^2+1}$.

Đặt $\sqrt{x}=u;\sqrt{3x^2+1} \quad (u>0;v>0)$ quy về $(v^2+2)u=(u^2+2)v\Leftrightarrow(u-v)(uv-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ uv=2\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow 3x^2-x+1=0$ (Vô nghiệm).
- $uv=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 3x^3+x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-1)(3x^2+3x+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x^2+3}{x+2}=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\frac{3x^2+3}{x+2}-1=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{x}}-1\Leftrightarrow\frac{3x^2-x+1}{x+2}=\frac{3x^2-x+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{3x^3+x}+x\Leftrightarrow 3x^3+x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(3x^2+3x+4)=0\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+2)\sqrt{3x^3+x}=3(x^3+x)\Leftrightarrow 3x^3+x-(x+2)\sqrt{3x^3+x}+\frac{1}{4}(x^2+4x+4)=\frac{1}{4}(x^2+4x+4)-2x$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^3+x}-\frac{x+2}{2}\right)^2=\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{3x^3+x}=2 & [1]\\ \sqrt{3x^3+x}=-x & [2]\end{array}\right.$$

- $[1]\Leftrightarrow 3x^3+x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(3x^2+3x+4)=0\Leftrightarrow x=1$.
- Phương trình [2] vô nghiệm do điều kiện $x>0$.

Vậy ta có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 147. Giải phương trình $(5x^2+4x+3)\sqrt{x}=(x+3)\sqrt{5x^2+4x} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge 0$.
Nhận xét $x = 0$ là một nghiệm. Với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{5x^2+4x}}{\sqrt{x}} = \frac{5x^2+4x+3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2+4x}}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{5x^2+4x+3}{x+3} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{5x^2+4x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{5x^2+3x}{x+3} \Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x\left(5x^2+4x\right)}+x} = \frac{5x^2+3x}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^3+4x^2} = 3 \Leftrightarrow 5x^3+4x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(5x^2+9x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge 0$.
Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{5x^2+4x} = b\ (a \ge 0; b \ge 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\left(b^2+3\right)a = \left(a^2+3\right)b \Leftrightarrow (a-b)(ab-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ ab=3 \end{array}\right.$$

- $a = b \Leftrightarrow 5x^2+4x = x \Leftrightarrow x(5x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$
- $ab = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3+4x^2} = 3 \Leftrightarrow 5x^3+4x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(5x^2+9x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ 5x^2+4x+3=(x+3)\sqrt{5x+4} & (*) \end{array}\right.$

$$(*) \Leftrightarrow 5x^3+4x^2+3x = (x+3)\sqrt{5x^3+4x^2} \Leftrightarrow 4\left(5x^3+4x^2\right)+12x = 4(x+3)\sqrt{5x^3+4x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(5x^3+4x^2\right) - 4(x+3)\sqrt{5x^3+4x^2} + x^2+6x+9 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow \left(x+3-2\sqrt{5x^3+4x^2}\right)^2 = (x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{5x^3+4x^2}=3 \\ \sqrt{5x^3+4x^2}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^3+4x^2-9=0 \\ x^2(5x+3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)\left(5x^2+9x+9\right)=0 \\ x^2(5x+3)=0 \end{array}\right. \Rightarrow x \in \{0;1\}$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{0;1\}$.

Bài toán 148. Giải phương trình $\left(7x^2+5\right)\sqrt{x} = \sqrt{7x^2+2}\,(x+3) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge 0$.
Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{7x^2+2} = v\ (u \ge 0; v > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\left(b^2+3\right)a = b\left(a^2+3\right) \Leftrightarrow (a-b)(ab-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ ab=3 \end{array}\right.$$

- $a = b \Leftrightarrow 7x^2-x+2=0$ (Vô nghiệm).
- $ab = 3 \Leftrightarrow 7x^3+2x-9=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(7x^2+7x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện và kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge 0$.
Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Do đó biến đổi

$$\frac{7x^2+5}{x+3} = \frac{\sqrt{7x^2+2}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{7x^2+5}{x+3} - 1 = \frac{\sqrt{7x^2+2}}{\sqrt{x}} - 1 \Leftrightarrow \frac{7x^2-x+2}{x+3} = \frac{7x^2-x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{7x^2+2}+\sqrt{x}\right)} \quad (*)$$

Dễ thấy $7x^2 - x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$(*) \Leftrightarrow x+3 = \sqrt{7x^3+2x} + x \Leftrightarrow 7x^3+2x-9=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(7x^2+7x+9\right)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện và kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x \ge 0$.
Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Ta biến đổi

$$(x+3)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 7x^2+5 \Leftrightarrow 7x+\frac{5}{x} - \left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 0 \Leftrightarrow 4\left(7x+\frac{5}{x}\right) - 4\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(7x+\frac{2}{x}\right) - 4\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x} - 2\sqrt{7x+\frac{2}{x}}\right)^2 = \left(1-\frac{3}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 1 \\ \sqrt{7x+\frac{2}{x}} = \frac{3}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x^2-x+2=0 \\ 7x^3+2x-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27x^2+7}{4} = 0 \\ (x-1)\left(7x^2+7x+9\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $\left(x^2+14\right)\sqrt{x} = (3+2x)\sqrt{x^2+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \ge 0$.
Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{x^2+8} = v, (u \ge 0; v > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\left(v^2+6\right)u = \left(2u^2+3\right)v \Leftrightarrow uv^2 - 2u^2v = 3v - 6u \Leftrightarrow uv(v-2u) = 3(v-2u)$$

$$\Leftrightarrow (u-2v)(uv-3) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = 2v \\ uv = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} = 2\sqrt{x^2+8} \\ \sqrt{x\left(x^2+8\right)} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x^2-x+32=0 & (1) \\ x^3+8x-9=0 & (2) \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $(2) \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+9\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2+x+9=0 & (3) \end{array}\right.$
- Các phương trình (1) và (3) đều vô nghiệm vì $\Delta < 0$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\dfrac{4x^2+1}{6x-1} = \sqrt{x + \dfrac{x-1}{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2x^2-1}{2x-1} > 0 \\ 6x \ne 1 \end{array}\right.$

Dễ thấy phương trình ban đầu có nghiệm khi $6x-1>0$. Khi đó ta có biến đổi

$$\frac{4x^2+1}{6x-1}=\sqrt{\frac{2x^2-1}{2x-1}}\Leftrightarrow\left(\frac{4x^2+1}{6x-1}\right)^2=\frac{2x^2-1}{2x-1}.$$

