TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\sum \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 8)

TRUNG ĐOÀN NGÔ VĂN SỞ – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG HAI HAY NHIỀU ẨN PHỤ QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 1

- **ĐẶT ẨN PHỤ QUY VỀ HỆ CƠ BẢN.**
- **ĐẶT ẨN PHỤ QUY VỀ HỆ ĐỐI XỨNG – GẦN ĐỐI XỨNG.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 8)

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ẩn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán cồng kềnh. Tiếp theo lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức (các phần 1 đến 7), chủ đạo là dùng hai hoặc nhiều ẩn phụ đưa phương trình cho trước về hệ phương trình, bao gồm hệ cơ bản, hệ đối xứng và gần đối xứng, một trong những phương án hữu tỷ hóa phương trình chứa căn, giảm thiểu đại bộ phận sự cồng kềnh và sai sót trong tính toán. Kỹ năng này đồng hành cùng việc giải hệ phương trình hữu tỷ đồng bậc – đẳng cấp, hệ phương trình chứa căn quy về đẳng cấp, ngày một nâng cao kỹ năng giải phương trình – hệ phương trình cho các bạn học sinh.

Lý do tài liệu có sử dụng kiến thức về hệ phương trình nên đòi hỏi vốn một nền tảng nhất định của các bạn đọc, thiết nghĩ nó phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ẩn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số, giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, giải hệ phương trình đối xứng loại 1, loại 2; hệ phương trình đồng bậc; hệ phương trình đa ẩn.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}=2 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-1}=a;\sqrt{x}=b \quad (a\ge 0;b\ge 0)\Rightarrow 2x-1=a^2;x=b^2\Rightarrow a^2-2b^2=-1$.

Mặt khác phương trình đã cho khi đó trở thành $a+b=2$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\ a^2-2b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\ b^2-4b+4-2b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\ b^2+4b-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\text{hoặc }\begin{cases}a=7\\ b=-5\end{cases}\text{ (Loại).}$$

Với $\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$. Vậy Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Giải phương trình $2\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}=1 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge \frac{2}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-2}=a;\sqrt{2x-1}=b \quad (a\ge 0;b\ge 0)\Rightarrow a^2=3x-2;b^2=2x-1\Rightarrow 2a^2-3b^2=-1$.

Mặt khác phương trình đã cho tương đương với $2a-b=1$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2a-b=1\\ 2a^2-3b^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\ 2a^2-3\left(4a^2-4a+1\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\ 10a^2-12a+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\ (a-1)(5a-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow (a;b)=(1;1),\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{5}\right)$$

Loại trường hợp $(a;b)=\left(\frac{1}{5};-\frac{3}{5}\right)$. Với $a=b=1\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow x=1$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-1}+1\Leftrightarrow 12x-8=2x+2\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 5x-4=\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \frac{4}{5}\\ 25x^2-40x+16=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge \frac{4}{5}\\ 25x^2-42x+17=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=1$.

Nhận xét.

Bài toán 2 các bạn có thể giải đơn giản theo phương pháp biến đổi tương đương – nâng lũy thừa như lời giải 2. Với cách nhìn bài toán bằng con mắt "hệ phương trình", lời giải 1 cũng rất độc đáo và gọn gàng. Các bạn chú ý đặt ẩn phụ, tìm điều kiện cho các ẩn và so sánh với điều kiện xác định ban đầu để cho lời giải chính xác.

Bài toán 3. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}=x-1 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge -\frac{1}{3}$. Đặt $\sqrt{3x+1}=a;\sqrt{x+3}=b\quad(a\ge 0;b>0)$ suy ra $a^2-b^2=2x-2$.

Mặt khác phương trình đã cho tương đương với $a-b=x-1$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=2x-2 \\ a-b=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(a+b)=2(x-1) \\ a-b=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(a+b-2)=0 \\ a-b=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ a-b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=x-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Xét $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Với $\begin{cases} a+b=2 \\ a-b=x-1 \end{cases} \Rightarrow 2a=x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{1}{3} \\ 12x+4=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-2\sqrt{7} \\ x=5+2\sqrt{7} \end{array}\right.$

Kết luận tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;5-2\sqrt{7};5+2\sqrt{7}\right\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình $\sqrt{5x-1}=\sqrt{x}+4x-1\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{1}{5}$. Đặt $\sqrt{5x-1}=a;\sqrt{x}=b\quad(a\ge 0;b>0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=4x-1 \\ a-b=4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-b^2=a-b \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

- Kết hợp $\begin{cases} a-b=4x-1 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow 2a=4x \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{5} \\ 4x^2-5x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$
- Xét $a=b \Leftrightarrow 5x-1=x \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Đối chiếu với điều kiện ta có kết luận nghiệm $S=\left\{\frac{1}{4};1\right\}$.

Nhận xét.

Hai bài toán 3 và 4 ngoài lời giải trên còn có thể giải bằng phép nhân lượng liên hợp – hệ tạm thời. Phần trình bày phía trên chính là đặc điểm của tên gọi "hệ tạm thời" phổ biến trên nhiều tài liệu tham khảo; tức là kết hợp phương trình hệ quả thu được và phương trình ban đầu, sử dụng phép thế – cộng đại số để làm giảm số lượng biểu thức, giảm thiểu cồng kềnh trong biến đổi. Đối với hai bài toán trên và các bài toán tương tự, giải bằng đẳng thức liên hợp hay hệ phương trình đều cùng chung một bản chất là làm xuất hiện nhân tử, chỉ khác nhau ở phép đặt ẩn phụ.

Bài toán 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+5x-2}=5\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2+5x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+5x+3}=5-\sqrt{x^2+5x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+5x-2}\le 5 \\ x^2+5x+3=x^2+5x-2+25-10\sqrt{x^2+5x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+5x-2}\le 5 \\ \sqrt{x^2+5x-2}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-2}=2 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

Thử lại thấy hai giá trị trên đều thỏa mãn phương trình đã cho. Kết luận nghiệm $S=\{-6;1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2+5x\ge 2$.

Đặt $\sqrt{x^2+5x+3}=a;\sqrt{x^2+5x-2}=b\ \left(a>0;b\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=5\\a^2-b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x+3=9\\x^2+5x-2=4\end{cases}\Leftrightarrow x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x\in\left\{-6;1\right\}.$$

Thử lại thấy hai giá trị trên đều thỏa mãn phương trình đã cho. Kết luận nghiệm $S=\left\{-6;1\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^2+5x\ge 2$.

Nhận xét: $\sqrt{x^2+5x+3}\ne\sqrt{x^2+5x-2}\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5}{\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}}=5\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1\quad(*)$$

Kết hợp đẳng thức (*) và phương trình đã cho $\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+5x-2}=5$ thu được

$$2\sqrt{x^2+5x+3}=6\Leftrightarrow\sqrt{x^2+5x+3}=3\Leftrightarrow x^2+5x+3=9\Leftrightarrow x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x\in\left\{-6;1\right\}.$$

Thử lại thấy hai giá trị trên đều thỏa mãn phương trình đã cho. Kết luận nghiệm $S=\left\{-6;1\right\}$.

Nhận xét.

- *Ba lời giải trên đều không thông qua điều kiện phức tạp mà sử dụng phép thử lại nghiệm.*
- *Lời giải 1 sử dụng phép biến đổi tương đương và nâng lũy thừa hết sức thuần túy, mặc dù với hệ điều kiện hệ quả cũng không được "mượt mà". Bằng cách sử dụng phương châm "khoan thư sức dân, sâu gốc bền rễ", tạm thời chưa giải điều kiện chi tiết* $\sqrt{x^2+5x-2}\le 5$*; tránh được việc đối chiếu nghiệm phức tạp.*
- *Lời giải 2 sử dụng phép đặt hai ẩn phụ và hằng đẳng thức hiệu hai bình phương quen thuộc.*
- *Lời giải 3 sử dụng đẳng thức liên hợp, với chú ý rằng* $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}\ \left(A\ne B\right)$*, và sử dụng hệ phương trình tạm thời thu được một phương trình cơ bản* $\sqrt{f\left(x\right)}=g\left(x\right)$*, may mắn hơn khi* $g\left(x\right)$ *lại là một hằng số. Như đã trình bày ở trên, bản chất của hai lời giải 2 và 3 là một, duy chỉ có hình thức khác nhau.*

Bài toán 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}=x\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Từ phương trình suy ra điều kiện có nghiệm là $x\ge 0$.

Đặt $\sqrt{x^2+4x+1}=a;\sqrt{x^2+3x+1}=b\ \left(a>0;b>0\right)$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=x\\a^2-b^2=x\end{cases}\Leftrightarrow a^2-b^2=a+b\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a-b-1\right)=0\Leftrightarrow a-b=1$$

Kết hợp $\begin{cases}a+b=x\\a-b=1\end{cases}\Rightarrow 2a=x+1\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+4x+1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\4x^2+16x+4=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-7+2\sqrt{10}}{3}$.

So sánh với điều kiện $x\ge 0$, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+3x}=3-x\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0\vee x\le -3$.

Đặt $\sqrt{x^2+2x+3}=a;\sqrt{x^2+3x}=b\ \left(a>0;b\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=3-x \\ a-b=3-x \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=a-b \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a=b \Leftrightarrow x^2+2x+3=x^2+3x \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện $x\ge 0 \vee x\le -3$).
- Kết hợp

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3-x \end{cases} \Rightarrow 2a=4-x \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2x+3}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ 3x^2+16x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-8+2\sqrt{19}}{3};\frac{-8-2\sqrt{19}}{3}\right\}$$

So sánh với điều kiện $x\ge 0\vee x\le -3$; kết luận nghiệm của phương trình $S=\left\{\frac{-8+2\sqrt{19}}{3};3;\frac{-8-2\sqrt{19}}{3}\right\}$.

Bài toán 8. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+5x-1}-2\sqrt{x^2-x-1}=9x+3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{4x^2+5x-1}=a;\ 2\sqrt{x^2-x-1}=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)\Rightarrow a^2-b^2=9x+3$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=9x+3 \\ a-b=9x+3 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=a-b \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a=b \Leftrightarrow 9x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ (Loại).
- Kết hợp $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=9x+3 \end{cases} \Rightarrow 2a=9x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{4}{9} \\ 4(4x^2+5x-1)=81x^2+72x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{4}{9} \\ 65x^2+52x+20=0 \end{cases} \quad (*)$.

Hệ điều kiện (*) vô nghiệm do phương trình $65x^2+52x+20=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 9. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x+11+2\sqrt{x^2+11x+10}=2x+7+2\sqrt{x^2+7x+10}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+11x+10}+2=\sqrt{x^2+7x+10}$$
$$\Leftrightarrow x^2+11x+14+4\sqrt{x^2+11x+10}=x^2+7x+10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+11x+10}=-x-1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-1\ge 0 \\ x^2+11x+10=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

So sánh với điều kiện $x\ge -1$ thu được nghiệm $S=\{-1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}$.

Đặt $\sqrt{x+10}=a;\sqrt{x+2}=b\ \ (a>0;b>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2-b^2=8 \\ a-b=\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{8}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}}=2\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}\right) \\ 2a-2b=2\sqrt{x+5}-2\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow 3a-b=4\sqrt{x+5}.$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+4\sqrt{x+5} \Leftrightarrow 9x+90=17x+82+8\sqrt{x^2+7x+10}$$

$$\Leftrightarrow -x+1=\sqrt{x^2+7x+10} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-2x+1=x^2+7x+10 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

So sánh với điều kiện $x\ge -1$ thu được nghiệm $S=\{-1\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 1 bài toán 9 hoàn toàn sử dụng biến đổi tương đương và nâng lũy thừa cơ bản, xuất phát bởi đặc tính đặc biệt: Sau khi bình phương chỉ còn hai căn thức và hằng số, hơn nữa hệ số của x^2 trong hai căn bằng nhau nên bậc tối đa của x sau khi bình phương là 2.*
- *Lời giải 2 sử dụng hệ phương trình tạm thời, và không thoát khỏi đẳng thức liên hợp cơ bản*
$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}\right)=4.$$
- *Về cơ bản, lời giải 2 trở nên khá phức tạp so với lời giải 1, tuy nhiên đổi lại sẽ mở ra hướng đi mới đối với nhiều bài toán khác.*

Bài toán 10. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=x+2 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$.

Đặt $\sqrt{2x+3}=a;\sqrt{x+1}=b,(a>0;b\ge 0)$ ta có $a^2-b^2=x+2$.

Phương trình đã cho trở thành $a-b=x+2$. Vậy ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b)(a-b)=x+2 \\ a-b=x+2 \end{cases} \Rightarrow (x+2)(a+b)=x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

- Dễ thấy $x=-2$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Kết hợp $a+b=1$ và $a-b=x+2$ ta có

$$2a=x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+3}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 8x+12=x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến đáp số $x=3$.

Bài toán 11. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2x \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x+1}=a;\sqrt{x+1}=b,(a\ge 0;b>0)$ ta có $a^2-b^2=2x$. Phương trình đã cho trở thành $a-b=2x$.

Ta thu được hệ $\begin{cases} a^2-b^2=2x \\ a-b=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b)=2x \\ a-b=2x \end{cases} \Rightarrow 2x(a+b)=2x \Leftrightarrow x(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ a+b=1 \end{array}\right.$

- $x=0$ thỏa mãn phương trình ban đầu.
- $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=2x \end{cases} \Rightarrow 2a=2x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 12x+4=4x^2+4x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 4x^2-8x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4+2\sqrt{7}}{4}; x = \frac{4-2\sqrt{7}}{4}.$$

Đối chiếu điều kiện $x=0; x=\frac{4+2\sqrt{7}}{4}; x=\frac{4-2\sqrt{7}}{4}$.

Bài toán 12. Giải phương trình $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x+2}=5x-1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{6}$.

Đặt $\sqrt{6x+1}=a; \sqrt{x+2}=b, (a \geq 0; b>0)$ ta có ngay $a^2-b^2=5x-1$. Suy ra thu được hệ

$$\begin{cases} a^2-b^2=5x-1 \\ a-b=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow (5x-1)(a+b)=5x-1 \Leftrightarrow (5x-1)(a+b-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{5} \\ a+b=1 \end{array}\right.$$

- Rõ ràng $x=\frac{1}{5}$ thỏa mãn phương trình đề bài.
- Kết hợp $a+b=1$ và $a-b=5x-1 \Rightarrow 2a=5x \Leftrightarrow 2\sqrt{6x+1}=5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 25x^2-24x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{12+2\sqrt{61}}{25}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=\frac{12+2\sqrt{61}}{25}$.

Bài toán 13. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x-1}+\sqrt{5-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{5} \leq x \leq 5$.

Đặt $\sqrt{x+3}=a; \sqrt{3x+1}=b; \sqrt{5x-1}=c; \sqrt{5-x}=d \Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$a+b=c+d \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2 \Rightarrow ab=cd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3}=\sqrt{-5x^2+26x-5} \Leftrightarrow 8x^2-16x+8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Thử lại nghiệm thấy thỏa mãn, vậy tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{x+3}=a; \sqrt{3x+1}=b; \sqrt{2x+1}=c; \sqrt{2x+3}=d \Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$.

Phương trình đã cho trở thành

$$a+b=c+d \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2cd+d^2 \Rightarrow ab=cd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3}=\sqrt{4x^2+8x+3} \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Thử lại nghiệm trực tiếp ta có nghiệm $x=0; x=2$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}=2$.
2. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x}=4x-1$.
3. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{2x}=6$.
4. $\sqrt{10x-1}+\sqrt{7x-3}=3x+2$.
5. $\sqrt{6x+1}-\sqrt{3x+2}=3x-1$.
6. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}=x+5$.
7. $\sqrt{5x+7}=\sqrt{2x+1}+3x+6$.
8. $\sqrt{9x-5}-\sqrt{x+1}=8x-6$.
9. $\sqrt{7x+1}-\sqrt{x}=6x$.
10. $\sqrt{7x+2}-\sqrt{2x-1}=5x+3$.
11. $\sqrt{6x+5}=\sqrt{x+3}+5x+2$.
12. $\sqrt{x^2+6x+1}-\sqrt{x^2+2x+4}=4x-3$.
13. $\sqrt{8x+3}=3x+1+\sqrt{5x+2}$.
14. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{4x+7}-\sqrt{3x+7}$.
15. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x+1}=1$.
16. $\sqrt{2x+8}=x+4+\sqrt{x+4}$.
17. $\sqrt{9x+5}=\sqrt{x}+8x+5$.
18. $\sqrt{x^2+4x+1}+\sqrt{x+3}=x^2+3x-2$.
19. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x+1}=2\left(x^2+2x+1\right)$.
20. $\sqrt{x^2+5x+4}=\sqrt{x^2+3x}+2x$.
21. $\sqrt{x^2+5x+6}=x+2+\sqrt{x^2+3x+4}$.
22. $\sqrt{x^2+5}=x+1+\sqrt{x^2-x+4}$.
23. $\sqrt{5x^2+2x}-\sqrt{5x^2+x+4}=x+4$.
24. $\sqrt{2x^2+7x+8}=x+1+\sqrt{2x^2+6x+7}$.
25. $\sqrt{7x^2+x+5}=2x+1+\sqrt{7x^2-x+4}$.
26. $\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x+5}=x^2+4x-4$.
27. $\sqrt{x^3+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}=6$.
28. $\sqrt{7x^2+4x+4}-\sqrt{7x^2+x+4}=3x$.
29. $\sqrt{x^3+3}-\sqrt{x^3+3x}=3-3x$.
30. $\sqrt{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^3+x+2}=x^2-1$.
31. $\sqrt{x^3+x^2+2}=\sqrt{x^3-x+1}+x^2+x+1$.
32. $\sqrt{2x^3+3x-1}-\sqrt{2x^3+x^2+1}=3x-x^2-2$.
33. $\sqrt{x^3+4x^2+x+3}=2x^2+x-3+\sqrt{x^3+2x^2+6}$.
34. $\sqrt{x^3+3x}-\sqrt{x^3-x^2+4}=x^2+3x-4$.
35. $1+\sqrt{4x^3+x^2+4}=x+\sqrt{4x^3+x^2-x+5}$.

Bài toán 15. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-1}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{x+7}=a;\sqrt[3]{x-1}=b$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3-b^3=8\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)^3-3ab(a-b)=8\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=0\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow(a;b)=(0;-2),(2;0).$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+7}=0\Leftrightarrow x=-7$.
- $a=2\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+7}=2\Leftrightarrow x=1$.

Thử lại hai giá trị trên đều nghiệm đúng phương trình. Kết luận nghiệm $S=\{-7;1\}$.

Bài toán 16. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{4-3x}=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x+5}=a;\sqrt[3]{4-3x}=b\Rightarrow a^3+b^3=9$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3+b^3=9\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^3-3ab(a+b)=9\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27-3ab.3=9\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(3-a)=2\\b=3-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2-3a+2=0\Leftrightarrow(a-1)(a-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=2\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+5}=1\Leftrightarrow 3x+5=1\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$.
- $a=2\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+5}=2\Leftrightarrow 3x+5=8\Leftrightarrow x=1$.

Thử lại thấy nghiệm đúng phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S=\left\{-\dfrac{4}{3};1\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x+5+4-3x+3\sqrt[3]{3x+5}.\sqrt[3]{4-3x}\left(\sqrt[3]{3x+5}+\sqrt[3]{4-3x}\right)=27\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3x+5}.\sqrt[3]{4-3x}.3=18$$

$$\Leftrightarrow(3x+5)(4-3x)=8\Leftrightarrow 3x^2+x-4=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{4}{3};1\right\}$$

Thử lại hai giá trị thấy nghiệm đúng phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S=\left\{-\dfrac{4}{3};1\right\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình $\sqrt[3]{5x-4}+\sqrt[3]{5x+3}=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{5x-4}=a;\sqrt[3]{5x-3}=b$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3-b^3=-7\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-(3-a)^3=-7\\b=3-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^3-9a^2+27a-20=0\\b=3-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)(2a^2-7a+20)=0\\b=3-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{5x-4}=1\\\sqrt[3]{5x+3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-4=1\\5x+3=8\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Thử lại thấy nghiệm đúng phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 18. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x-2}=2\sqrt[3]{2x-1}-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=a;\sqrt[3]{2x-1}=b$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a=2b-1\\2a^3-3b^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-1\\2(2b-1)^3-3b^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-1\\13b^3-24b^2+12b-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b-1\\(b-1)(13b^2-11b+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow 3x-2=1\Leftrightarrow x=1$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 19. Giải phương trình $\sqrt[3]{4x+1}=\sqrt[3]{3x+8}-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{4x+1}=a;\sqrt[3]{3x+8}=b\Rightarrow 3a^3-4b^3=-29$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=-1\\3a^3-4b^3=-29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-1\\3(b^3-3b^2+3b-1)-4b^3=-29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-1\\b^3+9b^2-9b-26=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b-1\\(b-2)(b^2+11b+13)=0\end{cases}\Rightarrow b\in\left\{2;\frac{-11+\sqrt{69}}{2};\frac{-11-\sqrt{69}}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in\left\{0;\frac{\left(\sqrt{69}-11\right)^3-64}{24};-\frac{\left(\sqrt{69}+11\right)^3+64}{24}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 20. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+8}-\sqrt[3]{x+1}=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x+8}=a;\sqrt[3]{x+1}=b$ thì $a^3-2b^3=6$.

Phương trình đã cho trở thành $a-b=1$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=1\\a^3-2b^3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\(b+1)^3-2b^3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\b^3-3b^2-3b+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\(b-1)(b^2-2b-5)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow b\in\left\{1;1+\sqrt{6};1-\sqrt{6}\right\}\Rightarrow x\in\left\{0;\left(\sqrt{6}-1\right)^3-1;\left(1-\sqrt{6}\right)^3-1\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 21. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x+8}-\sqrt[3]{x+1}=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x+8}=u;\sqrt[3]{x+1}=v\Rightarrow u^3-3v^3=5$. Phương trình đã cho trở thành $2u-v=3$.

Suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-3v^3=5 \\ 2u-v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-3\left(8u^3-36u^2+54u-27\right)=5 \\ v=2u-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23u^3-108u^2+162u-76=0 \\ v=2u-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (u-2)\left(23u^2-62u+38\right)=0 \Rightarrow u \in \left\{2;\frac{31+\sqrt{87}}{23};\frac{31-\sqrt{87}}{23}\right\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{0;\frac{1}{3}\left(\frac{31+\sqrt{87}}{23}\right)^3-\frac{8}{3};\frac{1}{3}\left(\frac{31-\sqrt{87}}{23}\right)^3-\frac{8}{3}\right\}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm như trên.

Bài toán 22. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}+\sqrt[3]{x-1}=2\sqrt[3]{x} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x=0$ thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x \neq 0$ ta có phương trình $\sqrt[3]{7+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=2$.

Đặt $\sqrt[3]{7+\frac{1}{x}}=a;\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=b$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab(a+b)=0 \end{cases} \Rightarrow ab=0$$

$$\Leftrightarrow (7x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7};x=1$$

Thử lại ta chọn hai nghiệm $x=-\frac{1}{7};x=1$. Kết luận tập nghiệm $S=\left\{-\frac{1}{7};0;1\right\}$.

Bài toán 23. Giải phương trình $\sqrt[3]{26x+1}-\sqrt[3]{7x+1}=\sqrt[3]{x} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x=0$ thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x \neq 0$ ta có phương trình $\sqrt[3]{26+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{7+\frac{1}{x}}=1$.

Đặt $\sqrt[3]{26+\frac{1}{x}}=a;\sqrt[3]{7+\frac{1}{x}}=b$ ta thu được hệ

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a^3-b^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^3+3b^2+3b+1-b^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b^2+b-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b-2)(b+3)=0 \end{cases} \Rightarrow b \in \{-3;2\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7x+1=-27x \\ 7x+1=8x \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{34};1\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x=-\frac{1}{34};x=1$.

Bài toán 24. Giải phương trình $\sqrt[3]{14x+6}-\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{2x+1} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-\frac{1}{2}$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\neq -\frac{1}{2}$ thì bài toán trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{14x+6}{2x+1}}-\sqrt[3]{\frac{3x+1}{2x+1}}=1\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2x+6\left(2x+1\right)}{2x+1}}-\sqrt[3]{\frac{2\left(2x+1\right)-x}{2x+1}}=1\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2x}{2x+1}+6}-\sqrt[3]{2-\frac{x}{2x+1}}=1.$$

Đặt $\sqrt[3]{\frac{2x}{2x+1}+6}=a;\sqrt[3]{2-\frac{x}{2x+1}}=b$ ta thu được hệ

$$\begin{cases}a-b=1\\a^3+2b^3=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\b^3+b^2+b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\\left(b-1\right)\left(b^2+2b+3\right)=0\end{cases}\Rightarrow b=1\Rightarrow x=2x+1\Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=-1$.

Bài toán 25. Giải phương trình $\sqrt[3]{4\left(6x+1\right)}-\sqrt[3]{3x-7}=\sqrt[3]{3x+1}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-\frac{1}{3}$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\neq-\frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{24x+4}{3x+1}}-\sqrt[3]{\frac{3x-7}{3x+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{12x+4\left(3x+1\right)}{3x+1}}-\sqrt[3]{\frac{24x-7\left(3x+1\right)}{3x+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{12x}{3x+1}+4}-\sqrt[3]{\frac{24x}{3x+1}-7}=1.$$

Đặt $\sqrt[3]{\frac{12x}{3x+1}+4}=u;\sqrt[3]{\frac{24x}{3x+1}-7}=v\left(u\geq 0;v\geq 0\right)$ ta thu được

$$\begin{cases}u-v=1\\2u^3-v^3=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\2\left(v+2\right)^3-v^2=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\v^3+6v^2+6v-13=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\\left(v-1\right)\left(v^2+7v+13\right)=0\end{cases}\Rightarrow v=1\Leftrightarrow\frac{24x}{3x+1}-7=1\Leftrightarrow 3x=3x+1\Leftrightarrow 0x=1\quad(*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 26. Giải phương trình $\sqrt[3]{14x+10}=\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt[3]{x+2}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Rõ ràng $x=-2$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x\neq-2$, ta có biến đổi

$$\sqrt[3]{\frac{14x+10}{x+2}}-\sqrt[3]{\frac{5x-2}{x+2}}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{3.3x+5\left(x+2\right)}{x+2}}-\sqrt[3]{\frac{2.3x-\left(x+2\right)}{x+2}}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{3.3x}{x+2}+5}-\sqrt[3]{\frac{2.3x}{x+2}-1}=1.$$

Đặt $\sqrt[3]{\frac{3.3x}{x+2}+5}=u;\sqrt[3]{\frac{2.3x}{x+2}-1}=v$ thì thu được hệ

$$\begin{cases}u-v=1\\2u^3-3v^3=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\2\left(v^3+3v^2+3v+1\right)-3v^3=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\v^3-6v^2-6v+11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=v+1\\\left(v-1\right)\left(v^2-5v-11\right)=0\end{cases}\Rightarrow v\in\left\{1;\frac{5+\sqrt{69}}{2};\frac{5-\sqrt{69}}{2}\right\}\Rightarrow x=1;x=\frac{2\left(5+\sqrt{69}\right)^3+16}{40-\left(5+\sqrt{69}\right)^3};x=\frac{2\left(5-\sqrt{69}\right)^3+16}{40-\left(5-\sqrt{69}\right)^3}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

Các bài toán từ 15 đến 26 thuộc lớp phương trình chứa căn thức bậc ba cơ bản, các bạn độc giả có thể giải theo phương pháp biến đổi tương đương – nâng lũy thừa với chú ý sử dụng giả thiết, sử dụng phép biến đổi hệ quả, đối chiếu nghiệm trực tiếp với bài toán ban đầu. Trên đây chỉ là một trong nhiều cách giải, trọng tâm đi sâu về kỹ thuật đặt ẩn phụ đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình. Tùy theo tình huống và hoàn cảnh cho phép các bạn có thể vận dụng sao cho hợp lý, thiết nghĩ trước tiên chúng ta cần trân trọng những gì gần gũi, những gì thân thương, thiêng liêng, cơ bản nhất đối với mình, như thông điệp nhà văn Nguyễn Minh Châu gửi gắm trong thiên truyện ngắn "Bến quê", hay giản dị như "Lòng yêu nước" của Ilia Elirenbua !

Bài toán 27. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}=1 \qquad \left(x\in ¡\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 0$.

Đặt $\sqrt[4]{x}=a;\sqrt[4]{x+1}=b\ \left(a\ge 0;b>0\right)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=1\\ a^4-b^4=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ \left(a^2+b^2\right)\left(a-b\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\ \left(2a^2-2a+1\right)\left(2a-1\right)=1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\ a\left(2a^2-3a+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=0\end{cases}\Rightarrow x=0$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Lời giải 2.

Từ điều kiện $x\ge 0\Rightarrow\sqrt[4]{x+1}\ge 1\Rightarrow\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+1}\ge 1$. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x=0$.

Kết luận $x=0$ là nghiệm duy nhất.

Bài toán 28. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}=2 \qquad \left(x\in ¡\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $0\le x\le 2$.

Đặt $\sqrt[4]{x}=a;\sqrt[4]{2-x}=b\ \left(a\ge 0;b\ge 0\right)$. Chú ý rằng $a+b=2;a\ge 0;b\ge 0\Rightarrow a;b\in\left[0;2\right]\Rightarrow ab\le 4$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\ a^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2ab=4\\ \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4-2ab\\ 2\left(2-ab\right)^2-a^2b^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4-2ab\\ a^2b^2-8ab+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4-2ab\\ \left(ab-1\right)\left(ab-7\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4-2ab\\ \left[\begin{array}{l}ab=1\\ ab=7\end{array}\right.\end{cases}$$

Loại trường hợp $ab=7>4$. Xét $\begin{cases}ab=1\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(2-a\right)=1\\ b=2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a-1\right)^2=0\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $0\le x\le 2$.

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng – trung bình nhân (AM – GM) cho hai số thực không âm ta có

$$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x.1}\le\frac{\sqrt{x}+1}{2}\le\frac{\frac{x+1}{2}+1}{2}=\frac{x+3}{4} \qquad (1)$$

$$\sqrt[4]{2-x}=\sqrt[4]{(2-x).1}\le\frac{\sqrt{2-x}+1}{2}\le\frac{\frac{(2-x)+1}{2}+1}{2}=\frac{5-x}{4}\qquad(2)$$

Kết hợp lại suy ra $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}\le\frac{x+3+5-x}{4}=2$.

Phương trình có nghiệm khi (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu đẳng thức, tức là $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=1\\\sqrt[4]{2-x}=1\\0\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Đáp số nghiệm $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $0\le x\le 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky liên tiếp ta có

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)(x+2-x)=4\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2$$

Kết hợp lại thu được $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}\right)^2\le 2.2=4\Rightarrow\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}\le 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt[4]{x}}{1}=\frac{\sqrt[4]{2-x}}{1}\\0\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Nhận xét.

- *Hai bài toán 27 và 28 đều được giải bằng hai phương pháp: Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình và sử dụng đánh giá hay tính chất bất đẳng thức. Hai lời giải 1 tương ứng của mỗi bài toán đều sử dụng hai ẩn phụ, đưa mỗi phương trình ban đầu về một hệ phương trình đối xứng loại 1, giải bằng phương pháp thế có thông qua các biểu thức đối xứng biến để giảm thiểu khai triển hằng đẳng thức phức tạp. Tuy nhiên, bạn đọc cần để ý rằng so sánh với bản chất phương pháp biến đổi tương đương, nâng lũy thừa thì không khác bao nhiêu, nhưng về hình thức đã được giải quyết một cách rất hiệu quả.*
- *Các lời giải còn lại đều dùng bất đẳng thức cổ điển AM – GM hoặc Bunyakovsky, hoặc đơn thuần chỉ là đánh giá thông thường, gần gũi (lời giải 2 bài toán 27). Để giải được bằng phương cách này, dường như bài toán cần có một sự đặc biệt nào đó về mặt hình thức. Về vấn đề này, tác giả không đi sâu tại đây, xin trình bày trong Lý thuyết sử dụng đánh giá – bất đẳng thức – hàm số, tiêu mục cuối cùng trong các phương pháp giải phương trình, bất phương trình chứa căn.*

Bài toán 29. Giải phương trình $\sqrt[4]{3-x}+\sqrt[4]{x+14}=3\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-14\le x\le 3$. Đặt $\sqrt[4]{3-x}=a;\sqrt[4]{x+14}=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=3\\a^4+b^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\a^4+(a-3)^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\a^4-6a^3+27a^2-54a+32=0\quad(*)\end{cases}$$

Ta có

$$(*)\Leftrightarrow a^4-6a^3+9a^2+18a^2-54a+32=0\Leftrightarrow\left(a^2-3a\right)^2+18\left(a^3-3a\right)+32=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2-3a+2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Leftrightarrow(a-1)(a-2)\left(a^2-3a+16\right)=0\Rightarrow a\in\{1;2\}\Rightarrow x\in\{-13;1\}$$

Kết luận phương trình có tập nghiệm $S=\{-13;1\}$.

Nhận xét.

Bằng phương pháp sử dụng ẩn phụ, bài toán được đưa về một hệ phương trình đối xứng loại 1. Các bạn có thể giải trực tiếp thông qua các biểu thức đối xứng với a,b như trong lời giải 1 bài toán số 28. Thực ra quy về đối xứng như thế cũng không hoàn toàn đơn giản, nếu không muốn nói rằng cũng rất cồng kềnh và chưa được ngắn gọn. Phương pháp thế và sử dụng khai triển hằng đẳng thức trong trường hợp này vẫn mang tính khả thi, mặc dù tất yếu sẽ dẫn tới phương trình đa thức bậc 4. Sử dụng thuật giải phương trình đại số bậc cao đã biết với sự linh hoạt, nhạy bén, các bạn hoàn toàn có thể có được một lời giải súc tích như trên.

Bài toán 30. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[4]{15x+1}=3\sqrt[4]{x}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt[4]{x}}+\frac{\sqrt[4]{15x+1}}{\sqrt[4]{x}}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{2-\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{15+\frac{1}{x}}=3$.

Đặt $\sqrt[4]{2-\frac{1}{x}}=a;\sqrt[4]{15+\frac{1}{x}}=b\ \left(a\ge 0;b\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=3\\ a^4+b^4=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=3-a\\ a^4+\left(a-3\right)^4=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=3-a\\ a^4-6a^3+27a^2-54a+32=0\quad (*)\end{cases}$$

Ta có

$$(*)\Leftrightarrow a^4-6a^3+9a^2+18a^2-54a+32=0\Leftrightarrow \left(a^2-3a\right)^2+18\left(a^3-3a\right)+32=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-3a+2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Rightarrow a\in\{1;2\}\Rightarrow \frac{1}{x}\in\{-14;1\}\Rightarrow x=1$$

Kết luận phương trình có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 31. Giải phương trình $\sqrt[4]{3x-7}+\sqrt[4]{14x-25}=3\sqrt[4]{x-2}$ $\quad$ (1).

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{7}{3}$.

Để ý rằng

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{3x-7}+\sqrt[4]{14x-25}}{\sqrt[4]{x-2}}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{3\left(x-2\right)-1}{x-2}}+\sqrt[4]{\frac{14\left(x-2\right)+1}{x-2}}=3\Leftrightarrow \sqrt[4]{3-\frac{1}{x-2}}+\sqrt[4]{14+\frac{1}{x-2}}=3.$$

Đặt $\sqrt[4]{3-\frac{1}{x-2}}=a;\sqrt[4]{14+\frac{1}{x-2}}=b\ \left(a\ge 0;b\ge 0\right)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=3\\ a^4+b^4=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=3-a\\ a^4+\left(a-3\right)^4=17\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}b=3-a\\ a^4-6a^3+27a^2-54a+32=0\quad (*)\end{cases}$$

Ta có

$$(*)\Leftrightarrow a^4-6a^3+9a^2+18a^2-54a+32=0\Leftrightarrow \left(a^2-3a\right)^2+18\left(a^3-3a\right)+32=0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-3a+2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a^2-3a+16\right)=0\Rightarrow a\in\{1;2\}\Rightarrow \frac{1}{x}\in\{-14;1\}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{5}{2}$.

Bài toán 32. Giải phương trình $\sqrt[4]{3x-1}+\sqrt[4]{1-x}=2\sqrt[4]{x}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{3}\le x\le 1$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt[4]{3-\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}-1}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{3-\frac{1}{x}}=a;\sqrt[4]{\frac{1}{x}-1}=b,\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$, chú ý rằng $a+b=2;a\ge 0;b\ge 0\Rightarrow a;b\in\left[0;2\right]\Rightarrow ab\le 4$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\ a^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2ab+b^2=4\\ \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(4-2ab\right)^2-2a^2b^2=2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2-ab\right)^2-a^2b^2=1\Leftrightarrow a^2b^2-8ab+7=0\Leftrightarrow\left(ab-1\right)\left(ab-7\right)=0$$

Loại trường hợp $ab=7$. Với $ab=1\Rightarrow\left(3x-1\right)\left(1-x\right)=x^2\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left(2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Thử lại thấy không thỏa mãn đề bài. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 33. Giải phương trình $\sqrt[4]{3-2x}+\sqrt[4]{4x-3}=2\sqrt[4]{x}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4}\le x\le\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt[4]{\frac{3}{x}-2}+\sqrt[4]{4-\frac{3}{x}}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{\frac{3}{x}-2}=a;\sqrt[4]{4-\frac{3}{x}}=b,\left(a\ge 0;b\ge 0\right)$, để ý $a+b=2;a\ge 0;b\ge 0\Rightarrow a;b\in\left[0;2\right]\Rightarrow ab\le 4$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\ a^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2ab+b^2=4\\ \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(4-2ab\right)^2-2a^2b^2=2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2-ab\right)^2-a^2b^2=1\Leftrightarrow a^2b^2-8ab+7=0\Leftrightarrow\left(ab-1\right)\left(ab-7\right)=0$$

Loại trường hợp $ab=7$. Với $ab=1\Rightarrow\left(3-2x\right)\left(4x-3\right)=x^2\Leftrightarrow 9x^2-18x+9=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 34. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x+1}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}$.

