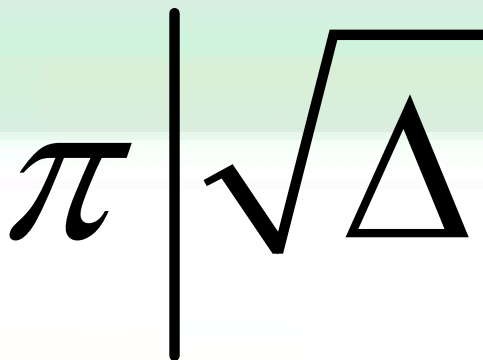


TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG



CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẠP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 7)

TRUNG ĐOÀN TRƯỜNG SA – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

**CHỦ ĐẠO: KẾT HỢP SỬ DỤNG PHÉP THÉ, CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẮN PHỤ
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC**

- **PHỐI HỢP PHÉP THÉ, CỘNG ĐẠI SỐ VÀ ẮN PHỤ.**
- **SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỀU HÀM SỐ.**
- **SỬ DỤNG KẾT HỢP ĐÁNH GIÁ – BẤT ĐẲNG THỨC.**
- **TỔNG HỢP CÁC PHÉP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2014

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*Yêu ai cứ bảo là yêu,
Ghét ai cứ bảo là ghét,
Dù ai ngon ngọt nuông chiều,
Cũng không nói yêu thành ghét,
Dù ai cầm dao dọa giết,
Cũng không nói ghét thành yêu.*

(Lời mẹ dặn – Phùng Quán; 1957)

CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH – HỆ HỖN TẬP

LÝ THUYẾT GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHẦN 7)

TRUNG ĐOÀN TRƯỜNG SA – QUÂN ĐOÀN TĂNG THIẾT GIÁP

Trong khuôn khổ Toán học sơ cấp nói chung và Đại số phổ thông nói riêng, hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập là dạng toán cơ bản nhưng thú vị, có phạm vi trải rộng, phong phú, liên hệ chặt chẽ với nhiều bộ phận khác của toán học sơ cấp cũng như toán học hiện đại.

Tại Việt Nam, hệ phương trình, nội dung hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập là một bộ phận hữu cơ, quan trọng, được phổ biến giảng dạy chính thức trong chương trình sách giáo khoa Toán các lớp 9, 10, 11, 12 song song với các khối lượng kiến thức liên quan. Đây cũng là kiến thức phổ biến xuất hiện trong các kỳ thi kiểm tra kiến thức thường niên, kỳ thi chọn học sinh giỏi toán các cấp trên toàn quốc, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT và trong kỳ thi tuyển sinh đại học – cao đẳng hàng năm, một kỳ thi đầy cam go, kịch tính và bất ngờ, nó lại là một câu rất được quan tâm của các bạn học sinh, phụ huynh, các thầy cô, giới chuyên môn và đông đảo bạn đọc yêu Toán.

Yêu cầu của dạng toán khá đa dạng, đa chiều, mục tiêu tìm các ẩn thỏa mãn một tính chất nào đó nên đề thao tác dạng toán này, các bạn học sinh cần liên kết, phối hợp, tổng hợp các kiến thức được học về phương trình, hệ phương trình và bất phương trình, như vậy nó đòi hỏi năng lực tư duy của thí sinh rất cao. Tuy nhiên "Trăm hay không hay bằng tay quen", các phương pháp cơ bản đã được được các thế hệ đi trước đúc kết và tận tụy cho thế hệ tương lai, các bạn hoàn toàn đủ khả năng kế thừa, phát huy và sáng tạo không ngừng, chuẩn bị đủ hành trang nắm bắt khoa học kỹ thuật, đưa đất nước ngày càng vững bền, phồn vinh, và hiển nhiên những bài toán trong các kỳ thi nhất định không thể là rào cản, mà là cơ hội thử sức, cơ hội khẳng định kiến thức, minh chứng sáng ngời cho tinh thần học tập, tinh thần ái quốc !

Các phương pháp giải và biện luận hệ phương trình – hệ bất phương trình – hệ hỗn tập được luyện tập một cách đều đặn, bài bản và hệ thống sẽ rất hữu ích, không chỉ trong bộ môn Toán mà còn phục vụ đắc lực cho các môn khoa học tự nhiên khác như hóa học, vật lý, sinh học,... Tiếp theo các Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn (Phần 1, 2, 3, 4), tài liệu chủ yếu giới thiệu đến quý bạn đọc Lý thuyết giải hệ phương trình chứa căn ở cấp độ cao, trình bày chi tiết các thí dụ điển hình về hệ giải được nhờ sử dụng tổng hợp các phép thế, phép cộng đại số, đại lượng liên hợp, sử dụng đồng bộ tính chất đơn điệu hàm số, các phép ước lượng – đánh giá – bất đẳng thức. Đây là nội dung có mức độ khó tương đối, đòi hỏi các bạn đọc giả cần có kiến thức vững chắc về các phép giải phương trình chứa căn, kỹ năng biến đổi đại số và tư duy chiều sâu bất đẳng thức.

Các thao tác tính toán và kỹ năng trình bày cơ bản đối với phương trình, hệ phương trình xin không nhắc lại.

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức, hằng đẳng thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc cao.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).
5. Kỹ năng giải hệ phương trình cơ bản và hệ phương trình đối xứng, hệ phương trình đồng bậc, hệ phương trình chứa căn thông thường.
6. Kỹ thuật đặt ẩn phụ, sử dụng đại lượng liên hợp, biến đổi tương đương.
7. Kiến thức nền tảng về ước lượng – đánh giá, hàm số - đồ thị, bất đẳng thức – cực trị.

I. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x = y^3 + 6y^2 + 13y + 8, \\ 2\sqrt{x+2} - \sqrt{y+3} + (y+1)^2 = 2x^2 + 3x - 8. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2; y \geq -3$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + y + 2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 &= (y+2)^3 + y + 2 \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; y+2 = v \Rightarrow u^3 + u = v^3 + v \Leftrightarrow u^3 - v^3 + u - v = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0$.

Với $u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Với $u = v \Leftrightarrow x+1 = y+2 \Leftrightarrow x = y+1$, phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} &= x^2 + 3x - 8 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 2 = x^2 + 3x - 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} &= (x-2)(x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = x+5 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{1}{2} < 3 \leq x+5, \forall x \geq -3 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)(x^2 - 2x + 4) = y^3 + 3y, \\ 2\sqrt{2x-y} + 15 = x^2 + 5y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x \geq y$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $(x-1)[(x-1)^2 + 3] = y^3 + 3y \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = y^3 + 3y$.

Đặt $x-1 = u; \Rightarrow u^3 + u = y^3 + y \Leftrightarrow u^3 - y^3 + 3u - 3y = 0 \Leftrightarrow (u-y)(u^2 + uy + y^2 + 3) = 0$.

Với $u^2 + uy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Với $u = y \Leftrightarrow x-1 = y$ thì phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+1} &= x^2 + 5x - 20 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1} - 2) = x^2 + 5x - 24 \\ \Leftrightarrow \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}+2} &= (x-3)(x+8) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{2}{\sqrt{x+1}+2} = x+8 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} \leq \frac{2}{2} = 1 < 7 \leq x+8, \forall x \geq -1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Từ đây suy ra hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+6)+3(x^2+y^2)=-8, \\ 4\sqrt{2x-y+7}+62=x(3x+5)+y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $2x-y+7 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + 6(x-y) + 3(x^2 + y^2) &= -8 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 6x + 8 &= y^3 - 3y^2 + 6y \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 &= y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y - 3 \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) &= (y-1)^3 + 3(y-1) \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u; y-1=v \Rightarrow u^3+u=v^3+v \Leftrightarrow u^3-v^3+3u-3v=0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+3)=0$.

Với $u^2+uv+v^2+3=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Với $u=v \Leftrightarrow x+1=y-1$, phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+5} &= 3x^2 + 6x - 60 \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+5} - 3) = 3(x^2 + 2x - 24) \\ \Leftrightarrow \frac{4(x-4)}{\sqrt{x+5}+3} &= 3(x-4)(x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{4}{\sqrt{x+5}+3} = 3(x+6) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta dễ ý $\frac{4}{\sqrt{x+5}+3} \leq \frac{4}{3} < 3 \leq 3(x+6) \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 6)$.

Bài toán 4. Giải phương trình
$$\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1, \\ 5\sqrt{3x+2y-3} + y(x^2-x+5) + 2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $3x+2y-3 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 &= (x-y)^3 \Leftrightarrow 2x-1 = x-y \Leftrightarrow y = 1-x \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3x+2(1-x)-3} &= (x^2-x+5)(x-1)-2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} = x^3-2x^2+6x-7 \\ \Leftrightarrow 5(\sqrt{x-1}-1) &= x^3-2x^2+6x-12 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(x^2+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5}{\sqrt{x-1}+1} = x^2+6 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{5}{\sqrt{x-1}+1} \leq \frac{5}{1} = 5 < 7 \leq x^2+6, \forall x \geq 1$ nên (1) vô nghiệm.

Suy ra hệ phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4, \\ x^2 + y^2 - 6x + y + \sqrt{4x + y} = \sqrt{y + 5} + 10. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $4x + y \geq 0; y \geq -5$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 + 3x - 3 + y^3 + 3y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) + y^3 + 3y = 0 \quad (1).$$

Đặt $x-1 = t$ ta thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow t^3 + y^3 + 3t + 3y = 0 \Leftrightarrow (t+y)(t^2 - ty + y^2) + 3(t+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+y)(t^2 - ty + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - \frac{1}{2}y^2 = -3 \\ t = -y \end{cases} \Rightarrow t = -y \end{aligned}$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $2x^2 - 9x - 8 = \sqrt{6-x} - \sqrt{3x+1}$.

Với $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$, biến đổi về dạng

$$\begin{aligned} 2x^2 - 9x - 5 + \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)(2x+1) + \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5) \left(2x+1 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} \right) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Rõ ràng $2x+1 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$ nên $(2) \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Từ đây đi đến hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; -4)$.

Nhận xét.

Thông qua 5 bài toán mở đầu, thoát tiên nhiều bạn đọc giả có thắc mắc tự nhiên là chưa thấy mặt mũi của cái gọi là ý tưởng chủ đạo sử dụng công cụ đạo hàm – tính chất đơn điệu hàm số. Hết sức bình tĩnh, tạm thời chúng ta cần quan sát một chút, rõ ràng 5 bài toán trên đều có một phương trình định hướng, thuận tiện biến đổi tương đương để phân tích nhân tử, hơn nữa đều dừng chân mức độ đơn giản, trong đó có một phương trình của hệ ban đầu có dạng phương trình đa thức hai ẩn có đặc thù biến đổi về hàm số đơn điệu theo dạng thức

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

Chưa vội sử dụng công cụ đạo hàm – tính chất đơn điệu hàm số, cũng hoàn toàn chưa sử dụng đồng bộ hai phương trình của hệ hay công cụ đạo hàm để khảo sát hàm số một biến, đi đến tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số cần thiết. Tiếp tục sử dụng phương pháp thế đối với phương trình còn lại thu được phương trình một ẩn, hầu hết 5 bài toán trên đã được cố ý sắp xếp đi theo hướng sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời, yêu cầu các bạn đọc giả nắm vững các phương pháp giải phương trình chứa căn để đọc hiểu tài liệu một cách tốt nhất.

Kiến thức về đạo hàm – khảo sát hàm số thuộc liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 THPT, thực sự nhẹ nhàng và cơ bản với các bạn thí sinh ôn luyện thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng, nhưng đối với một học sinh lớp 9 THCS hoàn toàn có thể giải được toàn bộ các bài toán tương tự theo hướng phân tích nhân tử, chỉ với kiến thức căn thức và phương pháp giải phương trình vô tỷ thông thường, điều này rất đáng hoan nghênh. Vì vậy tác giả mong muốn các bạn đọc giả nhỏ tuổi có thể coi lời giải sử dụng kiến thức đạo hàm – hàm số có tính chất tham khảo.

Bài toán 6. Trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT, Môn Toán; Tỉnh Lạng Sơn, Đề chính thức, năm học 2013 – 2014.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = y^3 + 3y, \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{y+1} = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3; y \geq -1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x - 3 = y^3 + 3y \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) = y^3 + 3y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y) \Leftrightarrow x-1 = y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3 &\Leftrightarrow 2x-3 + 2\sqrt{x^2-3x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x} = 6-x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ x^2-3x = x^2-12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 9x = 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 3)$.

Bài toán 7. Trích lược câu 2.b, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT, Môn Toán; Thành phố Hà Nội, Đề chính thức, năm học 2013 – 2014.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0, \\ 2\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{3+2y-y^2} - 3x + 2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 = y^3 + 3y \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{4-x^2} = -3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 4-x^2 = 9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x(5x-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$.

Nhận xét.

Hai bài toán 6 và 7 bước đầu sử dụng đạo hàm – tính chất đơn điệu hàm số, và may mắn hơn là lại chung một hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I}$. Trước tiên chúng ta không quá khó để nhận ra sự đơn giản và định hướng xuất phát từ phương trình thứ nhất của hệ ban đầu. Thực hiện phân tích, thêm bớt và biến đổi đi đến dạng tương đồng hàm số $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Điều kiện tiên quyết để có hành trình này là hàm số đặc trưng cần xét phải đơn điệu trên một miền xác định (tập hợp số thực hoặc miền xác định của các biểu thức đề bài, thậm chí điều kiện có nghiệm của các ẩn). Để chứng minh hàm số đơn điệu trên một miền các bạn có thể có hai phương án, đó là sử dụng định nghĩa hàm số đơn điệu chương trình Đại số lớp 10 THPT hoặc công cụ đạo hàm.

Phương án 1. Sử dụng công cụ đạo hàm

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Đạo hàm dương nên hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực. Từ đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Phương án 2. Sử dụng định nghĩa đơn điệu hàm số

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{x_1^3 + 3x_1 - (x_2^3 + 3x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - x_2^3 + 3(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3 > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

Suy ra hàm số đồng biến và liên tục. Thu được $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Bài toán 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^2 - 3xy + 3y^2) = 2y^3 + 3y^2 + 7y - 2x + 2, \\ 2\sqrt{2(x+y+1)} + 4y(1+y) = x^3 - 2x^2 + 5x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x + y \geq -1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 2x - 2y &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + 2y + 2 \\ \Leftrightarrow (x - y)^3 + 2(x - y) &= (y + 1)^3 + 2(y + 1) \quad [*] \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $[\ast] \Leftrightarrow f(x - y) = f(y + 1) \Leftrightarrow x - y = y + 1 \Leftrightarrow x = 2y + 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x + 2 + x - 1} + (2y + 1)^2 &= x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x + 1} + x^2 = x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3x + 1} &= x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{3x + 1} - 2) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x - 1)}{\sqrt{3x + 1} + 2} &= (x - 1)(x^2 - 2x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3x + 1} + 2} = (x - 1)^2 + 2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ dàng nhận thấy $\frac{2}{\sqrt{3x + 1} + 2} \leq \frac{2}{2} = 1 < 2 \leq (x - 1)^2 + 2, \forall x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Từ đây ta thu được nghiệm duy nhất của hệ $(x; y) = (1; 0)$.