Đặt $2x^2-1=u;2x-1=v\Rightarrow 4x^2+1=2u+3;6x-1=3v+2$. Ta thu được phương trình

$$\left(\frac{2u+3}{3v+2}\right)^2=\frac{u}{v}\Leftrightarrow\frac{4u^2+12u+9}{9v^2+12v+4}=\frac{u}{v}\Leftrightarrow 4u^2v+12uv+9v=9v^2u+12uv+4u$$

$$\Leftrightarrow uv(4u-9v)=4u-9v\Leftrightarrow(4u-9v)(uv-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\left(2x^2-1\right)=9(2x-1)\\ \left(2x^2-1\right)(2x-1)=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x^2-18x+5=0\\ 4x^3-2x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x^2-18x+5=0\\ x\left(2x^2-x-1\right)=0\end{array}\right.\Rightarrow x\in\left\{\frac{9+\sqrt{41}}{8};\frac{9-\sqrt{41}}{8};0;1;-\frac{1}{2}\right\}$$

Kết hợp điều kiện $6x-1>0$ và $\frac{2x^2-1}{2x-1}>0$ suy ra tập nghiệm $S=\left\{\frac{9+\sqrt{41}}{8};\frac{9-\sqrt{41}}{8};0;-\frac{1}{2};1\right\}$.

Bài toán 151. Giải phương trình $\frac{8x^2-5}{x}=3\sqrt{\frac{4x^2-3}{3x-2}}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{4x^2-3}{3x-2}\geq 0;x\neq 0$.

Với $\frac{8x^2-5}{x}\geq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm. Lúc này phương trình ban đầu biến đổi về

$$\left(\frac{8x^2-5}{x}\right)^2=9.\frac{4x^2-3}{3x-2}\Leftrightarrow\left(\frac{8x^2-5}{3x}\right)^2=\frac{4x^2-3}{3x-2}\qquad[*].$$

Đặt $4x^2-3=a;3x-2=b\Rightarrow 8x^2-5=2a+1;3x=b+2$. Khi đó

$$[*]\Leftrightarrow\left(\frac{2a+1}{b+2}\right)^2=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\left(4a^2+4a+1\right)b=\left(b^2+4b+4\right)a$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b-4ab=4a-b\Leftrightarrow ab(4a-b)=4a-b\Leftrightarrow(ab-1)(4a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ab=1\\ 4a=b\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- ✓ $ab=1\Leftrightarrow\left(4x^2-3\right)(3x-2)=1\Leftrightarrow 12x^3-8x^2-9x+5=0\Leftrightarrow(x-1)(2x-1)(6x+5)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{6};\frac{1}{2};1\right\}$.
- ✓ $4a=b\Leftrightarrow 4\left(4x^2-3\right)=3x-2\Leftrightarrow 16x^2-3x-10=0\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{649}}{32};x=\frac{3-\sqrt{649}}{32}$.

Đối chiếu với các điều kiện ta thu được nghiệm $x=1;x=\frac{3+\sqrt{329}}{32};x=\frac{3-\sqrt{329}}{32}$.

Bài toán 152. Giải phương trình $\frac{6x^2-2}{5x-1}=\sqrt{\frac{2x^2-1}{5x-4}}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{2x^2-1}{5x-4}\ge 0; x\ne \dfrac{1}{5}$.

Với $\dfrac{6x^2-2}{5x-1}\ge 0$, phương trình đã cho trở thành $\left(\dfrac{6x^2-2}{5x-1}\right)^2=\dfrac{2x^2-1}{5x-4}$.

Đặt $2x^2-1=a;5x-4=b\Rightarrow 6x^2-2=3a+1;5x-1=b+3$ ta thu được

$$\left(\frac{3a+1}{b+3}\right)^2=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{9a^2+6a+1}{b^2+6b+9}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow 9a^2b+6ab+b=ab^2+6ab+9a$$

$$\Leftrightarrow 9a^2b-9a=ab^2-b\Leftrightarrow 9a(ab-1)=b(ab-1)\Leftrightarrow(ab-1)(9a-b)=0$$

- $ab=1\Leftrightarrow(2x^2-1)(5x-4)=1\Leftrightarrow 10x^3-8x^2-5x+3=0$

  $\Leftrightarrow(x-1)(10x^2+2x-3)=0\Rightarrow x=1;x=-\dfrac{1+\sqrt{31}}{10};x=\dfrac{-1+\sqrt{31}}{10}$.

- $9a=b\Leftrightarrow 9(2x^2-1)=5x-4\Leftrightarrow 18x^2-5x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{385}}{36};x=\dfrac{5-\sqrt{385}}{36}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được các nghiệm của bài toán.

Bài toán 153. Giải phương trình $\dfrac{2x^2-1}{8-3x}=\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{5x^2-4}{2-x}}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{5x^2-4}{2-x}\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{10x^2-5}{8-3x}=\sqrt{\dfrac{5x^2-4}{2-x}}$.

Đặt $5x^2-4=a;2-x=b\Rightarrow 10x^2-5=2a+3;8-3x=3b+2$. Ta thu được

$$\frac{2a+3}{3b+2}=\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2a+3}{3b+2}\ge 0\\ b(2a+3)^2=a(3b+2)^2\quad(*)\end{cases}$$

Chú ý rằng

$$(*)\Leftrightarrow b(4a^2+12a+9)=a(9b^2+12b+4)\Leftrightarrow 4a^2b-9ab^2=4a-9b$$

$$\Leftrightarrow ab(4a-9b)=4a-9b\Leftrightarrow(4a-9b)(ab-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4a=9b\\ ab=1\end{array}\right.$$

- $4a=9b\Leftrightarrow 4(5x^2-4)=9(2-x)\Leftrightarrow 20x^2+9x-34=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-9+\sqrt{2801}}{40};\dfrac{-9-\sqrt{2801}}{40}\right\}$.
- $ab=1\Leftrightarrow(5x^2-4)(2-x)=1\Leftrightarrow 5x^3-10x^2-4x+9=0$

  $\Leftrightarrow(x-1)(5x^2-5x-9)=0\Leftrightarrow x=1;x=\dfrac{5+\sqrt{205}}{10};x=\dfrac{5-\sqrt{205}}{10}$.