Đặt $\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=u;\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}=v,\left(u\ge 0;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình sau

$$\begin{cases}1+u=v\\ u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-2uv+v^2=1\\ \left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(1+2uv\right)^2-2u^2v^2=2$$

$$\Leftrightarrow 2u^2v^2+4uv-1=0\Rightarrow uv=-1+\sqrt{\frac{3}{2}};uv=-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Loại trường hợp $uv=-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$. Với $uv=-1+\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow x=\dfrac{16}{16-\left(\sqrt{4\sqrt{\frac{3}{2}}-3}-1\right)^4}$. Kết luận nghiệm duy nhất.

Bài toán 35. Giải phương trình $\sqrt[4]{3x+1}+\sqrt[4]{4x+1}=2\sqrt[4]{x+1} \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[4]{\frac{3x+1}{x+1}}+\sqrt[4]{\frac{4x+1}{x+1}}=2\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{2x}{x+1}+1}+\sqrt[3]{\frac{3x}{x+1}+1}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{\frac{2x}{x+1}+1}=u;\sqrt[3]{\frac{3x}{x+1}+1}=v,\left(u\ge 0;v\ge 0\right)\Rightarrow 3u^4-2v^4=1$. Sử dụng $u+v=2$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=2\\3u^4-2v^4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=2-u\\3u^4-2\left(u^4-8u^3+24u^2-32u+16\right)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=2-u\\u^4+16u^3-48u^2+64u-33=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=2-u\\\left(u-1\right)\left(u^3+17u^2-31u+33\right)=0\end{cases}\quad (*)$$

Để ý rằng $u^3+17u^2-31u+33=u^3+17\left(u-\frac{31}{34}\right)^2+\frac{1283}{68}>0,\forall u\ge 0$ nên $(*)\Leftrightarrow u=1\Leftrightarrow 3x+1=x+1\Leftrightarrow x=0$.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=0$.

Bài toán 36. Giải phương trình $\sqrt[4]{9x+4}+\sqrt[4]{3x-2}=2\sqrt[4]{1+6x} \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[4]{\frac{9x+4}{6x+1}}+\sqrt[4]{\frac{3x-2}{6x+1}}=2\Leftrightarrow \sqrt[4]{4-\frac{15x}{6x+1}}+\sqrt[4]{\frac{15x}{6x+1}-2}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{4-\frac{15x}{6x+1}}=u;\sqrt[4]{\frac{15x}{6x+1}-2}=v,\left(0\le u\le 2;0\le v\le 2\right)\Rightarrow u^4+v^4=2$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases}u+v=2\\u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+2uv+v^2=4\\\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(4-2uv\right)^2-2u^2v^2=2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2-uv\right)^2-u^2v^2=1\Leftrightarrow u^2v^2-8uv+7=0\Leftrightarrow\left(uv-1\right)\left(uv-7\right)=0$$

Rõ ràng $u;v\in\left[0;2\right]\Rightarrow uv\le 4$, vậy loại trường hợp $uv=7$.

Với $uv=1\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{9x+4}{6x+1}}.\sqrt[4]{\frac{3x-2}{6x+1}}=1\Leftrightarrow\left(9x+4\right)\left(3x-2\right)=\left(6x+1\right)^2\Leftrightarrow 9x^2+18x+9=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Đối chiếu và thử lại nghiệm, đi đến đáp số $x=-1$.

Bài toán 37. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^2+15x+1}+\sqrt[4]{x^2-x+1}=2\sqrt[4]{x} \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge 0$.
Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Biến đổi về dạng $\sqrt[4]{x+15+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{x-1+\frac{1}{x}}=2$. Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ thu được $\sqrt[4]{t+15}+\sqrt[4]{t-1}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{t+15}=u;\sqrt[4]{t-1}=v,\left(u\ge 0;v\ge 0\right)$ suy ra $\begin{cases}u+v=2\\u^4-v^4=16\end{cases}$

Chú ý rằng $\begin{cases}u^4=v^4+16\ge 16\\u=2-v\\u\ge 0;v\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u\ge 2\\u\le 2\\u\ge 0;v\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=2\\v=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x+1=0\qquad(*)$.

Phương trình (*) vô nghiệm nên bài toán ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 38. Giải phương trình $\sqrt[4]{4x-1-2x^2}+\sqrt[4]{2x^2-2x+1}=2\sqrt[4]{x}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x-1-2x^2\ge 0\\x\ge 0\end{cases}$

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x>0$ ta biến đổi về dạng

$$\sqrt[4]{4-\left(2x+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[4]{2x+\frac{1}{x}-2}=2.$$

Đặt $\sqrt[4]{4-\left(2x+\frac{1}{x}\right)}=u;\sqrt[4]{2x+\frac{1}{x}-2}=v,\left(u\ge 0;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u+v=2\\u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+2uv+v^2=4\\\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(4-2uv\right)^2-2u^2v^2=2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2-uv\right)^2-u^2v^2=1\Leftrightarrow u^2v^2-8uv+7=0\Leftrightarrow\left(uv-1\right)\left(uv-7\right)=0$$

Rõ ràng $u;v\in\left[0;2\right]\Rightarrow uv\le 4$, vậy loại trường hợp $uv=7$. Đặt $2x+\frac{1}{x}=u,u\ge 2\sqrt{2},\forall x>0$.

Với $uv=1\Leftrightarrow\left(4-t\right)\left(t-2\right)=1\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow\left(t-3\right)^2=0\Leftrightarrow t=3$

$$\Rightarrow 2x+\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=1;x=\frac{1}{2}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=1;x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 39. Giải phương trình $\sqrt[4]{10x^2+x-5}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1+4x-2x^2}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 0\\1+4x-2x^2\ge 0\end{cases}$

Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x>0$ ta biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt[4]{5\left(2x-\frac{1}{x}\right)+1}=1+\sqrt[4]{4-\left(2x-\frac{1}{x}\right)}.$$

Đặt $2x-\frac{1}{x}=t\Rightarrow \sqrt[4]{5t+1}=1+\sqrt[4]{4-t}$. Đặt $\sqrt[4]{5t+1}=a;\sqrt[4]{4-t}=b,(a\geq 0;b\geq 0)$ thì thu được hệ

$$\begin{cases}a-b=1\\ a^4+5b^4=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b+1)^4+5b^4=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 3b^4+2b^3+3b^2+2b-10=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b-1)(3b^3+5b^2+8b+10)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow 4-t=1\Leftrightarrow t=3$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{4};x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$$

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$.

Bài toán 40. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^2+12x+3}=\sqrt[4]{x^2-3x+3}+\sqrt[4]{x}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$.

Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x>0$ ta biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt[4]{12+x+\frac{3}{x}}=\sqrt[4]{x+\frac{3}{x}-3}+1.$$

Đặt $x+\frac{3}{x}=t,t>0$ ta thu được $\sqrt[4]{12+t}=\sqrt[4]{t-3}+1$. Tiếp tục đặt $\sqrt[4]{12+t}=a;\sqrt[4]{t-3}=b,(a\geq 0;b\geq 0)$ suy ra hệ

$$\begin{cases}a=b+1\\ a^4-b^4=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b+1)^4-b^4=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 2b^3+3b^2+2b-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b-1)(2b^2-b+7)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow t-3=1\Leftrightarrow t=4\Rightarrow x+\frac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1;x=3$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x=1;x=3$.

Bài toán 41. Giải phương trình $\sqrt[4]{7x^2+2x+13}=\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{8+3x-x^2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\geq -3\\ 8+3x-x^2\geq 0\end{cases}$

Nhận xét $x=-3$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x>-3$ ta biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt[4]{\frac{7x^2+2x+13}{x+3}}=1+\sqrt[4]{\frac{8+3x-x^2}{x+3}}\Leftrightarrow\sqrt[4]{7.\frac{x^2+1}{x+3}+2}-\sqrt[4]{3-\frac{x^2+1}{x+3}}=1.$$

Đặt $\frac{x^2+1}{x+3}=t\Rightarrow\sqrt[4]{7t+2}-\sqrt[4]{3-t}=1$. Đặt $\sqrt[4]{7t+2}=a;\sqrt[4]{3-t}=b,(a\geq 0;b\geq 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases}a-b=1\\ a^4+7b^4=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b+1)^4+7b^4=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ 4b^4+2b^3+3b^2+2b-11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+1\\ (b-1)(4b^3+6b^2+9b+11)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow t=2\Leftrightarrow x^2+1=2(x+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-5=0\Rightarrow x=1+\sqrt{6};x=1-\sqrt{6}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=1-\sqrt{6};x=1+\sqrt{6}$.

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt{|x+1|}+\sqrt[4]{x^2-2x+5}=2\sqrt[4]{x^2+3}$ $\quad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in ¡$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{x^2+2x+1}+\sqrt[4]{x^2-2x+5}=2\sqrt[4]{x^2+3}\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}}+\sqrt[4]{\frac{x^2-2x+5}{x^2+3}}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{2.\frac{x^2+x+2}{x^2+3}-1}+\sqrt[4]{3-2.\frac{x^2+x+2}{x^2+3}}=2$$

Đặt $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+3}=t,t\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ ta thu được $\sqrt[4]{2t-1}+\sqrt[4]{3-2t}=2$.

Đặt $\sqrt[4]{2t-1}=a;\sqrt[4]{3-2t}=b,(a\ge 0;b\ge 0)$ quy về hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\a^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(2-b)^4+b^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\b^4-4b^3+12b^2-16b+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(b-1)^2(b^2-2b+7)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow x^2+x+2=x^2+3\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 43. Giải phương trình $\sqrt[4]{6+x-4x^3}+\sqrt[4]{3+x-x^3}=2\sqrt[4]{x+2}$ $\quad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}6+x-4x^3\ge 0\\3+x-x^3\ge 0\end{cases}$

Nhận xét $x=-2$ không là nghiệm của phương trình. Biến đổi $\sqrt[4]{\dfrac{6+x-4x^3}{x+2}}+\sqrt[4]{\dfrac{3+x-x^3}{x+2}}=2$.

Để ý rằng $\dfrac{6+x-4x^3}{x+2}-4.\dfrac{3+x-x^3}{x+2}=\dfrac{-3x-6}{x+2}=-3$.

Đặt $\sqrt[4]{\dfrac{6+x-4x^3}{x+2}}=a;\sqrt[4]{\dfrac{3+x-x^3}{x+2}}=b,(a\ge 0;b\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\a^4-4b^4=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(2-b)^4-4b^4+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\3b^4+8b^3-24b^2+32b-19=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=2-b\\(b-1)(3b^3+11b^2-13b+19)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=1\\3b^3+11b^2-13b+19=0\end{array}\right.\qquad(*)$$

Dễ nhận thấy $3b^3+11b^2-13b+19=3b^3+11\left(b-\dfrac{13}{22}\right)^2+\dfrac{667}{44}>0,\forall b\ge 0$ nên (*) vô nghiệm.

Với $a=b=1\Rightarrow 3+x-x^3=x+2\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$. Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}=1$.
2. $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{2-x}=3$.
3. $\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{4+x}=2$.
4. $\sqrt[3]{2x+6}+\sqrt[3]{3x+5}=4$.
5. $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{x-1}=2\sqrt[3]{x}$.
6. $\sqrt[3]{5x+3}+\sqrt[3]{20x+7}=5$.
7. $\sqrt[3]{3-2x}+\sqrt[3]{1-x}=1$.
8. $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{x+1}$.
9. $2\sqrt[3]{\dfrac{4x-3}{2x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x-5}{2x+1}}=3$.
10. $\sqrt[3]{8x+9}+\sqrt[3]{6x+7}=\sqrt[3]{3+2x}$.
11. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{11-3x}=2$.
12. $\sqrt[3]{1+7x}+\sqrt[3]{2x-1}=2\sqrt[3]{x}$.
13. $\sqrt[3]{\dfrac{21-5x}{7-x}}+3\sqrt[3]{\dfrac{7-2x}{7-x}}=1$.
14. $\sqrt[3]{11x-x}=4\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{9x-1}$.
15. $\sqrt[3]{9-x}-\sqrt[3]{4-3x}=1$.
16. $\sqrt[3]{17x+4}+3\sqrt[3]{13x+3}=4\sqrt[3]{5x+1}$.
17. $2\sqrt[3]{\dfrac{x-12}{x+6}}+3\sqrt[3]{\dfrac{x+12}{x+6}}=5$.
18. $\sqrt[3]{\dfrac{8x+13}{x+1}}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}=1$.
19. $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{3x+1}=2\sqrt[3]{2x+1}$.
20. $\sqrt[3]{\dfrac{8-x}{x+4}}+\sqrt[3]{\dfrac{22x+4}{x+4}}=3$.
21. $6\sqrt[3]{x+16}+\sqrt[3]{x+20}=7\sqrt[3]{4+x}$.
22. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{97-x}=5$.
23. $\sqrt[3]{4x-3}+\sqrt[3]{1+7x}=3$.
24. $2\sqrt[3]{5+3x}-\sqrt[3]{4-3x}=3\sqrt[3]{x}$.
25. $\sqrt[3]{8x+11}+\sqrt[3]{6+x}=5$.
26. $2\sqrt[3]{5x-4}-\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x}$.
27. $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{x+1}=\sqrt[4]{x}$.
28. $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x-15}=\sqrt[4]{x}$.
29. $\sqrt[3]{\dfrac{6x+29}{x+4}}+\sqrt[3]{\dfrac{2-2x}{x+4}-1}=2$.
30. $\sqrt[3]{\dfrac{13x-3}{3x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{15x-4}{3x+2}}=2$.
31. $\sqrt[3]{13x-5}=1+\sqrt[3]{6x-5}$.

32. $\sqrt[4]{\dfrac{9x-32}{x+5}}-\sqrt[4]{\dfrac{2x+21}{x+5}}=1$.

33. $\sqrt[4]{\dfrac{11x-2}{x+3}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{2x+13}{x+3}}$.

34. $\sqrt[4]{\dfrac{16x-8}{x+7}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{47+x}{x+7}}$.

35. $\sqrt[4]{16+35x-x^2}+\sqrt[4]{x^2-x+1}=3\sqrt[4]{2x+1}$.

36. $\sqrt[4]{\dfrac{-x^3+2x^2+12x-1}{x^3+11}}+\sqrt[4]{\dfrac{3x^3-2x^2-12x+23}{x^3+11}}=2$.

37. $\sqrt[4]{\dfrac{9x^2-2x+13}{x^2-x+3}}-\sqrt[4]{\dfrac{2x^2-3x+8}{x^2-x+3}}=1$.

38. $\sqrt[4]{\dfrac{x^3+12x^2-12x+48}{x^2-x+4}}=\sqrt[4]{\dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^2-x+4}}+1$.

39. $\sqrt[4]{\dfrac{10x^2-4x+13}{x+3}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{-2x^2+5x+10}{x+3}}$.

40. $\sqrt[4]{4-\dfrac{x^3}{2x-1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^3-4x+2}{2x-1}}=2$.

41. $\sqrt[4]{\dfrac{15x^3+2x^2-x+16}{x^3+1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^3+2x^2-x}{x^3+1}}=2$.

42. $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3+x^2-2x+8}{x^2-2x+4}}+\sqrt[4]{\dfrac{3x^3+x^2-2x+10}{x^2-2x+4}}=2$.

43. $\sqrt[4]{\dfrac{7x}{2x^3-1}+2}-\sqrt[4]{\dfrac{6x^3-x-3}{2x^3-1}}=1$.

44. $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+15x+73}{x+6}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{x^2-17}{x+6}}$.

45. $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4x+17}{x^2-x+7}}=1+\sqrt[4]{\dfrac{4x^2-5x+26}{x^2-x+7}}$.

46. $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2+3x+17}{x^2+x+5}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x^2+x+5}-2}=2$.

47. $\sqrt[4]{\dfrac{15x^2+x+21}{x^2+1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x^2+1}-1}=2$.

48. $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3-2x^2+3}{2x^2+1}}+\sqrt[4]{3-2.\dfrac{x^3+2}{2x^2+1}}=2$.

49. $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3-x^2+2x+2}{x^2+4}}+\sqrt[4]{3-2.\dfrac{x^3+x+3}{x^2+4}}=2$.

50. $\sqrt[4]{4-\dfrac{x^4+x+1}{3x^3-x+1}}+\sqrt[4]{\dfrac{x^4-6x^3+3x-1}{3x^3-x+1}}=2$.

Bài toán 44. Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}+5\sqrt{2x-x^2}=7 \qquad \left(x\in \text{¡}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $0 \le x \le 2$.

Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{x}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{(2-x)x}\Rightarrow \sqrt{2x-x^2}=\dfrac{t^2-2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $t+\dfrac{5}{2}\left(t^2-2\right)=7\Leftrightarrow 5t^2+2t-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{12}{5}\end{array}\right.$

So sánh điều kiện thu được $t=2\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{x}=2\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=1\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận tập nghiệm của phương trình: $S=\{1\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $0\le x\le 2$.

Đặt $\sqrt{2-x}=a;\sqrt{x}=b\ (a\ge 0;b\ge 0)$

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a+b+5ab=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)^2-2ab=2 \\ a+b+5ab=7\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(7-5ab)^2-2ab=2 \\ a+b+5ab=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}25a^2b^2-72ab+47=0 \\ a+b+5ab=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=\dfrac{47}{25}\end{array}\right. \\ a+b+5ab=7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ a+b=2\end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} ab=\dfrac{47}{25} \\ a+b=-\dfrac{12}{5}\end{cases}$$

- $\begin{cases} ab=\dfrac{47}{25} \\ a+b=-\dfrac{12}{5}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a+\dfrac{12}{5}\right)+\dfrac{47}{25}=0 \\ a+b=-\dfrac{12}{5}\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $\begin{cases} ab=1 \\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a(2-a)=1 \\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1\end{cases}\Rightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

- *Lời giải 2 của bài toán 44 dựa trên phép đặt hai ẩn phụ, đưa bài toán ban đầu về một hệ phương trình đối xứng loại 1, hướng giải thông qua các biểu thức đối xứng với tổng và tích hai ẩn a, b quen thuộc. Theo cách nhìn tổng quan và chặt chẽ, lời giải 2 tuy mạch lạc song lại khá văn tự, liệu có phải lựa chọn "tối ưu" ?*
- *Lời giải 1 chỉ sử dụng một ẩn phụ, kết quả lại loại bớt một giá trị t, dẫn tới nghiệm của phương trình nhanh chóng. Tuy nhiên nếu hai giá trị t đều thỏa mãn, đồng hành với việc chúng ta sẽ giải hai phương trình chứa căn, cũng có nhiều điều thú vị sau đó.*
- *Xét một cách toàn diện lời giải 1, các bạn có thể thấy điều kiện của biến phụ $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{x}$ không chặt. Trong quá trình giải nghiệm của phương trình, sự chặt chẽ này (tức tập giá trị của biến phụ t) nhiều khi không cần thiết, mặc dù rất hữu hiệu nguyên do sẽ loại bớt nghiệm t ngoại lai nào đó. Thành thử, nếu không tìm miền giá trị cho t, chỉ dùng điều kiện "không chặt – lỏng" $t\ge 0$ hoặc $t>0$, và trong trường hợp hai giá trị t đều dương, việc giải hai phương trình chứa căn cơ bản có lẽ cũng không có vấn đề gì. Xin lưu ý lớp bài toán như trên có chứa tham số, yêu cầu tìm điều kiện tham số để phương trình có nghiệm thỏa mãn một tính chất nào đó cho trước, công việc tìm miền giá trị là bắt buộc. Vấn đề này tác giả xin trình bày tại Lý thuyết phương trình, bất phương trình căn thức chứa tham số.*

Bài toán 45. Giải phương trình $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+7}+\sqrt{(6-x)(7-x)}=11 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $-7 \le x \le 6$.
Đặt $\sqrt{6-x}=a;\sqrt{x+7}=b\ \left(a\ge 0;b\ge 0\right)$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a+b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=13 \\ 2a+2b+2ab=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab+2a+2b=35 \\ a+b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b\right)^2+2\left(a+b\right)-35=0 \\ a+b+ab=11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=5 \\ a+b=-7 \end{array}\right. \\ a+b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(5-a\right)=6 \\ ab=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-x=4 \\ 6-x=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{-3;2\right\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $-7 \le x \le 6$.
Đặt $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+7}=t \Rightarrow t^2=13+2\sqrt{\left(6-x\right)\left(x+7\right)} \Rightarrow \sqrt{\left(6-x\right)\left(x+7\right)}=\dfrac{t^2-13}{2}$. Ta có các nhận xét

$$t\ge 0;\ t^2=13+2\sqrt{\left(6-x\right)\left(x+7\right)}\ge 13 \Rightarrow t\ge\sqrt{13}$$

$$t\ge 0;\ t^2=13+2\sqrt{\left(6-x\right)\left(x+7\right)}\le 13+\left(6-x\right)+\left(x+7\right)=26 \Rightarrow 0\le t\le\sqrt{26}$$

Kết hợp lại suy ra $\sqrt{13}\le t\le\sqrt{26}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t+\frac{t^2-13}{2}=11 \Leftrightarrow t^2+2t=35 \Leftrightarrow t\in\left\{5;-7\right\} \Rightarrow t=5$$

$$\Leftrightarrow t^2=25 \Leftrightarrow \sqrt{\left(6-x\right)\left(7+x\right)}=6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-3;2\right\}$$

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{-3;2\right\}$.

Bài toán 46. Giải phương trình $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+5}+5\sqrt{25-x^2}=19 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $-5\le x\le 5$. Đặt $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}=t \Rightarrow t^2=10+2\sqrt{25-x^2}$.
Ta có $t\ge 0;t^2=10+2\sqrt{25-x^2}\ge 10 \Rightarrow t\ge\sqrt{10}$ và $t\ge 0;t^2=10+2\sqrt{25-x^2}\le 10+2\sqrt{25} \Rightarrow t\le 2\sqrt{5}$
Kết hợp lại suy ra $t\in\left[\sqrt{10};2\sqrt{5}\right]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$t+5.\frac{t^2-10}{2}=19 \Leftrightarrow 5t^2+2t=88 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\dfrac{22}{5} \end{array}\right. \Rightarrow t=4 \Leftrightarrow t^2=16 \Leftrightarrow \sqrt{25-x^2}=3 \Leftrightarrow x\in\left\{-4;4\right\}.$$

So sánh với điều kiện $-5\le x\le 5$ ta thu được nghiệm $S=\left\{-4;4\right\}$.

Nhận xét.

- *Hai bài toán trên (45 và 46) đều là dạng phương trình giải được bằng cách sử dụng một ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai hoặc dùng hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 1.*
- *Trong trường hợp đặt một ẩn phụ t các bạn có thể tìm miền giá trị cho t bằng đánh giá thông thường (lời giải bài toán 46) hoặc bất đẳng thức Cauchy (lời giải 2 bài toán 45). Ngoài ra còn còn có thể sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức căn thức cơ bản hoặc sử dụng tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất thông qua khảo sát hàm số (chương trình đại số lớp 12 THPT). Mời các bạn tham khảo thêm các ví dụ sau đây.*

Bài toán 47. Giải phương trình $\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{22+9x-x^2}=17 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $-2 \le x \le 11$.

Đặt $\sqrt{11-x} = a; \sqrt{x+2} = b \ (a \ge 0; b \ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ a+b+2ab=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+a+b+2ab=30 \\ a+b+2ab=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+(a+b)=30 \\ a+b+2ab=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=5 \\ a+b=-6 \end{array}\right. \\ a+b+2ab=17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a(5-a)=6 \end{cases} \Rightarrow a \in \{2;3\} \Rightarrow x \in \{7;2\}$$

Kết hợp điều kiện $-2 \le x \le 11$ thu được nghiệm $S = \{2;7\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-2 \le x \le 11$.

Đặt $\sqrt{11-x} + \sqrt{x+2} = t \Rightarrow t^2 = 13 + 2\sqrt{22+9x-x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $t \ge 0; t^2 = \left(\sqrt{11-x}+\sqrt{x+2}\right)^2 \le 2(11-x+x+2) = 26 \Rightarrow t \le \sqrt{26}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{a+b}$ ta có $t = \sqrt{11-x}+\sqrt{x+2} \ge \sqrt{13}$.

Do đó ta có $\sqrt{13} \le t \le \sqrt{26}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t+t^2-13=17 \Leftrightarrow t^2+t-30=0 \Leftrightarrow t \in \{5;-6\} \Rightarrow t=5 \Rightarrow t^2=25 \Leftrightarrow 13+2\sqrt{22+9x-x^2}=25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{22+9x-x^2}=6 \Leftrightarrow x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow x \in \{2;7\}$$

Kết hợp điều kiện $-2 \le x \le 11$ thu được nghiệm $S = \{2;7\}$.

Bài toán 48. Giải phương trình $x+\sqrt{5-x^2}+3x\sqrt{5-x^2}=9 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$. Đặt $\sqrt{5-x^2} = y \ (y \ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y+3xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2=15 \\ 2x+2y+6xy=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+2(x+y)=33 \\ x+y+3xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=-\dfrac{11}{3} \end{array}\right. \\ x+y+3xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-\dfrac{11}{3} \\ xy=20 \end{cases} \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)=2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{1;2\}$.
- $\begin{cases} x+y=-\dfrac{11}{3} \\ xy=20 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận tập nghiệm của phương trình $S = \{1;2\}$.

Bài toán 49. Giải phương trình $\sqrt{25-x^2} = \dfrac{35-x}{3x-1} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ x \ne \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $x+(3x-1)\sqrt{25-x^2}=35 \Leftrightarrow x-\sqrt{25-x^2}+3x\sqrt{25-x^2}=35$.

Đặt $\sqrt{25-x^2}=y\ \ (y\ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x-y+3xy=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2+2xy=25 \\ x-y=35-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2y^2-208xy+1200=0 \\ x-y=35-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy=12 \\ xy=\dfrac{100}{9} \end{array}\right. \\ x-y=35-3xy \end{cases}$$

- $\begin{cases} xy=12 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)=12 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x\in\{3;-4\}$.
- $\begin{cases} xy=\dfrac{100}{9} \\ x-y=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{100}{9} \\ y=x-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow 9x^2-15x-100=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{15+15\sqrt{17}}{18};\dfrac{15-15\sqrt{17}}{18}\right\}$.

So sánh điều kiện ta thu được 4 nghiệm $S=\left\{-4;3;\dfrac{15+15\sqrt{17}}{18};\dfrac{15-15\sqrt{17}}{18}\right\}$.

Bài toán 50. Giải phương trình $3\sqrt{2-x^2}+\sqrt{9x^2-8}+\sqrt{(2-x^2)(9x^2-8)}=5 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{8}{9}\le x^2\le 2$.

Đặt $3\sqrt{2-x^2}=a;\sqrt{9x^2-8}=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a+b+\dfrac{1}{3}ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=10 \\ ab=15-3(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+6(a+b)=40 \\ ab=15-3(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-10 \end{array}\right. \\ ab=15-3(a+b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a(4-a)=3 \end{cases} \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow a\in\{1;3\} \Leftrightarrow x^2\in\left\{1;\dfrac{17}{9}\right\} \Rightarrow x\in\left\{-1;1;-\dfrac{\sqrt{17}}{3};\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right\}$$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm, $S=\left\{-1;1;-\dfrac{\sqrt{17}}{3};\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right\}$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 47 đến 50 rõ ràng các bạn hoàn toàn có thể giải được bằng phương pháp đặt một ẩn phụ, đưa về phương trình bậc hai theo ẩn phụ mới. Phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình là một phương pháp mạnh, phổ biến, tuy nhiên đường lối ấy yêu cầu lập luận logic, khả năng liên hệ, tổng hòa kiến thức và kỹ năng giải hệ phương trình các loại. Nhân vô thập toàn, biết – hiểu – vận dụng – đánh giá kiến thức là điều hết sức thường thấy và hữu ích, nhưng cũng phải tùy theo năng lực, kinh nghiệm và gu trình bày của mình, vì vậy các bạn có thể tự lựa chọn cách giải sao cho phù hợp và tiết kiệm thời gian nhất.

Bài toán 51. Giải phương trình $2\sqrt{4-9x}+3\sqrt{4x+1}+4\sqrt{(4-9x)(4x+1)}=15 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{9}$.

Đặt $2\sqrt{4-9x} = a; 3\sqrt{4x+1} = b \ \left(a \ge 0; b \ge 0\right) \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ a+b+\frac{2}{3}ab=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ 3a+3b+2ab=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2+3(a+b)=70 \\ 3a+3b+2ab=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=7 \\ a+b=-10 \end{array}\right. \\ 3a+3b+2ab=45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7-a \\ a(7-a)=12 \end{cases} \Rightarrow a^2-7a+12=0 \Leftrightarrow a \in \{3;4\} \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{7}{36}\right\}$$

So sánh điều kiện $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{9}$ thu được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{0; \frac{7}{6}\right\}$.

Bài toán 52. Giải phương trình $5\sqrt{1-4x} + 2\sqrt{25x+4} + \sqrt{(1-4x)(25x+4)} = 11 \qquad (x \in ¡\ )$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{4}{25} \le x \le \frac{1}{4}$.

Đặt $\sqrt{1-4x} = a; \sqrt{25x+4} = b \ \left(a \ge 0; b \ge 0\right) \Rightarrow 25a^2 + 4b^2 = 41$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 25a^2+4b^2=41 \\ 5a+2b+ab=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5a+2b)^2-20ab=41 \\ ab=11-(5a+2b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5a+2b)^2-20\left[11-(5a+2b)\right]=41 \\ ab=11-(5a+2b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5a+2b)^2+20(5a+2b)-261=0 \\ ab=11-(5a+2b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5a+2b=9 \\ 5a+2b=-29 \end{array}\right. \\ ab=11-(5a+2b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+2b=9 \\ ab=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=9-5a \\ a(9-5a)=4 \end{cases} \Rightarrow 5a^2-9a+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\frac{4}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{9}{100} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến kết luận nghiệm $S = \left\{0; \frac{9}{100}\right\}$.

Bài toán 53. Giải phương trình $\sqrt{4x+5} + 4\sqrt{(1-x)(4x+5)} = 3 - 2\sqrt{1-x} \qquad (x \in ¡\ )$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{5}{4} \le x \le 1$.

Đặt $\sqrt{4x+5} = u; 2\sqrt{1-x} = v, \left(u \ge 0; v \ge 0\right) \Rightarrow u^2 + v^2 = 9$.

Phương trình đã cho trở thành $u + 2uv = 3 - v \Leftrightarrow u + v + 2uv = 3$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases} (u+v)^2-uv=9 \\ u+v+2uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-2uv)^2-uv=9 \\ u+v=3-2uv \end{cases} \Rightarrow 4u^2v^2-12uv=0 \Leftrightarrow uv(uv-3)=0.$$

- ✓ $uv = 0 \Leftrightarrow (4x+5)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}; x = 1$.
- ✓ $uv = 3 \Leftrightarrow 4(4x+5)(1-x) = 9 \Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 11 = 0 \Leftrightarrow 4(2x-1)^2 = -7$ (Vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện đi đến đáp số $x=-\dfrac{5}{4};x=1$.

Bài toán 54. Giải phương trình $\sqrt{5-4x}+2\sqrt{x+3}+4\sqrt{(5-4x)(x+3)}=13 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3\le x\le \dfrac{5}{4}$.

Đặt $\sqrt{5-4x}=a;\sqrt{x+3}=b,(a\ge 0;b\ge 0)$ ta có $a^2+4b^2=17$.

Phương trình đã cho trở thành $a+2b+4ab=13$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+4b^2=17\\ a+2b+4ab=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2b)^2+a+2b=30\\ a+2b+4ab=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+2b-5)(a+2b+6)=0\\ a+2b+4ab=13\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=5\\ ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-2b\\ (5-2b)b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-2b\\ (b-2)(2b-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow b\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{11}{4};1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x=-\dfrac{11}{4};x=1$.

Bài toán 55. Giải phương trình $\sqrt[3]{(14+x)^2}+\sqrt[3]{(14-x)^2}-\sqrt[3]{196-x^2}=7 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in \mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{14+x}=a;\sqrt[3]{14-x}=b\Rightarrow a^3+b^3=28$.

Phương trình đã cho tương đương với $a^2+b^2-ab=3$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3+b^3=28\\ a^2+b^2-ab=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(a^2+b^2-ab)=28\\ a^2+b^2-ab=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ (a+b)^2-3ab=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=4\\ ab=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=4-a\\ a(4-a)+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4-a\\ a^2-4a+3=0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\{1;3\}\Rightarrow x\in\{-13;13\}$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{-13;13\}$.

Bài toán 56. Giải phương trình $\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(11-3x)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(3x-11)}=3 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=a;\sqrt[3]{11-3x}=b\Rightarrow a^3+b^3=9$. Phương trình đã cho trở thành $a^2+b^2-ab=3$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2-ab=3\\ a^3+b^3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-ab=3\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(3-a)^2-a(3-a)=3\\ b=3-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-3a+2=0\\ b=3-a\end{cases}\Rightarrow a\in\{1;2\}\Rightarrow x\in\left\{1;\frac{10}{3}\right\}$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{10}{3}\right\}$.

Bài toán 57. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}+3\sqrt[3]{1-x^2}=5 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{1-x} = a; \sqrt[3]{1+x} = b$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 2 \\ a + b + 3ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2 \\ a + b = 5 - 3ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-3ab)^3 - 3ab(5-3ab) = 2 \\ a + b = 5 - 3ab \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $3ab = 3\sqrt[3]{1-x^2} = t \Rightarrow t \le 3$ thì

$$(*) \Leftrightarrow (5-t)^3 - t(5-t) = 2 \Leftrightarrow t^3 - 16t^2 + 80t - 123 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 - 13t + 41) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{13+\sqrt{5}}{2} > 3 \\ t = \dfrac{13-\sqrt{5}}{2} > 3 \end{array}\right.$$

Với $t = 3 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{1-x^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 58. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{4-3x} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(4-3x)(3x-2)}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ne \dfrac{4}{3}; x \ne \dfrac{2}{3}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-2} = a; \sqrt[3]{4-3x} = b$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 2 \\ a + b = \dfrac{2}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2 \\ ab(a+b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 = 8 \\ ab(a+b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ a(2-a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 59. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x+6)(x-1)} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x+6} = a; \sqrt[3]{x-1} = b \Rightarrow a^3 - b^3 = 7$. Phương trình đã cho trở thành $ab = \dfrac{2}{a-b}$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ ab = \dfrac{2}{a-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^3 + 3ab(a-b) = 7 \\ ab(a-b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)3 = 1 \\ ab(a-b) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b(b+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow b \in \{-2; 1\} \Rightarrow x \in \{-7; 2\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -7; x = 2$.

Bài toán 60. Giải phương trình $3\sqrt[3]{x+7} - 2\sqrt[3]{x} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{x^2 + 7x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 7x \ne 0$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7}=a;\sqrt[3]{x}=b\Rightarrow a^3-b^3=7$. Phương trình đã cho trở thành $3a-2b=\dfrac{8}{ab}$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3-b^3=7\\3a-2b=\dfrac{8}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-b^3=7\\ab\left(3a-2b\right)=8\end{cases}\Rightarrow 8\left(a^3-b^3\right)=7ab\left(3a-2b\right)=0\Leftrightarrow 8a^3-21a^2b+14ab^2-8b^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-2b\right)\left(8a^2-5ab+4b^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\8a^2-5ab+4b^2=0\end{array}\right.$$

- $a=2b\Leftrightarrow x+7=8x\Leftrightarrow x=1$.
- $8a^2-5ab+4b^2=0\Leftrightarrow 8\left(a-\dfrac{5}{16}b\right)^2+\dfrac{103}{32}b^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a-\dfrac{5}{16}b=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\x=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 61. Giải phương trình $2\sqrt[3]{\left(2x-1\right)^2\left(6x-5\right)}=1+\sqrt[3]{\left(2x-1\right)\left(6x-5\right)^2}\qquad\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in ¡$.

Đặt $\sqrt[3]{2x-1}=a;\sqrt[3]{6x-5}=b\Rightarrow 3a^3-b^3=2$. Phương trình đã cho trở thành $2a^2b=1+ab^2$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3a^3-b^3=2\\2a^2b-ab^2=1\end{cases}\Rightarrow 3a^3-b^3=2\left(2a^2b-ab^2\right)\Leftrightarrow 3a^3-4a^2b+2ab^2-b^3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(3a^2-ab+b^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b^2-ab+3b^2=0\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow 2x-1=6x-5\Leftrightarrow x=1$.
- $b^2-ab+3b^2=0\Leftrightarrow\left(b-\dfrac{1}{2}a\right)^2+\dfrac{11}{4}a^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}b-\dfrac{1}{2}a=0\\a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1\\6x=5\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

- *Xuyên suốt các bài toán từ 44 đến 61, lời giải đều sử dụng hai ẩn phụ, hệ quả tất yếu đưa về một hệ phương trình hoặc đối xứng hoặc hệ đồng bậc (đẳng cấp). Để có được sự liên hệ chặt chẽ và hợp lý nhất giữa các ẩn phụ, trong nhiều trường hợp cần nhân thêm hệ số.*
- *Trong các bài toán đưa về hệ, các bạn chú ý đặt điều kiện xác định và sử dụng các hằng đẳng thức sau để thuận tiện cho việc tính toán*

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)^3+3ab\left(a-b\right)$$

- *Một số bài toán hệ phương trình thu được đã mất tính đối xứng, thay thế vào đó là hệ phương trình đồng bậc đã biết cách giải. Lưu ý trong quá trình giải, sau khi tìm được tỷ lệ giữa a và b các bạn có thể tính ngay được nghiệm của phương trình ban đầu và thử lại (không nhất thiết tìm cụ thể tất cả các giá trị a và b).*

Bài toán 62. Giải phương trình $x\sqrt[3]{9-x^3}\left(x+\sqrt[3]{9-x^3}\right)=6\qquad\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{9-x^3}=y\Rightarrow x^3+y^3=9$. Phương trình đã cho trở thành $xy(x+y)=6$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+y^3=9\\xy(x+y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3-3xy(x+y)=9\\xy(x+y)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)3=27\\xy(x+y)=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\x(3-x)=2\end{cases}\Rightarrow(x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x\in\{1;2\}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1;x=2$.