Bài toán 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x - y^3 = (3y + 1)(y + 1) + 1, \\ \sqrt{x + y} + 3\sqrt{x + 3y + 19} + xy + y^3 = 105, \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x + y \geq 0; x + 3y + 19 \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 + x - y^3 = 3y^2 + 4y + 2 \Leftrightarrow x^3 + x = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + y + 1 \Leftrightarrow x^3 + x = (y + 1)^3 + y$$

Đặt $y + 1 = t$ ta được

$$x^3 + x = t^3 + t \Leftrightarrow x^3 - t^3 + x - t = 0 \Leftrightarrow (x - t)(x^2 + xt + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ \left(x + \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 = -1 \end{cases} \quad (*)$$

Dễ nhận thấy $(*)$ vô nghiệm.

Với $x = t \Leftrightarrow x = y + 1; x + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{2}$, phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$\sqrt{2y+1} + 6\sqrt{y+5} + y^3 + y^2 + y = 105 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(y) = \sqrt{2y+1} + 6\sqrt{y+5} + y^3 + y^2 + y \quad ; y \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Đạo hàm $f'(y) = \frac{1}{\sqrt{2y+1}} + \frac{6}{\sqrt{y+5}} + 3y^2 + 2y + 1 > 0, \forall y \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, như vậy hàm số đồng biến.

Mặt khác lại có $f(4) = 105$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $y = 4 \Rightarrow (x; y) = (4; 5)$.

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 4)$.

Bài toán 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6 + 3x^2y^2 = x^3y^3 + 3xy^3, \\ \sqrt{2y-1} + 3x^3 + 6x = 2y^3 + y + 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x^2}{y}\right) = x^3 + 3x \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x^2}{y}\right) = f(x) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} + x^3 + 5x = 7 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - 1 + x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - 1 + (x-1)(x^2 + x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1} + (x-1)(x^2 + x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x^2 + x + 6\right) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x^2 + x + 6 = \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên $(2) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài toán 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2y^2 + 3x^2 + 8}{x^2 + 3y^2 + 4} \\ \frac{5x^3 + 8y^3 + 3}{2\sqrt{10-x} + 2x^2 + 4y^2} = \frac{x}{y} - 1 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 10; y \neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x(x^2 + 3y^2 + 4) &= y(2y^2 + 3x^2 + 8) \Leftrightarrow x^3 + 3xy^2 + 4x = 2y^3 + 3x^2y + 8y \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 4x - 4y = y^3 + 4y \Leftrightarrow (x-y)^3 + 4(x-y) = y^3 + 4y \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x = 2y$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$\begin{aligned} \frac{5x^3 + x^3 + 3}{2\sqrt{10-x} + 2x^2 + x^2} = 2-1 &\Leftrightarrow \frac{6x^3 + 3}{2\sqrt{10-x} + 3x^2} = 1 \Leftrightarrow 6x^3 + 3 = 2\sqrt{10-x} + 3x^2 \\ &\Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{10-x} + 6x^3 - 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(3 - \sqrt{10-x}) + 3(2x^3 - x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{3 + \sqrt{10-x}} + 3(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{2}{3 + \sqrt{10-x}} + 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} \right] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{2}{3 + \sqrt{10-x}} + 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} > 0, \forall x \leq 10$ nên (2) $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2xy + (x+y)(3xy+2) = 7y^3 + 3y^2 + 4y, \\ \frac{5\sqrt{2x+y-2} + 6x^3}{3x^2 + x + 2y + 11} = \frac{x+3y}{x+y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $(x+y)(3x^2 + x + 2y + 11) \neq 0; 2x + y - 2 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y &= 7y^3 + 4y^2 + 4y \\ &\Leftrightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 + 2(x+y) = 8y^3 + 4y^2 + 4y \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 = 2t^2 + (t+1)^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Vậy hàm số trên đồng biến và liên tục trên $\mathbb{I}$ nên (1) $\Leftrightarrow f(x+y) = f(2y) \Leftrightarrow x+y = 2y \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{3x-2} + 6x^3}{3x^2 + 3x + 11} = 2 &\Leftrightarrow 5\sqrt{3x-2} + 6x^3 = 6x^2 + 6x + 22 \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{3x-2} - 10 + 6x^3 - 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 5(\sqrt{3x-2} - 2) + 6(x^3 - x^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5(3x-6)}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6(x-2)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{15}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \right] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{15}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên (2) $\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2$.

Đổi chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

Bài toán 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 5y^2 - 11y + 12 = y^3 + 2x^2 - 4x, \\ 11\sqrt{y+2} + (x+y-2)^3 + 4x^3 = 27. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq -2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + y^2 - 4y + 4 + 3y - 6 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 + (x-1)^2 + 3(x-1) = (y-2)^3 + (y-2)^2 + 3(y-2) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 3t; t \in \mathbb{I}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 2t + 3 = 2t^2 + (t+1)^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Vậy hàm số trên đồng biến và liên tục trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y-2) \Leftrightarrow x-1 = y-2 \Leftrightarrow y = x+1$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$\begin{aligned} 11\sqrt{x+3} + (2x-1)^3 + 4x^3 &= 27 \Leftrightarrow 11\sqrt{x+3} + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 28 = 0 \\ \Leftrightarrow 11\sqrt{x+3} - 22 + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 6 &= 0 \Leftrightarrow 11(\sqrt{x+3} - 2) + 6(2x^3 - 2x^2 + x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{11(x-1)}{\sqrt{x+3} + 2} + 6(x-1)(2x^2 + 1) &\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{11}{\sqrt{x+3} + 2} + 6(2x^2 + 1) \right] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{11}{\sqrt{x+3} + 2} + 6(2x^2 + 1) > 0, \forall x \geq -3$ nên $(2) \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Đổi chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Bài toán 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + 3y^2 + 5) = y(2y^2 + 3x^2 + 10), \\ \frac{3y}{x}\sqrt{4x+2y-1} + 6x^2 = 6x + 2y + 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $4x + 2y - 1 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 5x - 5y = y^3 + 5y \Leftrightarrow (x-y)^3 + 5(x-y) = y^3 + 5y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x-y) = f(y) \Leftrightarrow x = 2y$.

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\sqrt{5x-1} + 6x^2 &= 7x + 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{5x-1} - 6 + 12x^2 - 14x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{5x-1} - 2) + 2(6x^2 - 7x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \frac{3(5x-5)}{\sqrt{5x-1} + 2} + 2(x-1)(6x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{3}{\sqrt{5x-1} + 2} + 2(6x-1) \right] &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{3}{\sqrt{5x-1} + 2} + 2(6x-1) > 0, \forall x \geq \frac{1}{5}$ nên $(2) \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(7x+3) + 2xy(6x+3y+2) + y^3 + 3x^2 = x-y, \\ 3\sqrt{4x+y-2} + 3x^2 - 2 = 12x + 4y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $4x + y - 2 \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 + 3x^2 + 4xy + y^2 &= x - y \\ \Leftrightarrow (8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) + (4x^2 + 4xy + y^2) + 2x + y &= x^3 + x^2 + x \\ \Leftrightarrow (2x+y)^3 + (2x+y)^2 + 2x + y &= x^3 + x^2 + x \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 = 2t^2 + (t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(2x+y) = f(x) \Leftrightarrow 2x+y = x \Leftrightarrow x+y=0$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3x-2} + 3x^2 - 8x - 2 &= 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3x-2} - 6 + 3x^2 - 8x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{3x-2} - 2) + (x-2)(3x-2) &= 0 \Leftrightarrow \frac{3(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2} + (x-2)(3x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + 3x-2\right) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2} + 3x-2 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $(2) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-2$.

Từ đây đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -2)$.

Bài toán 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x(x^2 - 2x + 2) - 4}{y(y^2 + 4y + 6)} = 1, \\ \frac{(x-2)(y-3) + \sqrt{y-2} + 1}{x^2 - 5x + y + 3} = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 5x + y + 3 \neq 0; y \geq 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 2x - 1 &= y^3 + 4y^2 + 6y + 3 \\ (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x^2 - 2x + 1) + x - 1 &= (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + (y^2 + 2y + 1) + y + 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 + (x-1)^2 + x - 1 &= (y+1)^3 + (y+1)^2 + y + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 = 2t^2 + (t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow x = y+2$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)(x-5) + \sqrt{x-4} + 1}{x^2 - 4x + 1} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 11 + \sqrt{x-4}}{x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 7x + 11 + \sqrt{x-4}) &= x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x-4} + 2x^2 - 17x + 32 &= 0 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x-4} - 1) + 2x^2 - 17x + 35 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{x-4}+1} + (x-5)(2x-7) &= 0 \Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{x-4}+1} + 2x-7\right) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{3}{\sqrt{x-4}+1} + 2x-7 \geq 0, \forall x \geq 4$ nên $(2) \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=3$. Hệ có nghiệm $(x; y) = (5; 3)$.

Bài toán 17. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 4x + 16 = y^3 - 5y^2 + 12y, \\ 3x^2 + 3x + y - 5 = 4(y+2)\sqrt{3x+y-5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $3x + y - 5 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 + 4x + 16 &= y^3 - 5y^2 + 12y \\x^3 + x^2 + 4x &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + y^2 - 4y + 4 + 4y - 8 \\&\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 4x = (y-2)^3 + (y-2)^2 + 4(y-2)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 4t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 4 = 2t^2 + (t+1)^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên thu được $f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y-2$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$3x^2 + 4x - 3 = 4x\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{4x-3} + 4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{4x-3})^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4x-3} \\ 3x = \sqrt{4x-3} \end{cases}$$

$$\diamond x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}.$$

$$\diamond 3x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $(x; y) = (1; 3), (3; 5)$.

Bài toán 18. Trích lược câu II. 2, Đề thi thử Đại học – Cao đẳng lần thứ 3, Môn Toán (Dành cho tất cả các khối thi); Trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, trực thuộc Đại học Sư phạm Hà Nội; Mùa thi 2013.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x^2+1} = y + \frac{1}{y^2+1}, \\ \sqrt{9x^2 + \frac{4}{y^2}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$$

Lời giải.

Điều kiện $y \neq 0$. Rõ ràng $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t^2+1}; t \neq 0$ ta có $f'(t) = 1 - \frac{2t}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4 + 2t^2 - 2t + 1}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4 + t^2 + (t-1)^2}{(t^2+1)^2} > 0, \forall t \neq 0$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến với $t \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} = 3x - \frac{2}{x} + 2$

Đặt $3x - \frac{2}{x} = t \Rightarrow t^2 = 9x^2 + \frac{4}{x^2} - 12 \Rightarrow 9x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 12$.

Ta thu được

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2 + 12} &= t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -2 \\ t^2 + 12 = t^2 + 4t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -2 \\ 4t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \\ &\Leftrightarrow 3x - \frac{2}{x} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{3}; \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right\}\end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{1-\sqrt{7}}{2} \right)$.

Bài toán 19. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{y^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4}, \\ 6x + y + \frac{2}{y} + 1 = 7\sqrt{x^2 + y + 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \neq 0$. Xét $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Với $x \neq 0$ phương trình thứ nhất của hệ tương đương $x + \frac{1}{x^2 + 4} = y + \frac{1}{y^2 + 4}$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t^2 + 4}$ với $t \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - \frac{2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{t^4 + 8t^2 - 2t + 16}{(t^2 + 4)^2} \\ &= \frac{t^4 + 4t^2 + 4 + t^2 - 2t + 1 + 3t^2 + 11}{(t^2 + 4)^2} = \frac{(t^2 + 2)^2 + (t - 1)^2 + 3t^2 + 11}{(t^2 + 4)^2} > 0, \forall t \neq 0 \end{aligned}$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Thu được $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$7x + \frac{2}{x} + 1 = 7\sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow 7x^2 + x + 2 = 7x\sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow x^2 + x + 2 - 7x\sqrt{x^2 + x + 2} + 6x^2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = t$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 7xt + 6x^2 &= 0 \Leftrightarrow t(t - x) - 6x(t - x) = 0 \Leftrightarrow (t - x)(t - 6x) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2} = x \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = 6x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = x^2 \\ x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = 36x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \end{aligned}$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{281}}{70}; \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \right)$.

Bài toán 20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2y^2 + 1}, \\ \frac{6x^2 + 4y + 8}{2x - y + 1} = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $2x - y + 1 \neq 0$. Phương trình thứ nhất tương đương với $x + \frac{1}{2x^2 + 1} = y + \frac{1}{2y^2 + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{2t^2 + 1}$ thì

$$f'(t) = 1 - \frac{4t}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{4t^4 + 4t^2 - 4t + 1}{(2t^2 + 1)^2} = \frac{4t^4 + (2t - 1)^2}{(2t^2 + 1)^2} > 0.$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Thu được $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$\begin{aligned}\frac{6x^2 + 4x + 8}{x+1} &= 5\sqrt{2x^2 + 3} \Leftrightarrow 6x^2 + 4x + 8 = 5(x+1)\sqrt{2x^2 + 3} \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) - 5(x+1)\sqrt{2x^2 + 3} + 2(2x^2 + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 5(x+1)\sqrt{2x^2 + 3} + 2(2x^2 + 3) &= 0\end{aligned}$$

Với $x \neq -1$, đặt $x+1 = u; \sqrt{2x^2 + 3} = v$ ($v > 0$) thu được

$$2u^2 - 5uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u - 2v)(2u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ v = 2u \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}\checkmark \quad u = 2v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 8x^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^2 - 2x + 11 = 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \\ \checkmark \quad v = 2u &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + 3 = 4(x^2 + 2x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2} \Rightarrow y = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2}.\end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2}; y = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2}$.

Bài toán 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \frac{1}{x^2 - x + 1} = y - \frac{1}{y^2 - y + 1}, \\ x^2 + 2x + 3y + 7 = 7\sqrt{2x^3 - y^3 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 - y^3 + 1 \geq 0$.