Đối chiếu các điều kiện ta thu được nghiệm của bài toán.

Bài toán 154. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2-x+6}{x+2}\ge 2\sqrt{\dfrac{x^2-x+2}{x+1}}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2-x+6\right)\sqrt{x+1} \geq 2\left(x+2\right)\sqrt{x^2-x+2}$.

Đặt $\sqrt{x^2-x+2} = u; \sqrt{x+1} = v, \left(u>0; v>0\right)$ ta thu được

$$\left(u^2+4\right)v \geq 2\left(v^2+1\right)u \Leftrightarrow u^2v - 2v^2u \geq 2u - 4v \Leftrightarrow uv\left(u-2v\right) \geq 2\left(u-2v\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(uv-2\right)\left(u-2v\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{u^2v^2-4}{uv+2}.\frac{u^2-4v^2}{u+2v} \geq 0 \Leftrightarrow \left(u^2v^2-4\right)\left(u^2-4v^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x^2-x+2\right)\left(x+1\right)-4\right]\left[x^2-x+2-4\left(x+1\right)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+x-2\right)\left(x^2-5x-2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\left(x^2-5x-2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2-5x-2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5+\sqrt{33}}{2} \vee \frac{5-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq 1$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\dfrac{5-\sqrt{33}}{2};1\right] \cup \left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 155. Giải phương trình $5\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{5x-2}} = \dfrac{2x^2+13}{4x-1} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{2}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\dfrac{2x^2+1}{5x-2}} = \dfrac{2x^2+13}{20x-5}$.

Đặt $\sqrt{2x^2+1} = u; \sqrt{5x-2} = v, \left(u>0; v>0\right) \Rightarrow 2x^2+13 = u^2+12; 5x+1 = v^2+3$. Ta thu được

$$\frac{u}{v} = \frac{u^2+12}{4v^2+3} \Leftrightarrow 4uv^2+3u = u^2v+12v \Leftrightarrow 4uv^2-u^2v+3u-12v = 0$$

$$\Leftrightarrow uv\left(4v-u\right)+3\left(u-4v\right) = 0 \Leftrightarrow \left(uv-3\right)\left(u-4v\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} uv = 3 \\ u = 4v \end{array}\right.$$

- $uv = 3 \Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)\left(5x-2\right) = 1 \Leftrightarrow 10x^3-4x^2+5x-3 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(10x^2+6x+3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $u = 4v \Leftrightarrow 2x^2+1 = 20x-8 \Leftrightarrow 2x^2-20x+9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{10+\sqrt{82}}{2}; x = \dfrac{10-\sqrt{82}}{2}$.

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1; x = \dfrac{10+\sqrt{82}}{2}; x = \dfrac{10-\sqrt{82}}{2}$.

Bài toán 156. Giải phương trình $\dfrac{3\left(1+x^2\right)}{5x-2} = 2\sqrt{\dfrac{3x^2-1}{5x-3}} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{3x^2-1}{5x-3} \geq 0$.

Đặt $3x^2-1 = u; 5x-3 = v \Rightarrow 3x^2+3 = u+4; 5x-2 = v+1$. Với $\dfrac{u+4}{v+1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u+4}{v+1}=2\sqrt{\frac{u}{v}}\Leftrightarrow\left(u^2+8u+16\right)v=4u\left(v^2+2v+1\right)\Leftrightarrow u^2v-4uv^2=4u-16v$$

$$\Leftrightarrow uv(u-4v)=4(u-4v)\Leftrightarrow(uv-4)(u-4v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv=4\\u=4v\end{array}\right.$$

✓ $uv=4\Leftrightarrow\left(3x^2-1\right)(5x-3)=4\Leftrightarrow 15x^3-9x^2-5x-1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(15x^2+6x+1\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

✓ $u=4v\Leftrightarrow 3x^2-1=4(5x-3)\Leftrightarrow 3x^2-20x+11=0\Leftrightarrow x=\frac{10+\sqrt{67}}{3};x=\frac{10-\sqrt{67}}{3}$.

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình đã cho có các nghiệm $x=1;x=\frac{10+\sqrt{67}}{3};x=\frac{10-\sqrt{67}}{3}$.

Bài toán 157. Giải phương trình $\frac{x^3+14}{2+x}=2\sqrt{\frac{x^3-3x+4}{1+x}}+3\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\frac{x^3-3x+4}{1+x}\geq 0\\x\neq -2\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{x^3+14}{2+x}-3=2\sqrt{\frac{x^3-3x+4}{1+x}}\Leftrightarrow\frac{x^3-3x+8}{2+x}=2\sqrt{\frac{x^3-3x+4}{1+x}}\quad(*)$.

Đặt $x^3-3x+4=u;1+x=v\Rightarrow x^3-3x+8=u+4;2+x=v+1$. Với $\frac{u+4}{v+1}\geq 0$ thì (*) trở thành

$$\frac{u+4}{v+1}=2\sqrt{\frac{u}{v}}\Leftrightarrow\left(u^2+8u+16\right)v=4u\left(v^2+2v+1\right)\Leftrightarrow u^2v-4uv^2=4u-16v$$

$$\Leftrightarrow uv(u-4v)=4(u-4v)\Leftrightarrow(uv-4)(u-4v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv=4\\u=4v\end{array}\right.$$

- $uv=4\Leftrightarrow\left(x^3-3x+4\right)(1+x)=4\Leftrightarrow x^4+x^3-3x^2+x=0$.

  $\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2+2x-1\right)=0\Rightarrow x=0;x=1;x=-1+\sqrt{2};x=-1-\sqrt{2}$.
- $u=4v\Leftrightarrow x^3-3x+4=4(1+x)\Leftrightarrow x^3-7x=0\Leftrightarrow x=0;x=-\sqrt{7};x=\sqrt{7}$.

Kết hợp các điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{0;1;-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2};-\sqrt{7};\sqrt{7}\right\}$.

Bài toán 158. Giải phương trình $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+15}{x^2-2x+2}}=\frac{x+21}{3(x-1)^2+11}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -15$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+15}{x^2-2x+2}}=\frac{x+21}{3x^2-6x+14}$.

Đặt $x+15=u;x^2-2x+2=v\Rightarrow x+21=u+6;3x^2-6x+14=3v+8$.