Bài toán 63. Giải phương trình $x\sqrt[3]{5+3x^3}\left(x+\sqrt[3]{5+3x^3}\right)=6 \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{5+3x^3}=y\Rightarrow y^3-3x^3=5$. Phương trình đã cho trở thành $xy(x+y)=6$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}y^3-3x^3=5\\xy(x+y)=6\end{cases}\Rightarrow 6\left(y^3-3x^3\right)=5xy(x+y)\Leftrightarrow 18x^3+5x^2y+5xy^2-6y^3=0$$

$$\Leftrightarrow(2x-y)\left(9x^2+14xy+6y^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x\\9x^2+14xy+6y^2=0\end{array}\right.$$

- $9x^2+14xy+6y^2=0\Leftrightarrow 9\left(x+\dfrac{7}{9}y\right)^2+\dfrac{5}{9}y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ (Loại).
- $y=2x\Rightarrow\begin{cases}y=2x\\2x^2.3x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x\\x^3=1\end{cases}\Rightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 64. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24 \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $-12\le x\le 4$.

Đặt $x+3=a;\sqrt{-x^2-8x+48}=b\ (b\ge 0)\Rightarrow a^2+b^2=x^2+6x+9-x^2-8x+48=57-2x$.

Phương trình đã cho trở thành $ab=x-24\Leftrightarrow 2ab=2x-48$.

Kết hợp lại ta có $(a+b)^2=9\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=3\\a+b=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{-x^2-8x+48}=-x\\\sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6\end{array}\right.$

- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\x^2+4x-24=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-2$.
- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -6\\x^2+10x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31}$.

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-2\sqrt{7}-2;-5-\sqrt{31}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-12\le x\le 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2x-48 \Leftrightarrow 48-2x+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2-8x+48+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+x^2+6x=0 \qquad (1)$$

Đặt $\sqrt{-x^2-8x+48}=t\ (t\ge 0)$ thì $(1)\Leftrightarrow t^2+2(x+3)t+x^2+6x=0 \Leftrightarrow (t+x)^2+6xt+6x=0$

$$\Leftrightarrow (t+x)(t+x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-x \\ t=-x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-8x+48}=-x \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+4x-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-2$.
- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6 \\ x^2+10x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31}$.

Phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=-2\sqrt{7}-2; x=-5-\sqrt{31}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $-12\le x\le 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=2x-48 \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+48-2x=0$$

$$-x^2-8x+48+2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+x^2+6x+9=9$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2-8x+48}+x+3\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-8x+48}=-x \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+4x-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2\sqrt{7}-2$
- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6 \\ x^2+10x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31}$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=-2\sqrt{7}-2; x=-5-\sqrt{31}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $-12\le x\le 4$.

Xét trường hợp $\sqrt{-x^2-8x+48}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+4x-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2\sqrt{7}-2$ (Không thỏa mãn phương trình đã cho)

Xét trường hợp $x\ne 2\sqrt{7}-2$, phương trình đã cho tương đương với

$$(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}+x(x+3)=x^2+4x-24$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{-x^2-8x+48}+x\right)=x^2+4x-24 \Leftrightarrow -2(x+3).\frac{x^2+4x-24}{\sqrt{-x^2-8x+48}-x}=x^2+4x-24$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x-24\right)\left(\frac{2x+6}{\sqrt{-x^2-8x+48}-x}+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-24=0 \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \end{array}\right.$$

- $\sqrt{-x^2-8x+48}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6 \\ x^2+10x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5-\sqrt{31}$.

- $x^2+4x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{7}-2 \\ x=-2\sqrt{7}-2 \end{array}\right.$

Đối chiếu trường hợp, kết luận tập hợp nghiệm $S=\left\{-2\sqrt{7}-2;-5-\sqrt{31}\right\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 4 bài toán 64 sử dụng đẳng thức liên hợp sau khi xét trường hợp mẫu thức bằng 0 (lưu ý điều này cũng thường xảy ra với một số bài toán), lời giải 3 sử dụng biến đổi tương đương thông thường, thêm bớt tạo hằng đẳng thức, lời giải 2 sử dụng phép đặt ẩn phụ không hoàn toàn, những kỹ thuật này có lẽ đã quen thuộc với nhiều bạn học sinh sau khi đọc tuần tự tài liệu đặt ẩn phụ các phần trước. Ngoài ra còn phương án bình phương trực tiếp (có kéo theo điều kiện) cũng cho kết quả tương tự.*
- *Trọng tâm tài liệu là lời giải 1, đây là một bài toán đặc thù của phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn, nhưng với cách nhìn khác bằng cách đặt ẩn phụ thuần túy đưa về hệ phương trình đối xứng loại 1, mặc dù chỉ là hệ tạm thời với hai phương trình ba ẩn a,b,x, tuy nhiên với một chút may mắn về hình thức, chúng ta đã có một lời giải linh hoạt và mang tính bất ngờ. Điểm nhấn chủ đạo là thu được hằng đẳng thức $(a+b)^2=9$, nếu không xuất hiện điều này thì phương án này gần như thất bại. Trong những trường hợp đặc biệt như thế này, nếu bài toán chuyển thành giải bất phương trình thì phương án trên vẫn còn khả thi.*

Bài toán 65. Giải phương trình $\sqrt{-x^2-8x+48}=\dfrac{28-x}{3+x} \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} -12\le x\le 4 \\ x\ne -3 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=28-x \qquad [1]$

Đặt $(x+3)-\sqrt{-x^2-8x+48}=t \Rightarrow t^2=x^2+6x+9-x^2-8x+48-2(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}$

$\Rightarrow (x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=\dfrac{57-2x-t^2}{2}$

Khi đó $[1] \Leftrightarrow \dfrac{57-2x-t^2}{2}=28-x \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left|(x+3)-\sqrt{-x^2-8x+48}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{-x^2-8x+48}=x+2 & [2] \\ \sqrt{-x^2-8x+48}=x+4 & [3] \end{array}\right.$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $[2] \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{31}-3$.
- $[3] \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4\sqrt{2}-4$.

Đối chiếu điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{\sqrt{31}-3;4\sqrt{2}-4\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} -12\le x\le 4 \\ x\ne -3 \end{cases}$

Đặt $x+3=u;\sqrt{-x^2-8x+48}=v\ (v\ge 0) \Rightarrow u^2+v^2=57-2x$.

Phương trình đã cho trở thành $uv=28-x \Leftrightarrow 2uv=56-2x$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2+v^2=57-2x \\ 2uv=56-2x \end{cases} \Rightarrow u^2+v^2-2uv=1 \Leftrightarrow (u-v)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=1 \\ u-v=-1 \end{array}\right.$

- $u-v=1 \Leftrightarrow x+2=\sqrt{-x^2-8x+48} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2+6x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{31}-3$.
- $u-v=-1 \Leftrightarrow x+4=\sqrt{-x^2-8x+48} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x^2+8x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4\sqrt{2}-4$.

So sánh điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\left\{\sqrt{31}-3;4\sqrt{2}-4\right\}$.

Nhận xét.

- *Hai lời giải trên có thể nói là cùng bản chất, nhưng khác nhau cách trình bày. Bản chất đề bài xuất phát từ đẳng thức $(a+b)^2=k\ (k\geq 0)$, thay thế a và b bởi các đa thức hoặc căn thức phức tạp. Những lời giải dạng như thế này được xây dựng từ những yếu tố "may mắn" dự định trước bởi tác giả bài toán !*
- *Ngoài hai lời giải trên đây, bài toán còn có 4 lời giải khác bằng bình phương trực tiếp (kéo theo điều kiện), đặt ẩn phụ không hoàn toàn, biến đổi tương đương phân tích bình phương và sử dụng đẳng thức liên hợp như bài toán 64. Tác giả xin được không trình bày. Mời quý bạn quan sát các ví dụ tiếp theo.*

Bài toán 66. Giải phương trình $3x^2+2(x-1)\sqrt{(x-1)(2x-1)}=5x+2 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 1 \vee x\leq \frac{1}{2}$.

Đặt $x-1=a;\sqrt{2x^2-3x+1}=b\ (b\geq 0) \Rightarrow a^2+b^2=3x^2-5x+2$. Phương trình đã cho trở thành

$$a^2+b^2-2+2ab=2 \Leftrightarrow (a+b)^2=4 \Leftrightarrow |a+b|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=2 \\ a+b=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x^2-3x+1}=3-x & [2] \\ \sqrt{2x^2-3x+1}=-x-1 & [3] \end{array}\right.$$

- $[2] \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ 2x^2-3x+1=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ x^2+3x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\sqrt{41}-3}{2};-\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right\}$.
- $[3] \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ 2x^2-3x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ x^2-x=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{\frac{\sqrt{41}-3}{2};-\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right\}$.

Bài toán 67. Giải phương trình $5x^2+4(x-2)\sqrt{1+x+x^2}=1 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in \mathbb{R}$.

Đặt $x-2=u;\sqrt{1+x+x^2}=v\ (v>0) \Rightarrow u^2+4v^2=x^2-4x+4+4(1+x+x^2)=5x^2+8$.

Phương trình đã cho trở thành

$$u^2+4v^2-8+4uv=1 \Leftrightarrow (u+2v)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+2v=3 \\ u+2v=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{1+x+x^2}=5-x & (1) \\ 2\sqrt{1+x+x^2}=-x-1 & (2) \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ 4(1+x+x^2) = x^2 - 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ 3x^2 + 14x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{4\sqrt{7}-7}{3}; -\frac{4\sqrt{7}+7}{3} \right\}$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 4(1+x+x^2) = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \\ 3x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ \frac{4\sqrt{7}-7}{3}; -\frac{4\sqrt{7}+7}{3} \right\}$.

Bài toán 68. Giải phương trình $2x^2 = 2(1-x)\sqrt{x^2-2x+3} + 4x + 21 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x^2 - 4x + 4 - 2(1-x)\sqrt{x^2-2x+3} = 25$.

Đặt $1 - x = u; \sqrt{x^2-2x+3} = v \ (v > 0) \Rightarrow u^2 + v^2 = 2x^2 - 4x + 4$. Ta thu được

$$u^2 + v^2 - 2uv = 25 \Leftrightarrow (u-v)^2 = 25 \Leftrightarrow (u-v-5)(u-v+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x-4-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\left(6-x-\sqrt{x^2-2x+3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -4 \\ x^2+8x+16 = x^2-2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 6 \\ x^2-12x+36 = x^2-2x+3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -4 \\ 10x = -13 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 6 \\ 10x = 33 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{13}{10} \\ x = \frac{33}{10} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ -\frac{13}{10}; \frac{33}{10} \right\}$.

Bài toán 69. Giải phương trình $2x^2 - 6x + 3 + 2(x-2)\sqrt{x(x-2)} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 0 \end{array}\right.$

Đặt $x - 2 = a; \sqrt{x(x-2)} = b \Rightarrow a^2 + b^2 = 2x^2 - 6x + 4$.

Phương trình đã cho trở thành $a^2 + b^2 - 1 + 2ab = 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 1 \Leftrightarrow |a+b| = 1$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a + b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x-2)} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 - 2x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$.
- $a + b = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x-2)} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = \frac{9}{4}$.

Bài toán 70. Giải phương trình $13x^2 - 8x + 12 = 12(x-1)\sqrt{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x - 1 = u; \sqrt{x^2+1} = v \ (v > 0) \Rightarrow 4u^2 + 9v^2 = 13x^2 - 8x + 13$.

Phương trình khi đó trở thành $4u^2+9v^2-1=12uv \Leftrightarrow (2u-3v)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2u-3v=1\\2u-3v=-1\end{array}\right.$

➢ $2u-3v=1 \Leftrightarrow 2x-3=3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\4x^2-12x+9=9x^2+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\5x^2+12x=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

➢ $2u-3v=-1 \Leftrightarrow 2x-1=3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\4x^2-4x+1=9x^2+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\5x^2+4x+8=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 71. Giải phương trình $\sqrt{(1-x)(3+x)}=\dfrac{1}{2+x}+1 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-3\le x\le 1\\x\ne -2\end{cases}$

Phương trình đã cho biến đổi về $(2+x)\sqrt{(1-x)(3+x)}=x+3 \quad [1]$

Đặt $2+x=u;\sqrt{(1-x)(3+x)}=v\ (u\ne 0;v\ge 0)\Rightarrow u^2+v^2=2x+7$

[1] trở thành $uv=\dfrac{u^2+v^2-7}{2}+3 \Leftrightarrow (u-v)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u-v=1\\u-v=-1\end{array}\right.$

- $u-v=1 \Leftrightarrow 1+x=\sqrt{-x^2-2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\x^2+2x+1=-x^2-2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\x^2+2x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$.
- $u-v=-1 \Leftrightarrow 3+x=\sqrt{-x^2-2x+3} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\x^2+6x+9=-x^2-2x+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\x^2+4x+3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

So sánh với điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S=\left\{\sqrt{2}-1;-1\right\}$.

Bài toán 72. Giải phương trình $5x+(2x+1)\sqrt{2(3x-2x^2-1)}=1 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$.

Đặt $2x+1=a;\sqrt{2(3x-2x^2-1)}=b \Rightarrow a^2+b^2=10x-1$.

Phương trình đã cho tương đương với $5x+ab=1 \Leftrightarrow 2ab=2-10x$. Suy ra $(a+b)^2=1 \Leftrightarrow |a+b|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=1\\a+b=-1\end{array}\right.$

❖ $a+b=1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-4x^2-2}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\4x^2=6x-4x^2-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\4x^2-3x+1=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

❖ $a+b=-1 \Leftrightarrow \sqrt{6x-4x^2-2}=-2-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\4x^2+8x+4=6x-4x^2-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\8x^2+2x+6=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 73. Giải phương trình $4(x-2)\sqrt{x^2-4x+5}+5x^2+12=20x \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x-2=u;\sqrt{x^2-4x+5}=v\ \left(v>0\right)$ ta được $4u^2+v^2=x^2-4x+5+4\left(x^2-4x+4\right)=5x^2-20x+21$.

Phương trình đã cho tương đương với $4u^2+v^2-21+4uv+12=0 \Leftrightarrow \left(2u+v\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2u+v=3\\2u+v=-3\end{array}\right.$

Xét hai trường hợp

- $2u+v=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=7-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{7}{4}\\ x^2-4x+5=4x^2-28x+49\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $2u+v=-3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{1}{2}\\ x^2-4x+5=4x^2-4x+1\end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

Bài toán 74. Giải phương trình $\dfrac{6x^2-5x+2}{1-2x}=2\sqrt{2x^2-x+2}\qquad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne \dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2-5x+2=2\left(1-2x\right)\sqrt{2x^2-x+2}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+2\left(2x-1\right)\sqrt{2x^2-x+2}+2x^2-x+2=1$$
$$\Leftrightarrow \left(2x-1+\sqrt{2x^2-x+2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \left|2x-1+\sqrt{2x^2-x+2}\right|=1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1+\sqrt{2x^2-x+2}=1\\2x-1+\sqrt{2x^2-x+2}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{2x^2-x+2}=1-x & \left(1\right)\\ \sqrt{2x^2-x+2}=-x & \left(2\right)\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $\left(1\right)\Leftrightarrow \begin{cases}1-x\ge 0\\2x^2-x+2=x^2-2x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\x^2+x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in \varnothing$.
- $\left(2\right)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\2x^2-x+2=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\x^2-x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in \varnothing$.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+6}+8\sqrt{\left(3-x\right)\left(x+6\right)}=3$.
2. $\sqrt{3-2x}+\sqrt{2x+7}+11\sqrt{\left(3-2x\right)\left(2x+7\right)}=37$.
3. $3x+\sqrt{4-9x^2}+6x\sqrt{4-9x^2}=2$.

4. $(5x+1)\sqrt{25-x^2}=67-x$.
5. $\sqrt{1-x^2}+x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)=1$.
6. $5\sqrt{1-x}+\sqrt{25x-24}+7\sqrt{(1-x)(25x-1)}=1$.
7. $\sqrt[3]{(4-x)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(4-x)(x-2)}=3$.
8. $\sqrt[3]{(5-x)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}+3\sqrt[3]{(5-x)(x-3)}=5$.
9. $\dfrac{\sqrt[3]{(7-x)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}}{\sqrt[3]{(7-x)(x-5)}+1}=1$.
10. $\sqrt[3]{2x-1}+2\sqrt[3]{2x+1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-4x^2}}$.
11. $3\sqrt[3]{3x-2}-2\sqrt[3]{4x-3}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-2)(4x-3)}}$.
12. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x-x^2}=1$.
13. $\sqrt[3]{x(9-x)}=\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{9-x}}$.
14. $2\sqrt{-x^2-3x+4}=\dfrac{5}{x+2}+1$.
15. $(x-1)\sqrt{(1-x)(x+5)}=3x+\dfrac{3}{2}$.
16. $2\sqrt{(1-x)(x-4)}=\dfrac{5x+4}{x-5}$.
17. $2\sqrt{(x+2)(x+3)}=\dfrac{2-2x^2-7x}{x+1}$.
18. $\dfrac{x^2-2x-4}{x-1}=\sqrt{x(x-2)}$.
19. $4x^2-5x+2(2-x)\sqrt{5-x}=3$.
20. $2x\sqrt{x^2+3x+2}+x(2x+3)=7$.
21. $4\sqrt{x^2-2x}=\dfrac{5x^2-26x+11}{3-x}$.
22. $9x^2-58x+54+6(x+2)\sqrt{x^2-4x}=0$.
23. $4\sqrt{x^2-2}=\dfrac{4x^2+2x+7}{1-x}$.

Bài toán 75. Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{3}{2}\quad (x\in ¡)$.

Lời giải.
Điều kiện $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5};x\neq 0$.
Đặt $\sqrt{5-x^2}=y\ (y>0)\Rightarrow x^2+y^2=5$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\\ x^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=3xy\\ (x+y)^2-2xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=3xy\\ (x+y)^2-\frac{4}{3}(x+y)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=3xy\\ \left[\begin{array}{l}x+y=3\\ x+y=-\frac{5}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\vee\begin{cases}x+y=-\frac{5}{3}\\ xy=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

- $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3-x\\ x(3-x)=2\end{cases}\Rightarrow x\in\{1;2\}$.
- $\begin{cases}x+y=-\frac{5}{3}\\ xy=-\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\left(x+\frac{5}{3}\right)\\ x\left(x+\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow 6x^2+10x-15=0\Rightarrow x\in\left\{\frac{-5+\sqrt{115}}{6};\frac{-5-\sqrt{115}}{6}\right\}$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $S=\left\{1;2;\frac{-5+\sqrt{115}}{6}\right\}$.

Bài toán 76. Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}|x|\le\sqrt{2}\\ x\ne 0\end{cases}$

Đặt $\sqrt{2-x^2}=y,y>0\Rightarrow x^2+y^2=2$. Phương trình đã cho tương đương $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\Leftrightarrow x+y=2xy$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x+y=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=2\\ x+y=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2y^2-2xy=2\\ x+y=2xy\end{cases}\Rightarrow(xy-1)(xy+2)=0.$$

❖ $xy=1\Leftrightarrow x\sqrt{2-x^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^4-2x^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

❖ $xy=-2\Leftrightarrow x\sqrt{2-x^2}=-2\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\ x^4+2x^2-2=0\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Kết luận phương trình có hai nghiệm $x=1;x=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 77. Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{2-x^3}}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0;x\ne\sqrt[3]{2}$.

Đặt $\sqrt[3]{2-x^3}=y\ (y\ne 0)\Rightarrow x^3+y^3=2$. Phương trình đã có trở thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\\ x^3+y^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ (x+y)^3-3xy(x+y)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ 4x^3y^3-3x^2y^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ (xy-1)(4x^2y^2+xy+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2xy\\ \left[\begin{array}{l}xy=1\\ 4x^2y^2+xy+1=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x+y=2xy\\ 4x^2y^2+xy+1=0\end{cases}$$

- $\begin{cases}x+y=2xy\\ 4x^2y^2+xy+1=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $\begin{cases}x+y=2xy\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x(2-x)=1\end{cases}\Rightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện $x\neq 0;x\neq\sqrt[3]{2}$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 78. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $-1<x<1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2\sqrt{1-x^2}$.

Đặt $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=t\ \left(\sqrt{2}\le t\le 2\right)\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2}$. Ta thu được

$$t=t^2-2\Leftrightarrow(t+1)(t-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=2\end{array}\right.\Rightarrow t=2\Rightarrow t^2=4\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x=0\ (\text{Thỏa mãn} -1<x<1).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-1<x<1$.

Đặt $\sqrt{1-x}=a;\sqrt{1+x}=b\ (a>0;b>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a+b-2ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-(a+b)=2\\ a+b=2ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+b=-1\\ a+b=2\end{array}\right.\\ a+b=2ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ ab=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow x=0.$$

So sánh với điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 79. Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x^4}}=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-\sqrt[4]{2}<x<-\sqrt[4]{2}\\ x\neq 0\end{cases}$

Đặt $\sqrt[4]{2-x^4}=y\ (y>0)\Rightarrow x^4+y^4=2$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}x^4+y^4=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+y^4=2\\ x+y=2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2\\ x^2+y^2=4x^2y^2-2xy\end{cases}$$

Đặt $xy = t \Rightarrow \left(4t^2 - 2t\right)^2 - 2t^2 = 2 \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)\left(8t^2 - 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 \\ 8t^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2\sqrt{2 - x^4} = 1 \\ 8x^2\sqrt{2 - x^4} = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4\left(2 - x^4\right) = 1 \\ 64x^4\left(2 - x^4\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 = 1 \\ x^4 = \dfrac{8 \pm 3\sqrt{7}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left\{-1; 1; \sqrt[4]{\dfrac{8 - 3\sqrt{7}}{8}}; \sqrt[4]{\dfrac{8 + 3\sqrt{7}}{8}}; -\sqrt[4]{\dfrac{8 - 3\sqrt{7}}{8}}; -\sqrt[4]{\dfrac{8 + 3\sqrt{7}}{8}}\right\}.$

Thử lại ta chọn các nghiệm $S = \left\{-1; 1; \sqrt[4]{\dfrac{8 - 3\sqrt{7}}{8}}; \sqrt[4]{\dfrac{8 + 3\sqrt{7}}{8}}\right\}$.

Nhận xét.

- *Các bài toán từ 75 đến 79 được giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 1. Ngoài ra các bạn có thể lựa chọn phương pháp đặt một ẩn phụ và đưa về phương trình bậc hai (lời giải 1 bài toán 78). Lưu ý đặt điều kiện cho ẩn phụ mới và thử lại nghiệm.*
- *Trong quá trình giải hệ đối xứng, ưu tiên sử dụng các hằng đẳng thức và biểu thức đối xứng giữa các biến phụ để đạt hiệu quả nhanh nhất, tiết kiệm thời gian đồng hành giảm thiểu sai lầm trong tính toán. Sau khi đã tích lũy được kinh nghiệm giải phương trình, các bạn có thể nhìn bài toán theo nhiều hướng khác nhau, và có giải pháp hợp lý, phương pháp đưa về hệ phương trình đôi khi không còn tối ưu nữa.*

Bài toán 80. Giải phương trình $\dfrac{5 + x}{\sqrt{5 - 2x}} + \dfrac{5 - x}{\sqrt{5 + 2x}} = 8 \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{5}{2}$.

Đặt $\sqrt{5 - 2x} = a; \sqrt{5 + 2x} = b \quad \left(a > 0; b > 0\right) \Rightarrow 2x = 5 - a^2 = b^2 - 5$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ \dfrac{10 + 5 - a^2}{a} + \dfrac{10 - \left(b^2 - 5\right)}{b} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a + b\right)^2 - 2ab = 10 \\ \dfrac{15\left(a + b\right)}{ab} = a + b + 16 \end{cases} \Rightarrow 15\left(a + b\right) = \left(a + b + 16\right).\dfrac{\left(a + b\right)^2 - 10}{2}$$

Đặt $a + b = t\left(t > 0\right) \Rightarrow 30t = \left(t + 16\right)\left(t^2 - 10\right) \Leftrightarrow t^3 + 16t^2 - 40t - 160 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 2\right)\left(t^2 + 20t + 40\right) = 0 \Rightarrow t = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{5 - 2x} + \sqrt{5 + 2x} = 4 \Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{25 - 4x^2} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{25 - 4x^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; 2\right\}$

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình đã cho. Kết luận nghiệm $S = \left\{-2; 2\right\}$.

Bài toán 81. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{10 - x}} - \dfrac{1}{\sqrt{10 + x}} = \dfrac{3}{2x} \quad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-10 < x < 10; x \neq 0$.

Đặt $\sqrt{10 - x} = a$; $\sqrt{10 + x} = b$ $\left(a > 0; b > 0\right)$ thu được $a^2 + b^2 = 20$. Hơn nữa $x = 10 - a^2 = b^2 - 10$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{10 - a^2}{a} - \dfrac{b^2 - 10}{b} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{10}{a} + \dfrac{10}{b} = \dfrac{3}{2} + a + b \Leftrightarrow 20\left(a + b\right) = \left[2\left(a + b\right) + 3\right]ab$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 20\left(a + b\right) = \left[2\left(a + b\right) + 3\right]ab \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\left(a + b\right) = \left[2\left(a + b\right) + 3\right]ab \\ \left(a + b\right)^2 = 2ab + 20 \end{cases} \Rightarrow 40\left(a + b\right) = \left[2\left(a + b\right) + 3\right]\left[\left(a + b\right)^2 - 20\right]$$

Đặt $a + b = t$ $\left(t > 0\right)$ thu được $2t^3 + 3t^2 - 80t - 60 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 6\right)\left(2t^2 + 15t + 10\right) = 0 \Rightarrow t = 6$ (Do $t > 0$).

$$t=6\Leftrightarrow \sqrt{10-x}+\sqrt{10+x}=6\Leftrightarrow 20+2\sqrt{100-x^2}=36\Leftrightarrow \sqrt{100-x^2}=8\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x\in\left\{-6;6\right\}.$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-6;6\right\}$.

Bài toán 82. Giải phương trình $\dfrac{1+x}{\sqrt{17-4x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{17+4x}}=\dfrac{4}{5}\qquad \left(x\in \text{¡}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{17}{4}<x<\dfrac{17}{4}$.

Đặt $\sqrt{17-4x}=u;\sqrt{17+4x}=v,\left(u>0;v>0\right)\Rightarrow u^2+v^2=34$ và $4x=17-u^2=v^2-17$.

Phương trình ban đầu trở thành

$$\frac{1+\dfrac{17-u^2}{4}}{u}+\frac{1-\dfrac{v^2-17}{4}}{v}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow \frac{21-u^2}{u}+\frac{21-v^2}{v}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow \frac{21}{u}+\frac{21}{v}=u+v+\frac{16}{5}$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases}\dfrac{21}{u}+\dfrac{21}{v}=u+v+\dfrac{16}{5}\\ u^2+v^2=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{21\left(u+v\right)}{uv}=u+v+\dfrac{16}{5}\\ \left(u+v\right)^2-2uv=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{42\left(u+v\right)}{2uv}=u+v+\dfrac{16}{5}\\ 2uv=\left(u+v\right)^2-34\end{cases}$$

Đặt $u+v=t,t>0$ ta thu được

$$42t.5=\left(5t+16\right)\left(t^2-34\right)\Leftrightarrow 5t^3+16t^2-380t-544=0\Leftrightarrow\left(t-8\right)\left(5t^2+56t+68\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=8\\ 5t^2+56t+68=0\end{array}\right.\Rightarrow t=8\Rightarrow uv=15\Leftrightarrow\sqrt{\left(17-4x\right)\left(17+4x\right)}=15$$

$$\Leftrightarrow 17^2-16x^2=152\Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow x=-1;x=1$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1;x=1$.

Bài toán 83. Giải phương trình $\dfrac{2+x}{\sqrt{20-x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{20+x}}=\dfrac{20}{3}\qquad\left(x\in \text{¡}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $-20<x<20$.

Đặt $\sqrt{20-x}=u;\sqrt{20+x}=v,\left(u>0,v>0\right)\Rightarrow x=20-u^2=v^2-20$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2+20-u^2}{u}+\frac{2-\left(v^2-20\right)}{v}=\frac{20}{3}\Leftrightarrow\frac{22}{u}+\frac{22}{v}=u+v+\frac{20}{3}.$$

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases}u^2+v^2=40\\ \dfrac{22}{u}+\dfrac{22}{v}=u+v+\dfrac{20}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u+v\right)^2-2uv=40\\ \dfrac{22\left(u+v\right)}{uv}=u+v+\dfrac{20}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2uv=\left(u+v\right)^2-40\\ \dfrac{44\left(u+v\right)}{2uv}=u+v+\dfrac{20}{3}\end{cases}$

Đặt $u+v=t,t>0$ thì

$$3.44t=(3t+20)(t^2-40)\Leftrightarrow 3t^3+20t^2-252t-800=0$$

$$\Leftrightarrow (t-8)(3t^2+44t+100)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=8 \\ 3t^2+44t+100=0 \end{array}\right. \Rightarrow t=8\Rightarrow uv=12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(20-x)(20+x)}=12\Leftrightarrow 400-x^2=144\Leftrightarrow x^2=256\Leftrightarrow x=-16;x=16$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=-16;x=16$.

Bài toán 84. Giải phương trình $\dfrac{2+3x}{\sqrt{13-6x}}+\dfrac{2-3x}{\sqrt{13+6x}}=\dfrac{36}{5}\qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\dfrac{13}{6}<x<\dfrac{13}{6}$.

Đặt $\sqrt{13-6x}=a;\sqrt{13+6x}=b,(a>0,b>0)\Rightarrow 6x=13-a^2=b^2-13$. Phương trình ban đầu trở thành

$$\frac{2+\dfrac{13-a^2}{2}}{a}+\frac{2-\dfrac{b^2-13}{2}}{b}=\frac{36}{5}\Leftrightarrow \frac{17-a^2}{2a}+\frac{17-b^2}{2b}=\frac{36}{5}\Leftrightarrow \frac{17(a+b)}{2ab}=\frac{a+b}{2}+\frac{36}{5}.$$

Ta thu được hệ $\begin{cases} \dfrac{17(a+b)}{2ab}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{36}{5} \\ a^2+b^2=26 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{17(a+b)}{2ab}=\dfrac{5a+5b+72}{10} \\ 2ab=(a+b)^2-26 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 170(a+b)=2ab(5a+5b+72) \\ 2ab=(a+b)^2-26 \end{cases}$

Đặt $a+b=t,t>0$ thu được

$$170t=(t^2-26)(5t+72)\Leftrightarrow 5t^3+72t^2-300t-1872=0\Leftrightarrow (t-6)(5t^2+102t+312)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ 5t^2+102t+312=0 \end{array}\right. \Rightarrow t=6\Rightarrow ab=5\Leftrightarrow \sqrt{132-36x^2}=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2;x=2$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=-2;x=2$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 80 đến 84 tuy hình thức đối xứng nghịch đối với hai biểu thức chứa căn nhưng hoàn toàn có thể đặt ẩn phụ đưa về giải hệ phương trình đối xứng loại 1. Các bạn lưu ý khi thay thế các ẩn phụ cần giảm thiểu sự phức tạp của biểu thức chứa ẩn, quy về các biểu thức chứa duy nhất một biến để thao tác trở nên dễ dàng. Để tạo lập những bài toán như thế này cũng rất đơn giản, với dạng tổng quát $\dfrac{m+nx}{\sqrt{p-qx}}+\dfrac{m-nx}{\sqrt{p+qx}}=r$.

Để phương trình có nghiệm nguyên hoặc hữu tỷ rõ ràng $p-qx;p+qx$ *phải chính phương, chúng ta chỉ cần chọn p là trung bình cộng hai số chính phương, vì* $\begin{cases} p-qx=s^2 \\ p+qx=t^2 \end{cases}\Rightarrow 2p=s^2+t^2\Leftrightarrow p=\dfrac{s^2+t^2}{2}$.

Chọn nghiệm x và kết hợp với các hằng số m,n,p,q *ta thu được r. Sau đây là một số bài toán mở rộng hơn*

Bài toán 85. Giải phương trình $\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{\sqrt{13-(2+x)^2}}=\dfrac{5}{6}\qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x+2|<\sqrt{13}$. Đặt $2+x=y$ thì phương trình ban đầu trở thành $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\sqrt{13-y^2}}=\dfrac{5}{6}$.

Đặt $\sqrt{13-y^2}=z,z>0\Rightarrow y^2+z^2=13$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}y^2+z^2=13\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+z)^2-2yz=13\\ 6(y+z)=5yz\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{25}{36}y^2z^2-2yz-13=0\\ 6(y+z)=5yz\end{cases}\Rightarrow yz=6;yz=-\dfrac{78}{25}.$$

Xét hai trường hợp

- $yz=6\Leftrightarrow y\sqrt{13-y^2}=6\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\ y^4-13y^2+36=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\ y^2=4;y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow y\in\{3;4\}\Rightarrow x\in\{1;2\}$.
- $yz=-\dfrac{78}{25}\Leftrightarrow y\sqrt{13-y^2}=-\dfrac{78}{25}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{13}<y<0\\ y^4-13y^2+\dfrac{6084}{625}=0\end{cases}\Rightarrow y^2=\dfrac{81289}{625}\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{81289}}{25}$

  $\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\sqrt{81289}}{25}-2;-\dfrac{\sqrt{81289}}{25}-2\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 86. Giải phương trình $x+\dfrac{|x|}{\sqrt{2x^2-1}}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2>\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}}=2$.

Đặt $\dfrac{1}{x}=u$ thì thu được $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{\sqrt{2-u^2}}=2$. Đặt $\sqrt{2-u^2}=y,y>0$ quy về hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+y^2=2\\ u+y=2uy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+y)^2-2uy=2\\ u+y=2uy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u^2y^2-2uy=2\\ u+y=2uy\end{cases}\Rightarrow(uy-1)(uy+2)=0.$$

- $uy=1\Leftrightarrow u\sqrt{2-u^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}u>0\\ u^4-2u^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u>0\\ u^2=1\end{cases}\Leftrightarrow u=1\Rightarrow x=1$.
- $uy=-2\Leftrightarrow u\sqrt{2-u^2}=-2\Leftrightarrow\begin{cases}u<0\\ u^4+2u^2-2=0\end{cases}\Rightarrow u=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\Rightarrow x=1-\sqrt{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=1;x=1-\sqrt{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2>\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho biến đổi về

$$|x|=(2-x)\sqrt{2x^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\ge 0\\ x^2=(x^2-4x+4)(2x^2-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ 2x^4-8x^3+6x^2+4x-4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ 2(x^2-2x+1)(x^2-2x-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ (x-1)^2(x^2-2x-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1;x=1-\sqrt{3}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1;x=1-\sqrt{3}$.

Bài toán 87. Giải phương trình $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{(x+3)(2-x)}}=\dfrac{7}{12}\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-3<x<2\\2x\neq -1\end{cases}$

Đặt $2x+1=a;2\sqrt{(x+3)(2-x)}=b,b>0\Rightarrow a^2+b^2=4x^2+4x+1+4(-x^2-x+6)=25$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{12}$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{12}\\a^2+b^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12(a+b)=7ab\\(a+b)^2-2ab=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24(a+b)=7\left[(a+b)^2-25\right]\\2ab=(a+b)^2-25\end{cases}$$

Đặt $a+b=t$ ta thu được $24t=7(t^2-25)\Leftrightarrow t=7;t=-\dfrac{25}{7}$. Xét hai trường hợp xảy ra

- $t=7\Rightarrow\begin{cases}a+b=7\\ab=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(7-a)=12\\a>0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\{3;4\}\Rightarrow x\in\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.
- $t=-\dfrac{25}{7}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-\dfrac{25}{7}\\ab=-\dfrac{300}{49}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+\dfrac{25}{7}a-\dfrac{300}{49}=0\\a>0\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{5\sqrt{73}-25}{14}\Rightarrow x=\dfrac{5\sqrt{73}-39}{28}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x=1;x=\dfrac{3}{2};x=\dfrac{5\sqrt{73}-39}{28}$.

Bài toán 88. Giải phương trình $\dfrac{1}{7x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{(7x+11)(9-7x)}}=\dfrac{7}{24}\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}-\dfrac{11}{7}<x<\dfrac{9}{7}\\7x+1\neq 0\end{cases}$

Đặt $7x+1=u;\sqrt{(7x+11)(9-7x)}=v,v>0\Rightarrow u^2+v^2=49x^2+14x+1-49x^2-14x+99=100$.

Phương trình đã cho trở thành $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{7}{24}$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+v^2=100\\\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{7}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=100\\24(u+v)=7uv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2uv=(u+v)^2-100\\48(u+v)=7\left[(u+v)^2-100\right]\end{cases}$$

Đặt $u+v=t$ thì $48t=7(t^2-100)\Leftrightarrow t=14;t=-\dfrac{50}{7}$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- Nếu $t=14\Rightarrow\begin{cases}u+v=14\\uv=48\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2-14u+48=0\\u>0\end{cases}\Leftrightarrow u\in\{6;8\}\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{5}{7};1\right\}$.

- Nếu $t=-\frac{50}{7}\Rightarrow\begin{cases}u+v=-\frac{50}{7}\\uv=-\frac{1200}{49}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2+\frac{50}{7}u-\frac{1200}{49}=0\\u<0\end{cases}\Leftrightarrow u=\frac{-25-5\sqrt{73}}{7}\Rightarrow x=\frac{-32-5\sqrt{73}}{49}$.