Nhận xét $x = y = 0$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho. Xét $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; y \neq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t^2 - t + 1}; t \neq 0$ thì

$$f'(t) = 1 + \frac{2t - 1}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t^2 - 2t + 1 + 2t - 1}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{t^2(t^2 - 2t + 3)}{(t^2 - t + 1)^2} > 0; \forall t \neq 0.$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến với $t \neq 0$. Phương trình thứ nhất trở thành $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ có dạng

$$x^2 + 5x + 7 = 7\sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - 7\sqrt{x+1}\sqrt{x^2 - x + 1} + 6x + 6 = 0.$$

Với $x \geq -1$, đặt $\sqrt{x^2 - x + 1} = u; \sqrt{x+1} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$u^2 - 7uv + 6v^2 = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u - 6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned}\bullet \quad u = v &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x + 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ \bullet \quad u = 6v &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 6\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 37x - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{37 + \sqrt{1509}}{2}; \frac{37 - \sqrt{1509}}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ (0;0), (2;2); \left(\frac{37+\sqrt{1509}}{2}; \frac{37+\sqrt{1509}}{2} \right); \left(\frac{37-\sqrt{1509}}{2}; \frac{37-\sqrt{1509}}{2} \right) \right\}$.

Bài toán 22. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = y - \frac{2}{y^2 - 2y + 3}, \\ 3x^2 + 2y^2 - x + 5 = 5\sqrt{x^4 + y^2 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{I}$. Xét hàm số $f(t) = t - \frac{2}{t^2 - 2t + 3}$ ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 + \frac{2(2t-2)}{(t^2 - 2t + 3)^2} = \frac{t^4 - 4t^3 + 4t^2 + 6t^2 - 12t + 9 + 4t - 4}{(t^2 - 2t + 3)^2} \\ &= \frac{t^4 - 4t^3 + 4t^2 + 6t^2 - 8t + 5}{(t^2 - 2t + 3)^2} = \frac{(t^2 - 2t)^2 + 4(t-1)^2 + 2t^2 + 1}{[(t-1)^2 + 2]^2} > 0, \forall t \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực. Thu được $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay thế vào phương trình ta có $5x^2 - x + 5 = 5\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

Nhận xét $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Phương trình trên tương đương với $2(x^2 + x + 1) + 3(x^2 - x + 1) = 5\sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = u; \sqrt{x^2 - x + 1} = v$ ($u > 0; v > 0$) thu được

$$2u^2 + 3v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2u(u-v) = 3v(u-v) \Leftrightarrow (2u-3v)(u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = 3v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- $2u = 3v \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 = 9x^2 - 9x + 9 \Leftrightarrow 5x^2 - 13x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{13+\sqrt{69}}{10}; \frac{13-\sqrt{69}}{10} \right\}$.

Từ đây đi đến kết luận tập nghiệm $S = \left\{ (0;0); \left(\frac{13-\sqrt{69}}{10}; \frac{13-\sqrt{69}}{10} \right); \left(\frac{13+\sqrt{69}}{10}; \frac{13+\sqrt{69}}{10} \right) \right\}$.

Nhận xét.

Thông qua 22 bài toán mở màn, chắc chắn nhiều bạn độc giả đã hình dung được phần nào ý tưởng sử dụng công cụ đạo hàm – tính chất đơn điệu hàm số trong giải hệ phương trình chứa căn thức (hệ phương trình vô tỷ) nói chung. Các bài toán trên vẫn dừng chân với mức độ đơn giản, do có một phương trình thứ nhất có dạng đa thức, đồng thời mang tính chất định hướng lộ liễu. Về phía sau của bài toán bước đầu xoay quanh giải phương trình vô tỷ cơ bản, hoặc sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tam thức (các bài toán 1 đến 16), sử dụng ẩn phụ đồng bậc (các bài toán 19 đến 22), yêu cầu đòi hỏi kiến thức và kỹ năng thực hành phương trình nhất định mới có thể hoàn thành trọn vẹn. Sau đây là một số bài tập tương tự dựa theo motip trên, mời các bạn thử sức theo hai phương cách (biến đổi tương đương hoặc sử dụng tính chất đơn điệu) trước khi chuyển sang lớp hệ phương trình quy về dạng hàm số với các biến chứa căn.

Bài tập tương tự.

Giải các hệ phương trình sau đây trên tập hợp số thực

$$1. \begin{cases} y^3 + 4y = x^3 + 4x, \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+3y} = 2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2y^3 + 5y = 2x^3 + 5x, \\ \sqrt{3x+y+5} = x+y+1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3y^3 + y^2 + 7y = 3x^3 + y^2 + 7x, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 7} = x + y + 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2y^3 - y^2 + 7y = 2x^3 - y^2 + 7x, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + x + 6} = 2x - y + 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y^3 + 3y = x^3 + 3x^2 + 6x + 4, \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 = 9y^2 + 28y + 30, \\ \sqrt{2x+3} + x = y. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0, \\ x^2 + 2(y-1)\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3y - 2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x = y^3 + 6y^2 + 13y + 8, \\ 9x^2 + 8y + 17 = 9(2+y)\sqrt{2x^2+1}. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} (x-1)(x^2 - 2x + 4) = y^3 + 3y, \\ 3x + \frac{y}{x} + 1 = 3\sqrt{x^2 + 3x + y + 1}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{3x^2 + 21x + y + 45}{1+y} = 7\sqrt{5+x}, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 6) + 3(x^2 + y^2) = -8, \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1, \\ 6x^2 = 20 + 2x + y + (x-3)\sqrt{x^2 - y - 5}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4, \\ 2x^2 + y = \sqrt{4x^4 + x + y}. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = y^3 + 3y, \\ 8x^2 + 19x + y + 2 = \sqrt{64x^4 + 1}. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0, \\ x^2 + 3 = 3x + y + \sqrt{x^4 + y - x}. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x(x^2 - 3xy + 3y^2) = 2y^3 + 3y^2 + 7y - 2x + 2, \\ 3x^2 - 5x + 2y + 24 = 3\sqrt{x^4 - 9x + 2y + 64}. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^3 + x - y^3 = (3y + 1)(y + 1) + 1, \\ x^2 + 4x + y = 4\sqrt{x^3 - 8} + 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^6 + 3x^2y^2 = x^3y^3 + 3xy^3, \\ 6x^2 + y^2 - 5y + 7 = 7\sqrt{x^4 + 2x^2 - y^2 + 1}. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2y^2 + 3x^2 + 8}{x^2 + 3y^2 + 4}, \\ y^2 + 17x + 99 = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 24}. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x^3 + x^2 + 2xy + (x + y)(3xy + 2) = 7y^3 + 3y^2 + 4y, \\ 18x^2 + 2y^2 - 3x + 5 = 5\sqrt{16y^4 - x^2 + 1}. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x^3 + 5y^2 - 11y + 12 = y^3 + 2x^2 - 4x, \\ 3x^2 + y^2 + 14x + 45 = 7\sqrt{x^3 - 27} + y. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x(x^2 + 3y^2 + 5) = y(2y^2 + 3x^2 + 10), \\ 4y^2 + 2x + 2y + 5 = 5\sqrt{2x^3 - 8y^3 + 1}. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x^2(7x + 3) + 2xy(6x + 3y + 2) + y^3 + 3x^2 = x - y, \\ \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{2 + y} = 3\sqrt{(2x - 1)(2 - x)}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{x(x^2 - 2x + 2) - 2}{y(y^2 + 4y + 6)} = 1, \\ x^3 - 8 = 3y\sqrt{x^3 + 4y - 8}. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x + \frac{1}{x^2 + 1} = y + \frac{1}{y^2 + 1}, \\ \sqrt[3]{(y + 2)^2} + 3\sqrt[3]{(2x - y - 2)^2} = 4\sqrt[3]{2x^2 - y^2 - 4}. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x - y = \frac{1}{y^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4}, \\ 2\sqrt[3]{(y - 2)^2} = \sqrt[3]{(x^2 + x + y + 4)^2} + \sqrt[3]{y^3 - 8}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x - y + \frac{1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2y^2 + 1}, \\ 6\sqrt[3]{(x^2 - y + 1)^2} = 5\sqrt[3]{(y^2 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + y^2 + 1}. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x - \frac{1}{x^2 - x + 1} = y - \frac{1}{y^2 - y + 1}, \\ 3x^2 - 9y + 3 + \sqrt{3(y^4 + x^2 + 1)} = 0. \end{cases}$$

Bài toán 23. Trích lược câu III, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Tỉnh Vĩnh Phúc; Năm học 2012 – 2013.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x}, \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải 1.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 2y^3 + y &= (3-2x)\sqrt{1-x} = [2(1-x)+1]\sqrt{1-x} \\ \Leftrightarrow 2y^3 + y &= 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{1-x} = t$ thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2t^3 + t \Leftrightarrow 2(t^3 - y^3) + t - y = 0 \Leftrightarrow (t-y)[2(t^2 + ty + y^2) + 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-y)[(t+y)^2 + t^2 + y^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ (t+y)^2 + t^2 + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow t = y \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} &= 4 + \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{x+4} - 1 + 2 - \sqrt{1-x} + 3 - \sqrt{3-2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1} + \frac{x+3}{2+\sqrt{1-x}} + \frac{2(x+3)}{3+\sqrt{3-2x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{1-x}} + \frac{2}{3+\sqrt{3-2x}} \right) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x+4}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{1-x}} + \frac{2}{3+\sqrt{3-2x}} > 0, \forall x \in [-4;1]$ nên $(2) \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \Rightarrow y=2$.

Đổi chiều điều kiện ta đi đến nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 2y^3 + y &= (3-2x)\sqrt{1-x} = [2(1-x)+1]\sqrt{1-x} \\ \Leftrightarrow 2y^3 + y &= 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Như vậy $(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ đã cho trở thành

$$\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4} = 4 \quad (1).$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x+4}; x \in [-4;1]$ ta có

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in [-4;1].$$

Dẫn đến hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét.

Suy ra $(1) \Leftrightarrow g(x) = g(-3) \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$. Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-3; 2)$.

Bài toán 24. Trích lược bài toán T7/412, Đề ra kỳ này; Số 412, Tháng 10 năm 2011; Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam.

Tác giả: Nguyễn Tiến Tiến – Giáo viên Trường THPT Gia Viễn B, Huyện Gia Viễn, Tỉnh Ninh Bình.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0, \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $2x+y+5 \geq 0; 3x+2y+11 \geq 0; x \leq 5; y \leq 4$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} [3(5-x)+2]\sqrt{5-x} &= [3(4-y)+2]\sqrt{4-y} \\ \Leftrightarrow 3(5-x)\sqrt{5-x} + 2\sqrt{5-x} &= 3(4-y)\sqrt{4-y} + \sqrt{4-y} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Suy ra hàm $f(t)$ liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{5-x}) = f(\sqrt{4-y}) \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow 5-x = 4-y \Leftrightarrow y = x-1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$.

Với điều kiện $-\frac{4}{3} \leq x \leq 5$ ta biến đổi về dạng

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{3x+4} - x - 2) + 3(\sqrt{5x+9} - x - 3) &= x^2 + x \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x^2+x)}{\sqrt{3x+4}+x+2} + \frac{-3(x^2+x)}{\sqrt{5x+9}+x+3} &= x^2+x \\ \Leftrightarrow x(x+1) \left[\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2} + \frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3} + 1 \right] &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{3x+4}+x+2} + \frac{3}{\sqrt{5x+9}+x+3} + 1 > 0, \forall x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$ nên thu được

$$(2) \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0\} \Rightarrow (x; y) = (0; -1), (-1; -2)$$

Kết luận hệ phương trình có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 25. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x} + (5y-48)\sqrt{9-y} = 0, \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 = \sqrt{-2x+y+11} + 2x + 66. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} [5(10-x)+3]\sqrt{10-x} &= [5(9-y)+3]\sqrt{9-y} \\ \Leftrightarrow 5(\sqrt{10-x})^3 + 3\sqrt{10-x} &= 5(\sqrt{9-y})^3 + 3\sqrt{9-y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 + 3t; t \in \mathbb{I}$ thì $f'(t) = 15t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$,

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Ta thu được $f(\sqrt{10-x}) = f(\sqrt{9-y}) \Leftrightarrow \sqrt{10-x} = \sqrt{9-y} \Leftrightarrow 10-x = 9-y \Leftrightarrow y = x-1$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+7} + x^2 - 2x - 66 = \sqrt{10-x} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{x+7} - 4 + x^2 - 2x - 63 + 1 - \sqrt{10-x} = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-9}{\sqrt{x+7}+4} + (x-9)(x+7) + \frac{x-9}{1+\sqrt{10-x}} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-9) \left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{10-x}} + x+7 \right) = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{x+7}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{10-x}} + x+7 > 0, \forall x \in [-7; 10]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-9=0 \Leftrightarrow x=9$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (9; 8)$.

Bài toán 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0, \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{8-3x+2y} + 3x^2 = 14x+8. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x+y+2 \geq 0; 8-3x+2y \geq 0; x \leq 7; y \leq 6$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
& [3(7-x)+2]\sqrt{7-x} = [3(6-y)+2]\sqrt{6-y} \\
& \Leftrightarrow 3(7-x)\sqrt{7-x} + 2\sqrt{7-x} = 3(6-y)\sqrt{6-y} + 2\sqrt{6-y}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Suy ra hàm $f(t)$ liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực. Khi đó ta có

$$f(\sqrt{7-x}) = f(\sqrt{6-y}) \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = \sqrt{6-y} \Leftrightarrow 7-x = 6-y \Leftrightarrow x-y=1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$. Với $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ ta biến đổi về

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 \right) = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Từ đây đi đến nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 4)$.