Chú ý rằng $x\geq -15\Rightarrow u+6>0;3v+8>0$. Khi đó ta có biến đổi

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{u+6}{3v+8}\Leftrightarrow\frac{u}{4v}=\frac{u^2+12u+36}{9v^2+48v+64}\Leftrightarrow 9v^2u+48uv+64u=4u^2v+48uv+144v$$

$$\Leftrightarrow 9v^2u-4u^2v=144v-64u\Leftrightarrow uv(9v-4u)=16(9v-4u)\Leftrightarrow(uv-16)(9v-4u)=0$$

❖ $uv=16\Leftrightarrow(x+15)(x^2-2x+2)=16\Leftrightarrow x^3+13x^2-28x+14=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x^2+14x-14)=0\Leftrightarrow x=1;x=-7+3\sqrt{7};x=-7-3\sqrt{7}$.

❖ $9v=4u\Leftrightarrow 9(x^2-2x+2)=4(x+15)\Leftrightarrow 9x^2-22x-42=0\Leftrightarrow x=\dfrac{11+\sqrt{499}}{9};x=\dfrac{11-\sqrt{499}}{9}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được các nghiệm $x=1;x=-7+3\sqrt{7};x=-7-3\sqrt{7};x=\dfrac{11+\sqrt{499}}{9};x=\dfrac{11-\sqrt{499}}{9}$.

Bài toán 159. Giải phương trình $3\sqrt{\dfrac{x^2+2}{4x-1}}=\dfrac{2x^2+13}{8x-1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>\dfrac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương $3\sqrt{\dfrac{x^2+2}{4x-1}}=\dfrac{2(x^2+2)+9}{2(4x-1)+1}$.

Đặt $x^2+2=u;4x-1=v,(u>0;v>0)$ ta thu được

$$3\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{2u+9}{2v+1}\Rightarrow 9.\frac{u}{v}=\frac{4u^2+36u+81}{4v^2+4v+1}\Leftrightarrow 36uv^2+36uv+9u=4u^2v+36uv+81v$$

$$\Leftrightarrow 36uv^2-4u^2v=81v-9u\Leftrightarrow 4uv(9v-u)=9(9v-u)\Leftrightarrow(4uv-9)(9v-u)=0$$

○ $4uv=9\Leftrightarrow 4(x^2+2)(4x-1)=9\Leftrightarrow 16x^3-4x^2+32x-17=0$

$\Leftrightarrow(2x-1)(8x^2+2x+17)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=1\\(x+1)^2+7x^2=-16\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

○ $9v=u\Leftrightarrow 9(4x-1)=x^2+2\Leftrightarrow x^2-36x+11=0\Rightarrow x=18+\sqrt{313};x=18-\sqrt{313}$.

Kết hợp điều kiện đi đến đáp số $S=\left\{\dfrac{1}{2};18-\sqrt{313};18+\sqrt{313}\right\}$.

Bài toán 160. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{2x^2-x+4}{9-4x}}=\dfrac{6x^2-3x+22}{33-8x}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $9-4x>0$.

Đặt $2x^2-x+4=a;9-4x=b,(a>0;b>0)\Rightarrow 6x^2-3x+22=3a+10;33-8x=2b+15$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{3a+10}{2b+15}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{9a^2+60a+100}{4b^2+60b+225}\Leftrightarrow 4ab^2+60ab+225a=9a^2b+60ab+100b$$

$$\Leftrightarrow 4ab^2-9a^2b+225a-100b=0\Leftrightarrow ab(4b-9a)+25(9a-4b)=0\Leftrightarrow(ab-25)(9a-4b)=0$$

✓ $ab=25\Leftrightarrow(2x^2-x+4)(9-4x)=25\Leftrightarrow 8x^3-22x^2+25x-11=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(8x^2-14x+11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\8x^2-14x+11=0\end{array}\right.\Rightarrow x=1$.

✓ $9a=4b\Leftrightarrow 9(2x^2-x+4)=4(9-4x)\Leftrightarrow 18x^2+7x=0\Leftrightarrow x=0;x=-\dfrac{7}{18}$.

Kết hợp các điều kiện đi đến đáp số $S=\left\{-\dfrac{7}{18};0;1\right\}$.

Bài toán 161. Giải phương trình $\sqrt{x+5+\dfrac{12}{x-1}}=\dfrac{2(x+2)^2+11}{5x-3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+4x+7}{x-1}}=\frac{2x^2+8x+19}{x-1}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+4x+7}}{\sqrt{x-1}}=\frac{2(x^2+4x+7)+5}{5(x-1)+2}.$$

Đặt $\sqrt{x^2+4x+7}=u;\sqrt{x-1}=v,(u>0;v>0)$ ta thu được

$$\frac{u}{v}=\frac{2u^2+5}{5v^2+2}\Leftrightarrow 5uv^2+2u=2vu^2+5v\Leftrightarrow 5uv^2-5v=2vu^2-2u$$

$$\Leftrightarrow 5v(uv-1)=2u(uv-1)\Leftrightarrow(5v-2u)(uv-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5v=2u\\uv=1\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- ✓ $5v=2u\Leftrightarrow 25(x^2+4x+7)=4(x-1)\Leftrightarrow 25x^2+96x+179=0$ (Vô nghiệm).
- ✓ $uv=1\Leftrightarrow(x^2+4x+7)(x-1)=1\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x=8\Leftrightarrow(x+1)^3=9\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{9}-1$.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=\sqrt[3]{9}-1$.

Bài toán 162. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{2x^2-5x+5}}=\dfrac{2x+5}{2x^2-5x+8}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{2x^2-5x+5}}=\dfrac{2(x+1)+3}{(2x^2-5x+5)+3}$.