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 89. Giải phương trình $\frac{x+2}{\sqrt{7-6x}}+\frac{1-x}{\sqrt{13+6x}}=\frac{11}{8}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{13}{6}<x<\frac{7}{6}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\frac{3+2x+1}{\sqrt{10-3(2x+1)}}+\frac{3-(2x+1)}{\sqrt{10+3(2x+1)}}=\frac{11}{4}$.

Đặt $2x+1=y$ thu được $\frac{3+y}{\sqrt{10-3y}}+\frac{3-y}{\sqrt{10+3y}}=\frac{11}{4}\qquad(1)$

Đặt $\sqrt{10-3y}=u;\sqrt{10+3y}=v,(u>0;v>0)\Rightarrow 3y=10-u^2=v^2-10$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\frac{3+\frac{10-u^2}{3}}{u}+\frac{3-\frac{v^2-10}{3}}{v}=\frac{11}{4}\Leftrightarrow\frac{19-u^2}{u}+\frac{19-v^2}{v}=\frac{33}{4}\Leftrightarrow\frac{19(u+v)}{uv}=u+v+\frac{33}{4}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{19(u+v)}{uv}=u+v+\frac{33}{4}\\u^2+v^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{38(u+v)}{2uv}=\frac{4u+4v+33}{4}\\2uv=(u+v)^2-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}152(u+v)=\left[(u+v)^2-20\right](4u+4v+33)\\2uv=(u+v)^2-20\end{cases}$$

Đặt $u+v=t,t>0$ suy ra

$$152t=(t^2-20)(4t+33)\Leftrightarrow 4t^3+33t^2-232t-660=0\Leftrightarrow(t-6)(4t^2+57t+110)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\4t^2+57t+110=0\end{array}\right.\Rightarrow t=6\Rightarrow\begin{cases}u+v=6\\uv=8\\u>0;v>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(6-u)=8\\u>0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=4\\u=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có các nghiệm $x=-\frac{3}{2};x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 90. Giải phương trình $\frac{x^2-2x+14}{\sqrt{(2x+3)(7-2x)}}+\frac{12+2x-x^2}{\sqrt{4x^2-8x+29}}=20\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\frac{13+(x-1)^2}{\sqrt{25-4(x-1)^2}}+\frac{13-(x-1)^2}{\sqrt{25+4(x-1)^2}}=20\qquad(1)$.

Đặt $(x-1)^2=y;0\le y<\frac{25}{4}$ thì $(1)\Leftrightarrow\frac{13+y}{\sqrt{25-4y}}+\frac{13-y}{\sqrt{25+4y}}=20\qquad(2)$.

Đặt $\sqrt{25-4y}=a;\sqrt{25+4y}=b,(a>0;b>0)\Rightarrow 4y=25-a^2=b^2-25$. Lúc này

$$(2)\Leftrightarrow \frac{13+\dfrac{25-a^2}{4}}{a}+\frac{13-\dfrac{b^2-25}{4}}{b}=20\Leftrightarrow \frac{77-a^2}{a}+\frac{77-b^2}{b}=80\Leftrightarrow \frac{77(a+b)}{ab}=a+b+80.$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a^2+b^2=50\\ \dfrac{77(a+b)}{ab}=a+b+80\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2ab=(a+b)^2-50\\ 154(a+b)=\left[(a+b)^2-50\right](a+b+80)\end{cases}$

Với $a+b=t,t>0$ thì

$$154t=(t^2-50)(t+80)\Leftrightarrow t^3+80t^2-204t-4000=0\Leftrightarrow (t-8)(t^2+88t+500)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=8\\ t^2+88t+500=0\end{array}\right.\Rightarrow t=8\Rightarrow \begin{cases}a+b=8\\ ab=7\\ a>0;b>0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a^2-8a+7=0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=7\end{array}\right.$$

- Loại trường hợp $a=7$ vì $a<5$ khi $0\le y<\dfrac{25}{4}$.
- $a=1\Rightarrow 25-4y=1\Leftrightarrow y=6\Leftrightarrow (x-1)^2=6\Leftrightarrow x=1-\sqrt{6};x=1+\sqrt{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}\right\}$.

Bài toán 91. Giải phương trình $\dfrac{4x^2+4x+11}{2\sqrt{(x+3)(2-x)}}+\dfrac{9-4x-4x^2}{\sqrt{4x^2+4x+26}}=32 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3<x<2$. Biến đổi phương trình về dạng $\dfrac{10+(2x+1)^2}{\sqrt{25-(2x+1)^2}}+\dfrac{10-(2x+1)^2}{\sqrt{25+(2x+1)^2}}=32$.

Đặt $(2x+1)^2=y,0\le y<25$ thu được $\dfrac{10+y}{\sqrt{25-y}}+\dfrac{10-y}{\sqrt{25+y}}=32 \qquad (1)$.

Đặt $\sqrt{25-y}=u;\sqrt{25+y}=v,(u>0;v>0)\Rightarrow y=25-u^2=v^2-25$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow \frac{10+25-u^2}{u}+\frac{10-(v^2-25)}{v}=32\Leftrightarrow \frac{35}{u}+\frac{35}{v}=u+v+32.$$

Kết hợp lại thu được hệ $\begin{cases}u^2+v^2=50\\ \dfrac{35(u+v)}{uv}=u+v+32\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2uv=(u+v)^2-50\\ 70(u+v)=(u+v+32)\left[(u+v)^2-50\right]\end{cases}$

Đặt $u+v=t$ suy ra

$$70t=(t+32)(t^2-50)\Leftrightarrow t^3+32t^2-120t-1600=0\Leftrightarrow (t-8)(t^2+40t+200)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=8\\ t^2+40t+200=0\end{array}\right.\Rightarrow t=8\Rightarrow \begin{cases}u+v=8\\ uv=7\\ u>0;v>0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}u^2-8u+7=0\\ u>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=1\\ u=7\end{array}\right.$$

Dễ thấy $u\le 5$ với $0\le y<25$ nên loại $u=7$. Với $u=1\Rightarrow y=24\Leftrightarrow (2x+1)^2=24\Rightarrow x=\dfrac{-2\sqrt{6}-1}{2};\dfrac{2\sqrt{6}-1}{2}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{5-4x^2}}=\frac{3}{2}$.
2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{10-x^2}}=\frac{4}{3}$.
3. $\frac{1}{3x}+\frac{1}{\sqrt{10-9x^2}}=\frac{4}{3}$.
4. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{\sqrt{13-4x^2}}=\frac{5}{6}$.
5. $\frac{1}{\sqrt{5-(x-1)^2}}=2-\frac{1}{x-1}$.
6. $\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{25-16x}}=\frac{7}{12}$.
7. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}=2$.
8. $\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2-x^3}}=2$.
9. $\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}=1$.
10. $\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{\sqrt{25-16(x+1)^2}}=\frac{7}{12}$.
11. $\frac{1}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}=1$.
12. $\frac{1}{3(2x+3)}+\frac{1}{\sqrt{25-9(2x+3)^2}}=\frac{7}{12}$.
13. $x+\frac{|x|}{\sqrt{17x^2-1}}=\frac{5}{4}$.
14. $x+\frac{|x|}{\sqrt{26x^2-1}}=\frac{6}{5}$.
15. $1+\frac{1}{\sqrt{10x^2-1}}=\frac{4}{3x}$.
16. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{(4-x)(6+x)}}=\frac{7}{12}$.
17. $\frac{x+4}{x+3}+\frac{1}{\sqrt{(8+x)(2-x)}}=\frac{19}{12}$.
18. $\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{3(4+3x)(2-x)}}=\frac{7}{12}$.
19. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{28-x^3}}=\frac{4}{3}$.

20. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{9-x^3}}=\frac{3}{2}$.

21. $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{\sqrt[3]{65-(x+4)^3}}=\frac{5}{4}$.

22. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{28-(x-1)^3}}=\frac{4}{3}$.

23. $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{2-(x+1)^3}}=4$.

24. $x+\frac{x}{\sqrt[3]{2x^3-1}}=2$.

25. $x+\frac{x+1}{\sqrt[3]{9(x+1)^3-1}}=\frac{1}{2}$.

26. $2x+\frac{1}{\sqrt[3]{2(2x+1)^3-1}}=1$.

27. $\frac{18-x}{\sqrt{20-x}}+\frac{18+x}{\sqrt{20+x}}=\frac{20}{3}$.

28. $\frac{7+x}{\sqrt{5-4x}}+\frac{7-x}{\sqrt{5+4x}}=10$.

29. $\frac{3-x}{\sqrt{13-6x}}+\frac{3+x}{\sqrt{13+6x}}=2$.

30. $\frac{10+x}{\sqrt{25-8x}}+\frac{10-x}{\sqrt{25+8x}}=14$.

31. $\frac{13x+1}{\sqrt{25x-4}}+\frac{13x-1}{\sqrt{25+4x}}=20\sqrt{x}$.

32. $\frac{10x+1}{\sqrt{25x-1}}+\frac{10x-1}{\sqrt{25x+1}}=32\sqrt{x}$.

33. $\frac{3x+1}{\sqrt{10x-3}}+\frac{3x-1}{\sqrt{10x+3}}=\frac{11\sqrt{x}}{4}$.

34. $\frac{2x+1}{\sqrt{20x-1}}+\frac{2x-1}{\sqrt{20x+1}}=\frac{20}{3}\sqrt{x}$.

35. $\frac{9x^2-6x+11}{\sqrt{3(3x+4)(2-x)}}+\frac{9+6x-9x^2}{\sqrt{9x^2-6x+26}}=32$.

36. $\frac{(5x+1)^2+6}{\sqrt{(5x+6)(4-5x)}}+\frac{6-(5x+1)^2}{\sqrt{25+(5x+1)^2}}=\frac{192}{7}$.

37. $\frac{x^2+13}{\sqrt{(2x+5)(5-2x)}}+\frac{13-x^2}{\sqrt{4x^2+25}}=20$.

Bài toán 92. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{1+x}=2 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -1$.

Đặt $\sqrt[3]{1-x}=a;\sqrt{1+x}=b\ (b\ge 0)\Rightarrow a^3+b^2=2$. Phương trình đã cho trở thành $a+b=2$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=2\\a^3+b^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\a^3+(a-2)^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\a^3+a^2-4a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\(a-1)(a^2+2a-2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a\in\left\{1;\sqrt{3}-1;-\sqrt{3}-1\right\}\Rightarrow x\in\left\{0;1+\left(1-\sqrt{3}\right)^3;1+\left(\sqrt{3}+1\right)^3\right\}$$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $S=\left\{0;1+\left(1-\sqrt{3}\right)^3;1+\left(\sqrt{3}+1\right)^3\right\}$.

Bài toán 93. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{1-x}=1 \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\le 1$.

Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a;\sqrt{1-x}=b\ (b\ge 0)\Rightarrow a^3-b^2=1$. Phương trình đã cho trở thành $a+2b=1$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+2b=1\\a^3-b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\a^3-\dfrac{(1-a)^2}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1-a}{2}\\(a-1)(4a^2+3a+5)=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\4a^2+3a+5=0\quad(*)\end{array}\right.$$

- Phương trình (*) vô nghiệm vì $\Delta=-11<0$.
- $a=1\Leftrightarrow 2-x=1\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 94. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1} \quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge 1$.

Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a;\sqrt{x-1}=b\ (b\ge 0)\Rightarrow a^3+b^2=1$. Phương trình đã cho trở thành $a=1-b$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a=1-b\\a^3+b^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1-a\\a^3+a^2-2a=0\end{cases}\Rightarrow a(a-1)(a+2)=0\Leftrightarrow a\in\{0;1;-2\}\Leftrightarrow x\in\{2;1;10\}.$$

Thử lại cả ba giá trị đều thỏa mãn. Kết luận nghiệm $S=\{1;2;10\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 1$.

Đặt $\sqrt{x-1}=t\ (t\ge 0)\Rightarrow x=t^2+1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{2-(t^2+1)}=1-t\Leftrightarrow 1-t^2=-t^3+3t^2-3t+1\Leftrightarrow t^3-4t^2+3t=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)(t-3)=0\Leftrightarrow t\in\{0;1;3\}\Rightarrow x\in\{1;2;10\}$$

Thử lại cả ba giá trị đều thỏa mãn. Kết luận nghiệm $S=\{1;2;10\}$.

Bài toán 95. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1 \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7}=a;\sqrt{x}=b,(a>0;b\ge 0)\Rightarrow a^3-b^2=7$. Phương trình ban đầu trở thành $a-b=1$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3-b^2=7\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-(a-1)^2=7\\ b=a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-a^2+2a-8=0\\ b=a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(a^2+a+4)=0\\ b=a-1\end{cases}$$

- Xét $a^2+a+4=0,\Delta<0$. Phương trình vô nghiệm.
- Xét $a=2\Rightarrow x+7=8\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 0$. Đặt $\sqrt{x}=t,t\ge 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt[3]{t^2+7}=t+1\Leftrightarrow t^2+7=t^3+3t^2+3t+1\Leftrightarrow t^3+2t^2+3t-6=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+3t+6)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t^2+3t+6=0\end{array}\right.\Rightarrow t=1\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 96. Giải hệ phương trình $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x}=1 \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -3$.

Đặt $\sqrt{x+3}=u;\sqrt[3]{x}=v,(u\ge 0)\Rightarrow u^2-v^3=3$. Phương trình đã cho trở thành $u-v=1$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-v^3=3\\ u-v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(v+1)^2-v^3=3\\ u=v+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v^3-v^2-2v+2=0\\ u=v+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(v-1)(v^2-2)=0\\ u=v+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v\in\left\{-\sqrt{2};1;\sqrt{2}\right\}\Rightarrow x\in\left\{-2\sqrt{2};1;2\sqrt{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=2\sqrt{2}$.

Bài toán 97. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}=8 \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\le\dfrac{6}{5}$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-2}=u;\sqrt[3]{6-5x}=v\ \ (b\ge 0)\Rightarrow 5u^3+3v^2=8$. Phương trình đã cho trở thành $2u+3v=8$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}2u+3v=8\\ 5u^3+3v^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{8-2u}{3}\\ 5u^3+\dfrac{(8-2u)^2}{3}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{8-2u}{3}\\ 15u^3+4u^2-32u+40=0\end{cases}\quad(*)$

$$(*)\Leftrightarrow(u+2)(15u^2+26u+20)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-2\\ 15u^2+26u+20=0\end{array}\right.$$

- Phương trình $15u^2+26u+20=0$ vô nghiệm do $\Delta'=-131<0$.
- $u=-2\Leftrightarrow 3x-2=-8\Leftrightarrow x=-2$.

Thử lại thấy nghiệm đúng phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S=\{-2\}$.

Bài toán 98. Giải phương trình $4\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{7x+2}=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{7}{2}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x-1}=u;\sqrt{7x+2}=v \quad (b\ge 0)\Rightarrow 7u^3-2v^2=-11$. Phương trình đã cho trở thành $4u-v=1$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4u-v=1\\7u^3-2v^2=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=4u-1\\7u^3-2(4u-1)^2+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=4u-1\\7u^3-32u^2+16u+9=0\end{cases}$

- $7u^3-32u^2+16u+9=0\Leftrightarrow(u-1)(7u^2-25u-9)=0$.

  Vì $v=4u-1\ge 0\Rightarrow u\ge\dfrac{1}{4}$. Do đó $u\in\left\{1;\dfrac{25+\sqrt{877}}{14}\right\}\Rightarrow x\in\left\{1;\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25+\sqrt{877}}{14}\right)^3+\dfrac{1}{2}\right\}$.

Thử lại các giá trị thấy thỏa mãn. Kết luận tập nghiệm của phương trình $S=\left\{1;\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25+\sqrt{877}}{14}\right)^3+\dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $\left(\sqrt{2+x}+1\right)\sqrt[3]{3-x}=x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3-x}=\dfrac{x+1}{\sqrt{2+x}+1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{3-x}=\sqrt{2+x}-1$.

Đặt $\sqrt[3]{3-x}=a;\sqrt{2+x}=b \ (b\ge 0)\Rightarrow a^3+b^2=5$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a=b-1\\a^3+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+1\\a^3+a^2+2a-4=0\end{cases}\Rightarrow(a-1)(a^2+2a+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a^2+2a+4=0\end{array}\right.$$

- $a=1\Leftrightarrow 3-x=1\Leftrightarrow x=2$.
- $a^2+2a+4=0\Leftrightarrow(a+1)^2=-3<0$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{2\}$.

Bài toán 100. Giải phương trình $3\sqrt[3]{2-x}\left(\sqrt{x-1}-3\right)+10=x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 1$.

Nhận xét $x=10$ là một nghiệm của phương trình ban đầu.

Xét $1\le x\ne 10$, phương trình đã cho biến đổi về $3\sqrt[3]{2-x}=\dfrac{x-10}{\sqrt{x-1}-3}\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2-x}=\sqrt{x-1}+3$.

Đặt $\sqrt[3]{2-x}=a;\sqrt{x-1}=b \ (b\ge 0)\Rightarrow a^3+b^2=1$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}a^3+b^2=1\\3a=b+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-1+9(a-1)^2=0\\b=3a-3\end{cases}\Rightarrow(a-1)(a^2+10a-8)=0\Rightarrow a\in\left\{1;-5+\sqrt{33};-5-\sqrt{33}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in\left\{1;2-\left(\sqrt{33}-5\right)^3;2+\left(\sqrt{33}+5\right)^3\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài toán 101. Giải phương trình $\sqrt[3]{3-2x}\left(2\sqrt{3x-2}+1\right)=3\left(4x-3\right) \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3-2x}=\frac{3\left(4x-3\right)}{2\sqrt{3x-2}+1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{3-2x}=2\sqrt{3x-2}-1$.

Đặt $\sqrt[3]{3-2x}=a;\sqrt{3x-2}=b,\left(b\ge0\right)\Rightarrow 3a^3+2b^2=5$. Phương trình ban đầu trở thành $a=2b-1$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}3a^3+2b^2=5\\a=2b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a^3+\left(a+1\right)^2=10\\2b=a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a^3+a^2+2a-9=0\\2b=a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a-1\right)\left(6a^2+7a+9\right)=0\\2b=a+1\end{cases}\quad(*)$$

Phương trình $6a^2+7a+9=0$ vô nghiệm do $\Delta<0$. Do đó $\left(*\right)\Leftrightarrow a=1\Rightarrow 3-2x=1\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3-2x}=\frac{3\left(4x-3\right)}{2\sqrt{3x-2}+1}\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x-3}+2\sqrt{3x-2}=1$ (1).

- Nếu $x>1$ thì $\sqrt[3]{2x-3}+2\sqrt{3x-2}>1$, (1) vô nghiệm.
- Nếu $x<1$ thì $\sqrt[3]{2x-3}+2\sqrt{3x-2}<1$, (1) vô nghiệm.
- Nếu $x=1$ thì (1) nghiệm đúng.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Nhận xét.

- *Các bài toán từ 92 đến 102 đều có các căn thức bậc ba và căn thức bậc hai hỗn tạp, đây là trường hợp riêng của dạng tổng quát* $c\sqrt[n]{a\pm f\left(x\right)}\pm d\sqrt[m]{b\pm g\left(x\right)}=e$.
- *Đối với dạng toán tương tự, ưu tiên phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình và giải lấy giá trị một ẩn (không nhất thiết giải lấy cả hai ẩn phụ), lưu ý sử dụng phép biến đổi sao cho đơn giản nhất, hạn chế các phép khai triển đa thức bậc cao. Các bạn có thể thấy các bài toán trên đều dùng phép thế để thuận tiện sử dụng hằng đẳng thức bình phương (nếu thế ngược lại buộc phải sử dụng hằng đẳng thức phức tạp hơn).*
- *Các bạn chú ý thiết lập các hệ thức liên hệ sao cho triệt tiêu các số hạng chứa ẩn bằng cách nhân thêm hệ số thích hợp.*

  Thí dụ: $\sqrt[3]{3x-2}=a;\sqrt{5x+1}=b\Rightarrow 3x=a^3+2;5x+1=b^2$

  Biểu thị $x=\frac{a^3+2}{3};x=\frac{b^2-1}{5}\Rightarrow\frac{a^3+2}{3}=\frac{b^2-1}{5}\Leftrightarrow 5a^3-3b^2=-13$.

  Hoặc nhận thấy $3.5=5.3$ *nên suy ra* $5a^3-3a^2=5.\left(-2\right)-3.1=-13$.
- *Ngoài ra phương pháp đặt một ẩn phụ và đưa về phương trình bậc cao cũng là một lựa chọn hiệu quả (điển hình trong lời giải 2 bài toán 95). Về bản chất đây là một cách trình bày khác không qua hệ phương trình, tùy theo năng lực và gu diễn đạt của mình, các bạn có thể lựa chọn cho mình cách giải hợp lý.*
- *Trong một số bài toán mang tính chất "giấu mặt", các bạn cần kết hợp linh hoạt các kiến thức tổng hợp, lập luận hợp lí và logic để đưa bài toán đã cho về dạng thuận tiện nhất để có lập hệ phương trình. Điển hình trong hai bài toán 99 đến 101 các lời giải đã sử dụng đẳng thức liên hợp.*

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt[3]{4x-3}+\sqrt{x}=2$.
2. $\sqrt[3]{2x-1}+2\sqrt{x}=3$.
3. $3\sqrt[3]{3x-2}+4\sqrt{x}=7$.
4. $\sqrt{x}+7\sqrt[3]{x-1}=1$.
5. $\sqrt[3]{9x-8}\left(3+2\sqrt{x}\right)=9-4x$.
6. $2\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x-1}=4$.
7. $4\sqrt{x}+\sqrt[3]{3x-2}=5$.
8. $\sqrt[3]{5x-4}=\dfrac{9-4x}{3+2\sqrt{x}}$.
9. $\sqrt{2x-1}+2\sqrt[3]{3x-2}=3$.
10. $3\sqrt{4-3x}+4\sqrt[3]{5-4x}=7$.
11. $3\sqrt[3]{2x-1}=\dfrac{22-x}{5+\sqrt{x+3}}$.
12. $2\sqrt{6-5x}+3\sqrt[3]{7-6x}=5$.
13. $3\sqrt[3]{5x-1}+2\sqrt{x+8}=12$.
14. $3\sqrt[3]{3x-2}=\dfrac{26-2x}{7+\sqrt{4x-3}}$.
15. $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt{x-2}=2$.
16. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}=1$.
17. $\sqrt[3]{5x-4}=\dfrac{9-6x}{2+\sqrt{6x-5}}$.
18. $\sqrt[3]{6-x}+4\sqrt{5-x}=1$.
19. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x+3}=3$.
20. $\sqrt[3]{9-x}=\dfrac{13-x}{4+\sqrt{x-3}}$.
21. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}+1}=\sqrt[3]{x-1}$.
22. $\sqrt[3]{5-x}\left(\sqrt{3x-2}-1\right)=3(x-1)$.
23. $\sqrt[3]{4-x}+\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}+3}=0$.
24. $5\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{10x-1}=3$.
25. $4\sqrt{5x-4}+\sqrt[3]{10-9x}=5$.
26. $\sqrt[3]{4-3x}=\dfrac{8-5x}{2+\sqrt{5x-4}}$.
27. $\sqrt[3]{7-6x}\left(2+\sqrt{2-x}\right)=2+x$.
28. $\sqrt[3]{10-9x}+3\sqrt{x}=4$.

Bài toán 102. Giải phương trình $x^2+2=\sqrt{x-2}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2=4\sqrt{x-2}-8\Leftrightarrow\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=4(x-2)+4\sqrt{x-2}+1\Leftrightarrow(2x+1)^2=\left(2\sqrt{x-2}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow|2x+1|=\left|2\sqrt{x-2}+1\right|\Leftrightarrow 2x+1=2\sqrt{x-2}+1\Leftrightarrow x=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-x+2=0\end{cases}\text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge 2$.

Đặt $\sqrt{x-2}=y\ (y\ge 0)\Rightarrow y^2+2=x$. Phương trình đã cho trở thành $x^2+2=y$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2=y\\y^2+2=x\end{cases}\Rightarrow x^2-y^2=y-x\Leftrightarrow(x-y)(x+y+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x+y=-1\end{array}\right.$

- $x+y=-1$ (Vô nghiệm do $x\ge 2; y\ge 0$).
- $x=y\Leftrightarrow x^2-x+2=0;\ \Delta=-7<0$ nên vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2-\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+x-2-\sqrt{x-2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}\text{ (Vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 103. Giải phương trình $4x^2+\sqrt{2x+9}=9 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\frac{9}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x+9}=y\ \ (y\ge 0)\Rightarrow y^2=2x+9$. Phương trình đã cho tương đương với $4x^2+y=9$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases}4x^2+y=9\\y^2=2x+9\end{cases}\Rightarrow 4x^2+y=y^2-2x\Leftrightarrow 4y^2-y^2+2x+y=0\Leftrightarrow(2x+y)(2x-y+1)=0$

- $2x+y=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+9}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{9}{2}\le x\le 0\\4x^2-2x-9=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{37}}{4}$.
- $2x-y+1=0\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{2x+9}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}\\2x^2+x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{33}-1}{4}$.

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{\frac{1-\sqrt{37}}{4};\frac{\sqrt{33}-1}{4}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -\frac{9}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$16x^2+4\sqrt{2x+9}=36 \Leftrightarrow 16x^2+8x+1=4(2x+9)-4\sqrt{2x+9}+1$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)^2=\left(2\sqrt{2x+9}-1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+1=\sqrt{2x+9} & (1) \\ -2x=\sqrt{2x+9} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ (2x+1)^2=2x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \le x \le 0 \\ 4x^2-2x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{4}$.

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{37}}{4};\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{9}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với $2x+9-\sqrt{2x+9}-4x^2-2x=0$ (1).

Đặt $\sqrt{2x+9}=t$ $(t \ge 0)$ thì (1) trở thành

$$t^2-t-4x^2-2x=0 \Leftrightarrow (t-2x)(t+2x)-(t+2x)=0 \Leftrightarrow (t+2x)(t-2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=2x+1 & (1) \\ t=-2x & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ (2x+1)^2=2x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \le x \le 0 \\ 4x^2-2x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{4}$.

So sánh điều kiện thu được tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{37}}{4};\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}\right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \ge -\dfrac{9}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+9}=9-4x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \le 9 \\ 8x^4-36x^2-x+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \le 9 \\ 4x^2\left(2x^2+x-4\right)-2x\left(2x^2+x-4\right)-9\left(2x^2+x-4\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \le 9 \\ \left(4x^2-2x-9\right)\left(2x^2+x-4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{37}}{4};\dfrac{\sqrt{33}-1}{4}\right\}$$

Kết luận phương trình có hai nghiệm như trên.

Nhận xét.

- *Hai bài toán 102 và 103 có hình thức đặc trưng cho phương pháp sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 (hoặc gần đối xứng loại 2 – đối với bài toán 103).*
- *Đối với bài toán 103 nếu đặt $2x=t$ và đặt $\sqrt{t+9}=y$ thì sẽ thu được hệ phương trình đối xứng loại 2*

$$\begin{cases} t+9=y^2 \\ t^2+y=9 \end{cases}$$

- *Lời giải 3 của bài toán 103 có phép phân tích nhân tử chưa được tự nhiên, về bản chất là phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn. Về vấn đề này, tác giả đã trình bày trong Lý thuyết sử dụng ẩn phụ các phần 4 và 5, mong các bạn tìm đọc để có được cách nhìn đầy đủ.*

Bài toán 104. Giải phương trình $5x^2+2=4\sqrt{\dfrac{4x-2}{5}} \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{4x-2}{5}}=y\left(y\ge 0\right)\Rightarrow 5y^2+2=4x$. Phương trình đã cho trở thành $5x^2+2=4y$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x^2+2=4y \\ 5y^2+2=4x \end{cases}\Rightarrow 5x^2-5y^2=4y-4x\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(5x+5y+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \\ 5x+5y+4=0 \end{array}\right.$$

Rõ ràng $x\ge\dfrac{1}{2};y\ge 0\Rightarrow 5x+5y+4>0$. Với $x=y\Rightarrow 5x^2-4x+2=0 \quad (*)$.

Phương trình (*) vô nghiệm do $\Delta'=-6<0$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$25x^2+10=4\sqrt{20x-10}\Leftrightarrow 25x^2+20x+4=20x-10+4\sqrt{20x-10}+4\Leftrightarrow\left(5x+2\right)^2=\left(\sqrt{20x-10}+2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left|5x+2\right|=\left|\sqrt{20x-10}+2\right|\Leftrightarrow 5x=\sqrt{20x-10}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge\dfrac{1}{2} \\ 5x^2-4x+2=0 \end{cases} \text{(Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$25x^4+20x^2+4=16.\frac{4x-2}{5}\Leftrightarrow 125x^4+100x^2+20=64x-32$$

$$\Leftrightarrow 125x^4+100x^2-64x+52=0\Leftrightarrow\left(5x^2-4x+2\right)\left(25x^2+20x+26\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} 5x^2-4x+2=0 & (1) \\ 25x^2+20x+26=0 & (2) \end{array}\right.$$

Hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

- *Bài toán 104 xuất hiện mẫu thức, mặc dù là hằng số 5 nhưng ít nhiều gây khó khăn trong định hướng lời giải. Thông thường chúng ta sẽ dễ nghĩ đến trục căn thức (thông qua nhân hai vế với 5) để bài toán trở nên "khả quan" hơn. Hai lời giải 2 và 3 sử dụng phép biến đổi tương đương, hoặc thêm bớt theo hằng đẳng thức bình phương hoặc sử dụng hệ số bất định phân tích thành nhân tử (lời giải 3).*

- *Chú ý vế trái của bài toán là $5x^2+2$, khuyết hạng tử chứa x nên tất yếu sẽ thử nghiệm đặt $\sqrt{\frac{4x-2}{5}}=y$ và biểu thị ẩn, rất may mắn là thu được hệ phương trình đối xứng loại 2, thực hiện giải x (không nhất thiết giải đồng thời x và y). Theo khách quan, phương pháp sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình (đặc biệt là hệ đối xứng loại 2) chỉ xảy ra với một bộ phận số lượng nhỏ phương trình có cấu trúc như trên, đa số các bài toán tương tự xuất phát từ một hệ phương trình đối xứng loại 2 (hoặc gần đối xứng loại 2) được làm ngược.*

Bài toán 105. Giải phương trình $(x+1)(x+3)=5\sqrt{5x+11}\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\frac{11}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+4x+3=5\sqrt{5x+11}\Leftrightarrow (x+2)^2-1=5\sqrt{5(x+2)+1}\quad (*)$

Đặt $x+2=t$ thì (*) trở thành $t^2-1=5\sqrt{5t+1}$. Đặt $\sqrt{5t+1}=y\ (y\ge 0)\Rightarrow 5t+1=y^2$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}5t+1=y^2\\ t^2-1=5y\end{cases}\Rightarrow 5t+t^2=y^2+5y\Leftrightarrow (t-y)(t+y+5)=0\Rightarrow t=y\ \left(\text{Vì } t\ge -\frac{1}{5};y\ge 0\right).$$

$$\Rightarrow t^2-5t-1=0\Leftrightarrow (x+2)^2-5(x+2)-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-7=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1+\sqrt{29}}{2};\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right\}$$

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $x=\frac{\sqrt{29}+1}{2}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -\frac{11}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+4x+3=5\sqrt{5x+11}\Leftrightarrow 4x^2+16x+12=20\sqrt{5x+11}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+36x+81=4(5x+11)+20\sqrt{5x+11}+25$$

$$\Leftrightarrow (2x+9)^2=\left(2\sqrt{5x+11}+5\right)^2\Leftrightarrow |2x+9|=\left|2\sqrt{5x+11}+5\right|$$

$$\Leftrightarrow 2x+9=2\sqrt{5x+11}+5\Leftrightarrow x+2=\sqrt{5x+11}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $x=\frac{\sqrt{29}+1}{2}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge -\frac{11}{5}$. Ta có

$$x^2+4x+3=5\sqrt{5x+11}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+6x^2+9+8x\left(x^2+3\right)+16x^2=25(5x+11)\\ x^2+4x+3\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+8x^3+22x^2-101x-266=0\\ x^2+4x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2-x-7\right)\left(x^2+9x+38\right)=0\\ x^2+4x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-x-7=0\\ x^2+9x+38=0\end{array}\right.\\ x^2+4x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{29}+1}{2}$$

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{29}+1}{2}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{11}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2+4x+3=5\sqrt{5x+11}\Leftrightarrow 5x+11+5\sqrt{5x+11}-x^2-9x-14=0\quad(1)$

Đặt $\sqrt{5x+11}=t\ \left(t\ge 0\right)$ thì (1) trở thành

$$t^2+5t-x^2-9x-14=0\Leftrightarrow t\left(t+x+7\right)-x\left(t+x+7\right)-2\left(t+x+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-x-2\right)\left(t+x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{5x+11}=x+2 & (2)\\ \sqrt{5x+11}=-x-7 & (3)\end{array}\right.$$

- $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ 5x+11=x^2+4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{\sqrt{29}+1}{2};\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right\}$.
- Phương trình (3) vô nghiệm do điều kiện $x\ge -\dfrac{11}{5}$.

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{29}+1}{2}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 4 của bài toán 105 sử dụng đặt ẩn phụ không hoàn toàn, đưa về phương trình bậc hai ẩn t và phân tích nhân tử dựa trên công thức nghiệm.*
- *Lời giải 2 sử dụng phép biến đổi tương đương, nhân thêm hệ số và thêm bớt hạng tử thích hợp đưa về hai hằng đẳng thức bình phương, kết hợp điều kiện xác định để giảm thiểu một trường hợp.*
- *Lời giải 1 đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 nhưng qua một phép đặt ẩn phụ "tiền tiêu". Thông thường phương pháp đưa về hệ phương trình dạng này thường áp dụng cho phương trình gồm một vế chứa căn thức, một vế là đa thức bậc hai biến x. Trong trường hợp biểu thức dưới dấu căn bậc hai là nhị thức bậc nhất các bạn có thể thực hiện theo các bước sau*
  - *Nếu đa thức chứa biến x khuyết hạng tử chứa x thì có thể đặt trực tiếp ẩn phụ bằng căn thức.*
  - *Nếu đa thức chứa biến x có dạng tam thức bậc hai thì biến đổi quy về dạng* $\left(mx+n\right)^2+b$. *Phía trong căn thức phân tích dạng* $a\sqrt{a\left(mx+n\right)-b}$. *Ta có hệ quả* $\left(mx+n\right)^2+b=a\sqrt{a\left(mx+n\right)-b}$.
  - *Đặt* $\sqrt{a\left(mx+n\right)-b}=y\Rightarrow y^2+b=a\left(mx+n\right)$ *và* $\left(mx+n\right)^2+b=ay$.

    Đặt $mx+n=t$ *ta thu được hệ phương trình đối xứng loại 2:* $\begin{cases}y^2+b=at\\ t^2+b=ay\end{cases}$

  Trường hợp trên vẫn còn đúng khi thay $b=f\left(x\right)$ *hoặc* $a=g\left(x\right)$. *Tác giả xin trình bày vấn đề này sau.*

Bài toán 106. Giải phương trình $8x^2+8x=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2}}\qquad\left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $16x^2+16x=\sqrt{4x+6}\Leftrightarrow\left(4x+2\right)^2-4=\sqrt{\left(4x+2\right)+4}$.

Đặt $4x+2=t$ thu được $t^2-4=\sqrt{t+4}$.

Đặt $\sqrt{t+4}=y\ \left(y\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2 = y+4 \\ y^2 = t+4 \end{cases} \Rightarrow t^2 - y^2 = y - t \Leftrightarrow (t-y)(t+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = y \\ y = -t-1 \end{array}\right.$$

- $t = y \Rightarrow y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow y \in \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}; y \geq 0 \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-3}{8}$.
- $y = -t-1 \Rightarrow t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{13}-5}{8}; \frac{-\sqrt{13}-5}{8}\right\}$.

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $S = \left\{\frac{\sqrt{17}-3}{8}; \frac{-\sqrt{13}-5}{8}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$16x^2 + 16x = \sqrt{4x+6} \Leftrightarrow 16x^2 + 20x + \frac{25}{4} = 4x + 6 + \sqrt{4x+6} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(4x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+6} + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x + 2 = \sqrt{4x+6} & (1) \\ -4x - 3 = \sqrt{4x+6} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 16x^2 + 16x + 4 = 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 8x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{17}}{8}$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{4} \\ 16x^2 + 24x + 9 = 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{4} \\ 16x^2 + 20x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5-\sqrt{13}}{8}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{\frac{\sqrt{17}-3}{8}; \frac{-\sqrt{13}-5}{8}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2 + 8x = \sqrt{\frac{2x+3}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(64x^4 + 128x^3 + 64x^2\right) = 2x + 3 \\ x(x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 128x^4 + 256x^3 + 128x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(8x^2 + 6x - 1\right)\left(16x^2 + 20x + 3\right) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{\frac{-\sqrt{17}-3}{8}; \frac{\sqrt{17}-3}{8}; \frac{-\sqrt{13}-5}{8}; \frac{\sqrt{13}-5}{8}\right\} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{17}-3}{8}; \frac{-\sqrt{13}-5}{8}\right\}$$

Bài toán 107. Giải phương trình $x^2 - \sqrt{x+6} = 6 \qquad (x \in ¡)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -6$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2=\sqrt{x+6}+6 \Leftrightarrow 4x^2=4\sqrt{x+6}+24 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=4(x+6)+4\sqrt{x+6}+1$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)2=\left(2\sqrt{x+6}+1\right)2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\sqrt{x+6} & (1) \\ -x-1=\sqrt{x+6} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2+2x+1=x+6 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};3\right\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\ge -6$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-6=\sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-12x^2+36=x+6 \\ x^2\ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-12x^2-x+30=0 \\ x^2\ge 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^2-x-6\right)+x\left(x^2-x-6\right)-5\left(x^2-x-6\right)=0 \\ x^2\ge 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-x-6\right)\left(x^2+x-5\right)=0 \\ x^2\ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};3\right\}$$

So sánh điều kiện xác định thu được nghiệm $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};3\right\}$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x\ge -6$.
Đặt $\sqrt{x+6}=y\ \ (y\ge 0) \Rightarrow y^2=x+6$.
Phương trình đã cho tương đương với $x^2-6=y$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2=y+6 \\ y^2=x+6 \end{cases} \Rightarrow x^2-y^2=y-x \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y+1=0 \end{array}\right.$$

- $x=y \Leftrightarrow x=\sqrt{x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.
- $x+y+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=-x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{21}+1}{3}$.