Bài toán 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (7-3x)\sqrt{2-x} = (4-3y)\sqrt{1-y}, \\ 1 + \sqrt{4x^2+y+7} = 3x+y+7\sqrt{x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+y+7 \geq 0; -1 \leq x \leq 2; y \leq 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
& [3(2-x)+1]\sqrt{2-x} = [3(1-y)+1]\sqrt{1-y} \\
& \Leftrightarrow 3(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = 3(1-y)\sqrt{1-y} + \sqrt{1-y}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 9t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên

$$f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{1-y}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 2-x = 1-y \Leftrightarrow x-y=1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{4x^2 + x + 6} = 4x - 2 + 7\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 5(x+1)} = 2(2x-1) + 7\sqrt{x+1}.$$

Đặt $2x-1=u; \sqrt{x+1}=v; v \geq 0$ ta thu được

$$\sqrt{u^2 + 5v^2} = 2u + 7v \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 7v \geq 0 \\ u^2 + 5v^2 = 4u^2 + 28uv + 49v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 7v \geq 0 \\ 3u^2 + 28uv + 44v^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 7v \geq 0 \\ (u+2v)(3u+22v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{7}{2}v \geq 0 \\ u + \frac{22}{3}v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2u + 7v \geq 0 \\ u + 2v = 0 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $\begin{cases} u + \frac{7}{2}v \geq 0 \\ u + \frac{22}{3}v = 0 \end{cases}$ vì $v \geq 0$.
- Xét trường hợp $\begin{cases} 2u + 7v \geq 0 \\ u + 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 4x+4 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 8x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{7}}{2} \Rightarrow (x; y) = \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right).$

Kết luận hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $(x; y) = \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right).$

Bài toán 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^2+2}{\sqrt{3-y}} = \frac{5-y}{x}, \\ 3 + \sqrt{2x+1} = (x-1)^2 + y + \sqrt{2x-4y+16}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; y < 3$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x(x^2+2) = (5-y)\sqrt{3-y} \Leftrightarrow x^3 + 2x = (3-y)\sqrt{3-y} + 2\sqrt{3-y}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực, ta thu được

$$f(x) = f(\sqrt{3-y}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3-y \end{cases}$$

Lúc này phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 3 + \sqrt{2x+1} &= x^2 - 2x + 1 + 3 - x^2 + \sqrt{2x-4(3-x^2)+16} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{4x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow 2x-1 + \sqrt{2x+1} &= \sqrt{(4x^2-4x+1)+3(2x+1)} \Leftrightarrow 2x-1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{(2x-1)^2+3(2x+1)} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u; \sqrt{2x+1}=v$ ($v \geq 0$) ta có (*) $\Leftrightarrow u+v=\sqrt{u^2+3v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+2uv+v^2=u^2+3v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ v(v-u)=0 \end{cases}$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $\begin{cases} u+v \geq 0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1+\sqrt{2x+1} \geq 0 \\ 2x+1=0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- Do $v \geq 0$ nên $\begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x(2x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Từ đây suy ra phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Bài toán 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{17-x^2}{y} = \sqrt{x}(3+\sqrt{x}) + 2\sqrt{63-14x-18y} \\ x(x^2+2x+9) + 12y = 34 + 2(13-3y)\sqrt{17-6y} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq y \leq \frac{17}{6}; x \geq 0; 63-14x-18y \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + 9x = (17-6y)\sqrt{17-6y} + 2(17-6y) + 9\sqrt{17-6y}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 9t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 4t + 9 = (t+2)^2 + 2t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Suy ra hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Hơn nữa

$$f(x) = f(\sqrt{17-6y}) \Leftrightarrow x = \sqrt{17-6y} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 17-6y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ lúc đó trở thành

$$\begin{aligned} \frac{6y}{y} &= 3x + \sqrt{x} + 2\sqrt{63-14x+3(x^2-17)} \Leftrightarrow 6 = 3x + \sqrt{x} + 2\sqrt{3x^2-14x+12} \\ 3(2-x) - \sqrt{x} &= 2\sqrt{3(x^2-4x+4)-2x} \Leftrightarrow 3(2-x) - \sqrt{x} = 2\sqrt{3(2-x)^2-2x} \end{aligned}$$

Đặt $2-x=u; \sqrt{x}=v$ ($v \geq 0$) thu được

$$\begin{aligned} 3u-v &= 2\sqrt{3u^2-2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ 9u^2-6uv+v^2=12u^2-8v^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u^2+2uv-3v^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ (u-v)(u+3v)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u=v \\ u=-3v \end{cases} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u=-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10v \geq 0 \\ u=-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \leq 0 \\ v=0 \\ u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Từ đây đi đến kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \frac{8}{3}\right)$.

Bài toán 30. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^2-6x-y+14}} = \frac{x^2+y}{6}, \\ x^3+x^2+5x+y+6 = (11-y)\sqrt{6-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \leq 6; x^2 - 6x - y + 14 \geq 0; x \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^3 + x^2 + 5x = (6-y)\sqrt{6-y} + 6 - y + 5\sqrt{6-y}$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 5t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 2t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp $\mathbb{I}$. Thu được

$$f(x) = f(\sqrt{6-y}) \Leftrightarrow x = \sqrt{6-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 6-y \end{cases}$$

Thay thế vào phương trình thứ nhất ta có

$$\begin{aligned} \frac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^2-6x-(6-x^2)+14}} &= \frac{6}{6} \Leftrightarrow \frac{3-x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2(x^2-3x+4)}} = 1 \\ \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x} &= 1+\sqrt{2(x^2-3x+4)} \Leftrightarrow 2-x+\sqrt{x} = \sqrt{2(x^2-4x+4+x)} \end{aligned}$$

Đặt $2-x=u; \sqrt{x}=v$ ($u \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} u+v &= \sqrt{2(u^2+v^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+v^2+2uv = 2(u^2+v^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow u &= v \Leftrightarrow 2-x = \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 5)$.

Nhận xét.

Thông qua 30 bài toán mở đầu với ý tưởng sử dụng công cụ đạo hàm – tính chất đơn điệu hàm số, một số bài toán có hình thức phức tạp đồng bộ hai phương trình của hệ ban đầu, tuy nhiên mức độ vẫn còn rất đơn giản khi có một phương trình định hướng khai thác, hơn nữa các ẩn tham gia thiết lập hàm số còn nguyên sơ, dễ dàng quy về dạng thức $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ trong đó $u = \sqrt{g(x)}; v = \sqrt{h(y)}$, hàm đơn căn thức.

Sau đây chúng ta sẽ phức tạp hóa các đơn vị tham gia hàm số thêm một bậc, thiết lập $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ trong đó $u = \sqrt{g(x; y)}; v = \sqrt{h(x)} \vee v = \sqrt{h(y)}$ đều là các hàm đơn căn thức. Trong các thí dụ điển hình tiếp theo, tác giả tập trung sử dụng hai dạng hàm số đặc trưng (đa thức hệ số nguyên) đồng biến trên tập số thực $\mathbb{I}$ như sau

1. Hàm số $f(t) = at^3 + bt$ với $a > 0; b > 0 \Rightarrow f'(t) = 3at^2 + b > 0$.

2. Hàm số $f(t) = at^3 + bt^2 + ct$ với $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c > 0, \forall t \Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0$.

Rõ ràng trường hợp thứ hai sẽ xuất hiện các ẩn x và y bên ngoài căn thức, khiến cho việc phán đoán hàm số trở nên khó khăn, tuy nhiên cần hết sức bình tĩnh, không có gì là không thể, tác giả sẽ đồng hành từng bước cùng độc giả trong việc chinh phục lớp bài toán cơ bản này!

Bài toán 31. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y+6)\sqrt{x-y-1} = (y+6)\sqrt{y-1}, \\ 5\sqrt{\frac{4y^2+1}{x}-1} + \frac{(x-1)^2}{2y} = 5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (x-y-1)\sqrt{x-y-1} + 7\sqrt{x-y+1} &= (y-1)\sqrt{y-1} + 7\sqrt{y-1} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-y-1})^3 + 7\sqrt{x-y-1} &= (\sqrt{y-1})^3 + 7\sqrt{y-1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 7 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Thu được

$$f(\sqrt{x-y-1}) = f(\sqrt{y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-y-1} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x-y-1 = y-1 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$5\sqrt{\frac{x^2+1}{x}-1} + \frac{(x-1)^2}{x} = 5 \Leftrightarrow 5\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} + \frac{x^2-2x+1}{x} = 5 \Leftrightarrow 5\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} + \frac{x^2-x+1}{x} = 6.$$

Với điều kiện $x \neq 0; \frac{x^2+1}{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$, đặt $\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} = t, t > 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{cases} t > 0 \\ 5t + t^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(5t+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất của hệ $(x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài toán 32. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4y^2 = 3\left(1+x\sqrt{x-\frac{2}{x}}\right), \\ (6x-6y+29)\sqrt{x-y+2} = (6y+23)\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 6(x-y+2)\sqrt{x-y+2} + 17\sqrt{x-y+2} &= 6(y+1)\sqrt{y+1} + 17\sqrt{y+1} \\ \Leftrightarrow 6(\sqrt{x-y+2})^3 + 17\sqrt{x-y+2} &= 6(\sqrt{y+1})^3 + 17\sqrt{y+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 6t^3 + 17t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 18t^2 + 17 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Thu được

$$f(\sqrt{x-y+2}) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-y+2} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x-y+2 = y+1 \Leftrightarrow x+1 = 2y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(x+1)^2 = 3\left(1+x\sqrt{x-\frac{2}{x}}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2 - 3x\sqrt{x-\frac{2}{x}} + 2x = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right) - 3\sqrt{x-\frac{2}{x}} + 2 = 0.$$

Với điều kiện
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x(x^2-2) \geq 0 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x - \frac{2}{x}} = t, t \geq 0$ ta thu được $\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \{1; 2\}$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2; 2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

Từ đây suy ra hệ phương trình có các nghiệm $S = \left\{ (-1; 0) \left(2; \frac{3}{2} \right); \left(2 + \sqrt{2}; \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \right); \left(2 - \sqrt{2}; \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \right) \right\}$.

Bài toán 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2y - 2x + 11)\sqrt{y - x + 1} = (4x + 11)\sqrt{2x + 1}, \\ 3x + \frac{2x}{y} + \frac{y}{2x - 2}\sqrt{x + y - \frac{1}{x}} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các mẫu thức và căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(y - x + 1)\sqrt{y - x + 1} + 9\sqrt{y - x + 1} &= 2(2x + 1)\sqrt{2x + 1} + 9\sqrt{2x + 1} \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{y - x + 1})^3 + 9\sqrt{y - x + 1} &= 2(\sqrt{2x + 1})^3 + 9\sqrt{2x + 1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 9t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 9 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Thu được

$$f(\sqrt{y - x + 1}) = f(\sqrt{2x + 1}) \Leftrightarrow \sqrt{y - x + 1} = \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow y - x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Lúc này phương trình còn lại của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 3x + 1 + \frac{x}{x-1}\sqrt{3x - \frac{1}{x}} &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+1) + x\sqrt{3x - \frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 + x\sqrt{3x - \frac{1}{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 1}{x} + \sqrt{3x - \frac{1}{x}} &= 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{1}{x} + \sqrt{3x - \frac{1}{x}} - 2 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Với điều kiện $x(x-1) \neq 0; 3x - \frac{1}{x} \geq 0$.

Đặt $\sqrt{3x - \frac{1}{x}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Từ đây suy ra hệ đề bài có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; 1 + \sqrt{13} \right), \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 1 - \sqrt{13} \right)$.

Bài toán 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2x - y + 13}{x + 2}\sqrt{2x - y + 3} = \sqrt{x + 2}, \\ \sqrt{y + \frac{6}{x} + 1} + \frac{(y+1)(x+3)}{y-1} = 15. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
(2x-y+13)\sqrt{2x-y+3} &= (x+12)\sqrt{x+2} \\
\Leftrightarrow (2x-y+3)\sqrt{2x-y+3} + 10\sqrt{2x-y+3} &= (x+2)\sqrt{x+2} + 10\sqrt{x+2} \\
\Leftrightarrow (\sqrt{2x-y+3})^3 + 10\sqrt{2x-y+3} &= (\sqrt{x+2})^3 + 10\sqrt{x+2}
\end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(t) = t^3 + 10t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 10 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số này liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Thu được

$$f(\sqrt{2x-y+3}) = f(\sqrt{x+2}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y+3} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow 2x-y+3 = x+2 \Leftrightarrow y = x+1.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + \frac{(x+2)(x+3)}{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + \frac{x^2 + 5x + 6}{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + x + \frac{6}{x} + 2 = 12.$$

Với điều kiện $x \neq 0; x + \frac{6}{x} + 2 \geq 0$, đặt $\sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned}
\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-3)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} = 3 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 6\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại thu được hai nghiệm $(x; y) = (1; 2), (6; 7)$.

Bài toán 35. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(2\sqrt{2x-1}+1) + y = (x-y+1)\sqrt{x-y} + 1, \\ 2\sqrt{4x^2+3xy+3} + 2x+y = \sqrt{9y^2+42x+y+9}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{2x-1} + 2x-1 &= x-y + (x-y+1)\sqrt{x-y} \\
\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x-1} + 2x-1 + \sqrt{2x-1} &= (x-y)\sqrt{x-y} + (x-y) + \sqrt{x-y} \\
\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3 + (\sqrt{2x-1})^2 + \sqrt{2x-1} &= (\sqrt{x-y})^3 + (\sqrt{x-y})^2 + \sqrt{x-y}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 = 2t^2 + (t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được $f(\sqrt{2x-1}) = f(\sqrt{x-y}) \Leftrightarrow 2x-1 = x-y \Leftrightarrow x = 1-y$.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned}
2\sqrt{4x^2+3x(1-x)+3} + 2x+y &= \sqrt{9(1-x)^2+42x+1-x+9} \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3} + x+1 &= \sqrt{9x^2+23x+19} \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3} + x+1 &= \sqrt{5(x^2+3x+3)+4(x^2+2x+1)} \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3} + x+1 &= \sqrt{5(x^2+3x+3)+4(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+3} = a; x+1 = b \ (a > 0)$ ta thu được phương trình

$$2a+b = \sqrt{5a^2+4b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ 4a^2+4ab+b^2 = 5a^2+4b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a^2-4ab+3b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a \in \{b; 3b\} \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\diamond \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

$$\diamond \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=9(x^2+2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2+15x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{33}-15}{16}.$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{33}-15}{16}; \frac{31-\sqrt{33}}{16} \right)$.

Bài toán 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-y+2)\sqrt{2x-y+1}+x=(x+2)\sqrt{x+1}+y, \\ \sqrt{1-x^2}+1=x+y+2\sqrt{14y^2-12x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (2x-y+2)\sqrt{2x-y+1}+2x-y+1 &= (x+2)\sqrt{x+1}+x+1 \\ \Leftrightarrow (2x-y+1)\sqrt{2x-y+1}+2x-y+1+\sqrt{2x-y+1} &= (x+1)\sqrt{x+1}+x+1+\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-y+1})^3+(\sqrt{2x-y+1})^2+\sqrt{2x-y+1} &= (\sqrt{x+1})^3+(\sqrt{x+1})^2+\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t)=3t^2+2t+1=2t^2+(t+1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x-y+1})=f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y+1}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x-y+1=x+1 \Leftrightarrow x=y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}+1-2x &= 2\sqrt{14x^2-12x+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1-2x &= 2\sqrt{3(4x^2-4x+1)-2(1-x^2)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1-2x &= 2\sqrt{3(1-2x)^2-2(1-x^2)} \end{aligned}$$

Với điều kiện $1-x^2 \geq 0; 14x^2-12x+1 \geq 0$. Đặt $\sqrt{1-x^2}=a; 1-2x=b \quad (a \geq 0)$ ta có

$$\begin{aligned} a+b &= 2\sqrt{3a^2-2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a^2+2ab+b^2=12a^2-8b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ 11a^2-2ab-9b^2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)(11a+9b)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ \left[\begin{matrix} a=b \\ 11a+9b=0 \end{matrix} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \vee \begin{cases} a+b \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\circ \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x^2=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x(5x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

$$\circ \begin{cases} a \geq 0 \\ a+b \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ -\frac{2}{9}a \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-2x=0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Từ đây đi đến hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 0)$.

Nhận xét.