Đặt $x+1=u;2x^2-5x+5=v,(u\geq 0;v>0)$ ta thu được

$$\sqrt{\frac{2u}{v}}=\frac{2u+3}{v+3}\Leftrightarrow 2u(v^2+6v+9)=v(4u^2+12u+9)\Leftrightarrow 2uv^2-4vu^2=9v-18u$$

$$\Leftrightarrow 2uv(v-2u)=9(v-2u)\Leftrightarrow(v-2u)(2uv-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=2u\\2uv=9\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- ➢ $v=2u\Leftrightarrow 2x^2-5x+5=2(x+1)\Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{1}{2};3\right\}$.
- ➢ $2uv=9\Leftrightarrow 2(2x^2-5x+5)(x+1)=9\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+1=0$

  $\Leftrightarrow(2x-1)(2x^2-2x-1)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Bài toán 163. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-1}}=\dfrac{2(3x-2)\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{(2x-1)^3}}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{2}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = u; \sqrt{2x-1} = v, (u \ge 0; v > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u}{v} = \frac{2u^2v+1}{2+v^3} \Leftrightarrow 2u + uv^3 = 2u^2v^2 + v \Leftrightarrow 2u - 2uv^2 = v - uv^3$$

$$\Leftrightarrow 2u\left(1-uv^2\right) = v\left(1-uv^2\right) \Leftrightarrow (2u-v)\left(1-uv^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2u = v \\ uv^2 = 1 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $2u = v \Leftrightarrow 4(3x-2) = 2x-1 \Leftrightarrow 10x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$.
- $uv^2 = 1 \Leftrightarrow u^2v^4 = 1 \Leftrightarrow (3x-2)\left(4x^2-4x+1\right) = 1 \Leftrightarrow 12x^3 - 20x^2 + 11x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(12x^2-8x+3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 12x^2 - 8x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{7}{10}; x = 1$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^2-3x+3}{x-2}} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-11} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x^2-3x+3}}{3\sqrt{x-2}} = \frac{x^2-3x+2}{x-11}$.

Đặt $\sqrt{x^2-3x+3} = u; \sqrt{x-2} = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$\frac{u}{3v} = \frac{u^2-1}{v^2-9} \Leftrightarrow uv^2 - 9u = 3u^2v - 3v \Leftrightarrow uv^2 - 3u^2v + 3v - 9u = 0$$

$$\Leftrightarrow uv(v-3u) + 3(v-3u) = 0 \Leftrightarrow (uv+3)(v-3u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} uv = -3 \\ v = 3u \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $uv = -3$ (Vô nghiệm vì $u > 0; v > 0$).
- $v = 3u \Leftrightarrow x - 2 = 9\left(x^2-3x+3\right) \Leftrightarrow 9x^2 - 28x + 29 = 0$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 165. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \frac{1+\sqrt{(2x-1)^3}}{1+x\sqrt{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{(2x-1)^3}}{1+x\sqrt{2x-1}}$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = u; \sqrt{x} = v, (u \ge 0; v > 0)$ ta thu được

$$\frac{u}{v}=\frac{u^3+1}{1+uv^2}\Leftrightarrow u+u^2v^2=u^3v+v\Leftrightarrow u-v+u^2v(v-u)=0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(1-u^2v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2v=1 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow 2x-1=x\Leftrightarrow x=1$.
- $u^2v=1\Leftrightarrow u^4v^2=1\Leftrightarrow (4x^2-4x+1)x=1\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4x^2=-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 166. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x}{4x-3}}=\dfrac{x\sqrt{x}+3}{1+3(4x-3)\sqrt{x}}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>\dfrac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{x\sqrt{x}+3}{1+3(4x-3)\sqrt{x}}$.

Đặt $\sqrt{x}=u;\sqrt{4x-3}=v,(u>0,v>0)$ ta thu được

$$\frac{u}{v}=\frac{u^3+3}{1+3v^2u}\Leftrightarrow u+3u^2v^2=u^3v+3v\Leftrightarrow u-3v+3u^2v^2-u^3v=0$$

$$\Leftrightarrow u-3v+u^2v(3v-u)=0\Leftrightarrow (u-3v)(1-u^2v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3v \\ u^2v=1 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

❖ $u=3v\Leftrightarrow x=9(4x-3)\Leftrightarrow x=\dfrac{27}{35}$.

❖ $u^2v=1\Leftrightarrow x\sqrt{4x-3}=1\Leftrightarrow x^2(4x-3)=1\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 4x^2+x+1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 167. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x}{2x^2-1}}=\dfrac{x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3(2x^2-1)}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đặt $\sqrt{x}=u;\sqrt{2x^2-1}=v,(u>0;v>0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u}{v}=\frac{u^3+3}{u+3v^2}\Leftrightarrow u^2+3uv^2=u^3v+3v\Leftrightarrow u^2-3v=uv(u^2-3v)$$

$$\Leftrightarrow (u^2-3v)(uv-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2=3v \\ uv=1 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

➢ $u^2 = 3v \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 9\left(2x^2-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 17x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

➢ $uv = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x\left(2x^2-1\right)} = 1 \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+2x+1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x^2-2}} = \dfrac{(2x-1)\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3\left(3x^2-2\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = u; \sqrt{3x^2-2} = v, (u \ge 0; v > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u}{v} = \frac{u^3+3}{u+3v^2} \Leftrightarrow u^2 + 3uv^2 = u^3v + 3v \Leftrightarrow u^2 - 3v = uv\left(u^2-3v\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(u^2-3v\right)(uv-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2 = 3v \\ uv = 1 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 = 3v \Leftrightarrow 2x - 1 = 3\sqrt{3x^2-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 1 \\ 4x^2 - 4x + 1 = 9\left(3x^2-2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 1 \\ 23x^2 + 4x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{19}{23}$.
- $uv = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)\left(3x^2-2\right)} = 1 \Leftrightarrow 6x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(6x^2+3x-1\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{33}}{12}; \frac{-3-\sqrt{33}}{12}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1; x = \dfrac{19}{23}$.

Bài toán 169. Giải phương trình $2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{3x-1}} = \dfrac{4\sqrt{3x-1}+3\left(x^2+1\right)}{(3x-1)\sqrt{3x-1}+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \dfrac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-1} = u, \sqrt{x^2+1} = v, (u > 0; v > 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2v}{u} = \frac{4u+3v^2}{u^3+3} \Leftrightarrow 2vu^3 + 6v = 4u^2 + 3v^2u \Leftrightarrow 2u^2(uv-2) = 3v(uv-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(2u^2-3v\right)(uv-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2u^2 = 3v \\ uv = 2 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

❖ $2u^2 = 3v \Leftrightarrow 2(3x-1) = 3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 1 \\ 36x^2 - 24x + 4 = 9x^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 1 \\ 27x^2 - 24x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{12+3\sqrt{31}}{27}$.

❖ $uv = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+1\right)(3x-1)} = 2 \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+2x+5\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1; x=\dfrac{12+3\sqrt{31}}{27}$.

Bài toán 170. Giải phương trình $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{2-x^2}}=\dfrac{2x^2-2x+1}{3-x^2} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2x-1}{\sqrt{2-x^2}}=\dfrac{4x^2-4x+2}{3-x^2}$.