So sánh điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{21}+1}{2};3\right\}$.

Lời giải 4.
Điều kiện $x\ge -6$.
Phương trình đã cho tương đương với $x+6+\sqrt{x+6}-x^2-x=0 \qquad (1)$.
Đặt $\sqrt{x+6}=t\ \ (t\ge 0)$ thì phương trình (1) trở thành

$$t^2+t-x^2-x=0\Leftrightarrow t(t-x)+x(t-x)+(t-x)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+x+1)(t-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=-x-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+6}=x & (1) \\ \sqrt{x+6}=-x-1 & (2) \end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=3$.
- $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \\ x^2+2x+1=x+6 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

So sánh điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{-\dfrac{\sqrt{21}+1}{2};3\right\}$.

Bài toán 108. Giải phương trình $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\ge -3$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x+2)\ge 0 \\ 16x^4+64x^3+64x^2=2x+6 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)\ge 0 \\ 8x^4+32x^3+32x^2-x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -2 \end{array}\right. \\ (2x^2+3x-1)(4x^2+10x+3)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -2 \end{array}\right. \\ x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4};\dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}\right\} \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\right\}$$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\right\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\ge -3$.
Phương trình đã cho tương đương với $4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow (2x+2)^2-4=\sqrt{(2x+2)+4}$.
Đặt $2x+2=t$ thu được $t^2-4=\sqrt{t+4}$. Đặt $\sqrt{t+4}=y\quad (y\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2=y+4 \\ y^2=t+4 \end{cases}\Rightarrow t^2-y^2=y-t\Leftrightarrow (t-y)(t+y+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{t+4} \\ t+1=-\sqrt{t+4} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+2=\sqrt{2x+6} & (1) \\ 2x+3=-\sqrt{2x+6} & (2) \end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 2x+6=4x^2+8x+4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 2x^2+3x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}$.
- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+12x+9=2x+6 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+10x+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{13}+5}{4}$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\right\}$.

Lời giải 3.
Điều kiện $x\ge -3$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow 16x^2+32x=4\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow 16x^2+40x+25=4(2x+6)+4\sqrt{2x+6}+1$$

$$\Leftrightarrow (4x+5)^2=\left(2\sqrt{2x+6}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+2=\sqrt{2x+6} & (1)\\ -2x-3=\sqrt{2x+6} & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x+6=4x^2+8x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x^2+3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}.$
- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+12x+9=2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+10x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{13}+5}{4}$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow 2x+6+\sqrt{2x+6}-4x^2-10x-6=0\qquad (*)$$

Đặt $\sqrt{2x+6}=t\ \ (t\ge 0)$ thì (*) trở thành

$$t^2+t-4x^2-10x-6=0\Leftrightarrow t(t+2x+3)-2x(t+2x+3)-2(t+2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2x-2)(t+2x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+2=\sqrt{2x+6} & (1)\\ -2x-3=\sqrt{2x+6} & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x+6=4x^2+8x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x^2+3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}.$
- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+12x+9=2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+10x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{13}+5}{4}$

So sánh điều kiện thu được nghiệm $x\in\left\{\dfrac{\sqrt{17}-3}{4};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{4}\right\}$.

Nhận xét.

Qua các lời giải trên, các bạn có thể thấy khi đứng trước một phương trình hoặc bất phương trình vô tỷ chúng ta có khá nhiều lựa chọn.

- *Hai trong số 4 lời giải của mỗi bài toán 108 trên sử dụng phương pháp biến đổi tương đương nâng cao lũy thừa. Điều đó cho thấy nó vẫn có hiệu lực mạnh mẽ trong một bộ phận lớn các phương trình chứa căn thức. Trong một số trường hợp, vận dụng phương pháp này thường cho ta một lời giải mang tính chất "khủng bố, cồng kềnh", nhưng đổi lại là mức độ "cơ bản, ngắn gọn" đến bất ngờ.*
- *Lời giải 4 – lời giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn cũng rất tự nhiên, mặc dù để có được nó cũng phụ thuộc yếu tố may mắn và kinh nghiệm rất nhiều.*
- *Các bạn chú ý lời giải số 2 bài toán 108 trên, thông qua hai phép đặt phụ để đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 thực sự không đơn giản. Xin lưu ý thêm một lần nữa, các bạn cố gắng phân tích hằng đẳng thức bên phía đa thức (kể cả phải nhân thêm hệ số) và kiểm tra tính khả thi của hệ phương trình hệ quả. Trong một số tài liệu khác, các tác giả thường dùng tỉ số hệ đối xứng loại 2 và đạo hàm để tìm được phép đặt ẩn phụ thích hợp, tất nhiên là còn phụ thuộc rất nhiều vào đặc tính bài toán ban đầu. Mời bạn đọc tham khảo tiếp các ví dụ sau.*

Bài toán 109. Giải phương trình $\sqrt{4x+9}+3(2x+1)=2x^2\qquad (x\in ¡)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \ge -\frac{9}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2-6x-3=\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow 4x^2-12x-6=2\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow (2x-3)^2-15=2\sqrt{2(2x-3)+15} \quad (*)$$

Đặt $2x-3=t$ thì (*) trở thành $t^2-15=2\sqrt{2t+15}$. Đặt $\sqrt{2t+15}=y\ (y\ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}2t+15=y^2\\ t^2-15=2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2t+15=y^2\\ 2y+15=t^2\end{cases} \Rightarrow 2t-2y=y^2-t^2 \Leftrightarrow (t-y)(2+t+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=y\\ t+y+2=0\end{array}\right.$$

- $t=y \Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \frac{3}{2}\\ 4x^2-12x+9=4x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ x(x-4)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=4$.
- $t+y+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+9}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\ 4x+9=4x^2-4x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\ x^2-2x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}$.

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $S=\{1-\sqrt{3};4\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \ge -\frac{9}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2-6x-3=\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow 4x^2-12x-6=2\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow 4x^2-8x+4=4x+9+2\sqrt{4x+9}+1$$

$$\Leftrightarrow (2x-2)^2=\left(\sqrt{4x+9}+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2x-3=\sqrt{4x+9} & (1)\\ 1-2x=\sqrt{4x+9} & (2)\end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{4x+9} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ 4x^2-12x+9=4x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\\ x(x-4)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=4$.
- $(2) \Leftrightarrow \sqrt{4x+9}=1-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\ 4x+9=4x^2-4x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\ x^2-2x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}$.

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $S=\{1-\sqrt{3};4\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \ge -\frac{9}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+9}=2x^2-6x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x-3\ge 0\\ 4x+9=4x^4-4x^2(6x+3)+36x^2+36x+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x-3\ge 0\\ 4x^4-24x^3+24x^2+32x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x-3\ge 0\\ 4x(x-4)(x^2-2x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\{1-\sqrt{3};4\}$$

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $S=\{1-\sqrt{3};4\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \ge -\frac{9}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+9}+6x+3-2x^2=0\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+9}+12x+6-4x^2=0\Leftrightarrow 4x+9+2\sqrt{4x+9}-4x^2+8x-3=0 \qquad (1).$$

Đặt $\sqrt{4x+9}=t \quad (t\ge 0)$ thì phương trình (1) trở thành

$$t^2+2t-4x^2+8x-3=0\Leftrightarrow t(t-2x+3)-2x(t-2x+3)+(t-2x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2x+1)(t-2x+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{4x+9}=1-2x & (1)\\ \sqrt{4x+9}=2x-3 & (2)\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1)\Leftrightarrow \sqrt{4x+9}=1-2x\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{1}{2}\\ 4x+9=4x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{1}{2}\\ x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}$.
- $(2)\Leftrightarrow 2x-3=\sqrt{4x+9}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ 4x^2-12x+9=4x+9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ x(x-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$.

So sánh với điều kiện thu được nghiệm $S=\left\{1-\sqrt{3};4\right\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 1 đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 thông qua hai bước đặt ẩn phụ. Ngoài ra các bạn có thể có được cách đặt trực tiếp thông qua "mẹo mực" nhỏ sau đây, kiến thức sử dụng là phép tính đạo hàm thuộc phạm vi chương trình giải tích lớp 11 THPT, dù rằng nó chỉ áp dụng được trong một số trường hợp.*

  Phương trình đã cho có dạng $2x^2-6x-3=\sqrt{4x+9}$. *Ta có* $\left(2x^2-6x-3\right)'=4x-6=k(2x-3);k=2$.

  Do đó sẽ xuất hiện phép đặt $\sqrt{4x+9}=2y-3$, *kết quả thu được tương tự lời giải 1.*
- *Trong trường hợp phương trình ban đầu có dấu hiệu khả quan đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 hoặc gần đối xứng loại 2 các bạn có thể sử dụng kỹ thuật "ép duyên" – cách gọi lãng mạn của bản thân tác giả, và tất nhiên nó cũng đã xuất hiện trên rất nhiều các cuốn sách, bài viết, ebook tham khảo khác.*

  Phương trình ban đầu đưa về $2x^2-6x-3=\sqrt{4x+9} \qquad (*)$.

  Đặt $\sqrt{4x+9}=my+n\Rightarrow 4x+9=m^2y^2+2mny+n^2\Leftrightarrow m^2y^2+2mny-4x+n^2-9=0$.

  Phương trình (*) ở trên trở thành $2x^2-6x-3=my+n\Leftrightarrow 2x^2-6x-my-3-n=0$.

  Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases}m^2y^2+2mny-4x+n^2-9=0\\ 2x^2-6x-my-3-n=0\end{cases}$

  Điều kiện gì để hệ phương trình trên trở thành hệ phương trình đối xứng loại 2 (hoặc gần đối xứng loại 2) ?
  - *Thành thử hệ phương trình gần đối xứng loại 2: Trừ từng vế hai phương trình thu được số hạng tự do (không chứa biến) là* n^2+n-9. *Nếu hằng số này bằng 0 thì khi đó biểu sẽ chỉ còn lại các ẩn và dễ dàng phân tích nhân tử dựa theo các hằng đẳng thức.*

    Ta có $n^2+n-9=0$, *phương trình không tồn tại nghiệm nguyên.*
  - *Thành thử hệ phương trình đối xứng loại 2. Hai phương trình trên tuân theo tỷ lệ duy nhất về hệ số sao cho sau khi giản ước thu được các hệ số tương ứng bằng nhau, bản chất là làm mất hệ số tự do để thuận tiện phân tích đa thức nhân tử.*

$$\frac{m^2}{2}=\frac{2mn}{-6}=\frac{-4}{-m}=\frac{n^2-9}{-n}\Rightarrow \begin{cases}-6m^2=4mn\\ -2m^2n=24\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}n=-\dfrac{3}{2}m\\ -m^2\left(-\dfrac{3}{2}m\right)=12\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}n=-3\\ m=2\end{cases}$$

Dễ thấy $(m;n)=(2;-3)$ *thỏa mãn dãy tỉ số trên. Và thực tiễn đã chứng minh phép đặt trên khả quan.*

- *Lưu ý trong dấu căn thức là nhị thức bậc nhất nên các bạn học sinh có thể sử dụng đồng nhất thức như sau*

$$2x^2-6x-3=\sqrt{4x+9}\Leftrightarrow 4x^2-12x-6=2\sqrt{4x+9}$$

$$\Leftrightarrow(2x+n)^2-(ax+b)=2\sqrt{2(2x+n)+ax+b}$$

Đồng nhất thức $\Rightarrow\begin{cases}n^2-b=-6\\4n-a=-12\\2n+b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n^2+2n=3\\4n-a=-12\\2n+b=9\end{cases}\Rightarrow n=-3\Rightarrow(2x-3)^2-15=2\sqrt{2(2x-3)+15}$.

Bài toán 110. Giải phương trình $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+8x+4=x+2+2\sqrt{x+2}+1\Leftrightarrow(2x+2)^2=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x+1=\sqrt{x+2} & (1)\\-2x-3=\sqrt{x+2} & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{2}\\4x^2+4x+1=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{2}\\4x^2+3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.
- $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{3}{2}\\4x^2+12x+9=x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{3}{2}\\4x^2+11x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{4}$.

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $4\left(x^2+4x+4\right)-9(x+2)+3=2\sqrt{x+2}$.

Đặt $\sqrt{x+2}=t\quad(t\ge 0)$ thu được

$$4t^4-9t^2+3=2t\Leftrightarrow t^2\left(4t^2-9\right)=2t-3\Leftrightarrow(2t-3)\left[t^2(2t+3)-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(2t-3)(2t-1)(t+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}\\t=-1\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=\dfrac{3}{2}\\\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\x=-\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x+2+2\sqrt{x+2}-4x^2-7x-3=0$.

Đặt $\sqrt{x+2}=t\quad(t\ge 0)$ thu được phương trình

$$t^2+2t-4x^2-7x-3=0\Leftrightarrow t(t-2x-1)+2x(t-2x-1)+3(t-2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+2x+3)(t-2x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+2}=2x+1 & (1)\\ \sqrt{x+2}=-2x-3 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+4x+1=x+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}.$
- $(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+12x+9=x+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+11x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{4}.$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\ge -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}16x^4+8x^2(7x+1)+49x^2+14x+1=4x+8\\ 4x^2+7x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}16x^4+56x^3+57x^2+10x-7=0\\ 4x^2+7x+1\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2(4x^2+11x+7)+3x(4x^2+11x+7)-(4x^2+11x+7)=0\\ 4x^2+7x+1\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(4x^2+3x-1)(4x^2+11x+7)=0\\ 4x^2+7x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left\{-1;-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}\\ 4x^2+7x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$$

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Lời giải 5.

Điều kiện $x\ge -2$.

Đặt $\sqrt{x+2}=y+1\ \ (y\ge 1)\Rightarrow y^2+2y-x-1=0$. Phương trình đã cho trở thành $4x^2+7x-2y-1=0$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}4x^2+7x-2y-1=0\\ y^2+2y-x-1=0\end{cases}\Rightarrow 4x^2-y^2+8x-4y=0\Leftrightarrow (2x-y)(2x+y+4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2x\\ 2x+y+4=0\end{array}\right.$$

- $y=2x\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2x+1\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+4x+1=x+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+3x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}.$
- $2x+y+4=0\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-2x-3\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+12x+9=x+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{3}{2}\\ 4x^2+11x+7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{4}.$

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Lời giải 6.

Điều kiện $x\ge -2$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$ (1).

Đặt $2x+1=t$ thì (1) trở thành $t^2+3x=2\sqrt{2t-3x}$ (2).

Đặt $\sqrt{2t-3x}=y\quad (y\ge 0)\Rightarrow y^2+3x=2t$. Phương trình (2) trở thành $t^2+3x=2y$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} t^2+3x=2y \\ y^2+3x=2t \end{cases}\Rightarrow t^2-y^2=2y-2t\Leftrightarrow (t-y)(t+y+2)=0$

- $y=t\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=2x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+4x+1=x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+3x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.
- $y=-t-2\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-2x-3\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+12x+9=x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+11x+7=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{7}{4}$.

So sánh với điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$.

Nhận xét.

- *Lời giải 2 sử dụng phép đặt một ẩn phụ và đưa về phương trình bậc bốn ẩn t:* $4t^4-9t^2+3=2t$.
  Ngoài cách phân tích trong lời giải 2, các bạn có thể tham khảo các biến đổi sau
  - $4t^4-9t^2+3=2t\Leftrightarrow 4t^4-8t^2+4=t^2+2t+1\Leftrightarrow \left(2t^2-2\right)^2=(t+1)^2\Leftrightarrow \left(2t^2-t-3\right)\left(2t^2+t-1\right)=0$
    $$\Leftrightarrow (t+1)^2(2t-3)(2t-1)=0\Leftrightarrow t\in\left\{-1;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{x+2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{4} \\ x=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$$
  - $4t^4-9t^2+3=2t\Leftrightarrow t^2.3^2-3+2t-4t^4=0$. *Đặt* $3=u\Rightarrow t^2u^2-u+2t-4t^4=0$.
    Coi đây là phương trình bậc hai ẩn u ta có $\Delta=\left(4t^3-1\right)^2$ *nên suy ra*
    $$\left[\begin{array}{l} u=2t \\ u=\dfrac{1}{t^2}-2t \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=3 \\ \dfrac{1}{t^2}=2t+3 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ 2t^3+3t-1=0 \end{array}\right.$$
- *Lời giải 5 sử dụng phép đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình gần đối xứng loại 2. Dễ thấy bài toán này không có được sự "may mắn" hình thức như các bài toán trước, có lẽ vì số 7 khá "lẻ". Sử dụng mẹo mực đạo hàm và phân tích hằng đẳng thức thực tiễn cho thấy không khả thi. Trong trường hợp này thao tác mang tên "ép duyên" lại tỏ ra hiệu quả và cho ta một hệ phương trình gần đối xứng, mặc dù vậy vẫn tới một lời giải đẹp.*
- *Lời giải 6 sử dụng phép đặt ẩn phụ liên tiếp đưa về hệ đối xứng loại 2 với 3 ẩn. Tuy nhiên vẫn biểu thị được mối quan hệ giữa hai ẩn y và t. Trong bài toán 105 tác giả đã đề cập tới dạng tổng quát*
  $$(mx+n)^2+b=a\sqrt{a(mx+n)-b}.$$
  Bài toán này độ khó đã tăng lên một chút, đó là thay hằng số b bởi một hàm số $f(x)$*; cụ thể là* $f(x)=3x$.
  $$4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}\Leftrightarrow (2x+n)^2-(ax+b)=2\sqrt{2(2x+n)+(ax+b)}.$$
  Đồng nhất thức $\Rightarrow \begin{cases} n^2-b=1 \\ 4n-a=7 \\ 2n+b=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} n^2+2n=3 \\ 4n-a=7 \\ 2n+b=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=-3 \\ b=0 \end{cases}\Rightarrow (2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$.
- *Khi thay biểu thức* $mx+n$ *bởi tam thức bậc hai hoặc thay các hằng số a và b bởi các hàm số* $f(x),g(x)$ *chúng ta thu được một lớp bài toán khá thú vị, đòi hỏi tư duy cao độ và kỹ năng tính toán chính xác.*

Bài toán 111. Giải phương trình $x^2=3+(x-1)\sqrt{x^2-x+3}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 = 3 + (x-1)\sqrt{(x-1)x+3}$ (1).

Đặt $x-1=t$ thì (1) trở thành $x^2 = 3 + t\sqrt{xt+3}$.

Đặt $\sqrt{xt+3} = y \quad (y \ge 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 3 + yt \\ y^2 = xt + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = yt - xt \Leftrightarrow (x-y)(x+y+t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y + t = 0 \end{array}\right.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt{x^2 - x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = x^2 - x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.
- $x + y + t = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = \sqrt{x^2 - x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}$.

Kết luận nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}; 3 \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 3 = (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3)(x-1) \ge 0 \\ x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - x + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3)(x-1) \ge 0 \\ 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3)(x-1) \ge 0 \\ (x-3)(3x^2 - 3x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3)(x-1) \ge 0 \\ x \in \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}; \dfrac{3 + \sqrt{33}}{6}; 3 \right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}; 3 \right\}$$

Kết luận nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}; 3 \right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3 - x^2 + (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - x + 3} + x - 2x^2 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 3} = t \quad (t \ge 0)$ thu được phương trình

$$t^2 + (x-1)t + x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow t(t-x) + 2x(t-x) - (t-x) = 0 \Leftrightarrow (t-x)(t+2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = x & (1) \\ t = 1 - 2x & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow x = \sqrt{x^2 - x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = x^2 - x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.
- $(2) \Leftrightarrow 1 - 2x = \sqrt{x^2 - x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}$.

Kết luận nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \dfrac{3 - \sqrt{33}}{6}; 3 \right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \in ¡$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3-x^2+(x-1)\sqrt{x^2-x+3}=0 \Leftrightarrow 12+4(x-1)\sqrt{x^2-x+3}=4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2-x+3\right)+4(x-1)\sqrt{x^2-x+3}+x^2-2x+1=9x^2-6x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2-x+3}+x-1\right)^2=(3x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{x^2-x+3}=x & (1)\\ \sqrt{x^2-x+3}=1-2x & (2)\end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow x=\sqrt{x^2-x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=x^2-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.
- $(2) \Leftrightarrow 1-2x=\sqrt{x^2-x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=x^2-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 3x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{6}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.

- *Lời giải 4 sử dụng phép biến đổi tương đương thông qua thêm bớt đưa về hằng đẳng thức sau khi nhân hai vế với hằng số 4, một lời giải đẹp, thuần túy nhưng hội tụ nhiều yếu tố may mắn và bí ẩn.*
- *Lời giải 3 sử dụng đặt ẩn phụ không hoàn toàn đưa về phương trình bậc hai, sử dụng công thức nghiệm phân tích đa thức thành nhân tử nguyên do biệt thức Δ là một bình phương đúng. Ngoài ra các bạn có thể trình bày như sau*

$$t^2+(x-1)t+x-2x^2=0 \Leftrightarrow t^2+xt-2x^2-t+x=0$$

$$\Leftrightarrow (t-x)(t+2x)-(t-x)=0 \Leftrightarrow (t-x)(t+2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=x & (1)\\ t=1-2x & (2)\end{array}\right.$$

  Nhận thấy $t^2+xt-2x^2$ có tính chất đồng bậc quen thuộc nên có thể nhẩm nhân tử.
- *Lời giải 1 đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 bậc hai. Xin nhắc lại một lần nữa dạng tổng quát*

$$(mx+n)^2+b=a\sqrt{a(mx+n)-b}.$$

  Cụ thể trong trường hợp này, hằng số $b=3$ nhưng hằng số a đã được thay thế bởi $x-1$.
  Trong các bài toán tiếp theo dưới đây, đôi khi a và b đều được thay bởi các hàm số $f(x), g(x)$.

Bài toán 112. Giải phương trình $\dfrac{2x^2-x+1}{\sqrt{6x-5}}=2 \qquad (x \in ¡)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x>\dfrac{5}{6}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2-x+1=2\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow 4x^2-2x+2=4\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow (2x-1)^2+2x+1=4\sqrt{4(2x-1)-(2x+1)}.$$

Đặt $2x-1=t;\ \sqrt{6x-5}=y \quad (y>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2+2x+1=4y \\ 4t-(2x+1)=y^2 \end{cases} \Rightarrow t^2+4t=4y+y^2 \Leftrightarrow t^2-y^2+4t-4y=0 \Leftrightarrow (t-y)(t+y+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ t+y+4=0 \end{array}\right.$$

- $t=y \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=6x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

- $t+y+4=0 \Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{6x-5}=0$ (Vô nghiệm do $x>\frac{5}{6}$).

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x>\frac{5}{6}$. Nhận xét rằng $2x^2-x+1>0 \quad \forall x \in ¡$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2x^2-x+1\right)^2=4\left(6x-5\right) \Leftrightarrow 4x^4+4x^2+1-2x\left(2x^2+1\right)+x^2=24x-20$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+5x^2-26x+21=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(4x^3+5x-21\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(2x-3\right)\left(2x^2+3x+7\right)=0 \Rightarrow x \in \left\{1;\frac{3}{2}\right\}$$

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x>\frac{5}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2-x+1=2\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow 4x^2-2x+2=4\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow 4x^2+4x+1=6x-5+4\sqrt{6x-5}+4$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+1\right)^2=\left(\sqrt{6x-5}+2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{6x-5}=2x-1 & (1)\\ \sqrt{6x-5}+2x+3=0 & (2)\end{array}\right.$$

- $\left(1\right) \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=6x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.
- Phương trình (2) vô nghiệm do $x>\frac{5}{6}$.

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x>\frac{5}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{6x-5}-1+x-2x^2=0 \Leftrightarrow 4\sqrt{6x-5}-2+2x-4x^2=0 \Leftrightarrow 6x-5+4\sqrt{6x-5}-4x^2-4x+3=0 \quad (1).$$

Đặt $\sqrt{6x-5}=t \ \left(t>0\right)$ thì phương trình (1) trở thành

$$t^2-4t-4x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow t\left(t+2x+3\right)-2x\left(t+2x+3\right)+\left(t+2x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left(t-2x+1\right)\left(t+2x+3\right)=0 \quad (*)$$

Vì $x>\frac{5}{6};t>0$ nên $t+2x+3>0$. Do đó

$$\left(*\right) \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{6x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=6x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2-5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1;\frac{3}{2}\right\}$$

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Nhận xét.

Để xuất hiện ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng như lời giải 1, chúng ta tiếp tục sử dụng đồng nhất thức

$$2x^2-x+1=2\sqrt{6x-5}\Leftrightarrow 4x^2-2x+2=4\sqrt{6x-5}$$
$$\Leftrightarrow (2x+n)^2-(ax+b)=4\sqrt{4(2x+n)+ax+b}$$

Đồng nhất $\Rightarrow \begin{cases} n^2-b=2 \\ 4n-a=-2 \\ 4n+b=-5 \\ 8+a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+4n=-3 \\ 4n-a=-2 \\ 4n+b=6 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ b=-1 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow (2x-1)^2+2x+1=4\sqrt{4(2x-1)-(2x+1)}$.

Bài toán 113. Giải phương trình $9x^2-5x=(2-x)\sqrt{3x^2-8x+3}\qquad (x\in ¡)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $3x^2-8x+3\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(3x-1)^2+x-1=(2-x)\sqrt{(2-x)(1-3x)-(x-1)}$.

Đặt $1-3x=t;\sqrt{3x^2-8x+3}=y\ (y\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2+x-1=(2-x)y \\ y^2+x-1=(2-x)t \end{cases} \Rightarrow t^2-y^2=(2-x)(y-t)\Leftrightarrow (t-y)(t+y+2-x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ t+y=x-2 \end{array}\right.$$

- $t=y\Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{3x^2-8x+3}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 3x^2-8x+3=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 3x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
- $t+y=x-2\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-8x+3}=4x-3\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4} \\ 13x^2-16x+6=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=-\frac{\sqrt{13}+1}{6}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3x^2-8x+3\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (9x^2-5x)(2-x)\ge 0 \\ 81x^4-90x+25x^2=(x^2-4x+4)(3x^2-8x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9x^2-5x)(2-x)\ge 0 \\ 39x^4+10x^3-11x^2-23x-6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (9x^2-5x)(2-x)\ge 0 \\ (3x^2+x-1)(13x^2-16x+6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9x^2-5x)(2-x)\ge 0 \\ x\in\left\{-\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{13}+1}{6}$$

So sánh điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{\sqrt{13}+1}{6}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $3x^2-8x+3\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2-x)\sqrt{3x^2-8x+3}-9x^2+5x=0\Leftrightarrow 3x^2-8x+3+(2-x)\sqrt{3x^2-8x+3}-12x^2+13x-3=0.$$

Đặt $\sqrt{3x^2-8x+3}=t\ (t\ge 0)$ thu được

$$t^2+(2-x)t-12x^2+13x-3=0 \Leftrightarrow t(t+3x-1)-4x(t+3x-1)+3(t+3x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (t-4x+3)(t+3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1-3x & (1) \\ t=4x-3 & (2) \end{array}\right.$$

- $(1) \Leftrightarrow 1-3x=\sqrt{3x^2-8x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 3x^2-8x+3=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 3x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
- $(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-8x+3}=4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{4} \\ 13x^2-16x+6=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{\sqrt{13}+1}{6}$.

Nhận xét.

Đối với bài toán này, các bạn có vẫn sử dụng đồng nhất thức, tìm chính xác các ẩn phụ đưa về hệ phương trình, tuy nhiên cần khéo léo một chút

$$9x^2-5x=(2-x)\sqrt{3x^2-8x+3}$$
$$\Leftrightarrow (n-3x)^2-(ax+b)=(2-x)\sqrt{(2-x)(n-3x)+ax+b}$$

Đồng nhất thức $\Rightarrow \begin{cases} n^2-b=0 \\ 2n+b=3 \\ -6n-a=-5 \\ -6-n+a=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+2n=3 \\ 2n+b=3 \\ -6n-a=-5 \\ n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ b=1 \\ a=-1 \end{cases}$

Suy ra $(3x-1)^2+x-1=(2-x)\sqrt{(2-x)(1-3x)-(x-1)}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^2-1=\sqrt{x+1}$.
2. $x^2-2=\sqrt{x+2}$.
3. $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=0$.
4. $4x^2-4x-7=3\sqrt{6x+5}$.
5. $x^4+\sqrt{x^2+2013}=2013$.

6. $x-2005=\sqrt{\sqrt{x}-2005}$.
7. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+9}{7}}=7\left(x^2+1\right)$.
8. $x^2-6x+3=\sqrt{x+3}$.
9. $4x^2-4x-2=\sqrt{2x+2}$.
10. $4\left(x^2-x+2\right)=5\sqrt{10x-12}$.
11. $x^2+2x-5=3\sqrt{3x+9}$.
12. $16x^2-5=\sqrt{4x+5}$.
13. $\frac{x^2-4x+9}{\sqrt{6x-17}}=6$.
14. $9x^2-6x+1=7\sqrt{21x-8}$.
15. $x^2+2x+8=6\sqrt{6x-1}$.
16. $x^2-6x+13=3\sqrt{3x-13}$.
17. $x^2+5x+5=7\sqrt{25+8x}$.
18. $\frac{4x^2-4x-5}{1+x}=\sqrt{2x^2+x+5}$.
19. $4x^2+7=\sqrt{2x-7}$.
20. $x^2-2x+15=3\sqrt{x+3}$.
21. $9x^2+8=\sqrt{3x-8}$.
22. $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$.
23. $\sqrt{4x+1}=-4x^2+13x-5$.
24. $x^2-13x+5+\sqrt{1+3x}=0$.
25. $32x^2+32x-20=\sqrt{5+2x}$.
26. $\sqrt{x-1}+x^2=x+3$.
27. $18x^2+6x-29=\sqrt{61+12x}$.
28. $\sqrt{9x-5}=3\left(1+x^2\right)+2x$.
29. $4x^2+4x-4=3\sqrt{2\left(3x-1\right)}$.
30. $x^2+6x+13=x\sqrt{x\left(x+3\right)-4}$.
31. $4x^2-x=2\sqrt{x-1}$.
32. $x^2+10x+11=4\sqrt{2x+21}$.
33. $9x^2+3x+5=7\sqrt{24x+3}$.
34. $\frac{4x^2-8x+7}{\sqrt{6x-13}}=5$.
35. $25x^2-6x+1=3x\sqrt{15x^2-7x}$.
36. $9x^2-5x+1=2\sqrt{5x-2}$.
37. $x^2+x+7=3\sqrt{5x-3}$.
38. $x^2+11x+32=7\sqrt{6x+28}$.
39. $4x^2+7x+2=3\sqrt{4x+2}$.

40. $x^2+12x+4=7\sqrt{x+20}$.
41. $x^2=5x+1+2\sqrt{9x+4}$.
42. $4x^2+5x+4=8\sqrt{15x+5}$.
43. $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$.
44. $9x^2+13x+9=3\sqrt{8x+1}$.
45. $2\left(x^2+3x-2\right)=\sqrt{\dfrac{3x+14}{2}}$.
46. $x^2+4x=\sqrt{6+x}$.
47. $x^2=\sqrt{x-2}+2$.
48. $x^2-4x+\sqrt{5+2x}=0$.
49. $8x^2+8x+1=\sqrt{x+5}$.
50. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.
51. $\dfrac{2}{3}\sqrt{4x+1}-9x^2+26x+\dfrac{37}{3}=0$.
52. $\sqrt{\dfrac{8x^2-15x+9}{2}}=2x^2-4x+3$.
53. $\sqrt{\dfrac{4x^2-3x-5}{2}}=2x^2-2x-5$.
54. $\sqrt{16-8x-3x^2}=x^2+3x-4$.
55. $x^2+4x+7=\left(4+x\right)\sqrt{x^2+7}$.
56. $x\left(4x+3\right)=4\sqrt{\dfrac{2x+1}{2}}+\dfrac{7}{2}$.
57. $40x^2+7x=2+14x\sqrt{x-1}$.
58. $16x^2-5x=\sqrt{x+1}+1$.
59. $25x^2+\sqrt{2+3x}=13x+\dfrac{5}{4}$.
60. $\sqrt{1+3x}+x=\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)$.
61. $\sqrt{3x+1}<16x^2+x-1$.
62. $10+3x^2+2x\sqrt{1+x}=13x$.
63. $x^2-20+4\sqrt{5+x}=2x$.
64. $x^2+5x+7=2\sqrt{1+x}$.
65. $9x^2-10x+4+4\sqrt{x-1}=0$.
66. $4x^2+7x+8\sqrt{x+3}=15$.
67. $2\left(x^2+x-1\right)=\sqrt{x^2+\dfrac{8x+11}{2}}$.
68. $9x^2+12x=2+\sqrt{8+3x}$.
69. $3\left(x^2+x-1\right)=\sqrt{\dfrac{5x+8}{3}}$.
70. $8\left(4x^2+5x+3\right)=3\sqrt{2x-5}$.

71. $5\left(9x^2+5x+3\right)=\sqrt{\dfrac{8x-9}{5}}$.

72. $\dfrac{3}{2}\left(x^2+3x+8\right)=\sqrt{5x-8}$.

73. $2\left(4x^2+x+5\right)=\sqrt{\dfrac{8x-7}{2}}$.

74. $6\left(2x^2-3x+3\right)=\sqrt{\dfrac{8x-16}{3}}$.

75. $7\left(x^2+5x+16\right)=\sqrt{\dfrac{8x-46}{7}}$.

76. $2\left(2x^2+5x-2\right)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+7x-5}{2}}$.

77. $6(1+x)^2=\sqrt{\dfrac{8+x-3x^2}{3}}$.

78. $5\left(5x^2+2x+4\right)=\sqrt{\dfrac{-5x^2+12x-14}{5}}$.

79. $7\left(x^2-x-1\right)=\sqrt{x^2+\dfrac{9}{7}x+1}$.

80. $6\left(8x^2-2x-3\right)=\sqrt{\dfrac{2x^2+5x+6}{2}}$.

81. $11\left(3x^2-x-3\right)=\sqrt{\dfrac{11x^2+13x+33}{11}}$.

82. $3\left(3x^2+11x+9\right)=\sqrt{\dfrac{3x^2+5x+3}{3}}$.

83. $3\left(2x^2-13x+4\right)=\sqrt{\dfrac{6x^2+5x+12}{3}}$.

84. $5\left(8x^2-7x-1\right)=2\sqrt{\dfrac{5x^2+11x+8}{5}}$.

85. $7\left(14x^2+7x+3\right)=3\sqrt{\dfrac{14x^2+19x-11}{7}}$.

86. $5\left(6x^2+11x+14\right)=6\sqrt{\dfrac{15x^2+23x+34}{5}}$.

Bài toán 114. Giải phương trình $x^2+x+6=(2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4} \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2+5x+2\geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+2)^2-(3x-2)=(2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+2)+(3x-2)}$.

Đặt $x+2=t;\sqrt{2x^2+10x+4}=y\quad (y\geq 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2=3x-2+(2x+3)y \\ y^2=(2x+3)t+3x-2 \end{cases} \Rightarrow t^2-y^2=(2x+3)(y-t)\Leftrightarrow (t-y)(t+y+2x+3)=0$$

- $t=y\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+10x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x+4=2x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+6x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.
- $t+y+2x+3=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+10x+4}=-3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\frac{5}{3}\\ 9x^2+30x+25=2x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\frac{5}{3}\\ 7x^2+20x+21=0\end{cases}$ (*)

Hệ phương trình (*) vô nghiệm. Kết hợp với điều kiện $x^2+5x+2\ge 0$ thu được tập nghiệm $S=\{0\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2+5x+2\ge 0$.

Nhận xét $x^2+x+6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2x+3>0\\ x^4+2x^3+13x^2+12x=36=\left(4x^2+12x+9\right)\left(2x^2+10x+4\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\ 7x^4+62x^3+141x^2+126x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\ x(x+6)\left(7x^2+20x+21\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\ x\in\{-6;0\}\end{cases}\Rightarrow x=0$$

Kết hợp với điều kiện $x^2+5x+2\ge 0$ thu được tập nghiệm $S=\{0\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^2+5x+2\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4}-x^2-x-6=0\Leftrightarrow 2x^2+10x+4+(2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4}-3x^2-11x-10=0.$$

Đặt $\sqrt{2x^2+10x+4}=t\ (t\ge 0)$ thu được phương trình

$$t^2+(2x+3)t-3x^2-11x-10=0\Leftrightarrow t(t+3x+5)-x(t+3x+5)-2(t+3x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow(t+3x+5)(t-x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=x+2 & (1)\\ t=-3x-5 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+10x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x+4=2x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+6x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\in\{-6;0\}\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.
- $(2)\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+10x+4}=-3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\frac{5}{3}\\ 9x^2+30x+25=2x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -\frac{5}{3}\\ 7x^2+20x+21=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết hợp với điều kiện $x^2+5x+2\ge 0$ thu được tập nghiệm $S=\{0\}$.

Nhận xét.