Hai bài toán 35 và 36 đã bước đầu phức tạp hóa hàm số dưới dạng

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct \text{ với } f'(t) = 3at^2 + 2bt + c > 0, \forall t \Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac < 0.$$

Hàm số có dạng làm xuất hiện các biểu thức tự do phía ngoài căn thức, làm cho quá trình Gia Cát Dự hàm số trở nên khó khăn và yêu cầu một chút may mắn. Tuy nhiên các bạn có thể thực hiện tuần tự như sau

1. Đối với bài toán số 35.

Trước hết biến đổi tạm thời $2x\sqrt{2x-1} + x + y - 1 = (x - y + 1)\sqrt{x - y}$.

Xác định ẩn hàm là hai căn thức. Thiết lập hàm số

$$\begin{aligned} a(\sqrt{2x-1})^3 + b(\sqrt{2x-1})^2 + c\sqrt{2x-1} &= a(\sqrt{x-y})^3 + b(\sqrt{x-y})^2 + c\sqrt{x-y} \\ \Leftrightarrow a(2x-1)\sqrt{2x-1} + b(2x-1) + c\sqrt{2x-1} &= a(x-y)\sqrt{x-y} + b(x-y) + c\sqrt{x-y} \\ \Leftrightarrow (2ax - a + c)\sqrt{2x-1} + bx + by - b &= (ax - ay + c)\sqrt{x-y} \end{aligned}$$

Thực hiện đồng nhất thức

$$\left[(2ax - a + c)\sqrt{2x-1} + bx + by - b = (ax - ay + c)\sqrt{x-y} \right] \equiv \left[2x\sqrt{2x-1} + x + y - 1 = (x - y + 1)\sqrt{x-y} \right].$$

$$\text{Tức là } \begin{cases} 2a = 2 \\ -a + c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1; c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(t) = t^3 + t^2 + t.$$

Biến đổi ngược đảm bảo yếu tố tự nhiên, logic

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{2x-1} + 2x - 1 &= x - y + (x - y + 1)\sqrt{x - y} \\ \Leftrightarrow (2x - 1)\sqrt{2x-1} + 2x - 1 + \sqrt{2x-1} &= (x - y)\sqrt{x - y} + (x - y) + \sqrt{x - y} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^3 + (\sqrt{2x-1})^2 + \sqrt{2x-1} &= (\sqrt{x-y})^3 + (\sqrt{x-y})^2 + \sqrt{x-y} \end{aligned}$$

Công đoạn xét hàm số và các bước tiếp theo đã được trình bày tại lời giải phía trên.

2. Đối với bài toán số 36.

Trước hết biến đổi tạm thời $(2x - y + 2)\sqrt{2x - y + 1} + x - y = (x + 2)\sqrt{x + 1}$.

Xác định ẩn hàm là hai căn thức, Thiết lập hàm số

$$\begin{aligned} a(\sqrt{2x-y+1})^3 + b(\sqrt{2x-y+1})^2 + c\sqrt{2x-y+1} &= a(\sqrt{x+1})^3 + b(\sqrt{x+1})^2 + c\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow a(2x-y+1)\sqrt{2x-y+1} + b(2x-y+1) + c\sqrt{2x-y+1} &= a(x+1)\sqrt{x+1} + b(x+1) + c\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow (2ax - ay + a + c)\sqrt{2x-y+1} + bx - by &= (ax + a + c)\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Thực hiện đồng nhất thức

$$\begin{aligned} \left[(2ax - ay + a + c)\sqrt{2x-y+1} + bx - by = (ax + a + c)\sqrt{x+1} \right] \\ \equiv \left[(2x - y + 2)\sqrt{2x-y+1} + x - y = (x + 2)\sqrt{x+1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Nghĩa là } \begin{cases} 2a = 2 \\ a = 1 \\ a + c = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(t) = t^3 + t^2 + t.$$

Biến đổi ngược đảm bảo tự nhiên, logic trong trình bày

$$\begin{aligned} (2x-y+2)\sqrt{2x-y+1}+2x-y+1 &= (x+2)\sqrt{x+1}+x+1 \\ \Leftrightarrow (2x-y+1)\sqrt{2x-y+1}+2x-y+1+\sqrt{2x-y+1} &= (x+1)\sqrt{x+1}+x+1+\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y+1}\right)^3 + \left(\sqrt{2x-y+1}\right)^2 + \sqrt{2x-y+1} &= \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Bài toán 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y-x-6}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{3y^2+4x-18}, \\ (2x-y+3)\sqrt{2x-y}+4(x-y)=(y+3)\sqrt{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (2x-y+3)\sqrt{2x-y}+4x-2y &= (y+3)\sqrt{y}+2y \\ \Leftrightarrow (2x-y)\sqrt{2x-y}+2(2x-y)+3\sqrt{2x-y} &= y\sqrt{y}+2y+3\sqrt{y} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-y}\right)^3 + 2\left(\sqrt{2x-y}\right)^2 + 3\sqrt{2x-y} &= \left(\sqrt{y}\right)^3 + 2\left(\sqrt{y}\right)^2 + 3\sqrt{y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 = 2(t+1)^2 + t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x-y}) = f(\sqrt{y}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y} = \sqrt{y} \Leftrightarrow 2x-y = y \Leftrightarrow x = y.$$

Lúc này phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3x^2+4x-18} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x}=\sqrt{3(x^2+x-6)+x}.$$

Đặt $\sqrt{x^2+x-6}=u; \sqrt{x}=v \ (u \geq 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u+v=\sqrt{3u^2+v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u^2+2uv+v^2=3u^2+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u(u-v)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=v \end{cases}$$

- $u=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 2\}.$
- $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2-6=0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}.$

Từ đây suy ra hệ có hai nghiệm $(x; y) = (2; 2), (\sqrt{6}; \sqrt{6}).$

Bài toán 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}+\sqrt{x^2+3y-1}=\sqrt{y^2+9x-4}, \\ (9x-3y+14)\sqrt{3x-y+3}=6(x-y)+2(3y+7)\sqrt{2y+3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (9x-3y+14)\sqrt{3x-y+3}-6x+2y-6 &= (6y+14)\sqrt{2y+3}-4y-6 \\ \Leftrightarrow 3(3x-y+3)\sqrt{3x-y+3}-2(3x-y+3)+5\sqrt{3x-y+3} & \\ = 3(2y+3)\sqrt{2y+3}-2(2y+3)+5\sqrt{2y+3} & \\ \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{3x-y+3}\right)^3 - 2\left(\sqrt{3x-y+3}\right)^2 + 5\sqrt{3x-y+3} &= 3\left(\sqrt{2y+3}\right)^3 - 2\left(\sqrt{2y+3}\right)^2 + 5\sqrt{2y+3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + 5t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 3t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 2t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{3x-y+3}) = f(\sqrt{2y+3}) \Leftrightarrow \sqrt{3x-y+3} = \sqrt{2y+3} \Leftrightarrow 3x-y+3 = 2y+3 \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{x^2+9x-4} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{3(2x-1)+x^2+3x-1}.$$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \sqrt{x^2+3x-1} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta thu được

$$a+b = \sqrt{3a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = 3a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $a = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$
- $a = b \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+3x-1} \Leftrightarrow 2x-1 = x^2+3x-1 \Leftrightarrow x^2+x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$

Bài toán 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{4y(y+1)+3x-3} = \sqrt{x^2+38y-9}, \\ (x-y+7)\sqrt{x-y} - (y+8)\sqrt{y+1} = x-2y-1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (x-y+7)\sqrt{x-y} - x + y &= (y+8)\sqrt{y+1} - y - 1 \\ (x-y)\sqrt{x-y} - (x-y) + 7\sqrt{x-y} &= (y+1)\sqrt{y+1} - (y+1) + 7\sqrt{y+1} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-y})^3 - (\sqrt{x-y})^2 + 7\sqrt{x-y} &= (\sqrt{y+1})^3 - (\sqrt{y+1})^2 + 7\sqrt{y+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - t^2 + 7t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 2t + 7 = (t-1)^2 + 5t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{x-y}) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-y} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x-y = y+1 \Leftrightarrow x = 2y+1.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{(2y+1)^2+3x-4} &= \sqrt{x^2+19(x-1)-9} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x^2+3x-4} &= \sqrt{x^2+19x-28} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x^2+3x-4} &= \sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4} \end{aligned}$$

Với $x \geq \frac{3}{2}$, đặt $\sqrt{2x-3} = a; \sqrt{x^2+3x-4} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thu được

$$2a+b = \sqrt{8a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2 = 8a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$
- $a = b \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = \sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow x^2+x-1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$

Từ đây đi đến hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Bài toán 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y+4)\sqrt{2x+y} = 4x-2y+2+(2y+3)\sqrt{2y-1}, \\ y-1+2\sqrt{x^3+x^2+4x-2y} = 2\sqrt{3x^3+y^2-2y-5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (2x+y+4)\sqrt{2x+y} - 4x - 2y &= (2y+3)\sqrt{2y-1} - 4y + 2 \\ \Leftrightarrow (2x+y)\sqrt{2x+y} - 2(2x+y) + 4\sqrt{2x+y} &= (2y-1)\sqrt{2y-1} - 2(2y-1) + 4\sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x+y})^3 - 2(\sqrt{2x+y})^2 + 4\sqrt{2x+y} &= (\sqrt{2y-1})^3 - 2(\sqrt{2y-1})^2 + 4\sqrt{2y-1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 + 2t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x+y}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2x+y} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2x+y = 2y-1 \Leftrightarrow 2x = y-1.$$

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$\begin{aligned} 2x + 2\sqrt{x^3+x^2+4x-2(2x+1)} &= 2\sqrt{3x^3+(y-1)^2-6} \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x^3+x^2-2} &= \sqrt{3x^3+4x^2-6} \Leftrightarrow x + \sqrt{x^3+x^2-2} = \sqrt{3(x^3+x^2-2)+x^2} \end{aligned}$$

Chú ý điều kiện $\begin{cases} x^3+x^2-2 \geq 0 \\ 3x^3+4x^2-6 \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x^3+x^2-2} = y \ (y \geq 0)$ ta thu được $x+y = \sqrt{3y^2+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x^2+2xy+y^2 = 3y^2+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ y(x-y) = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ x^3+x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ (x-1)(x^2+2x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \geq 0 \\ x = \sqrt{x^3+x^2-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$

Thử lại nghiệm, kết luận hệ có nghiệm tập nghiệm $S = \left\{(1; 3); \left(\sqrt[3]{2}; 2\sqrt[3]{2}+1\right)\right\}$.

Bài toán 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{4y+1} + \sqrt{x^3-5x+14y} = \sqrt{3x^3+17x+2y-26}, \\ (x-y+6)\sqrt{x-y+2} - (y+7)\sqrt{y+3} = 3(x-2y-1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (x-y+6)\sqrt{x-y+2} - 3x + 3y - 6 &= (y+7)\sqrt{y+3} - 3y - 9 \\ \Leftrightarrow (x-y+2)\sqrt{x-y+2} - 3(x-y+2) + 4\sqrt{x-y+2} &= (y+3)\sqrt{y+3} - 3(y+3) + 4\sqrt{y+3} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-y+2})^3 - 3(\sqrt{x-y+2})^2 + 4\sqrt{x-y+2} &= (\sqrt{y+3})^3 - 3(\sqrt{y+3})^2 + 4\sqrt{y+3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên thu được

$$f(\sqrt{x-y+2}) = f(\sqrt{y+3}) \Leftrightarrow \sqrt{x-y+2} = \sqrt{y+3} \Leftrightarrow x-y+2 = y+3 \Leftrightarrow x = 2y+1.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2(x-1)+1} + \sqrt{x^3 - 5x + 7(x-1)} &= \sqrt{3x^3 + 17x + x - 1 - 27} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} &= \sqrt{3x^3 + 18x - 27} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} &= \sqrt{6(2x-1) + 3(x^3 + 2x - 7)} \end{aligned}$$

Với điều kiện $\begin{cases} 3x^3 + 18x - 27 \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x^3 + 2x - 7 \geq 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \sqrt{x^3 + 2x - 7} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) thu được

$$\begin{aligned} 2a + b &= \sqrt{6a^2 + 3b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 6a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow 2(a-b)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow a &= b \Leftrightarrow 2x-1 = x^3 + 2x-7 \Leftrightarrow x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

Thử lại thấy giá trị này thỏa mãn phương trình ẩn x ở trên. Kết luận nghiệm $(x; y) = (\sqrt[3]{6}; 2\sqrt[3]{6} + 1)$.

Bài toán 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x-2y+11)\sqrt{2x-y+3} + 4\left(y-x-\frac{1}{2}\right) = (2y+9)\sqrt{y+2}, \\ \sqrt{2x^2-x-2y-1} = \sqrt{16y^2+2x^2-43}-5\sqrt{x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (4x-2y+11)\sqrt{2x-y+3} - 4x + 2y - 6 &= (2y+9)\sqrt{y+2} - 2y - 4 \\ \Leftrightarrow 2(2x-y+3)\sqrt{2x-y+3} - 2(2x-y+3) + 5\sqrt{2x-y+3} &= (2y+9)\sqrt{y+2} - 2y - 4 \\ &= 2(y+2)\sqrt{y+2} - 2(y+2) + 5\sqrt{y+2} \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{2x-y+3})^3 - 2(\sqrt{2x-y+3})^2 + 5\sqrt{2x-y+3} &= 2(\sqrt{y+2})^3 - 2(\sqrt{y+2})^2 + 5\sqrt{y+2} \\ &= 2(\sqrt{y+2})^3 - 2(\sqrt{y+2})^2 + 5\sqrt{y+2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 2t^2 + 5t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 5t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x-y+3}) = f(\sqrt{y+2}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y+3} = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow 2x-y+3 = y+2 \Leftrightarrow 2x+1 = 2y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-x-(2x+1)} - 1 &= \sqrt{4(2x+1)^2 + 2x^2 - 43} - 5\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x-2} &= \sqrt{18x^2+16x-39} - 5\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{x-1} + \sqrt{2x^2-3x-2} &= \sqrt{18x^2+16x-39} \\ \Leftrightarrow 25(x-1) + 2x^2 - 3x - 2 + 10\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{(2x+1)(x-2)} &= 18x^2 + 16x - 39 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 10\sqrt{(x-1)(2x+1)(x-2)} = 16x^2 - 6x - 12 \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{(x-1)(2x+1)} \cdot \sqrt{x-2} = 8x^2 - 3x - 6 \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{2x^2 - x - 1} \cdot \sqrt{x-2} = 4(2x^2 - x - 1) + x - 2 \end{aligned}$$

Với $x \geq 2$, đặt $\sqrt{2x^2 - x - 1} = u; \sqrt{x-2} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$5uv = 4u^2 + v^2 \Leftrightarrow (u-v)(4u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 4v \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - x - 1 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $u = 4v \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - x - 1 = 16x - 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 17x + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{17 + 4\sqrt{3}}{4}.$