Đặt $2x-1=u;\sqrt{2-x^2}=v, v>0$ ta thu được

$$\frac{u}{v}=\frac{u^2+1}{v^2+1}\Leftrightarrow uv^2+u=u^2v+v\Leftrightarrow uv^2-u^2v+u-v=0$$

$$\Leftrightarrow uv(v-u)+u-v=0\Leftrightarrow (uv-1)(u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} uv=1 \\ u=v \end{array}\right.$$

✓ $u=v\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ge 1 \\ 4x^2-4x+1=2-x^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ge 1 \\ 5x^2-4x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

✓ $uv=1\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2-x^2}=1\Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ (4x^2-4x+1)(x^2-2)+1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x>1 \\ 4x^4-4x^3-7x^2+8x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ (x-1)(4x^3-7x+1)=0 \end{cases}$$

Chú ý rằng phương trình $4x^3-7x+1=0$ có duy nhất một nghiệm α thỏa mãn $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1; x=\alpha$.

Lưu ý: *Quá trình tìm nghiệm α trong bài toán 170 cần sử dụng công thức nghiệm rất phức tạp, nó vượt qua khuôn khổ của bài toán nhỏ này, tác giả xin trình bày tại chuyên mục phương trình đại số bậc cao.*

Bài toán 171. Giải phương trình $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+6+2\sqrt{x}=5x \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{3x^2}{3+\sqrt{x}}+2(3+\sqrt{x})=5x\Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{(3+\sqrt{x})^2}+2=\dfrac{5x}{3+\sqrt{x}}$.

Đặt $\dfrac{x}{3+\sqrt{x}}=t, t\ge 0$ thu được $3t^2-5t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(3t-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-3=\sqrt{x} & (1) \\ 3x-6=2\sqrt{x} & (2) \end{array}\right.$

❖ $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-6x+9=x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x2-7x+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

❖ $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 9x^2-36x+36=4x \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{20+2\sqrt{19}}{9}$.

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x=\dfrac{20+2\sqrt{19}}{9};x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Bài toán 172. Giải phương trình $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}+8=3\left(x+2\sqrt{x}\right)\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le x\ne\dfrac{16}{9}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2}{4-3\sqrt{x}}=3x-2\left(4-3\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{\left(4-3\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{3x}{4-3\sqrt{x}}-2$.

Đặt $\dfrac{x}{4-3\sqrt{x}}=t$ ta thu được $t^2=3t-2\Leftrightarrow(t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4-3\sqrt{x} & (1)\\x=2\left(4-3\sqrt{x}\right) & (2)\end{array}\right.$

Xét các trường hợp

- $(1)\Leftrightarrow 4-x=3\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 4\\x^2-8x+16=9x\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $(2)\Leftrightarrow 8-x=6\sqrt{x}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 8\\x^2-16x+64=36x\end{cases}\Leftrightarrow x=26-6\sqrt{17}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1;x=26-6\sqrt{17}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2+2x+4}}=\dfrac{x+4}{x^2+2x+5}$.
2. $2\sqrt{\dfrac{x}{2x^2+3}}=\dfrac{x+1}{x^2+2}$.
3. $\sqrt{\dfrac{x}{2x^2-1}}\le\dfrac{4x+1}{2x^2+3}$.
4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x+5}{2x^2+3x+1}}=\dfrac{x+3}{2x^2+3x+2}$.
5. $\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2+3x+6}}=\dfrac{4-x}{x^2+3x+8}$.
6. $\sqrt{\dfrac{3-2x^2}{2-x}}>\dfrac{13-8x^2}{6-x}$.
7. $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+x+4}}=\dfrac{x+5}{x^2+x+9}$.
8. $\sqrt{\dfrac{4-3x^2}{5-4x}}\le\dfrac{17-12x^2}{9-4x}$.
9. $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}}=\dfrac{x+5}{2x^2+x+5}$.
10. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}=\dfrac{x+1}{x^2-5x+8}$.
11. $\sqrt{\dfrac{7x-6}{7x^2-6}}\ge\dfrac{35x-18}{21x^2+2}$.
12. $\sqrt{x+\dfrac{5}{x}}=\dfrac{x^2+9}{x+4}$.
13. $\sqrt{\dfrac{9-5x^2}{9-5x}}>\dfrac{57-25x^2}{47-15x}$.
14. $\sqrt{x+\dfrac{2}{x}+3}=\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$.
15. $2\sqrt{\dfrac{x^2+7}{2x}+1}=x+1+\dfrac{8}{x+1}$.
16. $3\sqrt{\dfrac{2x^2+4x-3}{x+2}}<\dfrac{2x^2+4x+6}{x+3}$.
17. $\sqrt{2x+\dfrac{6}{x}+1}=\dfrac{2x^2}{x+3}+1$.
18. $\sqrt{x+3+\dfrac{1}{x+2}}=x+2+\dfrac{2}{x+3}$.
19. $2\sqrt{\dfrac{5x^2+1}{5x+1}}<\dfrac{x^2+5}{2x+1}$.

20. $\sqrt{x+1-\frac{2}{x+3}}=\frac{(1+x)(3+x)}{x+5}$.

21. $\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{2x+1}}=\frac{4x^2+x+3}{2x+3}$.

22. $6\sqrt{\frac{3x^2-x+1}{2x+1}}>\frac{3x^2-x+10}{x+1}$.

23. $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2+3x-3}}=\frac{4x-1}{x^2+3x-1}$.

24. $3\sqrt{\frac{5x-2}{7x^2-4}}<\frac{5x+7}{7x^2-3}$.

25. $\sqrt{\frac{x-1}{2x^2+x-2}}=\frac{2x-1}{x(2x+1)}$.

26. $3\sqrt{\frac{7x^2-4}{7x-4}}\geq\frac{7x^2+5}{7x-3}$.

27. $3\sqrt{\frac{x-3}{3x^2+3x-5}}=\frac{2x-5}{x^2+x-1}$.

28. $2\sqrt{\frac{5x-2}{2x^2-x+2}}=\frac{15x+2}{2x^2-x+8}$.

29. $\frac{8x+41}{10x^2+39}\leq\sqrt{\frac{4x+3}{2x^2+5}}$.

30. $3\sqrt{\frac{x+2}{2x^2-x+2}}=\frac{2x+13}{2x^2-x+4}$.