Các bạn học sinh lưu ý bài toán 114 trở đi, mức độ phức tạp đã tăng dần đều, nguyên do dạng thức

$$(mx+n)^2-g(x)=f(x)\sqrt{f(x)(mx+n)+g(x)}.$$

Trong đó $f(x),g(x)$ theo thứ tự là nhị thức bậc nhất và nhị thức bậc nhất (hoặc tam thức bậc hai). Chúng ta vẫn sử dụng chiêu bài đồng nhất thức như sau

$$x^2+x+6=(2x+3)\sqrt{2x^2+10x+4}$$

$$\Leftrightarrow(x+n)^2-(ax+b)=(2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+n)+ax+b}$$

Đồng nhất hệ số $\Rightarrow \begin{cases} n^2-b=6 \\ 2n-a=1 \\ 2n+3+a=10 \\ 3n+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+3n=10 \\ 2n-a=1 \\ 2n+a=7 \\ 3n+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ a=3 \\ b=-2 \end{cases}$

Thu được $(x+2)^2-(3x-2)=(2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+2)+(3x-2)}$.

Bài toán 115. Giải phương trình $x^2-x+6=(x-2)\sqrt{(x-1)(x-9)} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $(x-1)(x-9)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 9 \vee x\le 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-3)^2+5x-3=(x-2)\sqrt{x^2-10x+9} \Leftrightarrow (x-3)^2+5x-3=(x-2)\sqrt{(x-2)(x-3)-(5x-3)}.$$

Đặt $x-3=t;\sqrt{(x-1)(x-9)}=y\ (y\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2+5x-3=(x-2)y \\ y^2+5x-3=(x-2)t \end{cases} \Rightarrow t^2-y^2=(x-2)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t+y+x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ t+y+x=2 \end{array}\right.$$

- $t=y \Leftrightarrow x-3=\sqrt{x^2-10x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-6x+9=x^2-10x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $t+y+x=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-10x+9}=5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{5}{2} \\ x^2-10x+9=4x^2-20x+25 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $(x-1)(x-9)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 9 \vee x\le 1$.

Nhận xét: $x^2-x+6=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}>0\,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x^4-2x^3+13x^2-12x+36=(x^2-4x+4)(x^2-10x+9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 12x^3-40x^2+64x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x(3x^2-10x+16)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x^2-10x+16=0 \quad (*) \end{array}\right. \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm. Bên cạnh đó $x=0<2$. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $(x-1)(x-9)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 9 \vee x\le 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)\sqrt{x^2-10x+9}-x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x^2-10x+9+(x-2)\sqrt{x^2-10x+9}-2x^2+11x-15=0$$

Đặt $\sqrt{x^2-10x+9}=t\ (t\ge 0)$ thu được

$$t^2+(x-2)t-2x^2+11x-15=0 \Leftrightarrow t(t+2x-5)-x(t+2x-5)+3(t+2x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-x+3)(t+2x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2-10x+9}=x-3 & (1) \\ \sqrt{x^2-10x+9}=5-2x & (2) \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 6x + 9 = x^2 - 10x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 9} = 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ x^2 - 10x + 9 = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$x^2 - x + 6 = (x-2)\sqrt{(x-1)(x-9)}$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + 5x - 3 = (x-2)\sqrt{x^2 - 10x + 9}$$
$$\Leftrightarrow (x+n)^2 - (ax+b) = (x-2)\sqrt{(x-2)(x+n) + ax + b}$$

Thao tác tương tự, chúng ta tiếp tục dồn dân, di dân, ép đồng nhất thức hệ số

$$\begin{cases} n^2 - b = 6 \\ -2n + b = 9 \\ 2n - a = -1 \\ n - 2 + a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2n = 15 \\ -2n + b = 9 \\ 2n - a = -1 \\ n - 2 + a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \{-3;5\} \\ n = -3; a = -5 \\ -2n + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 \\ a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Suy ra $(x-3)^2 + 5x - 3 = (x-2)\sqrt{(x-2)(x-3) - (5x-3)}$.

Bài toán 116. Giải phương trình $8x^2 + 11x + 1 = (x+1)\sqrt{4x^2 + 6x + 5}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(3x+2)^2 - (x^2 + x + 3) = (x+1)\sqrt{(x+1)(3x+2) + (x^2 + x + 3)}$.

Đặt $3x + 2 = t; \sqrt{4x^2 + 6x + 5} = y \ (y \ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^2 = x^2 + x + 3 + (x+1)y \\ y^2 = (x+1)t + x^2 + x + 3 \end{cases} \Rightarrow t^2 - y^2 = (x+1)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t+y+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = y \\ t + y + x + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $t = y \Leftrightarrow 3x + 2 = \sqrt{4x^2 + 6x + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ 9x^2 + 12x + 4 = 4x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{14} - 3}{5}$.
- $t + y + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 6x + 5} = -4x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{3}{4} \\ 4x^2 + 6x + 5 = 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{9 + \sqrt{33}}{12}$.

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{ \dfrac{\sqrt{14} - 3}{2}; -\dfrac{9 + \sqrt{33}}{12} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(8x^2+11x+1)(x+1)\ge 0\\ 64x^4+137x^2+1+22x(8x^2+1)=(x^2+2x+1)(4x^2+6x+5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(8x^2+11x+1)(x+1)\ge 0\\ 30x^4+81x^3+58x^2+3x-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(8x^2+11x+1)(x+1)\ge 0\\ (5x^2+6x-1)(6x^2+9x+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(8x^2+11x+1)(x+1)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}5x^2+6x-1=0\\ 6x^2+9x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\sqrt{14}-3}{2};-\frac{9+\sqrt{33}}{12}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)\sqrt{4x^2+6x+5}-8x^2-11x-1=0\Leftrightarrow 4x^2+6x+5+(x+1)\sqrt{4x^2+6x+5}-12x^2-17x-6=0.$$

Đặt $\sqrt{4x^2+6x+5}=t\ \ (t>0)$ thu được

$$t^2+(x+1)t-12x^2-17x-6=0\Leftrightarrow t(t-3x-2)+4x(t-3x-2)+3(t-3x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-3x-2)(t+4x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{4x^2+6x+5}=3x+2 & (1)\\ \sqrt{4x^2+6x+5}=-4x-3 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{2}{3}\\ 9x^2+12x+4=4x^2+6x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{2}{3}\\ 5x^2+6x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{14}-3}{5}.$
- $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{3}{4}\\ 4x^2+6x+5=16x^2+24x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{3}{4}\\ 6x^2+9x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{9+\sqrt{33}}{12}.$

Kết luận bài toán có hai nghiệm nêu trên.

Nhận xét.

Mức độ phức tạp đã tăng thực sự, nguyên do dạng thức

$$(mx+n)^2-g(x)=f(x)\sqrt{f(x)(mx+n)+g(x)}.$$

Trong đó $f(x),g(x)$ *lúc này theo thứ tự là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai. Chúng ta vẫn sử dụng chiêu bài đồng nhất thức trước hết qua biến đổi*

$$8x^2+11x+1=(x+1)\sqrt{4x^2+6x+5}$$

$$\Leftrightarrow(3x+n)^2-(x^2+ax+b)=(x+1)\sqrt{(x+1)(3x+n)+x^2+ax+b}$$

Để ý rằng $8=9-1$ *nên các bạn có thể xông pha thử xem sao*

Đồng nhất $\begin{cases}n^2-b=1\\ n+b=5\\ 6n-a=11\\ n+3+a=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2+n=6\\ n+b=5\\ n=2;a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\ a=1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow(3x+2)^2-(x^2+x+3)=(x+1)\sqrt{(x+1)(3x+2)+(x^2+x+3)}.$

Bài toán 117. Giải phương trình $2x^2+7x+16=(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2+10x+4\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+4)^2+x^2-x=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(x+4)-(x^2-x)}$.

Đặt $x+4=t;\sqrt{x^2+10x+4}=y\ (y\geq 0)$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}t^2+x^2-x=(2x+1)y\\ y^2+x^2-x=(2x+1)t\end{cases}\Rightarrow t^2-y^2=(2x+1)(y-t)\Leftrightarrow(t-y)(t+y+2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=y\\ t+y+2x+1=0\end{array}\right.$$

- $t=y\Leftrightarrow x+4=\sqrt{x^2+10x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x^2+8x+16=x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow x=6$.
- $t+y+2x+1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+10x+4}=-3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -\frac{5}{3}\\ x^2+10x+4=9x^2+30x+25\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện; kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2+10x+4\geq 0$.

Nhận xét $2x^2+7x+16=2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{79}{8}>0\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}2x+1>0\\ 4x^4+28x^3+113x^2+224x+256=(4x^2+4x+1)(x^2+10x+4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1>0\\ 8x^3-28x^2-99x-126=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1>0\\ (x-6)(8x^2+20x+21)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6$$

So sánh điều kiện; kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^2+10x+4\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}-2x^2-7x-16=0\Leftrightarrow x^2+10x+4+(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}-3x^2-17x-20=0.$$

Đặt $\sqrt{x^2+10x+4}=t\ (t\geq 0)$ thu được

$$t^2+(2x+1)t-3x^2-17x-20=0\Leftrightarrow t(t-x-4)+3x(t-x-4)+5(t-x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow(t+3x+5)(t-x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=-3x-5 & (1)\\ t=x+4 & (2)\end{array}\right.$$

- $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+10x+4}=-3x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -\frac{5}{3}\\ x^2+10x+4=9x^2+30x+25\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $(2)\Leftrightarrow x+4=\sqrt{x^2+10x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x^2+8x+16=x^2+10x+4\end{cases}\Leftrightarrow x=6$.

So sánh điều kiện; kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$.

Nhận xét.

- *Trong phạm vi từng bài toán, tác giả đã cố gắng trình bày ít nhất ba lời giải, trong đó có một lời giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn và ít nhất một lời giải bằng phép nâng lũy thừa (xin không trình bày lời giải sử dụng biến đổi tương đương, phân tích hằng đẳng thức. Thành thử tâm nguyện tác giả mong muốn các bạn độc giả có cách nhìn toàn diện, linh hoạt, đa lựa chọn trong thao tác tư duy khi đứng trước lớp phương trình căn thức tương tự, làm nền tảng nâng cao năng lực giải quyết các bài toán đại số nói chung, đáp ứng nội dung thi cử thực tế đang ngày một đa dạng, cam go và nhiều bất ngờ.*

- *Dạng tổng quát* $(mx+n)^2 - g(x) = f(x)\sqrt{f(x).(mx+n)+g(x)}$*, ở đây các hằng số a và b trong các bài toán trước đã phức tạp hóa bởi các hàm số* $f(x),g(x)$ *trong đó* $g(x)$ *bước đầu có dạng tam thức bậc hai. Bài toán trở nên rất thú vị khi các hàm* $f(x), mx+n$ *được thay thế bởi dạng tam thức bậc hai đồng bộ.*
- *Đối với lớp phương trình trên, hướng đi an toàn hơn là đặt ẩn phụ không hoàn toàn, tuy nhiên với phương trình chứa căn bậc ba và cao hơn có lẽ tình hình đã đổi khác theo hướng bất lợi. Hướng đi hệ phương trình mang tính chất mạo hiểm, táo bạo, có chiều sâu và trong một số trường hợp trở nên tối ưu. Khi bài toán trở nên phức tạp hơn bởi sự xuất hiện của các hàm thay thế* $f(x),g(x)$ *các bạn vẫn ung dung sử dụng đồng nhất thức, xin phân tích tiếp tục đối với bài toán số 117.*

  Giải phương trình $2x^2+7x+16=(2x+1)\sqrt{x^2+10x+4}$.

  Hướng phân tích.

  Dễ thấy: Vế trái phương trình và biểu thức dưới dấu căn có dạng tam thức bậc hai.

  Do đó giả dụ bài toán biến đổi đưa về

$$(mx+n)^2+(ax^2+bx+c)=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(mx+n)-(ax^2+bx+c)}.$$

  Ở đây chúng ta chưa vội xông pha lấy ngay $(x+n)^2+(x^2+ax+b)=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(x+n)-(x^2+ax+b)}$ *vì trong nhiều trường hợp lắt léo, mọi thứ không được đẹp đẽ như thế.*

  Đặt ẩn phụ $mx+n=t;\sqrt{(2x+1)(mx+n)-(ax^2+bx+c)}=y$ *suy ra hệ phương trình*

$$\begin{cases} t^2+(ax^2+bx+c)=(2x+1)y \\ (2x+1)t-(ax^2+bx+c)=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+(ax^2+bx+c)=(2x+1)y \\ y^2+(ax^2+bx+c)=(2x+1)t \end{cases}$$

  Tìm các hệ số a,b,c,m,n *thông qua đồng nhất thức*

$$\begin{cases} (mx+n)^2+(ax^2+bx+c)=2x^2+7x+16 \\ (2x+1)(mx+n)-(ax^2+bx+c)=x^2+10x+4 \end{cases}$$

  Thực hiện cộng từng vế ta có

$$(mx+n)^2+(2x+1)(mx+n)=3x^2+17x+20$$
$$\Leftrightarrow m^2+2mnx+n^2+2mx^2+2nx+mx+n=3x^2+17x+20$$
$$\Leftrightarrow (m^2+2m)x^2+(2mn+2n+m)x+n^2+n=3x^2+17x+20$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m^2+2m=3 \\ 2mn+2n+m=17 \\ n^2+n=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m;n)=(1;4),(1;-5),(-3;4),(-3;5) \\ 2mn+2n+m=17 \end{cases} \Leftrightarrow (m;n)=(1;4)$$

  Từ đây có thể tìm các hệ số a,b,c *dễ dàng. Và kết quả chúng ta có*

$$(x+4)^2+x^2-x=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(x+4)-(x^2-x)}.$$

  Trong trường hợp thu được kết quả "lẻ như gạo tẻ", các bạn có thể bắt đầu tìm hướng đi khác hoặc kiểm tra lại các bước tính toán phía trên. Sau đây là một số thí dụ nhẹ nhàng hơn.

Bài toán 118. Giải phương trình $x^2+7x+16=(2x-3)\sqrt{2x^2+2x-16}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+x-8\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+3)^2+(x+7)=(2x-3)\sqrt{(2x-3)(x+3)-x-7}$.

Đặt $x+3=u$ và $\sqrt{2x^2+2x-16}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x+7=(2x-3)v\\v^2+x+7=(2x-3)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(2x-3)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u-v=0\\u-v+2x-3=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v\Leftrightarrow x+3=\sqrt{2x^2+2x-16}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\x^2+6x+9=2x^2+2x-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\x^2-4x-25=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{29}$.
- $u-v+2x-3=0\Leftrightarrow 3x=\sqrt{2x^2+2x-16}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\7x^2-2x+16=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2+\sqrt{29}$.

Bài toán 119. Giải phương trình $4x^2+9x+1=(4x-1)\sqrt{8x^2-3x-1}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $8x^2-3x-1\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x+1)^2+5x=(4x-1)\sqrt{(4x-1)(2x+1)-5x}$.

Đặt $2x+1=u;\sqrt{8x^2-3x-1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+5x=(4x-1)v\\v^2+5x=(4x-1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(4x-1)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u+v=1-4x\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{8x^2-3x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\ge 0\\4x^2+4x+1=8x^2-3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\4x^2-7x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{-\dfrac{1}{4};2\right\}$.
- $u+v=1-4x\Leftrightarrow -6x=\sqrt{8x^2-3x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\36x^2=8x^2-3x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\28x^2+3x+1=0\end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-\dfrac{1}{4};x=2$.

Bài toán 120. Giải phương trình $4x^2+19x+6=x\sqrt{2x^2-4x+3}$ $\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2-4x+3\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x+3)^2+7x-3=x\sqrt{x(2x+3)-7x+3}$.

Đặt $2x+3=u;\sqrt{2x^2-4x+3}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+7x-3=xv\\u^2+7x-3=xu\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=x(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u+v=-x\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow 2x+3=\sqrt{2x^2-4x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\ge 0\\4x^2+12x+9=2x^2-4x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{3}{2}\\2x^2+16x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-4+\sqrt{13}$.
- $u+v=-x\Leftrightarrow -\sqrt{2x^2-4x+3}=3x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\7x^2+22x+6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-11-\sqrt{79}}{7}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 121. Giải phương trình $\frac{9x^2+2}{3x-1}=\sqrt{9x^2+6x-2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x\neq \frac{1}{3} \\ 9x^2+6x-2\geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $(3x+1)^2-6x+1=(3x-1)\sqrt{(3x-1)(3x+1)+6x-1}$.

Đặt $3x+1=u;\sqrt{9x^2+6x-2}=v$ ta thu được hệ

$$\begin{cases} u^2-6x+1=(3x-1)v \\ v^2-6x+1=(3x-1)u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(3x-1)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=1-3x \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow 3x+1=\sqrt{9x^2+6x-2}\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\geq 0 \\ 9x^2+6x+1=9x^2+6x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\geq 0 \\ 0x=1 \end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $u+v=1-3x\Leftrightarrow -6x=\sqrt{9x^2+6x-2}$ (Vô nghiệm vì $3x-1>0$).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 122. Giải phương trình $\frac{4x^2+23(x+1)}{x+2}=\sqrt{2(x^2+3x+6)}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+23x+23=(x+2)\sqrt{2x^2+6x+12}$$
$$\Leftrightarrow (2x+5)^2+(3x-2)=(x+2)\sqrt{(x+2)(2x+5)-3x+2}$$

Đặt $2x+5=u;\sqrt{2x^2+6x+12}=v$ ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} u^2+3x-2=(x+2)v \\ v^2+3x-2=(x+2)u \end{cases}$

Thực hiện trừ từng vế thu được $u^2-v^2=(x+2)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x+2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+5=\sqrt{2x^2+6x+12} & (1) \\ \sqrt{2x^2+6x+12}=-3x-7 & (2) \end{array}\right.$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5\geq 0 \\ 4x^2+20x+25=2x^2+6x+12 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geq -5 \\ 2x^2+14x+13=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-7+\sqrt{23}}{2}$.
- $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-7\geq 0 \\ 2x^2+6x+12=9x^2+42x+49 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\frac{7}{3} \\ 7x^2+36x+37=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-18-\sqrt{65}}{7}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên, $x=\frac{-7+\sqrt{23}}{2};x=\frac{-18-\sqrt{65}}{7}$.

Bài toán 123. Giải phương trình $\frac{16x^2-11x+1}{x+4}=\sqrt{4x^2+18x-4}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq -4 \\ 2x^2 + 9x - 2 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$16x^2 - 11x + 1 = (x+4)\sqrt{4x^2 + 18x - 4}$$
$$\Leftrightarrow (4x-1)^2 - 3x = (x+4)\sqrt{(x+4)(4x-1) + 3x}$$

Đặt $4x - 1 = u; \sqrt{4x^2 + 18x - 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - 3x = (x+4)v \\ v^2 - 3x = (x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (x+4)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x - 1 = \sqrt{4x^2 + 18x - 4} & (1) \\ \sqrt{4x^2 + 18x - 4} = -5x - 3 & (2) \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

✓ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 16x^2 - 8x + 1 = 4x^2 + 18x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{4} \\ 12x^2 - 26x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{13 + \sqrt{109}}{12}$.

✓ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 + 18x - 4 = 25x^2 + 30x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq -3 \\ 21x^2 + 12x + 13 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = \dfrac{13 + \sqrt{109}}{12}$.

Bài toán 124. Giải phương trình $\dfrac{30}{\sqrt{2x^2 + 7x - 9} - 9} = x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 1; 2x < -9 \\ 2x^2 + 7x \neq 90 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{30}{\sqrt{2x^2 + 7x - 9} - 9} = x + 1 \Leftrightarrow 30 = (x+1)\left(\sqrt{2x^2 + 7x - 9} - 9\right)$$
$$\Leftrightarrow 9x + 39 = (x+1)\sqrt{2x^2 + 7x - 9}$$
$$\Leftrightarrow (x+5)^2 - (x^2 + x - 14) = (x+1)\sqrt{(x+1)(x+5) + x^2 + x - 14}$$

Đặt $x + 5 = u; \sqrt{2x^2 + 7x - 9} = v, (v \geq 0; v \neq 9)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - (x^2 + x - 14) = (x+1)v \\ v^2 - (x^2 + x - 14) = (x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (x+1)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x + 5 = \sqrt{2x^2 + 7x - 9} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x^2 + 10x + 25 = 2x^2 + 7x - 9 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2 - 3x - 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{3 - \sqrt{145}}{2}; \dfrac{3 + \sqrt{145}}{2}\right\}$.

- $u + v + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 7x - 9} = -2x - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge 6 \\ 2x^2+7x-9=(2x+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ 2x^2+17x+45=0 \quad (1) \end{cases}$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện đi đến tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{145}}{2};\dfrac{3+\sqrt{145}}{2}\right\}$.

Bài toán 125. Giải phương trình $\dfrac{2x^2+2x-3}{2x+3}=\sqrt{x^2+5x+7} \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ne -\dfrac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2+2x-3=(2x+3)\sqrt{x^2+5x+7} \Leftrightarrow (x+1)^2+x^2-4=(2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+1)-x^2+4}.$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{x^2+5x+7}=v,(v>0)$ ta thu được

$$\begin{cases} u^2+x^2-4=(2x+3)v \\ v^2+x^2-4=(2x+3)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=(2x+3)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+2x+3=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2+5x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+2x+1=x^2+5x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 3x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$.
- $u+v+2x+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+7}=-3x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x\ge 4 \\ 8x^2+19x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-19-\sqrt{73}}{16}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm như trên.

Nhận xét.

Đối với bài toán này, chúng ta vẫn cứ xông pha, để ý rằng $2=1+1$ *nên tạm thời sử dụng*

$$2x^2+2x-3=(2x+3)\sqrt{x^2+5x+7}$$

$$\Leftrightarrow (x+n)^2+x^2+ax+b=(2x+3)\sqrt{(2x+3)(x+n)-(x^2+ax+b)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^2+b=-3;3n-b=7 \\ 2n+a=2 \\ 2n+3-a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+3n=4 \\ 3n-b=7 \\ n=1;a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=0 \\ b=-4 \end{cases}$

Bài toán 126. Giải phương trình $5+\dfrac{3}{x}=\sqrt{2x^2+x+1} \qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5x+3=x\sqrt{2x^2+x+1} \Leftrightarrow (x+2)^2-x^2+x-1=x\sqrt{x(x+2)+x^2-x+1}.$$

Đặt $x+2=u;\sqrt{2x^2+x+1}=v,(v>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-x^2+x-1=xv \\ v^2-x^2+x-1=xu \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=x(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- ✓ $u=v\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x+4=2x^2+x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-3x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3+\sqrt{21}}{2};\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right\}$.
- ✓ $u+v+x=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}=-2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ 2x^2+x+1=4x^2+8x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -1\\ 2x^2+7x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-3$.

Vậy phương trình ban đầu có tập hợp nghiệm $x\in\left\{\frac{3+\sqrt{21}}{2};-3;\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Nhận xét.
Đối với bài toán này, phía ngoài căn thức có dạng nhị thức bậc nhất nên sử dụng tạm thời

$$5x+3=x\sqrt{2x^2+x+1}\Leftrightarrow(x+n)^2-(x^2+ax+b)=x\sqrt{x(x+n)+x^2+ax+b}.$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases}n^2-b=3;b=1\\ n+a=1\\ 2n-a=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2=4;b=1\\ n=2;a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=2\\ a=-1\\ b=1\end{cases}\Rightarrow(x+2)^2-x^2+x-1=x\sqrt{x(x+2)+x^2-x+1}$.

Bài toán 127. Giải phương trình $\frac{4x^2+17x+27}{2+x}=\sqrt{2x^2+12x+8}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ne -2\\ x^2+6x+4\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+17x+27=(x+2)\sqrt{2x^2+12x+8}$$
$$\Leftrightarrow(2x+5)^2-3x+2=(x+2)\sqrt{(x+2)(2x+5)+3x-2}$$

Đặt $2x+5=u;\sqrt{2x^2+12x+8}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-3x+2=(x+2)v\\ v^2-3x+2=(x+2)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x+2)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x+2=0\end{array}\right.$$

- ➢ $u=v\Leftrightarrow 2x+5=\sqrt{2x^2+12x+8}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5\ge 0\\ 4x^2+20x+25=2x^2+12x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge -5\\ 2x^2+8x+17=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- ➢ $u+v+x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+12x+8}=-3x-7\Leftrightarrow\begin{cases}-7\ge 3x\\ 7x^2+30x+41=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 128. Giải phương trình $\frac{3}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}-6}=x+1\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge 1\vee x\le -\frac{3}{2}\\ (x-1)(2x+3)\ne 36\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3=(x+1)\left(\sqrt{(x-1)(2x+3)}-6\right)\Leftrightarrow 6x+9=(x+1)\sqrt{2x^2+x-3}$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4-x^2+2x+5=(x+1)\sqrt{x^2+3x+2+x^2-2x-5}$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2-x^2+2x+5=(x+1)\sqrt{(x+1)(x+2)+x^2-2x-5}$$

Đặt $x+2=u;\sqrt{2x^2+x-3}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-x^2+2x+5=(x+1)v\\ v^2-x^2+2x+5=(x+1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x+1)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x+1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+x-3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2+4x+4=2x^2+x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^2-3x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2};\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$.
- $u+v+x+1=0\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x-3}=-2x-3\Leftrightarrow\begin{cases}-3\ge 2x\\ 2x^2+11x+12=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm $x\in\left\{-\frac{3}{2};\frac{3+\sqrt{37}}{2};\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài toán 129. Giải phương trình $\frac{9x+25}{x-1}=\sqrt{2x^2+5x-5}\qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2+5x-5\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$9x+25=(x-1)\sqrt{2x^2+5x-5}\Leftrightarrow (x+5)^2-x^2-x=(x-1)\sqrt{(x-1)(x+5)+x^2+x}.$$

Đặt $x+5=u;\sqrt{2x^2+5x-5}=v,(v\ge 0)$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-x^2-x=(x-1)v\\ v^2-x^2-x=(x-1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x-1)(v-u)\Leftrightarrow\begin{cases}u=v\\ u+v+x-1=0\end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v\Leftrightarrow x+5=\sqrt{2x^2+5x-5}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\ x^2-5x-30=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5+\sqrt{145}}{2};\frac{5-\sqrt{145}}{2}\right\}$.
- $u+v+x-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x-5}=-2x-4\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -2\\ 2x^2+11x+21=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có các nghiệm $x\in\left\{\frac{5+\sqrt{145}}{2};\frac{5-\sqrt{145}}{2}\right\}$

Bài toán 130. Giải phương trình $\frac{10}{\sqrt{6x^2-x-6}-4}+1=x\qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le 6x^2-x-6\ne 16$. Phương trình đã cho biến đổi về

$$10=\left(\sqrt{6x^2-x-6}-4\right)(x-1)\Leftrightarrow 4x+6=(x-1)\sqrt{6x^2-x-6}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4x^2+5=(x-1)\sqrt{2x^2-x-1+4x^2-5}$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^2-4x^2+5=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x+1)+4x^2-5}$$

Đặt $2x+1=u;\sqrt{6x^2-x-6}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-4x^2+5=(x-1)v\\ v^2-4x^2+5=(x-1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x-1)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x-1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{6x^2-x-6}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\ge 0\\ 4x^2+4x+1=6x^2-x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 2x^2-5x-7=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.
- $u+v+x-1=0\Leftrightarrow\sqrt{6x^2-x-6}=-3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 3x^2+x+6=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=\dfrac{7}{2}$.

Nhận xét.

Bài toán 130 tuy phía ngoài căn thức có dạng nhị thức bậc nhất, tuy nhiên các bạn học sinh cần cẩn thận với sự xông pha một chút

$$10=\left(\sqrt{6x^2-x-6}-4\right)(x-1)\Leftrightarrow 4x+6=(x-1)\sqrt{6x^2-x-6}$$
$$\Leftrightarrow (mx+n)^2-\left(m^2x+ax+b\right)=(x-1)\sqrt{(x-1)(mx+n)+\left(m^2x+ax+b\right)}$$

Đồng nhất $\begin{cases}2mn-a=4\\ n^2-b=6\\ m+m^2=6\\ n-m+a=-1\\ -n+b=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\{-3;2\}\\ n^2-n=0\\ n-m+a=-1\\ -n+b=-6\\ 2mn-a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\{-3;2\}\\ n\in\{0;1\}\\ n-m+a=-1\\ -n+b=-6\\ 2mn-a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=1\\ a=0\\ b=-5\end{cases}$

Dẫn đến $(2x+1)^2-4x^2+5=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x+1)+4x^2-5}$.

Bài toán 131. Giải phương trình $\dfrac{6x+9}{2x+1}+\sqrt{15x^2+x+9}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne -\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$-6x-9=(2x+1)\sqrt{15x^2+x+9}$$
$$\Leftrightarrow 9x^2-6x+1-9x^2-10=(2x+1)\sqrt{6x^2+x-1+9x^2+10}$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)^2-9x^2-10=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(3x-1)+9x^2+10}$$

Đặt $3x-1=u;\sqrt{15x^2+x+9}=v,(v>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-9x^2-10=(2x+1)v \\ v^2-9x^2-10=(2x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=(2x+1)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+2x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

✓ $u=v \Leftrightarrow 3x-1=\sqrt{15x^2+x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\ge 1 \\ 9x^2-6x+1=15x^2+x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x\ge 1 \\ 6x^2+7x+8=0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

✓ $u+v+2x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{15x^2+x+9}=-5x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 10x^2-x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{10}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{9}{10}$.

Nhận xét.

Bài toán trên các bạn độc giả cũng hết sức lưu ý khi chọn hệ số m

$$-6x-9=(2x+1)\sqrt{15x^2+x+9}$$

$$\Leftrightarrow (mx+n)^2-(m^2x+ax+b)=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(mx+n)+(m^2x+ax+b)}$$

Đồng nhất $\begin{cases} 2mn-a=-6 \\ n^2-b=-9 \\ 2m+m^2=15 \\ 2n+m+a=1 \\ n+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+n=0 \\ m^2+2m=15 \\ 2n+m+a=1 \\ n+b=9 \\ 2mn-a=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=-1 \\ a=0 \\ b=10 \end{cases}$

Do đó đi đến

$$9x^2-6x+1-9x^2-10=(2x+1)\sqrt{6x^2+x-1+9x^2+10}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2-9x^2-10=(2x+1)\sqrt{(2x+1)(3x-1)+9x^2+10}$$

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{x^2}{5x+2}=\sqrt{5x^2+9x+3}$.
2. $\dfrac{x^2+4x+2}{5x+3}=\sqrt{5x^2+6x+2}$.

3. $\frac{x^2+3x-1}{7x+2}=\sqrt{7x^2+17x+9}$.
4. $\frac{x^2+3x+7}{x+2}=\sqrt{x^2+2x+7}$.
5. $\frac{x^2+5x+10}{1-5x}+\sqrt{5x^2-5x}=0$.
6. $2\sqrt{2x-5}=\frac{3+(x-1)^2}{x-2}$.
7. $(x+2)(x+3)=(5x-1)\sqrt{x(5x+14)}$.
8. $3x=2+x\sqrt{2x^2+3}$.
9. $\sqrt{x+8}=\frac{3x^2+7x+8}{2(2x+1)}$.
10. $\sqrt{4x-3}=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$.
11. $2x^2+2x+1=(4x-1)\sqrt{x^2+1}$.
12. $\frac{4x^2+3x+1}{x-1}=\sqrt{2x^2-1}$.
13. $\frac{6}{x}-x+1=\sqrt{(x-1)(3x+5)}$.
14. $x-\frac{1}{x}=2\sqrt{x^2-2x}$.
15. $x(x+2)=3+\sqrt{3-x}$.
16. $4x+\frac{2}{x}=3+\sqrt{2x^2-2x-1}$.
17. $x+3=\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+2}$.
18. $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$.
19. $\frac{x^2-x+1}{x+2}=\sqrt{x^2-2}$.
20. $\frac{1}{2}(x+2)^2+2=\sqrt{7+4x}$.
21. $4x+\frac{1}{x}+3=\sqrt{2x(1+x)}$.
22. $\sqrt{2(x+1)^2+1}=\frac{x(4x+5)}{x+2}$.
23. $\frac{x^2}{x+1}+1=\sqrt{x^2+4x+1}$.
24. $\frac{x^2+4x}{1+2x}=\sqrt{2x^2+x+2}$.
25. $\frac{4x^2+5x-1}{x+9}=\sqrt{2x^2+18x+11}$.

26. $\dfrac{x^2+7x+3}{2x-3}=\sqrt{2x^2-2x-5}$.

27. $\dfrac{4x^2+19x+28}{x+3}=\sqrt{2x^2+12x+12}$.

28. $x+\dfrac{8}{x}+1=\sqrt{x^2+2x-7}$.

29. $2x+5+\dfrac{7}{x}=x\sqrt{4x^2+8x-5}$.

30. $x+3+\dfrac{13}{x}=3\sqrt{3x^2+7x-9}$.

31. $4x+9+\dfrac{4}{x}=5\sqrt{10x^2+18x-1}$.

32. $9x+11+\dfrac{7}{x}=4\sqrt{3\left(4x^2+3x-1\right)}$.

33. $x+5=\sqrt{6x^2+11x+5}+\dfrac{1}{x}$.

34. $\dfrac{4x^2+3x+11}{x+1}=\sqrt{2x^2+4x-9}$.

35. $x+\dfrac{9}{x}+1=\sqrt{x\left(x+8\right)}$.

36. $x+10+\dfrac{36}{x}=3\sqrt{3x^2+20x}$.

37. $9x+5+\dfrac{1}{x}=\sqrt{x\left(3x+2\right)}$.

38. $\dfrac{x^2+5x+1}{2x-1}=\sqrt{2x^2+2x-1}$.

39. $x+5+\dfrac{3}{x-1}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}$.

40. $4x-9+\dfrac{37}{x+4}=\sqrt{2\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$.

41. $4x+5+\dfrac{3}{x+1}=\sqrt{2\left(x^2+4x+2\right)}$.

42. $4x+\dfrac{69}{3+x}=17+\sqrt{2\left(x-2\right)\left(x+5\right)}$.

43. $\dfrac{x^2+1}{2x-3}=\sqrt{\left(x-1\right)\left(2x+3\right)}$.

44. $2x-15+\dfrac{83}{x+5}=\sqrt{2\left(x-1\right)\left(x+6\right)}$.

45. $x+\dfrac{24}{x}+5=\sqrt{\left(x-1\right)\left(x+8\right)}$.

46. $2\left(2x+\dfrac{5}{x}\right)=2+\sqrt{\left(x-1\right)\left(2x+9\right)}$.

47. $2\left(2x+3+\dfrac{5}{x}\right)=\sqrt{\left(x-1\right)\left(2x+11\right)}$.

48. $9x+\dfrac{10}{x}+5=2\sqrt{3(x-1)(2x+3)}$.

49. $9x+\dfrac{13}{x}=18+9\sqrt{x^2-1}$.

50. $x+\dfrac{8}{x}=2\sqrt{(x-1)(2x+7)}+1$.

51. $9x+29+\dfrac{58}{x}=4\sqrt{(x-1)(12x+33)}$.

52. $x+\dfrac{62}{x}+9=6\sqrt{(x-1)(6x+37)}$.

53. $x+\dfrac{7}{x}+1=\sqrt{(x-2)(x+3)}$.

54. $2x^2+\dfrac{43}{x}+2=2\sqrt{2(x-3)(2x+7)}$.

55. $(x+1)^2+27=(3+x)\sqrt{(x-2)(x+9)}$.

56. $\dfrac{x^2-3x+33}{x+5}=\sqrt{(x-3)(x+11)}$.

57. $\dfrac{x^2-x+70}{x+5}=\sqrt{2(x-5)(x+7)}$.

58. $(x-1)(x-2)+18=(3x+1)\sqrt{(x-2)(3x+10)}$.

59. $4(x^2-x+12)=(x+3)\sqrt{2(x-3)(x+8)}$.

60. $\dfrac{4x^2-x+44}{\sqrt{(x-4)(2x+11)}}=(1+x)$.

61. $9x^2+32=x+(1+2x)\sqrt{2(x-2)(3x+8)}$.

62. $x+9=(x+2)\sqrt{2(x-1)(x+3)}$.

63. $\dfrac{x+11}{x+3}=\sqrt{(x-1)(2x+7)}$.

64. $x+13=(x+4)\sqrt{2(x-1)(x+4)}$.

65. $-2x+3+\dfrac{11}{x}=\sqrt{(x-1)(4x+7)}$.

66. $\dfrac{(x+1)(x+4)+22}{\sqrt{(x-2)(x+7)}}=1+x$.

67. $1+\dfrac{11}{x}=\sqrt{(x-1)(2x+7)}$.

68. $\dfrac{13}{x}=\sqrt{2(x-1)(x+2)}-7$.

69. $3\left(x+1+\dfrac{2}{x}\right)=\sqrt{(x-1)(3x+5)}$.

70. $\dfrac{2x^2+3}{3x+1}=\sqrt{(x-1)(2x+3)}$.

71. $6+\dfrac{23}{x+1}=\sqrt{(x-1)(2x+9)}$.

72. $4+\dfrac{6}{x+2}=\sqrt{(x-1)(6x+11)}$.

73. $\dfrac{13}{x+1}=\sqrt{6(x-1)(x+2)}-11$.

74. $5+\dfrac{12}{x+3}=\sqrt{(x-1)(12x+23)}$.

75. $\dfrac{17}{x+3}=\sqrt{2(x-1)(x+5)}-1$.

76. $\dfrac{23}{\sqrt{(x-1)(2x+9)}-6}=1+x$.

77. $\dfrac{33}{\sqrt{(x-1)(3x+11)}-1}=2x+1$.

78. $\dfrac{103}{2\sqrt{(x-1)(x+5)}-1}=2+3x$.

79. $\dfrac{11}{\sqrt{(x-1)(2x+7)}-2}=1+x$.

80. $\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{\sqrt{(x+1)(2x+5)}}{10}-1$.

81. $\dfrac{8}{x}+4=\sqrt{(x-1)(6x+7)}$.

82. $\dfrac{25}{\sqrt{(x-2)(2x+9)}-5}=x+1$.