Vậy hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{17}{4} + \sqrt{3}; \frac{19}{4} + \sqrt{3}\right).$

Bài toán 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (3x + y + 5)\sqrt{3x + y} + x - y = 2(4x + 5)\sqrt{x}, \\ \sqrt{4x^2 + y^2 + 24x + 28} = 5\sqrt{2x - y + 2} + \sqrt{y^2 + x - 20}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} &(8x + 10)\sqrt{x} - 4x = (3x + y + 5)\sqrt{3x + y} - 3x - y \\ &\Leftrightarrow 8x\sqrt{x} - 4x + 10\sqrt{x} = (3x + y)\sqrt{3x + y} - (3x + y) + 5\sqrt{3x + y} \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x})^3 - (2\sqrt{x})^2 + 5 \cdot 2\sqrt{x} = (\sqrt{3x + y})^3 - (\sqrt{3x + y})^2 + 5\sqrt{3x + y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + 5t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 2t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(2\sqrt{x}) = f(\sqrt{3x + y}) \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{3x + y} \Leftrightarrow 4x = 3x + y \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x^2 + 24x + 28} = 5\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 20} \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 24x + 28 = 25(x + 2) + x^2 + x - 20 + 10\sqrt{(x + 2)(x - 4)(x + 5)} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 5\sqrt{(x + 5)(x^2 - 2x - 8)} \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x - 8) + 3(x + 5) = 5\sqrt{x + 5} \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 8} \end{aligned}$$

Với điều kiện $\begin{cases} 5x^2 + 24x + 28 \geq 0 \\ x \geq -2; x^2 + x - 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$

Đặt $\sqrt{x + 5} = a; \sqrt{x^2 - 2x - 8} = b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta thu được

$$3a^2 + 2b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a - b)(3a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a = 2b \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2-2x-8} \Leftrightarrow x^2-3x-13=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3+\sqrt{61}}{2}; \frac{3-\sqrt{61}}{2} \right\}.$
- $3a = 2b \Leftrightarrow 3\sqrt{x+5} = 2\sqrt{x^2-2x-8} \Leftrightarrow 4x^2-17x-77=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{11}{4}; 7 \right\}.$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm của hệ $S = \left\{ (7; 7); \left(\frac{3+\sqrt{61}}{2}; \frac{3+\sqrt{61}}{2} \right) \right\}.$

Bài toán 44. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\sqrt{2x^2+3y+1} = \sqrt{5x^3+13x^2+12y-6} + \sqrt{x^3+2x^2+9y^2+6y+x-1}, \\ \frac{x+2y+5}{2x-y+4} = \frac{\sqrt{2x-y}}{\sqrt{x+2y+1}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}) .$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (x+2y+5)\sqrt{x+2y+1} &= (2x-y+4)\sqrt{2x-y} \\ \Leftrightarrow (x+2y+1)\sqrt{x+2y+1} + 4\sqrt{x+2y+1} &= (2x-y)\sqrt{2x-y} + 4\sqrt{2x-y} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2y+1})^3 + 4\sqrt{x+2y+1} &= (\sqrt{2x-y})^3 + 4\sqrt{2x-y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{x+2y+1}) = f(\sqrt{2x-y}) \Leftrightarrow \sqrt{x+2y+1} = \sqrt{2x-y} \Leftrightarrow x+2y+1 = 2x-y \Leftrightarrow x = 3y+1.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2x^2+x} &= \sqrt{5x^3+13x^2+4(x-1)-6} + \sqrt{x^3+2x^2+(3y+1)^2+x-2} \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+x} &= \sqrt{5x^3+13x^2+4x-10} + \sqrt{x^3+3x^2+x-2} \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{x^3+3x^2+x-2} &= \sqrt{5(x^3+3x^2+x-2)-(2x^2+x)} \end{aligned}$$

Khi các căn xác định, đặt $\sqrt{2x^2+x} = a; \sqrt{x^3+3x^2+x-2} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta có

$$\begin{aligned} 3a - b &= \sqrt{5b^2 - a^2} \Rightarrow 9a^2 - 6ab + b^2 = 5b^2 - a^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 3ab - 2b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(5a+2b) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 5a + 2b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $a = b \Leftrightarrow 2x^2+x = x^3+3x^2+x-2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} 5a+2b=0 \\ a \geq 0; b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x=0 \\ x^3+3x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x^3+3x^2+x-2=0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$

Thử lại nghiệm, kết luận hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1).$

Nhận xét.

Bài toán số 44 đã bước đầu xuất hiện hai ẩn hàm đơn căn thức, mức độ tăng thêm khi cả hai ẩn này đều đồng thời các ẩn x, y và hằng số tự do

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \text{ trong đó } \begin{cases} u = \sqrt{g(x; y)} \\ v = \sqrt{h(x; y)} \end{cases}$$

Tuy nhiên biểu thức dưới dấu căn vẫn dừng chân tạm thời tại các đa thức bậc nhất của hai ẩn x và y . Các bài toán tiếp theo sẽ được tăng cường bậc của các đa thức hai ẩn $g(x; y); h(x; y)$.

Bài toán 45. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x + 2y + 5)\sqrt{2x + y + 1} = (2x + 4y + 5)\sqrt{x + 2y + 1}, \\ \sqrt{x + y + \frac{8}{2x - y} - 1} + \frac{(2y + 1)(x + 8)}{3x - 2y} = 30. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 2(2x + y + 1)\sqrt{2x + y + 1} + 3\sqrt{2x + y + 1} &= 2(x + 2y + 1)\sqrt{x + 2y + 1} + 3\sqrt{x + 2y + 1} \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{2x + y + 1})^3 + 3\sqrt{2x + y + 1} &= 2(\sqrt{x + 2y + 1})^3 + 3\sqrt{x + 2y + 1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x + y + 1}) = f(\sqrt{x + 2y + 1}) \Leftrightarrow \sqrt{2x + y + 1} = \sqrt{x + 2y + 1} \Leftrightarrow 2x + y + 1 = x + 2y + 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Lúc đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + \frac{(2x + 1)(x + 8)}{x} &= 30 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + \frac{2x^2 + 17x + 8}{x} = 30 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + 2x + \frac{8}{x} + 17 &= 30 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + 2x + \frac{8}{x} - 1 = 12 \end{aligned}$$

Với điều kiện $x \neq 0; 2x + \frac{8}{x} - 1 \geq 0$, đặt $\sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t - 3)(t + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 4\}.$$

Thử lại đi đến kết luận hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1), (4; 4)$.

Bài toán 46. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x - y + 7)\sqrt{2x - y} = (2y - x + 7)\sqrt{2y - x}, \\ \sqrt{y - 2 + \frac{2}{x + 5}} + \frac{2x^2 - y^2 - 13}{y + 5} + 1 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (2x - y)\sqrt{2x - y} + 7\sqrt{2x - y} &= (2y - x)\sqrt{2y - x} + 7\sqrt{2y - x} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x - y})^3 + 7\sqrt{2x - y} &= (\sqrt{2y - x})^3 + 7\sqrt{2y - x} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 7 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên thu được

$$f(\sqrt{2x-y}) = f(\sqrt{2y-x}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-y} = \sqrt{2y-x} \Leftrightarrow 2x-y = 2y-x \Leftrightarrow x = y.$$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{x-2+\frac{2}{x+5}} + \frac{x^2-13}{x+5} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+5)(x-2)+12}{x+5}} + \frac{x^2-13}{x+5} + 3 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} + \frac{x^2+3x+2}{x+5} = 2.$$

Với điều kiện $x \neq -5; x-2+\frac{2}{x+5} \geq 0$, đặt $\sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+t=2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2;1\} \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2+3x+2 = x+5 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x \in \{-3;1\} \end{aligned}$$

Thử lại đi đến hệ có hai nghiệm $(x; y) = (-3; -3), (1; 1)$.

Bài toán 47. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y+10)\sqrt{x+y}+2(2y-x+1)=(2x-y+9)\sqrt{2x-y-1}, \\ \sqrt{2y-1+\frac{8}{x+3}}+\frac{(x+1)^2+4}{2(y+2)}=x-2y+2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (x+y+10)\sqrt{x+y}+2x+2y &= (2x-y+9)\sqrt{2x-y-1}+4x-2y-2 \\ \Leftrightarrow (x+y)\sqrt{x+y}+2(x+y)+10\sqrt{x+y} &= (2x-y-1)\sqrt{2x-y-1}+2(2x-y-1)+10\sqrt{2x-y-1} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^3+2(\sqrt{x+y})^2+10\sqrt{x+y} &= (\sqrt{2x-y-1})^3+2(\sqrt{2x-y-1})^2+10\sqrt{2x-y-1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 10t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 4t + 10 = (t+2)^2 + 2t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{x+y}) = f(\sqrt{2x-y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = \sqrt{2x-y-1} \Leftrightarrow x+y = 2x-y-1 \Leftrightarrow x = 2y+1.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2+\frac{8}{x+3}}+\frac{(x+1)^2+4}{x+3} &= 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-2+\frac{8}{x+3}}+\frac{x^2+2x+5}{x+3} = 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)+8}{x+3}}+\frac{x^2+2x+5}{x+3}-1 &= 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}+\frac{x^2+x+2}{x+3} = 2 \end{aligned}$$

Với $x \neq -3; x-2+\frac{8}{x+3} \geq 0$, đặt $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+t=2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2;1\} \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} &= 1 \Leftrightarrow x^2+x+2 = x+3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1;1\} \end{aligned}$$

Thử lại, dẫn đến hệ có hai nghiệm $(x; y) = (-1; -1), (1; 0)$.

Bài toán 48. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x - y + 11)\sqrt{4x - y} - (x + 2y + 14)\sqrt{x + 2y + 3} = 3(x - y - 1), \\ \sqrt{\frac{2x + y + 2}{x^2 - x + 4}} + \frac{3x^2 + 13}{x^2 - y + 3} = 5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (4x - y + 11)\sqrt{4x - y} - 4x + y &= (x + 2y + 14)\sqrt{x + 2y + 3} - x - 2y - 3 \\ \Leftrightarrow (4x - y)\sqrt{4x - y} - (4x - y) + 11\sqrt{4x - y} \\ &= (x + 2y + 3)\sqrt{x + 2y + 3} - (x + 2y + 3) + 11\sqrt{x + 2y + 3} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4x - y})^3 - (\sqrt{4x - y})^2 + 11\sqrt{4x - y} &= (\sqrt{x + 2y + 3})^3 - (\sqrt{x + 2y + 3})^2 + 11\sqrt{x + 2y + 3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - t^2 + 11t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 2t + 11 = (t - 1)^2 + 5t^2 + 10 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$\begin{aligned} f(\sqrt{4x - y}) &= f(\sqrt{x + 2y + 3}) \Leftrightarrow \sqrt{4x - y} = \sqrt{x + 2y + 3} \\ \Leftrightarrow 4x - y &= x + 2y + 3 \Leftrightarrow 3x = 3y + 3 \Leftrightarrow x = y + 1 \end{aligned}$$

Lúc này phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\sqrt{\frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}} + \frac{3x^2 + 13}{x^2 - x + 4} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}} + \frac{3x^2 + 13}{x^2 - x + 4} - 3 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}} + \frac{3x + 1}{x^2 - x + 4} = 2.$$

Với điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$, đặt $\sqrt{\frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t - 1)(t + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x + 1}{x^2 - x + 4}} = 1 \\ \Leftrightarrow 3x + 1 &= x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\} \end{aligned}$$

Thử lại đi đến kết luận hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 0), (3; 2)$.

Bài toán 49. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x - 6y + 1)\sqrt{x - 2y} + 2(x - 1) = (3x - 3y - 2)\sqrt{x - y - 1}, \\ \frac{y - x}{3(x^3 + x + 1)} = y - \sqrt{\frac{x^3 + y^3 + 1}{x^3 + x + y}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(x - 2y)\sqrt{x - 2y} - 2x + 4y + \sqrt{x - 2y} &= 3(x - y - 1)\sqrt{x - y - 1} - 2x + 2y + 2 + \sqrt{x - y - 1} \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{x - 2y})^3 - 2(x - 2y) + \sqrt{x - 2y} &= 3(\sqrt{x - y - 1})^3 - 2(x - y - 1) + \sqrt{x - y - 1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - 2t^2 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 9t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)^2 + 5t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{x - 2y}) = f(\sqrt{x - y - 1}) \Leftrightarrow \sqrt{x - 2y} = \sqrt{x - y - 1} \Leftrightarrow x - 2y = x - y - 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Phương trình thứ hai lập tức trở thành

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{3(x^3+x+1)} &= 1 - \sqrt{\frac{x^3+2}{x^3+x+1}} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^3+x+1} = 3 - 3\sqrt{\frac{x^3+2}{x^3+x+1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^3+x+1} + 1 + 3\sqrt{\frac{x^3+2}{x^3+x+1}} &= 4 \Leftrightarrow \frac{x^3+2}{x^3+x+1} + 3\sqrt{\frac{x^3+2}{x^3+x+1}} = 4\end{aligned}$$

Với điều kiện $\frac{x^3+2}{x^3+x+1} \geq 0; x^3+x+1 \neq 0$, đặt $\sqrt{\frac{x^3+2}{x^3+x+1}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 3t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{x^3+2}{x^3+x+1} = 1 \Leftrightarrow x^3+2 = x^3+x+1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Thử lại ta thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài toán 50. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x-y+15)\sqrt{3x-y+2} - (x+y+15)\sqrt{x+y+2} = 6(x-y), \\ \sqrt{\frac{y^3+2x+1}{2x^3-y^3+3}} + \frac{2(y-1)}{x^3+3} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}(3x-y+15)\sqrt{3x-y+2} - 9x+3y-6 &= (x+y+15)\sqrt{x+y+2} - 3x-3y-6 \\ \Leftrightarrow (3x-y+2)\sqrt{3x-y+2} - 3(3x-y+2) + 13\sqrt{3x-y+2} \\ &= (x+y+2)\sqrt{x+y+2} - 3(x+y+2) + 13\sqrt{x+y+2} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x-y+2})^3 - 3(\sqrt{3x-y+2})^2 + 13\sqrt{3x-y+2} \\ &= (\sqrt{x+y+2})^3 - 3(\sqrt{x+y+2})^2 + 13\sqrt{x+y+2}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 13t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 6t + 13 = (t-3)^2 + 5t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{3x-y+2}) = f(\sqrt{x+y+2}) \Leftrightarrow \sqrt{3x-y+2} = \sqrt{x+y+2} \Leftrightarrow 3x-y+2 = x+y+2 \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\sqrt{\frac{x^3+2x+1}{x^3+3}} + \frac{2(x-1)}{x^3+3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3+2x+1}{x^3+3}} + \frac{2(x-1)}{x^3+3} + 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3+2x+1}{x^3+3}} + \frac{x^3+2x+1}{x^3+3} = 2.$$