31. $3\sqrt{\frac{5x^2-1}{5x-1}}<x+\frac{4}{5x}$.

32. $3\sqrt{\frac{x}{2x^2+x+6}}=\frac{2x+9}{2x^2+x+8}$.

33. $3\sqrt{\frac{x^2+5x-3}{2x+1}}=\frac{2x^2+10x+3}{2x+3}$.

34. $2\sqrt{\frac{3x+1}{3x^2-2x+3}}>\frac{9x+11}{3x^2-2x+9}$.

35. $10\sqrt{\frac{x^2+4x-1}{5x-1}}=\frac{3x^2+12x+5}{x+1}$.

36. $\frac{8x+41}{25x^2+24}>\sqrt{\frac{4x+3}{5x^2+2}}$.

37. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+3x-1}}=\frac{5x+7}{x^2+3x+4}$.

38. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4x-1}{3x^2+4x-4}}\leq\frac{5x+1}{(x+1)(3x+1)}$.

39. $3\sqrt{\frac{5x^2-x-1}{3x}}\leq\frac{25x^2-5x+4}{3x+5}$.

40. $2\sqrt{\dfrac{x^2+4x-3}{x+1}}=\dfrac{7x^2+28x-17}{x+8}$.

41. $6\sqrt{\dfrac{3x^2+4x-5}{3x-1}}>\dfrac{21x^2+28x-31}{x+2}$.

42. $2\sqrt{x-\dfrac{2}{x}+5}=\dfrac{7x^2+35x-10}{7+x}$.

43. $5\sqrt{\dfrac{3x+2}{x^2+7x-3}}=\dfrac{29+6x}{x^2+7x-1}$.

44. $\sqrt{\dfrac{4+x}{6x^2+x-2}}<\dfrac{2x+33}{5x\left(1+6x\right)}$.

45. $\sqrt{\dfrac{6-x}{x^2-x+5}}+\dfrac{2x-37}{x^2-x+7}=0$.

46. $\sqrt{\dfrac{5x-1}{2x^2+5x-3}}>\dfrac{15x+17}{10x^2+25x-3}$.

47. $\sqrt{\dfrac{7x-3}{4x^2+7x-7}}=\dfrac{21x+11}{20x^2+35x-23}$.

48. $\sqrt{\dfrac{7-3x}{3x^2+2x-1}}=\dfrac{41-9x}{15x^2+10x+7}$.

49. $3\sqrt{\dfrac{4-x}{x^2+10x-8}}\geq\dfrac{35-2x}{3x^2+30x-22}$.

50. $3\sqrt{\dfrac{5-2x}{x^2+8x-6}}=\dfrac{-4x+37}{3x^2+24x-16}$.

51. $\sqrt{\dfrac{3x}{7x^2+x-5}}=\dfrac{2x+9}{21x^2+3x-13}$.

52. $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{4x+3}{3x^2+4x}}\geq\dfrac{4+3x}{3x^2+4x+21}$.

53. $\dfrac{1}{18x^2+6x+4}\sqrt{\dfrac{6x^2+2x-1}{5x+2}}=\dfrac{1}{5x+23}$.

54. $\sqrt{\dfrac{x^2+6}{x+6}}\leq\dfrac{3x^2+25}{x+27}$.

55. $2\sqrt{\dfrac{5x^2+2}{2x+5}}<\dfrac{15x^2+13}{x+13}$.

56. $2\sqrt{\dfrac{7x-1}{x^2+6x-1}}=\dfrac{7x+23}{2x^2+12x+1}$.

57. $\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{5x+1}{x^2+5x}}\geq\dfrac{x+5}{2x^2+10x+3}$.

58. $2\sqrt{\dfrac{7-x}{7-x^2}}=\dfrac{31-x}{17-2x^2}$.

59. $\sqrt{\dfrac{5-x^2}{5-x}}>\dfrac{37-5x^2}{35-3x}$.

60. $\sqrt{\dfrac{6-x-x^2}{6-2x}}=\dfrac{42-5x-5x^2}{38-6x}$.

61. $(3x+29)\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x+3}}\le 5x^2+27$.

62. $\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{3x+1}}<\dfrac{5x^2+5x+22}{9x+23}$.

63. $\sqrt{\dfrac{x^2+6x-3}{7x-3}}=\dfrac{5x^2+30x-3}{21x+11}$.

64. $(3x^2-x+3)\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x^2-x-1}}+7=12x$.

65. $\dfrac{2x-9}{4x^2-2x+3}+\sqrt{\dfrac{2-x}{4x^2-2x-1}}\le 0$.

66. $\dfrac{16x-21}{3x^2+3x-1}+\sqrt{\dfrac{5-4x}{3x^2+3x-5}}=0$.

67. $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{6-x}{6-x^2}}+\dfrac{17-x}{7x^2-57}>0$.

68. $\sqrt{\dfrac{7-2x}{7-2x^2}}=\dfrac{56-6x}{64-14x^2}$.

69. $(7x+43)\sqrt{\dfrac{4+x^2}{4+x}}=3x^2+47$.

70. $2(7x+18)\ge\dfrac{9x^2+41}{\sqrt{\dfrac{2+3x^2}{3+2x}}}$.

71. $2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{5x-3}}=\dfrac{3x^2+20x-9}{(5x-3)\sqrt{5x-3}+3}$.

72. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{(3x-2)^3}+1}{(2-x)\sqrt{3x-2}+1}$.

73. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2-x^2}}=\dfrac{\sqrt{(2-x)^3}+1}{(2-x^2)\sqrt{2-x}+1}$.

74. $\dfrac{2x^2}{1-\sqrt{x}}=5x-3\left(1-\sqrt{x}\right)$.

75. $\sqrt{\dfrac{4-3x}{4-3x^2}}=\dfrac{\sqrt{(4-3x)^3}+1}{(4-3x^2)\sqrt{4-3x}+1}$.

76. $\dfrac{4x^2}{1-\sqrt{x+1}}+3=7x+3\sqrt{x+1}$.

77. $\dfrac{2x^2}{3-\sqrt{x}}=9x-7\left(3-\sqrt{x}\right)$.

78. $\dfrac{4x^2}{4-2\sqrt{x}}+4=2\sqrt{x}+5x$.