83. $\dfrac{28}{\sqrt{2(x-1)(x+4)}-10}=1+x$.

84. $\dfrac{x^2+7x+22}{\sqrt{2(x-1)(x+5)}}+1=2x$.

85. $1+\dfrac{x^2-11x+9}{\sqrt{3(x^2-1)}}=3x$.

86. $\dfrac{9x^2+5x+22}{\sqrt{(x-1)(3x+17)}}=4+x$.

87. $x^2+3x+4=(x+3)\sqrt{x^2+x+2}$.

Bài toán 132. Giải phương trình $\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}=\sqrt{x^3+2x+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+2x+1\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+1=(x^2-x+1)\sqrt{x^3+2x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-2x=(x^2-x+1)\sqrt{(x^2-x+1)(x+1)+2x}$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{x^3+2x+1}=v$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-2x=\left(x^2-x+1\right)v\\ v^2-2x=\left(x^2-x+1\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-x+1\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-x+1=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^3+2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+2x+1=x^3+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.
- $u+v+x^2-x+1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^3+2x+1}+x^2+2=0$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=0;x=1$.

Bài toán 133. Giải phương trình $4+\dfrac{17x-6}{(x-1)(x-2)}=\sqrt{2x^3-5x^2+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^3-5x^2+1\ne 0\\ x\ne 1;x\ne 2\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4(x-1)(x-2)+17x-6}{x^2-3x+2}=\sqrt{2x^3-5x^2+1}\Leftrightarrow 4x^2+5x+2=\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x^3-5x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow(2x+1)^2+x+1=\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)(2x+1)-(x+1)}$$

Đặt $2x+1=u;\sqrt{2x^3-5x^2+1}=v$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x+1=\left(x^2-3x+2\right)v\\ v^2+x+1=\left(x^2-3x+2\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-3x+2\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-3x+2=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{2x^3-5x^2+1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\ge 0\\ 4x^2+4x+1=2x^3-5x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1\ge 0\\ 2x^3-9x^2-4x=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x\left(2x^2-9x-4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0;x=\frac{9-\sqrt{113}}{4};x=\frac{9+\sqrt{113}}{4}.$$

- $u+v+x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^3-5x^2+1}+x^2-x+3=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^3-5x^2+1}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{11}{4}$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=0;x=\dfrac{9-\sqrt{113}}{4};x=\dfrac{9+\sqrt{113}}{4}$.

Bài toán 134. Giải phương trình $\dfrac{x^2+4x+2}{2x^2-x+2}=\sqrt{2x^3+x^2-4x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3+x^2-4x+1\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+4x+2=\left(2x^2-x+2\right)\sqrt{2x^3+x^2+x+2-(5x+1)}$$
$$\Leftrightarrow(x+1)^2+5x+1=\left(2x^2-x+2\right)\sqrt{\left(2x^2-x+2\right)(x+1)-(5x+1)}$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{2x^3+x^2+x+2-(5x+1)}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+5x+1=(2x^2-x+2)v\\ v^2+5x+1=(2x^2-x+2)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(2x^2-x+2)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x^2-x+2=0\end{array}\right.$$

- $u+v+2x^2-x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^3+x^2-4x+1}+2x^2=-3$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2+2x+1=2x^3+x^2-4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ 2x^3-6x=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{0;\sqrt{3}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện thu được hai nghiệm $x=0;x=\sqrt{3}$.

Bài toán 135. Giải phương trình $\dfrac{9x^2+11x+6}{x^2-x+3}=\sqrt{3x^3-x^2+8x+4}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^3-x^2+8x+4\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^2+11x+6=(x^2-x+3)\sqrt{3x^3-x^2+8x+4}$$

$$\Leftrightarrow(3x+2)^2+2-x=(x^2-x+3)\sqrt{(x^2-x+3)(3x+2)-(2-x)}$$

Đặt $3x+2=u;\sqrt{3x^3-x^2+8x+4}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+2-x=(x^2-x+3)v\\ v^2+2-x=(x^2-x+3)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x^2-x+3)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-x+3=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2\ge 0\\ 9x^2+12x+4=3x^3-x^2+8x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2\ge 0\\ 3x^3-10x^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{0;\dfrac{5-\sqrt{37}}{3};\dfrac{5+\sqrt{37}}{3}\right\}$.
- $u+v+x^2-x+3=0\Leftrightarrow\sqrt{3x^3-x^2+8x+4}+(x+1)^2=-4$.

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{5-\sqrt{37}}{3};\dfrac{5+\sqrt{37}}{3}\right\}$.

Bài toán 136. Giải phương trình $\dfrac{5x+6}{(x-2)^2}=\sqrt{x^3-2x^2-9x+9}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3-2x^2-9x+9\ge 0\\ x\ne 2\end{cases}$

Phương trình đã cho biến đổi về

$$5x+6=(x^2-4x+4)\sqrt{x^3-2x^2-9x+9}$$

$$\Leftrightarrow 5x+6=(x^2-4x+4)\sqrt{x^3-x^2-8x+12-(x^2+x+3)}$$

$$\Leftrightarrow(x+3)^2-(x^2+x+3)=(x^2-4x+4)\sqrt{(x^2-4x+4)(x+3)-(x^2+x+3)}$$

Đặt $x+3=u;\sqrt{x^3-2x^2-9x+9}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(x^2+x+3\right)=\left(x^2-4x+4\right)v \\ v^2-\left(x^2+x+3\right)=\left(x^2-4x+4\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-4x+4\right)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-4x+4=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

❖ $u=v \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x^2+6x+9=x^3-2x^2-9x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x^3-3x^2-15x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{0;\dfrac{3+\sqrt{69}}{2};\dfrac{3-\sqrt{69}}{2}\right\}$.

❖ $u+v+x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow v+x^2-3x+7=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-2x^2-9x+9}+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{19}{4}$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 137. Tìm nghiệm dương của phương trình

$$(x+1)(x+2)=\frac{2}{x}+\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^3+x^2-x+\frac{4}{x}+1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+x^2-x+\dfrac{4}{x}+1\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+3x-\frac{2}{x}+2=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^3+x^2-x+\frac{4}{x}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+x-\frac{2}{x}+1=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\sqrt{\left(x^2+\frac{2}{x}\right)(x+1)-\left(x-\frac{2}{x}+1\right)}$$

Đặt $x+1=u;\sqrt{x^3+x^2-x+\dfrac{4}{x}+1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+x-\dfrac{2}{x}+1=\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)v \\ v^2+x-\dfrac{2}{x}+1=\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+\dfrac{2}{x}=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

✓ $u=v \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\ne 0 \\ x^2+2x+1=x^3+x^2-x+\dfrac{4}{x}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\ne 0 \\ x^3-3x+\dfrac{4}{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\ne 0 \\ x^4-3x^2+4=0 \end{cases} \quad (1)$

Với $x^2=t$ ta có $t^2-3t+4=0$, khi đó $\Delta=-7<0$. Do đó hệ (1) vô nghiệm.

✓ $u+v+x^2+\dfrac{2}{x}=0 \Leftrightarrow v+x^2+\dfrac{2}{x}+x+1=0 \quad (2)$.

Dễ thấy (2) vô nghiệm do $v+x^2+\dfrac{2}{x}+x+1>0,\forall v\ge 0;\forall x>0$.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm, nghĩa là không có nghiệm dương.

Bài toán 138. Giải phương trình $\dfrac{x^2-x-3}{(x-1)^2}=\sqrt{x^3+2x+4} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x^3 + 2x + 4 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - x - 3 = (x-1)^2 \sqrt{x^3 + 2x + 4} \Leftrightarrow (x+2)^2 - 5x - 2 = (x-1)^2 \sqrt{(x-1)^2 (x+2) + 5x + 2}.$$

Đặt $x + 2 = u; \sqrt{x^3 + 2x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - 5x - 2 = (x-1)^2 v \\ v^2 - 5x - 2 = (x-1)^2 u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (x-1)^2 (v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + (x-1)^2 = 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{x^3 + 2x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4x + 4 = x^3 + 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 - x^2 - 2x = 0 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x(x+1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in \{-1; 0; 2\} \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2\}$.

- $u + v + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow v + x^2 - 2x + 2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x + 4} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{15}{4}$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = -1; x = 0; x = 2$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\dfrac{x^2 + x + 4}{2x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^3 + 7x^2 + 4x + 16} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + 7x^2 + 4x + 16 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + x + 4 = (2x^2 - x + 1)\sqrt{2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 + 7x + 12}$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)\sqrt{(2x^2 - x + 1)(x+4) + 7x + 12}$$

Đặt $x + 4 = u; \sqrt{2x^3 + 7x^2 + 4x + 16} = v$ ta thu được hệ

$$\begin{cases} u^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)v \\ v^2 - 7x - 12 = (2x^2 - x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = (2x^2 - x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v + 2x^2 - x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 8x + 16 = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^3 + 3x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.
- $u + v + 2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 7x^2 + 4x + 16} + 2x^2 = -5$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x \in \left\{0; \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\dfrac{22x^2 + 3x - 13}{x^2 - 3x + 1} = \sqrt{5x^3 + 4x^2 + 12x + 15} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 5x^3 + 4x^2 + 12x + 15 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$22x^2+3x-13=\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{5x^3+4x^2+12x+15}$$

$$\Leftrightarrow (5x+1)^2-\left(3x^2+7x+14\right)=\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)(5x+1)+3x^2+7x+14}$$

Đặt $5x+1=u;\sqrt{5x^3+4x^2+12x+15}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-\left(3x^2+7x+14\right)=\left(x^2-3x+1\right)v\\ v^2-\left(3x^2+7x+14\right)=\left(x^2-3x+1\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-3x+1\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-3x+1=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow\begin{cases}5x+1\ge 0\\ 25x^2+10x+1=5x^3+4x^2+12x+15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+1\ge 0\\ 5x^3-21x^2+2x+14=0\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}5x+1\ge 0\\ (x-1)\left(5x^2-16x-14\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1;x=\dfrac{8+\sqrt{134}}{5}$.
- $u+v+x^2-3x+1=0\Leftrightarrow v+x^2+2x+2=0\Leftrightarrow\sqrt{5x^3+4x^2+12x+15}+(x+1)^2=-1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1;x=\dfrac{8+\sqrt{134}}{5}$.

Bài toán 141. Giải phương trình $\dfrac{-6x^2-15x+12}{x(x-5)}=\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+7x^2+15x+13\ge 0\\ x(x-5)\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-6x^2-15x+12=\left(x^2-5x\right)\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2-\left(7x^2+40x+13\right)=\left(x^2-5x\right)\sqrt{\left(x^2-5x\right)(x+5)+7x^2+40x+13}$$

Đặt $x+5=u;\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-\left(7x^2+40x+13\right)=\left(x^2-5x\right)v\\ v^2-\left(7x^2+40x+13\right)=\left(x^2-5x\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-5x\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-5x=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- ❖ $u=v\Leftrightarrow x+5=\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\ge 0\\ x^2+10x+25=x^3+7x^2+15x+13\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\ x^3+6x^2+5x-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\ (x-1)\left(x^2+7x+12\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{-4;-3;1\}$.
- ❖ $u+v+x^2-5x=0\Leftrightarrow v+x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\sqrt{x^3+7x^2+15x+13}+(x-2)^2=-1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S=\{-4;-3;1\}$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\dfrac{x^4-6x-1}{x+4}=2\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^3+8x^2+6x+1\geq 0 \\ x\neq -4 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-6x-1=2(x+4)\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^4-(6x+1)=2(x+4)\sqrt{(2x+8)x^2+6x+1}$$

Đặt $x^2=u;\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}=v,(v\geq 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-(6x+1)=(2x+8)v \\ v^2-(6x+1)=(2x+8)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=(2x+8)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+2x+8=0 \end{array}\right.$$

- $u+v+2x+8=0 \Leftrightarrow v+x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^3+8x^2+6x+1}+(x+1)^2=-7$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x^2=\sqrt{2x^3+8x^2+6x+1} \Leftrightarrow x^4=2x^3+8x^2+6x+1 \Leftrightarrow x^4-2x^3+x^2=9x^2+6x+1$
  $\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^2=(3x+1)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(x^2+2x+1\right)=0$
  $\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{2+\sqrt{5};2-\sqrt{5};-1\right\}$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{2+\sqrt{5};2-\sqrt{5};-1\right\}$.

Bài toán 143. Giải phương trình $\dfrac{2x^4-3x^3+8x^2-28x-13}{x^2-2x+4}=\sqrt{-2x^3+5x^2+16x+25} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-2x^3+5x^2+16x+25\geq 0$. Phương trình đã cho biến đổi về

$$2x^4-3x^3+7x^2-28x-13=\left(x^2-2x+4\right)\sqrt{-2x^3+5x^2+16x+25}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)^2+x^4-x^3+3x^2-24x-17$$
$$=\left(x^2-2x+4\right)\sqrt{\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2-x+2\right)-x^4+x^3-3x^2+24x+17}$$

Đặt $x^2-x+2=u;\sqrt{-2x^3+5x^2+16x+25}=v,(u>0;v\geq 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+x^4-x^3+3x^2-24x-17=\left(x^2-2x+4\right)v \\ v^2+x^4-x^3+3x^2-24x-17=\left(x^2-2x+4\right)u \end{cases}$$
$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-2x+4\right)(v-u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-2x+4=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u+v+x^2-2x+4=0 \Leftrightarrow u+v+(x-1)^2=-3$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x^2-x+2=\sqrt{-2x^3+5x^2+16x+25} \Leftrightarrow x^4-2x^3+5x^2-4x+4=-2x^3+5x^2+16x+25$
  $\Leftrightarrow x^4-20x-21=0 \Leftrightarrow x^4+4x^2+4=4x^2+20x+25 \Leftrightarrow \left(x^2+2\right)^2=(2x+5)^2$
  $\Leftrightarrow \left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+2x+7\right)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)\left[(x+1)^2+6\right]=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;3\}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1;x=3$.

Bài toán 144. Giải phương trình $\dfrac{2x^4+x^3+9x^2+7x+4}{x^2+x+3}=3\sqrt{x\left(x^2+x+1\right)}\qquad \left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4+x^3+9x^2+7x+4=\left(x^2+x+3\right)\sqrt{9x^3+9x^2+9x}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+3x+1\right)^2+x^4-5x^3-2x^2+x+3=\left(x^2+x+3\right)\sqrt{\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+3x+1\right)-x^4+5x^3+2x^2-x-3}$$

Đặt $x^2+3x+1=u;\sqrt{9x^3+9x^2+9x}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x^4-5x^3-2x^2+x+3=\left(x^2+x+3\right)v\\ v^2+x^4-5x^3-2x^2+x+3=\left(x^2+x+3\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+x+3\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2+x+3=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra sau

- ❖ $u+v+x^2+x+3=0\Leftrightarrow v+2x^2+4x+4=0\Leftrightarrow v+2\left(x+1\right)^2=-2$ (Vô nghiệm).
- ❖ $u=v\Leftrightarrow x^2+3x+1=\sqrt{9x^3+9x^2+9x}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x+1\ge 0\\ x^4+6x^3+11x^2+6x+1=9x^3+9x^2+9x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x+1\ge 0\\ x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3x+1\ge 0\\ \left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5};x=3-\sqrt{5}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=3+\sqrt{5};x=3-\sqrt{5}$.

Bài toán 145. Giải phương trình $\dfrac{2x^4+x^3-12x^2-5x-2}{x-2}=\left(x-1\right)\sqrt{8x^3+21x^2+18x+5}\qquad\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}8x^3+21x^2+18x+5\ge 0\\ x\ne 2\end{cases}$

Phương trình đã cho biến đổi về

$$2x^4+x^3-12x^2-5x-2=\left(x-1\right)\left(x-2\right)\sqrt{8x^3+21x^2+18x+5}$$

$$\left(x^2+4x+1\right)^2-\left(-x^4+7x^3+30x^2+13x+3\right)$$

$$=\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+4x+1\right)-x^4+7x^3+30x^2+13x+3}$$

Đặt $x^2+4x+1=u;\sqrt{8x^3+21x^2+18x+5}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-\left(-x^4+7x^3+30x^2+13x+3\right)=\left(x^2-3x+2\right)v\\ v^2-\left(-x^4+7x^3+30x^2+13x+3\right)=\left(x^2-3x+2\right)u\end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-3x+2\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-3x+2=0\end{array}\right.$$

- $u+v+x^2-3x+2=0\Leftrightarrow v+2x^2+x+3=0\Leftrightarrow v+2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2=-\dfrac{23}{8}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+4x+1=\sqrt{8x^3+21x^2+18x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+1\ge 0\\ x^4+8x^3+18x^2+8x+1=8x^3+21x^2+18x+5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+1\geq 0 \\ x^4=3x^2+10x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+1\geq 0 \\ x^4+2x^2+1=5x^2+10x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+1\geq 0 \\ \left(x^2+1\right)^2=5\left(x+1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{5}x+1-\sqrt{5}=0 \\ x^2+\sqrt{5}x+1+\sqrt{5}=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5\sqrt{5}-4}}{2};x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5\sqrt{5}-4}}{2}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5\sqrt{5}-4}}{2};x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5\sqrt{5}-4}}{2}$.

Bài toán 146. Giải phương trình $\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+2}=\sqrt{x^3-x^2+3x+1}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-x^2+3x+1\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-3x-2=\left(x^2+2\right)\sqrt{x^3-x^2+3x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2-x-3=\left(x^2+2\right)\sqrt{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)+x+3}$$

Đặt $x-1=u;\sqrt{x^3-x^2+3x+1}=v,\left(v\geq 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-x-3=\left(x^2+2\right)v \\ v^2-x-3=\left(x^2+2\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+2\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+2=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^3-x^2+3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-2x+1=x^3-x^2+3x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^3-2x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\left[\left(x-1\right)^2+4\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

- $u+v+x^2+2=0 \Leftrightarrow v+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow v+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{6\left(2x+1\right)}{2x^2+1}=\sqrt{2x^3+13x^2+x+36}$.
2. $3+\dfrac{9}{x}=\sqrt{2x^3+6x^2+x+25}$.
3. $1+\dfrac{2\left(2x-1\right)}{x^2}=\sqrt{2x^3+4x^2+3}$.
4. $\dfrac{4x^2+11x+12}{x^2+4}=\sqrt{2x^3+3x^2+9x+9}$.
5. $\dfrac{7x^2+12x+12}{\sqrt{3x^3+4x^2+18x+4}}=x^2+6$.

6. $\sqrt{3x^3+2x^2+15x+1}=\dfrac{8x^2+6x+5}{x^2+5}$.

7. $\dfrac{6x^2+6x-16}{x(x-2)}=\sqrt{3x^3-2x^2-2x+17}$.

8. $\dfrac{-2x^2+6x+8}{\sqrt{x^3+6x^2+2x+7}}=2+x^2$.

1. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5x-2}{2x^2}=\sqrt{4x^3+3x^2-x+3}$.

2. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5x-2}{2x^2}=\sqrt{4x^3+3x^2-x+3}$.

3. $\dfrac{16-2x}{\sqrt{x^3+7x^2+15x+26}.\left(1+x^2\right)}=1$.

4. $\dfrac{3x^2+20x+5}{\sqrt{2x^3+6x^2+2x+25}}=x^2+1$.

5. $2\left(x^2+1\right)=(x+2)\sqrt{x^4+x^3+2x^2+x+1}$.

6. $\dfrac{3+4x-x^2}{x^2+1}=\sqrt{x^3+4x^2+x+3}$.

7. $\dfrac{3x+3}{x^2+1}=\sqrt{x^3+3x^2+2x+3}$.

8. $\dfrac{3x^2+2x+7}{x^2+3}=\sqrt{2x^3+2x^2+8x-3}$.

9. $\dfrac{x^2-13x+7}{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^3+4x^2+19x+1}}=1$.

10. $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\sqrt{x^3+2x^2+x+3}$.

11. $\dfrac{8x+9}{x^2+3}=\sqrt{x^3+4x^2+x+9}$.

12. $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+2}=\sqrt{x^3+5x-5}$.

13. $\dfrac{4x+2}{\sqrt{x^3+3x^2+x+4}}=x^2+1$.

14. $\dfrac{4}{1-\sqrt{x^3-x^2+4x+1}}=\dfrac{x^2+2}{x+1}$.

15. $\dfrac{4x^2-x+8}{\sqrt{x^3+x^2+5x+1}+3}=x^2+2$.

16. $\dfrac{6x}{x^2+2}=\sqrt{\dfrac{x^3+4x^2+2x+5}{3}}$.

17. $\dfrac{3\left(3x^2+5x-1\right)}{x^2+6}=\sqrt{\dfrac{2x^3+4x^2}{3}+3x+4}$.

18. $\dfrac{4(3x-1)}{1+x^2}=\sqrt{\dfrac{x^3+5x^2+x+25}{2}}$.

19. $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+5}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x^3+3x^2+10x+1}{2}}$.

20. $\dfrac{x^2+3x+22}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x^3+10x^2+15x+11}{2}}$.

21. $\dfrac{x^2+x+6}{x^2+3}=\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2+13x+15}{2}}$.

22. $\dfrac{8-2x}{\sqrt{x^3+4x^2++5x-4}+2}=x^2+1$.

23. $\dfrac{-x^3-8x^2-7x-5}{x^2+1}=\sqrt{3x^3+13x^2+13x+7}$.

24. $\dfrac{4x^2-5x+5}{x^2-x}=\sqrt{x^3-2x^2+7x-1}$.

25. $\dfrac{11x^2-14x+1}{x^2-x+1}=\sqrt{x^3-5x^2+16x+3}$.

26. $\dfrac{-x^3-17x^2-35x-16}{x^2-x+2}=\sqrt{3x^3+18x^2+36x+15}$.

27. $\dfrac{13x^2-38x-3}{x(x-2)}=\sqrt{3x^3-9x^2+42x+4}$.

28. $\dfrac{10}{(x-1)^2}+2=\sqrt{x^3-2x^2+5x-10}$.

29. $\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^3-2x^2-x-2}+1}=x^2-x+2$.

30. $\dfrac{-3x^2+x-8}{x^2+4}=\sqrt{x^3+x^2-3x+5}$.

31. $\dfrac{2(7x^2+4x+4)}{(x-1)^2}+\sqrt{3x^3+18x^2+15x+10}=0$.

32. $-3x^3-2x^2-2x+1=(2x^2-x+2)\sqrt{5x^3+4x^2+5x+2}$.

33. $\dfrac{x^3+17x^2+38x-2}{\sqrt{3x(x^2-x)+18}}=x^2-x+6$.

34. $\dfrac{3x^3+9x^2-7x+6}{\sqrt{x^3-3x^2+17x-2}}=2x^2+3$.

35. $\dfrac{13x^2+16}{\sqrt{x^3-6x^2+17x-2}}=x^2+4x+5$.

36. $\dfrac{8x}{\sqrt{x^3+2x^2-4x+8}}=x^2-x+2$.

37. $\dfrac{5x}{\sqrt{x^3+4x^2+5x+21}}+x^2+4=0$.

38. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^3-x^2-4x+5}}+x^2+1=0$.

39. $\dfrac{21}{\sqrt{x^3+7x^2+24x+53}-2}=x^2+x+5$.

40. $1=\dfrac{3x-7}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^3-x^2-2x+3}}$.

41. $\dfrac{x^4+2x^2-x+6}{\sqrt{x^3+3x^2+2x-2}}=3+x$.

42. $\dfrac{x^4+x^2+6}{\sqrt{x^3+4x^2+x-2}}=x+3$.

43. $\dfrac{x^4+2x^2+9}{x+3}=\sqrt{x^3+5x^2+2x+1}$.

44. $\dfrac{4x^4+4x^2+3x-5}{(x+1)\sqrt{2x^3+2x^2-2x+7}}=1$.

45. $\dfrac{x^2-x+6}{\sqrt{x^3+x^2+5x-3}}=x^2+2$.

46. $\dfrac{4x^2+8x-18}{\sqrt{2x^3+x^2+x+27}}=x(x-1)$.

47. $\dfrac{9x^2+4x-9}{x\sqrt{3x^3-2x^2+x+10}}=x-1$.

48. $\dfrac{6}{\sqrt{x^3+4x^2+8x+3}-1}=x(1+x)$.

49. $\dfrac{5+x}{\sqrt{x^3+3x^2+7x+5}-1}=\dfrac{3+x^2}{2}$.

50. $1=\dfrac{x^2+3x+10}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^3+2x^2+2x-4}}$.

51. $\dfrac{4x^2-3x+2}{\sqrt{x\left(2x^2-x+8\right)}}=x^2-x+1$.

Bài toán 147. Giải phương trình $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x+3}=\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}\qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+x^3+4x^2+4x-1\ge 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3+3x^2+2x+5=(x+3)\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2-x^4+4=(x+3)\sqrt{(x+3)\left(x^2+x+1\right)+x^4-4}$$

Đặt $x^2+x+1=u;\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-x^4+4=(x+3)v\\ v^2-x^4+4=(x+3)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x+3)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x+3=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow x^2+x+1=\sqrt{x^4+x^3+4x^2+4x-1}\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+2x+1=x^4+x^3+4x^2+4x-1$
  $\Leftrightarrow x^3-x^2-2x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};1;\sqrt{2}\right\}$.
- $u+v+x+3=0\Leftrightarrow v+x^2+2x+4=0\Leftrightarrow v+(x+1)^2=-3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=-\sqrt{2};x=0;x=\sqrt{2}$.

Bài toán 148. Giải phương trình $\dfrac{2x^4+4x^2-2x+2}{2x^2-x+1}=\sqrt{x^4-x^3+5x^2+4}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4-x^3+5x^2+4\ge 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4+4x^2-2x+2=(2x^2-x+1)\sqrt{x^4-x^3+5x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow(x^2+2)^2+x^4-2x-2=(2x^2-x+1)\sqrt{(2x^2-x+1)(x^2+2)-x^4+2x+2}$$

Đặt $x^2+2=u;\sqrt{x^4-x^3+5x^2+4}=v,(u>0;v\ge 0)$ thì thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x^4-2x-2=(2x^2-x+1)v\\ v^2+x^4-2x-2=(2x^2-x+1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(2x^2-x+1)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x^2-x+1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow x^2+2=\sqrt{x^4-x^3+5x^2+4}\Leftrightarrow x^4+4x^2+4=x^4-x^3+5x^2+4\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow x=0;x=1$.
- $u+v+2x^2-x+1=0\Leftrightarrow u+v+2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=-\dfrac{7}{8}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0;x=1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $\dfrac{2x^4-17x^3+4x^2+2}{x^2-6x+2}=\sqrt{4x^4+5x^3+5x^2-6x+1}\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^4+5x^3+5x^2-6x+1\ge 0\\ x^2-6x+2\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4-17x^3+4x^2+2=(x^2-6x+2)\sqrt{4x^4+5x^3+5x^2-6x+1}$$

$$\Leftrightarrow(2x^2+1)^2-2x^4-17x^3+1=(x^2-6x+2)\sqrt{(x^2-6x+2)(2x^2+1)+2x^4+17x^3-1}$$

Đặt $2x^2+1=u;\sqrt{4x^4+5x^3+5x^2-6x+1}=v,(u>0;v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-2x^4-17x^3+1=(x^2-6x+2)v\\ v^2-2x^4-17x^3+1=(x^2-6x+2)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x^2-6x+2)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-6x+2=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow 2x^2+1=\sqrt{4x^4+5x^3+5x^2-6x+1}\Leftrightarrow 4x^4+4x^2+1=4x^4+5x^3+5x^2-6x+1$

$\Leftrightarrow 5x^3+x^2-6x=0 \Leftrightarrow x\left(5x^2+x-6\right)=0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(5x+6\right)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{6}{5};0;1\right\}$.

➢ $u+v+x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow v+3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow v+3\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{4x^4+5x^3+5x^2-6x+1}=0 \end{cases}$ [*].

Dễ thấy hệ [*] vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $S=\left\{-\frac{6}{5};0;1\right\}$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\dfrac{x^4-5x^3+5x^2+x+10}{x-3}=\left(x-1\right)\sqrt{x^4+x^3-5x^2+3x-12}\qquad \left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+x^3-5x^2+3x-12\ge 0 \\ x\ne 3 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-5x^3+5x^2+x+10=\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x^4+x^3-5x^2+3x-12}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2-\left(5x^3-7x^2-x-9\right)=\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4x+3\right)+5x^3-7x^2-x-9}$$

Đặt $x^2-1=u;\sqrt{x^4+x^3-5x^2+3x-12}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(5x^3-7x^2-x-9\right)=\left(x^2-4x+3\right)v \\ v^2-\left(5x^3-7x^2-x-9\right)=\left(x^2-4x+3\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-4x+3\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-4x+3=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u=v \Leftrightarrow x^2-1=\sqrt{x^4+x^3-5x^2+3x-12} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x^4-2x^2+1=x^4+x^3-5x^2+3x-12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1 \\ x^3-3x^2+3x-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1 \\ x^3-3x^2+3x-1=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1 \\ \left(x-1\right)^3=12 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{12}+1$.

- $u+v+x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow v+2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow v+2\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ x=1 \end{cases}$ (Loại).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=\sqrt[3]{12}+1$.

Bài toán 151. Giải phương trình $\dfrac{x^4-5x^3-6x^2+5x-20}{x^2-5x+3}=\sqrt{x^4+3x^3+2x^2+x+18}\qquad \left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+3x^3+2x^2+x+18\ge 0 \\ x^2-5x+3\ne 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-5x^3-6x^2+5x-20=\left(x^2-5x+3\right)\sqrt{x^4+3x^3+2x^2+x+18}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-1\right)^2-\left(7x^3+5x^2-7x+21\right)=\left(x^2-5x+3\right)\sqrt{\left(x^2-5x+3\right)\left(x^2+x-1\right)+7x^3+5x^2-7x+21}$$

Đặt $x^2+x-1=u;\sqrt{x^4+3x^3+2x^2+x+18}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(7x^3+5x^2-7x+21\right)=\left(x^2-5x+3\right)v \\ v^2-\left(7x^3+5x^2-7x+21\right)=\left(x^2-5x+3\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-5x+3\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-5x+3=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v \Leftrightarrow x^2+x-1=\sqrt{x^4+3x^3+2x^2+x+18} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^4+2x^3-x^2-2x+1=x^4+3x^3+2x^2+x+18 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^3+3x^2+3x+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^3+3x^2+3x+1=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ \left(x+1\right)^3=-16 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{16}-1$

- $u+v+x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow v+2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow v+2\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=0 \\ v=5 \end{cases}$ (Loại).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=-\sqrt[3]{16}-1$.

Bài toán 152. Giải phương trình $x^3+2x^2-7x+\dfrac{18}{x}=18+\left(x+3\right)\sqrt{x^4+4x^3+17x^2+28x-14}$ $\left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+4x^3+17x^2+28x-14\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+2x^3-7x^2-18x+18=\left(x^2+3x\right)\sqrt{x^4+4x^3+17x^2+28x-14}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+2\right)^2-\left(12x^2+22x-14\right)=\left(x^2+3x\right)\sqrt{\left(x^2+3x\right)\left(x^2+x+2\right)+12x^2+22x-14}$$

Đặt $x^2+x+2=u;\sqrt{x^4+4x^3+17x^2+28x-14}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(12x^2+22x-14\right)=\left(x^2+3x\right)v \\ v^2-\left(12x^2+22x-14\right)=\left(x^2+3x\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+3x\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+3x=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u=v \Leftrightarrow x^2+x+2=\sqrt{x^4+4x^3+17x^2+28x-14} \Leftrightarrow x^4+2x^3+5x^2+4x+4=x^4+4x^3+17x^2+28x-14$

  $\Leftrightarrow 2x^3+12x^2+24x-18=0 \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x-9=0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^3=17 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{17}-2$.

- $u+v+x^2+3x=0 \Leftrightarrow v+2x^2+4x+2=0 \Leftrightarrow v+2\left(x+1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ x=-1 \end{cases}$ (Loại).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\sqrt[3]{17}-2$.

Bài toán 153. Giải phương trình $-2x^2+x+1=\left(x^4-2x+1\right)\sqrt{x^5+x^2-1}$ $\left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^5+x^2-1\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-\left(3x^2-x-1\right)=\left(x^4-2x+1\right)\sqrt{\left(x^4-2x+1\right)x+\left(3x^2-x-1\right)}$.

Đặt $x=u;\sqrt{x^5+x^2-1}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ

$$\begin{cases} u^2-\left(3x^2-x-1\right)=\left(x^4-2x+1\right)v \\ v^2-\left(3x^2-x-1\right)=\left(x^4-2x+1\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^4-2x+1\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^4-2x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow x=\sqrt{x^5+x^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2=x^5+x^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^5=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.
- $u+v+x^4-2x+1=0\Leftrightarrow v+x^4-x+1=0\Leftrightarrow v+x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=0$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x^5+x^2-1}+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 154. Giải phương trình $\frac{8x^2-13x+2}{x^4-3x+1}=\sqrt{x^5+2x^4-10x^2+12x+4}\quad\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^5+2x^4-10x^2+12x+4\ge 0\\ x^4-3x+1\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2-13x+2=\left(x^4-3x+1\right)\sqrt{\left(x^5+2x^4-3x^2-5x+2\right)-7x^2+17x+2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+7x^2-17x-2=\left(x^4-3x+1\right)\sqrt{\left(x^4-3x+1\right)\left(x+2\right)-7x^2+17x+2}$$

Đặt $x+2=u;\sqrt{x^5+2x^4-10x^2+12x+4}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+7x^2-17x-2=\left(x^4-3x+1\right)v\\ v^2+7x^2-17x-2=\left(x^4-3x+1\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^4-3x+1\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^4-3x+1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v\Leftrightarrow x+2=\sqrt{x^5+2x^4-10x^2+12x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ x^5+2x^4-10x^2+12x+4=x^2+4x+4\end{cases}$

  $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x^5+2x^4-11x^2+8x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\left(x^4+2x^3-11x+8\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\left(x-1\right)\left(x^3+3x^2+3x-8\right)=0\end{cases}\quad(1)$.

  Dễ thấy $x^3+3x^2+3x-8=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3=9\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{9}-1$ nên (1) có các nghiệm $x=0;x=1;x=\sqrt[3]{9}-1$.
- $u+v+x^4-3x+1=0\Leftrightarrow v+x^4-2x+3=0\Leftrightarrow v+x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-2x+1+\frac{7}{4}=0$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x^5+2x^4-10x^2+12x+4}+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-1\right)^2=-\frac{7}{4}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=0;x=1;x=\sqrt[3]{9}-1$.

Bài toán 155. Giải phương trình $3x^2+6x+8+\left(2x+3\right)\sqrt{x^4+6x^3+18x^2+18x+24}\quad\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4+6x^3+18x^2+18x+24\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^2+18x+24+(6x+9)\sqrt{x^4+6x^3+18x^2+18x+24}=0$$
$$\Leftrightarrow x^4-(x^4+9x^2+18x+24)=(6x+9)\sqrt{(6x+9)x^2+x^4+9x^2+18x+24}$$

Đặt $x^2=u;\sqrt{x^4+6x^3+18x^2+18x+24}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-(x^4+9x^2+18x+24)=(6x+9)v\\ v^2-(x^4+9x^2+18x+24)=(6x+9)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(6x+9)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+6x+9=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- ✓ $u=v\Leftrightarrow x^2=\sqrt{x^4+6x^3+18x^2+18x+24}\Leftrightarrow x^4=x^4+6x^3+18x^2+18x+24$
$\Leftrightarrow 6x^3+18x^2+18x+24=0\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+4=0\Leftrightarrow (x+1)^3=-3\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{3}-1$.
- ✓ $u+v+6x+9=0\Leftrightarrow v+x^2+6x+9=0\Leftrightarrow v+(x+3)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}v=0\\ x=-3\end{cases}$ (Loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\sqrt[3]{3}-1$.

Bài toán 156. Giải phương trình $\dfrac{x^4-4x^3+10x^2-8x+13}{x^2-2x+3}=\sqrt{x^4+2x^3-4x^2+6x-9}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^4+2x^3-4x^2+6x-9\ge 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-4x^3+10x^2-8x+13=(x^2-2x+3)\sqrt{x^4+2x^3-4x^2+6x-9}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2-(4x^3-8x^2+8x-12)=(x^2-2x+3)\sqrt{(x^2-2x+3)(x^2+1)+4x^3-8x^2+8x-12}$$

Đặt $x^2+1=u;\sqrt{x^4+2x^3-4x^2+6x-9}=v,(u>0;v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-(4x^3-8x^2+8x-12)=(x^2-2x+3)v\\ v^2-(4x^3-8x^2+8x-12)=(x^2-2x+3)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x^2-2x+3)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-2x+3=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $u+v+x^2-2x+3=0\Leftrightarrow u+v+(x-1)^2=-2$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{x^4+2x^3-4x^2+6x-9}\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=x^4+2x^3-4x^2+6x-9$
$\Leftrightarrow 2x^3-6x^2+6x-10=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=4\Leftrightarrow (x-1)^3=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}+1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\sqrt[3]{4}+1$.

Bài toán 157. Giải phương trình $\dfrac{2x^4-x^3+24x^2+18x+15}{x^2-x+5}=\sqrt{4x^4-6x^3-7x^2-26x-9}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $4x^4-6x^3-7x^2-26x-9\ge 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4-x^3+24x^2+18x+15=(x^2-x+5)\sqrt{4x^4-6x^3-7x^2-26x-9}$$
$$\Leftrightarrow (2x^2-x+1)^2-(2x^4-3x^3-19x^2-20x-14)$$
$$=(x^2-x+5)\sqrt{(x^2-x+5)(2x^2-x+1)+2x^4-3x^3-19x^2-20x-14}$$

Đặt $2x^2-x+1=u;\sqrt{4x^4-6x^3-7x^2-26x-9}=v,(u>0;v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-(2x^4-3x^3-19x^2-20x-14)=(x^2-x+5)v\\ v^2-(2x^4-3x^3-19x^2-20x-14)=(x^2-x+5)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x^2-x+5)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-x+5=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u+v+x^2-x+5=0\Leftrightarrow u+v+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{19}{4}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow 2x^2-x+1=\sqrt{4x^4-6x^3-7x^2-26x-9}\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+5x^2-2x+1=4x^4-6x^3-7x^2-26x-9$
  $\Leftrightarrow 2x^3+12x^2+24x+10=0\Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+5=0\Leftrightarrow (x+2)^3=3\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}-2$.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=\sqrt[3]{3}-2$.