Với điều kiện $\frac{x^3+2x+1}{x^3+3} \geq 0; x^3 \neq -3$, đặt $\sqrt{\frac{x^3+2x+1}{x^3+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 = x^3 + 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 51. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2+y+6)\sqrt{x^2+y} = (x+7)\sqrt{x+1}, \\ \frac{x^2+y-1}{\sqrt{x^2+3}} + 1 = \frac{6}{x-y+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}(x^2 + y)\sqrt{x^2 + y} + 6\sqrt{x^2 + y} &= (x+1)\sqrt{x+1} + 6\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y}\right)^3 + 6\sqrt{x^2 + y} &= \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + 6\sqrt{x+1}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 6t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{x^2 + y}) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 + y = x+1.$$

Lúc này phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + 1 = \frac{6}{x^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1 = \frac{6}{x^2 + 3} - 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1 = \frac{-2x^2}{x^2 + 3} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2 + 3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1 = 0.$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = t$ ta thu được $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

$$\diamond \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamond \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = -1 \Leftrightarrow -x = \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 52. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 2y + 11)\sqrt{x^2 - y} = (2y - 2x + 11)\sqrt{y - x}, \\ \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{x + 2 - 2y} = \frac{x^2 + x}{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}2(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y} + 11\sqrt{x^2 - y} &= 2(y - x)\sqrt{y - x} + 11\sqrt{y - x} \\ \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2 - y}\right)^3 + 11\sqrt{x^2 - y} &= 2\left(\sqrt{y - x}\right)^3 + 11\sqrt{y - x}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 11t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 11 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{x^2 - y}) = f(\sqrt{y - x}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y} = \sqrt{y - x} \Leftrightarrow x^2 - y = y - x \Leftrightarrow x^2 = 2y - x.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{2 - x^2} &= 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{1}{2 - x^2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{x^2}{2(2 - x^2)} &= \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{2 - x^2}} + \frac{x^2}{2 - x^2} = 3\end{aligned}$$

Với điều kiện $x^2 < 2$, Đặt $\frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = t$ ta thu được

$$2t + t^2 = 3 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 3) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3; 1\}.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad t=1 &\Leftrightarrow x=\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2=2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \\ \circ \quad t=-3 &\Leftrightarrow x=-3\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2=9.2-9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có các nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{9}{10} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$.

Bài toán 53. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (6x^2 - 3y + 5)\sqrt{2x^2 - y} = (6y^2 - 3x + 5)\sqrt{2y - x}, \\ \frac{x+1}{\sqrt{3x^2 - 3y + 4}} + \frac{6x-6}{3y-3x+8} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức và mẫu thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 3(2x^2 - y)\sqrt{2x^2 - y} + 5\sqrt{2x^2 - y} &= 3(2y^2 - x) + 5\sqrt{2y - x} \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{2x^2 - y})^3 + 5\sqrt{2x^2 - y} &= 3(\sqrt{2y - x})^3 + 5\sqrt{2y - x} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 5t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 9t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$ nên ta được

$$f(\sqrt{2x^2 - y}) = f(\sqrt{2y - x}) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - y} = \sqrt{2y - x} \Leftrightarrow 2x^2 - y = 2y - x \Leftrightarrow 2x^2 = 3y - x.$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 4}} + \frac{3x-3}{x^2 - x + 4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 4}} + \frac{3x-3}{x^2 - x + 4} + 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 4}} + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 4} = 2.$$

Đặt $\frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 4}} = t$ ta thu được $t^2 + t = 2 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad t=1 &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x^2 - x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 - x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \\ \bullet \quad t=-2 &\Leftrightarrow x+1 = -2\sqrt{x^2 - x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài toán 54. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 + 7)\sqrt{2x^2 - 1} = (2x - y + 8)\sqrt{2x - y}, \\ \sqrt{x^2 + 13x - y - 26} = \sqrt{2x - y - x^2} + 3\sqrt{x - 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (2x^2 - 1)\sqrt{2x^2 - 1} + 8\sqrt{2x^2 - 1} &= (2x - y)\sqrt{2x - y} + 8\sqrt{2x - y} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - 1})^3 + 8\sqrt{2x^2 - 1} &= (\sqrt{2x - y})^3 + 8\sqrt{2x - y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 8t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 8 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Như vậy hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{2x^2-1}) = f(\sqrt{2x-y}) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} = \sqrt{2x-y} \Leftrightarrow 2x^2 = 2x-y+1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+13x+2x^2-2x-1-26} &= \sqrt{2x+2x^2-2x-1-x^2} + 3\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+11x-27} &= \sqrt{x^2-1} + 3\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow 3x^2+11x-27 &= x^2-1+9(x-2)+6\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x-8 &= 6\sqrt{(x+1)(x-2)(x-1)} \\ \Leftrightarrow x^2+x-4 &= 3\sqrt{(x+1)(x-2)} \cdot \sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x^2-x-2+2(x-1) &= 3\sqrt{x^2-x-2} \cdot \sqrt{x-1} \quad (1) \end{aligned}$$

Với $x \geq 2$, đặt $\sqrt{x^2-x-2} = a; \sqrt{x-1} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\bullet a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\}.$$

$$\bullet a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-x-2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2-5x+2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm.

Bài toán 55. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (51y^2-17x+6)\sqrt{3y^2-x} = (51x-17y+6)\sqrt{3x-y}, \\ \sqrt{11x^2+3y^2+y-x-19} = 3\sqrt{x^2-\frac{3y^2+y}{4}} + \sqrt{x-2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 17(3y^2-x)\sqrt{3y^2-x} + 6\sqrt{3y^2-x} &= 17(3x-y)\sqrt{3x-y} + 6\sqrt{3x-y} \\ \Leftrightarrow 17(\sqrt{3y^2-x})^3 + 6\sqrt{3y^2-x} &= 17(\sqrt{3x-y})^3 + 6\sqrt{3x-y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 17t^3 + 6t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 51t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{3y^2-x}) = f(\sqrt{3x-y}) \Leftrightarrow \sqrt{3y^2-x} = \sqrt{3x-y} \Leftrightarrow 3y^2-x = 3x-y \Leftrightarrow 3y^2+y = 4x.$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{11x^2+4x-x-19} &= 3\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{11x^2+3x-19} &= 3\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow 11x^2+3x-19 &= 9(x^2-1)+x-2+6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow 2x^2+2x-8 &= 6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} \Leftrightarrow x^2+x-4 = 3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2-x-2} \\ \Leftrightarrow x^2-x-2+2(x-1) &= 3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2-x-2} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2-x-2} = a; \sqrt{x-1} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\blacksquare a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

$$\blacksquare a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được các nghiệm của hệ.

Bài toán 56. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y^2-1} = \sqrt{2x^2+2y+19x+1}, \\ (2x^2-2y+9)\sqrt{x^2-y+1} = (2y+9)\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x^2 - y + 1)\sqrt{x^2 - y + 1} + 7\sqrt{x^2 - y + 1} &= 2(y+1)\sqrt{y+1} + 7\sqrt{y+1} \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2 - y + 1})^3 + 7\sqrt{x^2 - y + 1} &= 2(\sqrt{y+1})^3 + 7\sqrt{y+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 7t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 7 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{x^2 - y + 1}) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y + 1} = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x^2 - y + 1 = y + 1 \Leftrightarrow x^2 = 2y.$$

Phương trình thứ nhất khi đó của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x+1} + \sqrt{4y^2-4} &= \sqrt{2x^2+x^2+19x+1} \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-4} &= \sqrt{3x^2+19x+1} \\ 9x+9+x^2-4+6\sqrt{(x+1)(x+2)(x-2)} &= 3x^2+19x+1 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3x+2}\cdot\sqrt{x-2} &= x^2+5x-2 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+3x+2}\cdot\sqrt{x-2} &= x^2+3x+2+2(x-2) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+2} = a; \sqrt{x-2} = b \ (a > 0; b \geq 0)$ ta thu được

$$3ab = a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\circ a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2+2x+4 = 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\circ a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2} = 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 4x-8 \Leftrightarrow x^2-x+10 = 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Phương trình ẩn x vô nghiệm dẫn đến hệ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 57. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x^2+3xy+5)\sqrt{x^2+xy} = (3xy+3y+8)\sqrt{xy+y+1}, \\ \sqrt{4x^2+8x+y-14} = \sqrt{x+y-5} + \sqrt{x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
3(x^2 + xy)\sqrt{x^2 + xy} + 5\sqrt{x^2 + xy} &= 3(xy + y + 1)\sqrt{xy + y + 1} + 5\sqrt{xy + y + 1} \\
\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x^2 + xy}\right)^3 + 5\sqrt{x^2 + xy} &= 3\left(\sqrt{xy + y + 1}\right)^3 + 5\sqrt{xy + y + 1}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 5t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 9t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f\left(\sqrt{x^2 + xy}\right) = f\left(\sqrt{xy + y + 1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + xy} = \sqrt{xy + y + 1} \Leftrightarrow x^2 + xy = xy + y + 1 \Leftrightarrow x^2 = y + 1.$$

Lúc đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2 + 8x + x^2 - 1} - 14 &= \sqrt{x + x^2 - 1} - 5 + \sqrt{x - 1} \\
\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 8x - 15} &= \sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x - 1} \\
\Leftrightarrow 5x^2 + 8x - 15 &= x^2 + x - 6 + x - 1 + 2\sqrt{(x - 2)(x + 3)(x - 1)} \\
\Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 8 &= 2\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 &= 2\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x - 3) - (x - 2) &= \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = u; \sqrt{x - 2} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) thì (*) trở thành

$$\begin{aligned}
2u^2 - v^2 = uv &\Leftrightarrow (u - v)(2u + v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u + v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v \\
\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = x - 2 &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, kết luận phương trình x vô nghiệm. Hệ phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (7x^2 - 7y + 2)\sqrt{x^2 - y} = (7y^2 - 7x + 9)\sqrt{y^2 - x + 1}, \\ \sqrt{x^3 + x^2 + 26x + y^2 + y + 13} - \sqrt{(x + 1)^2 - y^2 - y} = \sqrt{1 + x^3}. \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
7(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y} + 2\sqrt{x^2 - y} &= 7(y^2 - x + 1)\sqrt{y^2 - x + 1} + 2\sqrt{y^2 - x + 1} \\
\Leftrightarrow 7\left(\sqrt{x^2 - y}\right)^3 + 2\sqrt{x^2 - y} &= 7\left(\sqrt{y^2 - x + 1}\right)^3 + 2\sqrt{y^2 - x + 1}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 7t^3 + 2t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 21t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{x^2 - y}\right) &= f\left(\sqrt{y^2 - x + 1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y} = \sqrt{y^2 - x + 1} \\
\Leftrightarrow x^2 - y &= y^2 - x + 1 \Leftrightarrow y^2 + y = x^2 + x - 1
\end{aligned}$$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3 + x^2 + 26x + x^2 + x - 1 + 13} - \sqrt{x^2 + 2x + 1 - (x^2 + x - 1)} &= \sqrt{1 + x^3} \\
\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x^2 + 27x + 12} - \sqrt{2 + x} &= \sqrt{1 + x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x^2 + 27x + 12} = \sqrt{1 + x^3} + \sqrt{2 + x} \\
&\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 27x + 12 = x^3 + x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)(x+2)} \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 26x + 9 = 2\sqrt{(x+1)(x+2)} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} \\
&\Leftrightarrow 7(x^2 + 3x + 2) - 5(x^2 - x + 1) = 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = u; \sqrt{x^2 - x + 1} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta thu được

$$7u^2 - 5v^2 = 2uv \Leftrightarrow (u - v)(7u + 5v) = 0 \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 59. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - y + 6)\sqrt{x^2 - y} - (y^2 - y + 6)\sqrt{y^2 - y} = 3(x^2 - y^2), \\ \sqrt{x^3 + y^2 + (x-1)(x-6)} - \sqrt{x} = \sqrt{xy^2 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
&(x^2 - y + 6)\sqrt{x^2 - y} - 3x^2 + 3y = (y^2 - y + 6)\sqrt{y^2 - y} - 3y^2 + 3y \\
&\Leftrightarrow (x^2 - y)\sqrt{x^2 - y} - 3(x^2 - y) + 6\sqrt{x^2 - y} = (y^2 - y)\sqrt{y^2 - y} - 3(y^2 - y) + 6\sqrt{y^2 - y} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - y})^3 - 3(\sqrt{x^2 - y})^2 + 6\sqrt{x^2 - y} = (\sqrt{y^2 - y})^3 - 3(\sqrt{y^2 - y})^2 + 6\sqrt{y^2 - y}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 6t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t + 6 = 3(t-1)^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{x^2 - y}) = f(\sqrt{y^2 - y}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y} = \sqrt{y^2 - y} \Leftrightarrow x^2 - y = y^2 - y \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Lúc đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^3 + x^2 + x^2 - 7x + 6} - \sqrt{x} = \sqrt{x^3 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 6} - \sqrt{x} = \sqrt{x^3 + 1} \\
&\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = x^3 + x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)x} \\
&\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + x} \\
&\Leftrightarrow 5(x^2 - x + 1) - 3(x^2 + x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + x} \\
&\Leftrightarrow 5 - 3 \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} \quad [*]
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} = t$ ($t \geq 0$) thì $[*] \Leftrightarrow 5 - 3t^2 = 2t \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{5}{3}; 1\right\} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Đổi chiều điều kiện và thử lại ta thu được các nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét.

Bài toán 59 hàm số đã phức tạp hóa dưới dạng $f(t) = at^3 + bt^2 + ct; f'(t) = 3at^2 + 2bt + c > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ẩn hàm được tăng cường dưới dạng đa thức bậc hai của hai ẩn x và y , bước đầu gây khó khăn cho nhiều bạn học sinh trong công đoạn định hướng.