79. $\sqrt{\dfrac{4-3x}{5-4x^2}}=\dfrac{2(4-3x)\sqrt{4-3x}+3}{3(5-4x^2)\sqrt{4-3x}+2}$.

80. $\dfrac{6x^2}{3-2\sqrt{x}}+3-2\sqrt{x}=7x$.

81. $\sqrt{\dfrac{2-x^2}{3-2x}}=\dfrac{(2-x^2)\sqrt{3-2x}+1}{2\sqrt{(3-2x)^3}+1}$.

82. $\sqrt{\dfrac{3-2x^2}{3-2x}}=\dfrac{(3-2x^2)\sqrt{3-2x}+1}{1+2\sqrt{(3-2x)^3}}$.

83. $\sqrt{\dfrac{5x^2-2x-2}{2x-1}}\le\dfrac{10x^2-4x-1}{6x-1}$.

84. $\sqrt{\dfrac{2-x}{7-6x^2}}=\dfrac{3+2(2-x)\sqrt{2-x}}{2+3(7-6x^2)\sqrt{7-6x^2}}$.

85. $\dfrac{(3x-2)\sqrt{3x-2}+1}{3x^2-2+\sqrt{3x-2}}=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x^2-2}}$.

86. $\sqrt{4x-\dfrac{2}{x}-1}<\dfrac{8x^2-2x-1}{3x+2}$.

87. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x^2-1}+(2x^2-1)\sqrt{(2x-1)^3}}$.

88. $\sqrt{3x-\dfrac{2}{x}}\le\dfrac{3x^2+1}{3x+1}$.

89. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x^2+1}{3x+1}$.

90. $\sqrt{\dfrac{x^2+x-1}{2x^2+3x-4}}=\dfrac{3(x^2+x-1)\sqrt{x^2+x-1}+4}{4(2x^2+3x-4)\sqrt{x^2+x-1}+3}$.

91. $\sqrt{x-\dfrac{3}{x}+3}\le\dfrac{2x^2+6x-3}{3x+2}$.

92. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x^2+x-2}}=\dfrac{3(3x-2)\sqrt{3x-2}+4}{4(2x^2+x-2)\sqrt{3x-2}+3}$.

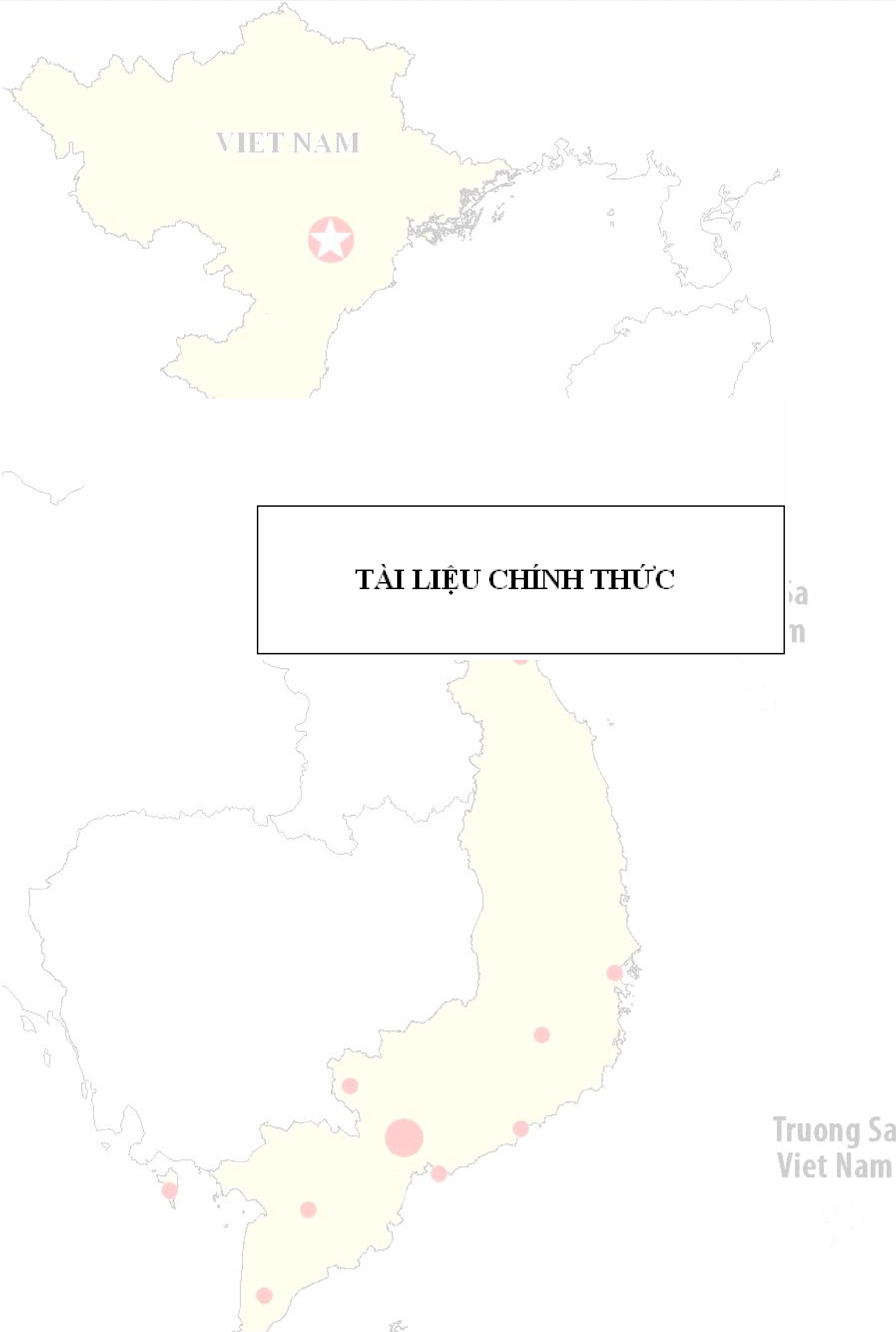
93. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x^2+x-3}}\le\dfrac{3(2x-1)\sqrt{2x-1}+4}{3+4(3x^2+x-3)\sqrt{2x-1}}$.

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.***
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
23. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
24. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
25. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.***
26. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).***
27. ***Các tạp chí toán học:*** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. ***Các diễn đàn toán học:*** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...***

THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CÁNH YẾU ĐẠI



TÀI LIỆU CHÍNH THỨC