Bài toán 158. Giải phương trình $1+x(x^3+x+4)=(2x^2+1)\sqrt{2x^4-4x-1}\qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4-4x-1\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4+x^2+4x+1=(2x^2+1)\sqrt{(2x^2+1)x^2-x^2-4x-1}$.

Đặt $x^2=u;\sqrt{2x^4-4x-1}=v,(u\ge 0;v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x^2+4x+1=(2x^2+1)v\\ v^2+x^2+4x+1=(2x^2+1)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(2x^2+1)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x^2+1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- ✓ $u+v+2x^2+1=0\Leftrightarrow u+v+2x^2=-1$ (Vô nghiệm).
- ✓ $u=v\Leftrightarrow x^2=\sqrt{2x^4-4x-1}\Leftrightarrow x^4=2x^4-4x-1\Leftrightarrow x^4-4x-1=0$
  $\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=2x^2+4x+2\Leftrightarrow (x^2+1)^2=2(x+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0 & (1)\\ x^2+1+\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0 & (2)\end{array}\right.$

  Dễ thấy $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};x=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$ và (2) vô nghiệm do $\Delta<0$.

Đối chiếu điều kiện ta có các nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};x=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$

Bài toán 159. Giải phương trình $\dfrac{-3x^4-x^3-x^2+8x+2}{x^2-2x+2}=\sqrt{5x^4+2x^3+2x^2-6x-2}\qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $5x^4+2x^3+2x^2-6x-2\ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$-3x^4-x^3-x^2+8x+2=(x^2-2x+2)\sqrt{5x^4+2x^3+2x^2-6x-2}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x)^2-(4x^4+3x^3+2x^2-8x-2)$$
$$=(x^2-2x+2)\sqrt{(x^2-2x+2)(x^2+x)+4x^4+3x^3+2x^2-8x-2}$$

Đặt $x^2+x=u;\sqrt{5x^4+2x^3+2x^2-6x-2}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-\left(4x^4+3x^3+2x^2-8x-2\right)=\left(x^2-2x+2\right)v\\ v^2-\left(4x^4+3x^3+2x^2-8x-2\right)=\left(x^2-2x+2\right)u\end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-2x+2\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-2x+2=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $u+v+x^2-2x+2=0\Leftrightarrow v+2x^2-x+2=0\Leftrightarrow v+2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{7}{4}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+x=\sqrt{5x^4+2x^3+2x^2-6x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge 0\\ x^4+2x^3+x^2=5x^4+2x^3+2x^2-6x-2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge 0\\ 4x^4+x^2-6x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)\ge 0\\ 4x^4+4x^2+1=3\left(x^2+2x+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)\ge 0\\ \left(2x^2+1\right)^2=3(x+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-\sqrt{3}x+1-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{8\sqrt{3}-5}}{4};x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{8\sqrt{3}-5}}{4}.\\ 2x^2+\sqrt{3}x+1+\sqrt{3}=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{8\sqrt{3}-5}}{4};x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{8\sqrt{3}-5}}{4}$.

Bài toán 160. Giải phương trình $\dfrac{x^3(4x+1)-(x+1)(2x+5)}{x(x+1)-1}=\sqrt{2x^4-4x^3+10x^2+6x+7}\quad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+x-1\ne 0\\ 2x^4-4x^3+10x^2+6x+7\ge 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4+x^3-2x^2-7x-5=\left(x^2+x-1\right)\sqrt{2x^4-4x^3+10x^2+6x+7}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-x+2\right)^2+5x^3-11x^2-3x-9=\left(x^2+x-1\right)\sqrt{\left(x^2+x-1\right)\left(2x^2-x+2\right)-5x^3+11x^2+3x+9}$$

Đặt $2x^2-x+2=u;\sqrt{2x^4-4x^3+10x^2+6x+7}=v,(u>0;v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+5x^3-11x^2-3x-9=\left(x^2+x-1\right)v\\ v^2+5x^3-11x^2-3x-9=\left(x^2+x-1\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+x-1\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2+x-1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u+v+x^2+x-1=0\Leftrightarrow v+2x^2=-1$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow 2x^2-x+2=\sqrt{2x^4-4x^3+10x^2+6x+7}$

$$\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+9x^2-4x+4=2x^4-4x^3+10x^2+6x+7$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-x^2-10x-3=0 \Leftrightarrow 2x^4+4x^2+2=5x^2+10x+5 \Leftrightarrow 2\left(x^2+1\right)^2=5\left(x+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\left(x^2+1\right)=\sqrt{5}\left(x+1\right)\\ \sqrt{2}\left(x^2+1\right)+\sqrt{5}\left(x+1\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4\sqrt{10}-3}}{2\sqrt{2}};x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{10}-3}}{2\sqrt{2}}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4\sqrt{10}-3}}{2\sqrt{2}};x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4\sqrt{10}-3}}{2\sqrt{2}}$.

Bài toán 161. Giải phương trình $\frac{4x^3-3x^2-10x+1}{x-3}=\left(1-x\right)\sqrt{2x^4-3x^2-6x-1}\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^4-3x^2-6x-1\geq 0\\ x\neq 3\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-4x^3+3x^2+10x-1=\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{2x^4-3x^2-6x-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2-\left(x^4+4x^3-5x^2-10x+2\right)$$
$$=\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-1\right)+x^4+4x^3-5x^2-10x+2}$$

Đặt $x^2-1=u;\sqrt{2x^4-3x^2-6x-1}=v,\left(v\geq 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-\left(x^4+4x^3-5x^2-10x+2\right)=\left(x^2-4x+3\right)v\\ v^2-\left(x^4+4x^3-5x^2-10x+2\right)=\left(x^2-4x+3\right)u\end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-4x+3\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-4x+3=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u+v+x^2-4x+3=0\Leftrightarrow v+2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow v+2\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}v=0\\ x=1\end{cases}$ (Loại).
- $u=v\Leftrightarrow x^2-1=\sqrt{2x^4-3x^2-6x-1}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x^4-2x^2+1=2x^4-3x^2-6x-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\geq 1\\ x^4-x^2-6x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}x^2\geq 1\\ \left(x+1\right)^2\left(x^2-2x-2\right)=0\end{cases}\Rightarrow x=-1;x=1+\sqrt{3}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=-1;x=1+\sqrt{3}$.

Bài toán 162. Giải phương trình $\frac{-2x^4-4x^3+7x^2+9x+6}{x-1}=\left(x-2\right)\sqrt{4x^4+2x^3+2x^2-12x-3}\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}4x^4+2x^3+2x^2-12x-3\geq 0\\ x\neq 1\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-2x^4-4x^3+7x^2+9x+6=\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{4x^4+2x^3+2x^2-12x-3}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2-\left(3x^4+6x^3-4x^2-7x-5\right)$$
$$=\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-x+1\right)+3x^4+6x^3-4x^2-7x-5}$$

Đặt $x^2+x+1=u;\sqrt{4x^4+2x^3+2x^2-12x-3}=v,\left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(3x^4+6x^3-4x^2-7x-5\right)=\left(x^2-3x+2\right)v \\ v^2-\left(3x^4+6x^3-4x^2-7x-5\right)=\left(x^2-3x+2\right)u \end{cases}$$
$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-3x+2\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-3x+2=0 \end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u+v+x^2-3x+2=0\Leftrightarrow v+2x^2-2x+3=0\Leftrightarrow v+x^2+\left(x-1\right)^2=-2$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+x+1=\sqrt{4x^4+2x^3+2x^2-12x-3}\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+2x+1=4x^4+2x^3+2x^2-12x-3$

$$\Leftrightarrow 3x^4-x^2-14x-4=0\Leftrightarrow 3\left(x^4+2x^2+1\right)=7\left(x^2+2x+1\right)\Leftrightarrow 3\left(x^2+1\right)^2=7\left(x+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x^2-\sqrt{7}x+\sqrt{3}-\sqrt{7}=0 \\ \sqrt{3}x^2+\sqrt{7}x+\sqrt{3}+\sqrt{7}=0 \end{array}\right.\Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{4\sqrt{21}-5}}{2\sqrt{3}};x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4\sqrt{21}-5}}{2\sqrt{3}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{4\sqrt{21}-5}}{2\sqrt{3}};x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4\sqrt{21}-5}}{2\sqrt{3}}$.

Bài toán 163. Giải phương trình $\dfrac{-4x^4-x^3-9x^2-10x+1}{x^2-3x+1}=\sqrt{6x^4+4x^3+8x^2+12x-1}$ $\left(x\in ¡\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 6x^4+4x^3+8x^2+12x-1\ge 0 \\ x^2-3x+1\ne 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $-4x^4-x^3-9x^2-10x+1=\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{6x^4+4x^3+8x^2+12x-1}$.

Tiếp tục đưa về dạng

$$\left(x^2+2x\right)^2-\left(5x^4+5x^3+13x^2+10x-1\right)=\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+2x\right)+5x^4+5x^3+13x^2+10x-1}.$$

Đặt $x^2+2x=u;\sqrt{6x^4+4x^3+8x^2+12x-1}=v,\left(u\ge -1;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(5x^4+5x^3+13x^2+10x-1\right)=\left(x^2-3x+1\right)v \\ v^2-\left(5x^4+5x^3+13x^2+10x-1\right)=\left(x^2-3x+1\right)u \end{cases}$$
$$\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-3x+1\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-3x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v\Leftrightarrow x^2+2x=\sqrt{6x^4+4x^3+8x^2+12x-1}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x\ge 0 \\ x^4+4x^3+4x^2=6x^4+4x^3+8x^2+12x-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x \ge 0 \\ 5x^4+4x^2+12x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x\ge 0 \\ 5\left(x^4+2x^2+1\right)=6\left(x^2-2x+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x\ge 0 \\ 5\left(x^2+1\right)^2=6\left(x-1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{5}x^2-\sqrt{6}x+\sqrt{5}+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{30}-14}}{2\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}x^2+\sqrt{6}x+\sqrt{5}-\sqrt{6}=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

- $u+v+x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow v+2x^2-x+1=0 \Leftrightarrow v+2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=-\dfrac{7}{8}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{30}-14}}{2\sqrt{5}}$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2}+x^3=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+1\right)\sqrt{\left(x+1\right)^2+\dfrac{x-1}{x^2}}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \left(x+1\right)^2+\dfrac{x-1}{x^2}\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x^2}+x^3=\left(x^2-\frac{1}{x}+1\right)\sqrt{x^2+2x+1+\frac{x-1}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+x^3-x^2-2=\left(x^2-\frac{1}{x}+1\right)\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-x^3+x^2+2}$$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=u;\sqrt{x^2+2x+1+\dfrac{x-1}{x^2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+x^3-x^2-2=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+1\right)v \\ v^2+x^3-x^2-2=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+1\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-\frac{1}{x}+1\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-\dfrac{1}{x}+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

✓ $u+v+x^2-\dfrac{1}{x}+1=0 \Leftrightarrow v+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow v+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4}$.

✓ $u=v \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{x^2+2x+1+\dfrac{x-1}{x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^4+2x^2+1=x^4+2x^3+x^2+x-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x^3-x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2\left(x^3-1\right)-x\left(x-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left(x-1\right)\left(2x^2+x+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 165. Giải phương trình $\dfrac{4}{x^2}+x^3=x+2+\left(x^2-\dfrac{2}{x}+2\right)\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\left(2+x\right)^2}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}+x^2+4x+4\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+\frac{4}{x^2}+4+x^3-x^2-x-6=\left(x^2-\frac{2}{x}+2\right)\sqrt{\left(x^2-\frac{2}{x}+2\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)-x^3+x^2+x+6}$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+x^3-x^2-x-6=\left(x^2-\frac{2}{x}+2\right)\sqrt{\left(x^2-\frac{2}{x}+2\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)-x^3+x^2+x+6}$$

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=u;\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}+x^2+4x+4}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+x^3-x^2-x-6=\left(x^2-\dfrac{2}{x}+2\right)v\\ v^2+x^3-x^2-x-6=\left(x^2-\dfrac{2}{x}+2\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-\frac{2}{x}+2\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-\dfrac{2}{x}+2=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u+v+x^2-\dfrac{2}{x}+2=0\Leftrightarrow v+x^2+x+2=0\Leftrightarrow v+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{7}{4}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{x^2}+x^2+4x+4}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^4+4x^2+4=x^4+4x^3+4x^2+4x-4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 4x^3+4x-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 166. Giải phương trình $\dfrac{1}{x^2}-x+2=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+2\right)\sqrt{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+2x-2}\qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+2x-2\ge 0;x\ne 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x^2}-x+2=\left(x^2-\frac{1}{x}+2\right)\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{x}+2\right)\frac{1}{x}+x-2}.$$

Đặt $\dfrac{1}{x}=u;\sqrt{\left(x^2-\dfrac{1}{x}+2\right)\dfrac{1}{x}+x-2}=v,(v\ge 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2-x+2=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+2\right)v\\ v^2-x+2=\left(x^2-\dfrac{1}{x}+2\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-\frac{1}{x}+2\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^2-\dfrac{1}{x}+2=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- ❖ $u=v\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\sqrt{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+2x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 1=2x-1+2x^3-2x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left(x^2+1\right)(x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

❖ $u+v+x^2-\frac{1}{x}+2=0\Leftrightarrow v+x^2=-2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 167. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1+2x}{x^2}+2x=1+\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)\sqrt{2x^2+2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\qquad (x\in ¡).$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x^2+2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2x-2=\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)\sqrt{\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)-2x+2}.$$

Đặt $1+\frac{1}{x}=u;\sqrt{2x^2+2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+2x-2=\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)v\\ v^2+2x-2=\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)u\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(2x^2-\frac{1}{x}+1\right)(v-u)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+2x^2-\frac{1}{x}+1=0\end{array}\right.$$

➢ $u+v+2x^2-\frac{1}{x}+1=0\Leftrightarrow v+2x^2=-2$ (Vô nghiệm).

➢ $u=v\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=\sqrt{2x^2+2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ge 0\\ 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=2x^2+2-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ge 0\\ 4x=2x^4+x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ge 0\\ (x-1)\left(2x^3+2x^2+3x-1\right)=0\end{cases}\qquad (*)$$

Dễ thấy $2x^3+2x^2+3x\ge 7>1$ với mọi số nguyên dương x nên hệ (*) có nghiệm $x=1$ nguyên dương.
Vậy bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 168. Giải phương trình $2x+1+\frac{x-3}{x^2}=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^3+2x^2+x+1+\frac{3}{x^2}}\qquad (x\in ¡)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^3+2x^2+x+1+\frac{3}{x^2}\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$

Phương trình đã cho biến đổi về

$$\frac{2x^3+x^2+x-3}{x^2}=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x^5+2x^4+x^3+x^2+3}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1-x^4-x-4-2x^2}{x^2}=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}{x^2}+\frac{x^4+2x^2+x+4}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+2\right)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+1+\frac{1}{x}\right)+x^2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+2}$$

Đặt $x+1+\frac{1}{x}=u;\sqrt{x^3+2x^2+x+1+\frac{3}{x^2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+2\right)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)v \\ v^2-\left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+2\right)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-\frac{1}{x}=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u+v+x^2-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow v+x^2=-1$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x}=\sqrt{x^3+2x^2+x+1+\frac{3}{x^2}}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left(x^2+x+1\right)^2=x^5+2x^4+x^3+x^2+3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^5+x^4-x^3-2x^2-2x+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left(x^3-2\right)\left(x^2+x-1\right)=0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left\{\sqrt[3]{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có các nghiệm $x\in\left\{\sqrt[3]{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài toán 169. Giải phương trình $\frac{x^4-3x^3+7x^2-2x}{1+2x^2}=\sqrt{2x^4-x^3-x^2-x+2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4-x^3-x^2-x+2\geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1-\left(x^3-4x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{2x^4-2x^3+3x^2-x+1+x^3-4x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)^2-\left(x^3-4x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{\left(2x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)+x^3-4x^2+1}$$

Đặt $x^2-x+1=u;\sqrt{2x^4-x^3-x^2-x+2}=v,(u>0;v\geq 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(x^3-4x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)v \\ v^2-\left(x^3-4x^2+1\right)=\left(2x^2+1\right)u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=\left(2x^2+1\right)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+2x^2+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- ✓ $u+v+2x^2+1=0\Leftrightarrow u+v+2x^2=-1$ (Vô nghiệm).
- ✓ $u=v\Leftrightarrow x^2-x+1=\sqrt{2x^4-x^3-x^2-x+2}\Leftrightarrow x^4-2x^3+3x^2-2x+1=2x^4-x^3-x^2-x+2$

$$\Leftrightarrow x^4+x^3-4x^2+x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+3x+1\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{-3+\sqrt{5}}{2};\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài toán 170. Giải phương trình $\frac{x^4-4x^3-5x+1}{\sqrt{x^4+3x^3+7x^2+3x+5}} = x^2-x+1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4+3x^3+7x^2+3x+5 \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+4x^2+4-\left(4x^3+4x^2+5x+3\right) = \left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^4+3x^3+7x^2+3x+5}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2\right)^2 - \left(4x^3+4x^2+5x+3\right) = \left(x^2-x+1\right)\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+2\right)+\left(4x^3+4x^2+5x+3\right)}$$

Đặt $x^2+2=u; \sqrt{x^4+3x^3+7x^2+3x+5}=v, \left(u>0; v\ge 0\right)$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(4x^3+4x^2+5x+3\right) = \left(x^2-x+1\right)v \\ v^2-\left(4x^3+4x^2+5x+3\right) = \left(x^2-x+1\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2 = \left(x^2-x+1\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u+v+x^2-x+1=0 \Leftrightarrow u+v+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x^2+2=\sqrt{x^4+3x^3+7x^2+3x+5} \Leftrightarrow x^4+4x^2+4 = x^4+3x^3+7x^2+3x+5$

  $\Leftrightarrow 3x^3+3x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left(x+1\right)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 171. Giải phương trình $\frac{2x^4-6x^3+6x^2-4x+2}{\sqrt{4x^4+4x^3+x^2+3x}} = x^2-x+1 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^4+4x^3+x^2+3x \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4+4x^2+1-\left(2x^4+6x^3-2x^2+4x-1\right)$$
$$= \left(x^2-x+1\right)\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(2x^2+1\right)+2x^4+6x^3-2x^2+4x-1}$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)^2 - \left(2x^4+6x^3-2x^2+4x-1\right)$$
$$= \left(x^2-x+1\right)\sqrt{\left(x^2-x+1\right)\left(2x^2+1\right)+2x^4+6x^3-2x^2+4x-1}$$

Đặt $2x^2+1=u; \sqrt{4x^4+4x^3+x^2+3x}=v, \left(u>0; v>0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(2x^4+6x^3-2x^2+4x-1\right) = \left(x^2-x+1\right)v \\ v^2-\left(2x^4+6x^3-2x^2+4x-1\right) = \left(x^2-x+1\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2 = \left(x^2-x+1\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u+v+x^2-x+1=0 \Leftrightarrow u+v+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ (Vô nghiệm).

- $u=v\Leftrightarrow 4x^4+4x^2+1=4x^4+4x^3+x^2+3x\Leftrightarrow 4x^3-3x^2+3x-1=0$
  $\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=-3x^3\Leftrightarrow (x-1)^3=-3x^3\Leftrightarrow x-1=-x\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$.

Bài toán 172. Giải phương trình $\dfrac{x^4-7x^3-x^2-7x}{(x^2-4x+1)\sqrt{x^4+3x^3+5x^2+3x+2}}=1 \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+3x^3+5x^2+3x+2>0 \\ x^2-4x+1\neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+2x^2+1-(7x^3+3x^2+7x+1)=(x^2-4x+1)\sqrt{x^4-4x^3+2x^2-4x+1+(7x^3+3x^2+7x+1)}$$
$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2-(7x^3+3x^2+7x+1)=(x^2-4x+1)\sqrt{(x^2-4x+1)(x^2+1)+(7x^3+3x^2+7x+1)}$$

Đặt $x^2+1=u;\sqrt{x^4+3x^3+5x^2+3x+2}=v,(u>0;v>0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-(7x^3+3x^2+7x+1)=(x^2-4x+1)v \\ v^2-(7x^3+3x^2+7x+1)=(x^2-4x+1)u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x^2-4x+1)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u+v+x^2-4x+1=0\Leftrightarrow v+2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow v+2(x-1)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ v=0 \end{cases}$ (Loại).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{x^4+3x^3+5x^2+3x+2}\Leftrightarrow x^4+2x^2+1=x^4+3x^3+5x^2+3x+2$
  $\Leftrightarrow 3x^3+3x^2+3x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^3=-2x^3\Leftrightarrow x+1=-x\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 173. Giải phương trình $\dfrac{x^4+x^3+x+3}{x+1}=\sqrt{-2x^3+3x^2-3x-1} \qquad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Đều kiện $\begin{cases} -2x^3+3x^2-3x-1\geq 0 \\ x\neq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho biến đổi về dạng

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1+3x^3-3x^2+3x+2$$
$$=(x+1)\sqrt{x^4-2x^3+3x^2-2x+1-3x^3+3x^2-3x-2}$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x+1)^2+3x^3-3x^2+3x+2=(x+1)\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)-3x^3+3x^2-3x-2}$$

Đặt $x^2-x+1=u;\sqrt{-2x^3+3x^2-3x-1}=v,(u>0;v\geq 0)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+3x^3-3x^2+3x+2=(x+1)v \\ v^2+3x^3-3x^2+3x+2=(x+1)u \end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=(x+1)(v-u)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x+1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u+v+x+1=0 \Leftrightarrow v+x^2=-2$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x^4-2x^3+3x^2-2x+1=-2x^3+3x^2-3x-1 \Leftrightarrow x^4+x+2=0$

$\Leftrightarrow 4x^4-4x+8=0 \Leftrightarrow 4x^4-4x^2+1+4x^2-4x+1+6=0 \Leftrightarrow \left(2x^2-1\right)^2+\left(2x-1\right)^2=-6$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 174. Giải phương trình $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^4+2x^3-x^2-10x-4}-8}=\dfrac{x^2+3}{x^2+x+16}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le 2x^4+2x^3-x^2-10x-4\ne 64$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x-1\right)\left(x^2+x+16\right)=\left(x^2+3\right)\left(\sqrt{2x^4+2x^3-x^2-10x-4}-8\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3+15x-16+8\left(x^2+3\right)=\left(x^2+3\right)\sqrt{2x^4+2x^3-x^2-10x-4}$$

$$\Leftrightarrow x^3+8x^2+15x+8=\left(x^2+3\right)\sqrt{2x^4+2x^3-x^2-10x-4}$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+2x^2+1-\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)$$

$$=\left(x^2+3\right)\sqrt{x^4+x^3+4x^2+3x+3+\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2-\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)=\left(x^2+3\right)\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)}$$

Đặt $x^2+x+1=u;\sqrt{2x^4+2x^3-x^2-10x-4}=v,\left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)=\left(x^2+3\right)v \\ v^2-\left(x^4+x^3-5x^2-13x-7\right)=\left(x^2+3\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+3\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+3=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2=2x^4+2x^3-x^2-10x-4 \Leftrightarrow x^4+2x^3+3x^2+2x+1=2x^4+2x^3-x^2-10x-4$

$\Leftrightarrow x^4-4x^2-12x-5=0 \Leftrightarrow x^4+2x^2+1=6x^2+12x+6 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2=6\left(x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\sqrt{6}x+1-\sqrt{6}=0 \\ x^2+\sqrt{6}x+1+\sqrt{6}=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2+4\sqrt{6}}}{2};x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2+4\sqrt{6}}}{2}$

- $u+v+x^2+3=0 \Leftrightarrow u+v+x^2=-3$ (Vô nghiệm).

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2+4\sqrt{6}}}{2};x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2+4\sqrt{6}}}{2}$.

Bài toán 175. Giải phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+x^3+20x^2+11x+9}+15}=\dfrac{x^2+x-1}{x^4-3x^3+3x-22}$ $\quad (x\in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^4+x^3+20x^2+11x+9\ge 0 \\ x^4-3x^3+3x-22\ge 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-3x^3+3x-22=\left(\sqrt{x^4+x^3+20x^2+11x+9}+15\right)\left(x^2+x-1\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4-3x^3-15x^2-12x-7=\left(x^2+x-1\right)\sqrt{x^4+20x^2+x^3+11x+9}$$
$$\Leftrightarrow x^4-2x^3+5x^2-4x+4-\left(x^3+20x^2+8x+11\right)$$
$$=\left(x^2+x-1\right)\sqrt{x^4+3x-2+\left(x^3+20x^2+8x+11\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)^2-\left(x^3+20x^2+8x+11\right)=\left(x^2+x-1\right)\sqrt{\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+2\right)+\left(x^3+20x^2+8x+11\right)}$$

Đặt $x^2-x+2=u;\sqrt{x^4+x^3+20x^2+11x+9}=v,\left(u>0;v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(x^3+20x^2+8x+11\right)=\left(x^2+x-1\right)v \\ v^2-\left(x^3+20x^2+8x+11\right)=\left(x^2+x-1\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+x-1\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+x-1=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u=v\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)^2=x^4+x^3+11x+9\Leftrightarrow x^4-2x^3+5x^2-4x+4=x^4+x^3+20x^2+11x+9$

  $\Leftrightarrow 3x^3+15x^2+15x+5=0\Leftrightarrow 5\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=2x^3\Leftrightarrow \left(x+1\right)^3=\dfrac{2}{5}x^3\Leftrightarrow x+1=x\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$.
- $u+v+x^2+x-1=0\Leftrightarrow v+2x^2=-1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$.

Bài toán 176. Giải phương trình $\dfrac{x^4-3x^3+5x-2}{\sqrt{11x^4+10x^3+5x^2-2x-1}-5}=x^2+3 \qquad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $0\le 11x^4+10x^3+5x^2-2x-1\ne 25$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-3x^3+5x-2=\left(x^2+3\right)\left(\sqrt{11x^4+10x^3+5x^2-2x-1}-5\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4-3x^3+5x^2+5x+1=\left(x^2+3\right)\sqrt{11x^4+10x^3+5x^2-2x-1}$$
$$\Leftrightarrow 9x^4+6x^3+x^2-\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)=\left(x^2+3\right)\sqrt{3x^4+x^3+9x^2+3x+\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(3x^2+x\right)^2-\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)=\left(x^2+3\right)\sqrt{\left(3x^2+x\right)\left(x^2+3\right)+\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)}$$

Đặt $3x^2+x=u;\sqrt{11x^4+10x^3+5x^2-2x-1}=v,\left(v\ge 0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2-\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)=\left(x^2+3\right)v \\ v^2-\left(8x^4+9x^3-4x^2-5x-1\right)=\left(x^2+3\right)u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^2+3\right)\left(v-u\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v+x^2+3=0 \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- ✓ $u+v+x^2+3=0\Leftrightarrow v+4x^2+x+3=0\Leftrightarrow v+4\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2=-\dfrac{47}{16}$ (Vô nghiệm).
- ✓ $u=v\Leftrightarrow 3x^2+x=\sqrt{11x^4+10x^3+5x^2-2x-1}\Leftrightarrow 9x^4+6x^3+x^2=11x^4+10x^3+5x^2-2x-1$

$$\Leftrightarrow 2x^4+4x^3+4x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow 2\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)=3\left(x^2+2x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+x+1\right)^2=3\left(x+1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{2}x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)x+\sqrt{2}-\sqrt{3}=0 & (1)\\ \sqrt{2}x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{2}+\sqrt{3}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm; (1) có các nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{6}-3}}{2\sqrt{2}};x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{6}-3}}{2\sqrt{2}}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{6}-3}}{2\sqrt{2}};x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{6}-3}}{2\sqrt{2}}$.

Bài toán 177. Giải phương trình $\dfrac{3x^4-2x^2-6x+5}{\sqrt{x^5+x^2+7x+7}}+2x=x^4+1 \qquad \left(x\in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^5+x^2+7x+7>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^4-2x^2-6x+5=\left(x^4-2x+1\right)\sqrt{x^5+x^2+7x+7}$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9+\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)=\left(x^4-2x+1\right)\sqrt{x^5+3x^4-5x+3-\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+3\right)^2+\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)=\left(x^4-2x+1\right)\sqrt{\left(x^4-2x+1\right)\left(x+3\right)-\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)}$$

Đặt $x+3=u;\sqrt{x^5+x^2+7x+7}=v,\left(v>0\right)$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)=\left(x^4-2x+1\right)v\\ v^2+\left(3x^4-3x^2-12x-4\right)=\left(x^4-2x+1\right)u\end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=\left(x^4-2x+1\right)\left(v-u\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x^4-2x+1=0\end{array}\right.$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

- $u+v+x^4-2x+1=0 \Leftrightarrow v+x^4-x+4=0 \Leftrightarrow 4v+4x^4-4x+16=0$
  $\Leftrightarrow 4v+4x^4-4x^2+1+4x^2-4x+1+14=0 \Leftrightarrow 4v+\left(2x^2-1\right)^2+\left(2x-1\right)^2=-14$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x+3=\sqrt{x^5+x^2+7x+7} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x^2+6x+9=x^5+x^2+7x+7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x^5+x-2=0 \quad (1)\end{cases}$

  Nếu $x>1$ thì $x^5+x>2$ và nếu $x<1$ thì $x^5+x<2$. Hơn nữa $x=1$ thì (1) nghiệm đúng.
  Trường hợp này có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x=1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+9}{\sqrt{x^4+3x^3+5x^2+6x-6}}=x^2+2x+2$.
2. $\dfrac{x^4+2x^2-x+4}{\sqrt{x^4+3x^2+x-1}}=2+x^2$.
3. $\dfrac{4x^4+4x^2-5x}{\sqrt{2x^4-2x^3+3x^2+4x+2}}=x^2-x+1$.
4. $\dfrac{x\left(9x^3+6x-19\right)}{\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{3x^4-9x^3+4x^2+16x+2}}=1$.
5. $\dfrac{4x^4+4x^3+9x^2-26x-1}{\sqrt{2x^4-3x^3-2x^2+25x+3}}=x^2-2x-1$.
6. $\dfrac{9x^4-6x^2+x+5}{\sqrt{3x^4+3x^3+3x^2-x-4}+1}=1+x+x^2$.
7. $\dfrac{x^4+x^3+x^2-2x+3}{1+x^2}=\sqrt{x^4+2x^3+x^2+3x-3}$.
8. $\dfrac{8x^4-6x^2+4}{\sqrt{4x^4+3x^3+2x^2-x-4}}=1+x+x^2$.
9. $\dfrac{3x^4-2x^2-x+2}{\sqrt{3x^4+3x^3+2x^2+2x-6}}=\dfrac{x^2+x+1}{3}$.
10. $\dfrac{4x^4-5x^2+5}{x^2+x+2}=\sqrt{2x^4+2x^3+4x^2-x-6}$.
11. $\dfrac{x^4+2x^3-2x^2+3}{\left(1+x^2\right)\sqrt{x^4+x^3+4x^2+x-3}}=1$.
12. $\dfrac{4x^2+1}{\sqrt{x^4+x^3+2x^2+4x+1}-2}=2+x$.
13. $\dfrac{4x^4-4x^2-x+5}{x^2+x+2}=\sqrt{2x^4+2x^3+4x^2-6}$.
14. $\dfrac{2x^3+x^2+1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^4+x^3+x^2+x-1}}=1$.
15. $\dfrac{x^4+2x^3+x^2-2x+2}{\sqrt{x^4+x^3+x^2+3x-2}}=1+x^2$.
16. $\dfrac{4x^4-4x^2-2x+6}{\left(x^2+x+2\right)\sqrt{2x^4+2x^3+4x^2+x-7}}=1$.
17. $\dfrac{(2x-3)(2x+1)}{\sqrt{x^4+x^3+2x^2+2x+3}-4}=x+2$.
18. $\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{1-\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+2x+2}}=x+2$.

19. $\dfrac{2x^4-4x^3+5x^2-2x+3}{\sqrt{2x^4+2x^3+x^2-1}}=1+x$.

20. $\dfrac{3x^4-6x^3+5x^2-2x+4}{\sqrt{x^4+4x^3+x^2-2}}=1+x$.

21. $\dfrac{2x^4-4x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{2x^4+2x^3+x^2+x-2}}=x+1$.

22. $\dfrac{x^4-4x^3+4x^2-3x+6}{\sqrt{3x^4+2x^3+2x^2+x-4}}=x+1$.

23. $\dfrac{2x^4-x+1}{\sqrt{x^4+x^3+3x^2+2}-2}=\dfrac{3+x}{2}$.

24. $\dfrac{2x^2+10}{\sqrt{x^4+x^3+5x^2+2x}}=3+x$.

25. $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{3-\sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}}=x+3$.

26. $\dfrac{x^4+3}{1+\sqrt{x^4+x^3+3x^2+3x+1}}=\dfrac{x+3}{4}$.

27. $\dfrac{x^5+2x^4-6x^3-7x^2+5x-3}{\sqrt{x^5+4x^4+x^2+11x-1}}+x^2+1=0$.

28. $\dfrac{x^4+3x^3+13x^2-4x-3}{\sqrt{2x^4-2x^3+7x+15}}=2x^2+x+1$.

29. $\dfrac{x^4-3x^3-x^2-2x-16}{\sqrt{3x^4-x^3+3x^2-14}}+x^2+x+1=0$.

30. $\dfrac{x^4-x^3-3x}{x^2+2}=\sqrt{x^4+x^3+5x^2+3x+3}$.

31. $\dfrac{x^4-5x^3-6x^2-9x-5}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^4+5x^3+11x^2+9x+8}}=1$.

32. $\dfrac{x^4-3x^3+6x^2-3x+3}{\sqrt{x^4+3x^3-x^2+3x}}=2+x^2$.

33. $\dfrac{x^4-5x^2-11x-7}{\sqrt{x^4+3x^3+7x^2+12x+7}}=x^2+1$.

34. $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+3x^3-5x^2+12x-5}}=\dfrac{x^2+1}{x^4+7x^2-11x+5}$.

35. $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+9x^3+4x^2+3x+1}}=\dfrac{x^2+1}{x^4-6x^3-2x^2-2x-1}$.

36. $\dfrac{1}{\sqrt{2x^4+2x^3+x^2+x+2}}=\dfrac{x+1}{x^3+x^2-2}$.

37. $\dfrac{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^4+2x^3+x^2-2x+5}}=1$.

38. $\dfrac{x^3+2x^2-5x+2}{\sqrt{2x^4+2x^3+6x-2}}=1+x^2$.

39. $\dfrac{x^4-2x^3-5x^2-18x-10}{\sqrt{x^4+3x^3+13x^2+18x+19}}=x^2-2x$.

40. $\dfrac{x^3+2x^2-4x-1}{\sqrt{2x^4+6x^2-2x+1}}=x^2-2x$.

41. $\dfrac{x^3-4x^2-4x-4}{\sqrt{2x^4+2x^3+4x^2-4x+5}}+x\left(x-2\right)=0$.

42. $\dfrac{-2x^4-x^3-x^2+2x+1}{x\left(x-2\right)}=\sqrt{4x^4+2x^3+9x^2-2x+8}$.

43. $\dfrac{2x^4+x^3-8x^2+2x-1}{\sqrt{4x^4+2x^3+2x+8}}=x\left(2-x\right)$.

44. $\dfrac{2x^3-3x^2+x-4}{\sqrt{2x^4-3x^3+9x^2-3x+8}}=x^2-x$.

45. $\dfrac{2x^2+4}{x-x^2}=\sqrt{2x^4-x^3+8x^2-2x+8}$.

46. $\dfrac{-x^4-x^3+x^2+1}{x^2-x}=\sqrt{3x^4+5x^2-2x+3}$.

47. $\dfrac{-x^4-x^3+3x^2+4x+9}{\sqrt{3x^4+3x^3-6x-5}}=x^2-x$.

48. $\dfrac{-2x^4-x^3+2x+2}{\sqrt{4x^4+2x^2-4x+2}}=x^2-x$.

49. $\dfrac{8x^4+3x^3+9x^2+13x+14}{\sqrt{x^4+3x^2-12x-11}}=x+2$.

50. $\dfrac{7x^4+3x^3+11x^2+11x+7}{\sqrt{2x^4+x^2-10x-4}}=x+2$.

51. $\dfrac{8x^4+3x^3+11x^2+15x+8}{\sqrt{x^4-3x^3+x^2-14x-5}}=x+2$.

52. $\dfrac{2x^4-x^2-4x+6}{\sqrt{x^5+x^2+7x}}=x^4-x+1$.

53. $x+\dfrac{2x^4-x^3-x^2-x+4}{\sqrt{x^5+x^3+x^2+4x+2}}=x^4+1$.

54. $\dfrac{2x^4+2x^3-x^2-2x+6}{\sqrt{x^5+2x^3+x^2+5x}}=x^4-x+1$.

55. $\dfrac{-3x^3+2x^2+3x+7}{\sqrt{2x^5+x^4+3x^3+2x-5}}=x^4-x+1$.

56. $\dfrac{2x^4-4x^3-x^2+4}{\sqrt{2x^5+4x^3+3x^2+4x-1}+1}=x^4-x+1$.

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.***
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
23. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
24. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
25. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán*** **(*chính thức – dự bị*)** ***qua các thời kỳ.***
26. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ*** **(*1995 – 2013*).**
27. ***Các tạp chí toán học*:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. ***Các diễn đàn toán học*:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...***

THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CÁNH YẾU ĐẠI