Hà Nội không vội được đâu. Nhận định hai ẩn hàm tạm thời là hai căn thức nhỏ, chúng ta tuân tự sử dụng đồng nhất thức thiết lập hàm số như sau

$$\begin{aligned} a(\sqrt{x^2-y})^3 + b(\sqrt{x^2-y})^2 + c\sqrt{x^2-y} &= a(\sqrt{y^2-y})^3 + b(\sqrt{y^2-y})^2 + c\sqrt{y^2-y} \\ \Leftrightarrow a(x^2-y)\sqrt{x^2-y} + b(x^2-y) + c\sqrt{x^2-y} &= a(y^2-y)\sqrt{y^2-y} + b(y^2-y) + c\sqrt{y^2-y} \\ \Leftrightarrow [a(x^2-y) + c]\sqrt{x^2-y} + bx^2 - by^2 &= [a(y^2-y) + c]\sqrt{y^2-y} \end{aligned}$$

Đồng nhất thức

$$\begin{aligned} &\left\{ [a(x^2-y) + c]\sqrt{x^2-y} + bx^2 - by^2 = [a(y^2-y) + c]\sqrt{y^2-y} \right\} \\ &\equiv \left[(x^2-y+6)\sqrt{x^2-y} - 3x^2 + 3y^2 = (y^2-y+6)\sqrt{y^2-y} \right] \end{aligned}$$

Nghĩa là $\begin{cases} a=1 \\ c=6 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow f(t) = t^3 - 3t^2 + 6t.$

Biến đổi đảo chiều trong trình bày

$$\begin{aligned} (x^2-y+6)\sqrt{x^2-y} - 3x^2 + 3y^2 &= (y^2-y+6)\sqrt{y^2-y} - 3y^2 + 3y \\ \Leftrightarrow (x^2-y)\sqrt{x^2-y} - 3(x^2-y) + 6\sqrt{x^2-y} &= (y^2-y)\sqrt{y^2-y} - 3(y^2-y) + 6\sqrt{y^2-y} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-y})^3 - 3(\sqrt{x^2-y})^2 + 6\sqrt{x^2-y} &= (\sqrt{y^2-y})^3 - 3(\sqrt{y^2-y})^2 + 6\sqrt{y^2-y} \end{aligned}$$

Bài toán 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+8)\sqrt{x^2+1} = 4(x^2-x-y+1) + (x+y+7)\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x^3+4x^2-6x+y-3} = \sqrt{x^3+x^2-y-1} + \sqrt{2x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x^2+8)\sqrt{x^2+1} - 8x^2 - 4 &= (x+y+7)\sqrt{x+y} - 4x - 4y \\ \Leftrightarrow (x^2+1)\sqrt{x^2+1} - 4(x^2+1) + 7\sqrt{x^2+1} &= (x+y)\sqrt{x+y} - 4(x+y) + 7\sqrt{x+y} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1})^3 - 4(\sqrt{x^2+1})^2 + 7\sqrt{x^2+1} &= (\sqrt{x+y})^3 - 4(\sqrt{x+y})^2 + 7\sqrt{x+y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 4t^2 + 7t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 8t + 7 > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{x^2+1}) = f(\sqrt{x+y}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x+y} \Leftrightarrow x^2+1 = x+y \Leftrightarrow x^2-x+1 = y.$$

Khi đó phương trình thứ hai phía trên trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3+4x^2-6x+y-3} &= \sqrt{x^3+x^2-(x^2-x+1)-1} + \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^3+5x^2-7x-2} &= \sqrt{x^3+x-2} + \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow x^3+5x^2-7x-2 &= x^3+3x-3+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)(2x-1)} \\ \Leftrightarrow 5x^2-10x+1 &= 2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\sqrt{x^2+x+2} \\ \Leftrightarrow 3(2x^2-3x+1) - (x^2+x+2) &= 2\sqrt{2x^2-3x+1}\sqrt{x^2+x+2} \quad [1] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = u; \sqrt{x^2 + x + 2} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thì

$$\begin{aligned} [1] &\Leftrightarrow 3u^2 - v^2 = 2uv \Leftrightarrow (u - v)(3u + v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất của hệ là $(x; y) = (2 + \sqrt{5}; 8 + 3\sqrt{5})$.

Bài toán 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y^3 + 2y^2 - 32x + 17} - \sqrt{x^3 - 2y - 4} = \sqrt{x - 3}, \\ (xy + x + 13)\sqrt{xy + x} + 3(x - y)(x - 1) = (x^2 + y + 13)\sqrt{x^2 + y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (xy + x + 13)\sqrt{xy + x} + 3(x^2 + y - xy - x) &= (x^2 + y + 13)\sqrt{x^2 + y} \\ \Leftrightarrow (xy + x)\sqrt{xy + x} - 3(xy + x) + 13\sqrt{xy + 2} & \\ = (x^2 + y)\sqrt{x^2 + y} - 3(x^2 + y) + 13\sqrt{x^2 + y} & \\ \Leftrightarrow (\sqrt{xy + x})^3 - 3(\sqrt{xy + x})^2 + 13\sqrt{xy + x} &= (\sqrt{x^2 + y})^3 - 3(\sqrt{x^2 + y})^2 + 13\sqrt{x^2 + y} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 13t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6t + 13 = 3(t - 1)^2 + 10 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy + x}) &= f(\sqrt{x^2 + y}) \Leftrightarrow \sqrt{xy + x} = \sqrt{x^2 + y} \\ \Leftrightarrow xy + x &= x^2 + y \Leftrightarrow (x - y)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Phương trình thứ nhất của hệ khi đó trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 2x^2 - 32x + 17} - \sqrt{x^3 - 2x - 4} &= \sqrt{x - 3} \\ \sqrt{x^3 + 2x^2 - 32x + 17} &= \sqrt{x^3 - 2x - 4} + \sqrt{x - 3} \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 32x + 17 &= x^3 - 2x - 4 + x - 3 + 2\sqrt{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)(x - 3)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 24 &= 2\sqrt{(x - 2)(x - 3)} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} \\ \Leftrightarrow 5(x^2 - 5x + 6) - 3(x^2 + 2x + 2) &= 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = a; \sqrt{x^2 + 2x + 2} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta có phương trình

$$5a^2 - 3b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a - b)(5a + 3b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình ẩn x vô nghiệm, dẫn đến hệ đã cho vô nghiệm.

Bài toán 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2x - y + 1}{2} = \sqrt{\frac{y^2 + 1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}, \\ (4x^2 + 13)\sqrt{x^2 + 3} = 3x(x - y) + (4xy + 13)\sqrt{xy + 3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}(4x^2 + 13)\sqrt{x^2 + 3} - 3x^2 - 9 &= 4(xy + 3)\sqrt{xy + 3} - 3xy - 9 + \sqrt{xy + 3} \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3} - 3(x^2 + 3) + \sqrt{x^2 + 3} &= 4(xy + 3)\sqrt{xy + 3} - 3(xy + 3) + \sqrt{xy + 3} \\ \Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2 + 3})^3 - 3(\sqrt{x^2 + 3})^2 + \sqrt{x^2 + 3} &= 4(\sqrt{xy + 3})^3 - 3(\sqrt{xy + 3})^2 + \sqrt{xy + 3}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - 3t^2 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 12t^2 - 6t + 1 = (3t - 1)^2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$f(\sqrt{x^2 + 3}) = f(\sqrt{xy + 3}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{xy + 3} \Leftrightarrow x^2 + 3 = xy + 3 \Leftrightarrow x(x - y) = 0.$$

$$\text{Xét } x = 0 \Rightarrow \frac{1 - y}{2} = \sqrt{\frac{y^2 + 1}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 1 \\ 3(y^2 - 2y + 1) = 2(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 1 \\ y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Xét $x = y$, phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= \sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2+x+1}{6} + \frac{\sqrt{x(x^2+1)}}{3} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{x^2+x+1}{6} &= \frac{\sqrt{x(x^2+1)}}{3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 4\sqrt{x(x^2+1)} \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 - 4\sqrt{x(x^2+1)} + 4x &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} &= 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được ba nghiệm $(x; y) = (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}), (0; 3 - 2\sqrt{2})$.

Bài toán 63. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (3x^2 + 6y + 5)\sqrt{x^2 + 2y} = 5(x - 2y)(x - 1) + (3x + 6xy + 5)\sqrt{x^2 + 2xy}, \\ 3\sqrt{x(x^2 - 6x + 12)} = 2(x^2 - 14y + 12). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}(3x^2 + 6y + 5)\sqrt{x^2 + 2y} - 5x^2 - 10y &= (3x + 6xy + 5)\sqrt{x^2 + 2xy} - 5x - 10xy \\ \Leftrightarrow 3(x^2 + 2y)\sqrt{x^2 + 2y} - 5(x^2 + 2y) + 5\sqrt{x^2 + 2y} & \\ = 3(x + 2xy)\sqrt{x + 2xy} - 5(x + 2xy) + 5\sqrt{x + 2xy} & \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{x^2 + 2y})^3 - 5(\sqrt{x^2 + 2y})^2 + 5\sqrt{x^2 + 2y} &= 3(\sqrt{x + 2xy})^3 - 5(\sqrt{x + 2xy})^2 + 5\sqrt{x + 2xy}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - 5t^2 + 5t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 6t^2 - 10t + 5 = 6\left(t - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực $\mathbb{I}$. Ta thu được

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x^2+2y}) &= f(\sqrt{x+2xy}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2y} = \sqrt{x+2xy} \\ \Leftrightarrow x^2+2y &= x+2xy \Leftrightarrow (x-2y)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2y\} \end{aligned}$$

Xét $x=1 \Rightarrow 3\sqrt{7} = 2(13-14y) \Leftrightarrow y = \frac{26-3\sqrt{7}}{28}$. Xét $x=2y$ thì phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$3\sqrt{x(x^2-6x+12)} = 2(x^2-7x+12) \Leftrightarrow 3\sqrt{x}\sqrt{x^2-6x+12} = 2[(x^2-6x+12)-x].$$

Với điều kiện $x[(x-3)^2+3] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^2-6x+12} = u; \sqrt{x} = v, (u > 0; v \geq 0)$ thu được

$$\begin{cases} 3uv = 2(u^2 - v^2) \\ u > 0; v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2v)(2u+v) = 0 \\ u > 0; v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2v$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{13}; x = 5 - \sqrt{13}$$

Từ đây ta có các nghiệm $(x; y) = \left(5 + \sqrt{13}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right), \left(5 - \sqrt{13}; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right), \left(1; \frac{26 - 3\sqrt{7}}{28}\right)$.

Bài toán 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2y+3)\sqrt{y} - (4x+3)\sqrt{2x} = 0, \\ 9x^2 - 5x - 3 = \sqrt{y+3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải,

Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ đưa về dạng $2y\sqrt{y} + 3\sqrt{y} = 4x\sqrt{2x} + 3\sqrt{2x}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 3 > 0, \forall t \geq 0$. Hàm số liên tục và đồng biến với $t \geq 0$.

Thu được $f(\sqrt{y}) = f(\sqrt{2x}) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow y = 2x$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} 9x^2 - 5x - 3 &= \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 36x^2 - 20x - 12 = 4\sqrt{2x+3} \\ \Leftrightarrow 36x^2 - 12x + 1 &= 4(2x+3) + 4\sqrt{2x+3} + 1 \Leftrightarrow (6x-1)^2 = (2\sqrt{2x+3} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-1 = 2\sqrt{2x+3} + 1 \\ 1-6x = 2\sqrt{2x+3} + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = \sqrt{2x+3} & (1) \\ -3x = \sqrt{2x+3} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $-3x \leq 0, \forall x \geq 0$.

$$\text{Thu được (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 8x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{34}}{9}; y = \frac{8 + 2\sqrt{34}}{9}.$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

Bài toán hệ phương trình số 64 và các bài toán trước đó, có dạng tương đồng hàm số. Sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số thuộc liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 THPT chỉ là một kiến thức cơ bản, nhanh chóng và gọn gàng để thu được mối liên hệ giữa các ẩn. Không nhất thiết như thế, các bạn đọc nhỏ tuổi (lớp 9, lớp 10) có thể sử dụng phân tích nhân tử cũng thu được kết quả tương tự. Đặt $\sqrt{y} = a; \sqrt{2x} = b, (a \geq 0; b \geq 0)$ thu được

$$\begin{aligned} 2a^3 + 3a &= 2b^3 + 3b \Leftrightarrow 2(a^3 - b^3) + 3(a - b) = 0 \Leftrightarrow 2(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 3(a - b) = 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)[2(a^2 + ab + b^2) + 3] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a + b)^2 + a^2 + b^2 = -3 \end{cases} \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Bài toán 65. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (12x-7)\sqrt{3x-2} + y(4y^2+1) = 0, \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = (x-1)(y^2-2) \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 3$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = u, u \geq 0 \Rightarrow 3x = u^2 + 2 \Rightarrow 12x = 4u^2 + 8 \Rightarrow 12x - 7 = 4u^2 + 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (4u^2+1)u + (4y^2+1)y &= 0 \Leftrightarrow 4(u^3+y^3) + u + y = 0 \\ \Leftrightarrow 4(u+y)(u^2-uy+y^2) + u + y &= 0 \Leftrightarrow (u+y)[4(u^2-uy+y^2)+1] = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ (u-2y)^2 + 3u^2 = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow u = y \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 3x-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} &= (x-1)(3x-4) = 3x^2 - 7x + 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{3-x} - 1 &= 3x^2 - 7x + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1} &= (x-2)(3x-1) \\ \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} - 3x+1 \right] &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} < 1 < 2 < 3x-1 < \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} + 3x-1, \forall x \geq 1$ nên $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} - 3x+1 < 0$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Ta thu được nghiệm của hệ là $x=2; y=2$.

Nhận xét.

Bài toán số 65, đối với phương trình thứ nhất của hệ lời giải sử dụng ẩn phụ và phép phân tích nhân tử thông thường dựa trên hằng đẳng thức, có thể đây là một cách làm tối ưu và yêu cầu kiến thức nhẹ nhàng, chỉ cần có trình độ Toán học của một học sinh lớp 9 THCS các bạn có thể xử lý đẹp bài toán này. Kiến thức đạo hàm – hàm số của bậc THPT tỏ ra khá cao cấp và thậm chí khó nhìn nhận trong những bài toán tương tự. Cụ thể biến đổi

$$\begin{aligned} (4u^2+1)u + (4y^2+1)y &= 0 \Leftrightarrow 4(u^3+y^3) + u + y = 0 \\ \Leftrightarrow 4u^3 + u &= -4y^3 - y \Leftrightarrow 4u^3 + u = 4(-y)^3 + (-y) \end{aligned}$$

Lúc này xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực dẫn đến $f(u) = f(-y) \Leftrightarrow u = -y \Leftrightarrow u + y = 0$.

Bài toán 66.

Trích lược câu VI, Đề thi tuyển sinh Đại học; Môn Toán; Khối A; Đề thi chính thức; Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam; Kỳ thi tuyển sinh năm 2010.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0, \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$2(4x^2 + 1)x + (2y - 6)\sqrt{5 - 2y} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}$$

$$\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (5 - 2y)\sqrt{5 - 2y} + \sqrt{5 - 2y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5 - 2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$

Phương trình thứ hai lúc đó trở thành $4x^2 + \left(\frac{5 - 4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \Leftrightarrow 16x^4 - 24x^2 + 8\sqrt{3 - 4x} = 3 \quad (2).$

Với điều kiện $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ ta xét hàm số $g(x) = 16x^4 - 24x^2 + 8\sqrt{3 - 4x}$.

Đạo hàm $g'(x) = 64x^3 - 48x - \frac{2}{\sqrt{3 - 4x}} = 16x(4x^2 - 3) - \frac{2}{\sqrt{3 - 4x}}$.

Nhận xét $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{9}{16} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x(4x^2 - 3) < 0 \Rightarrow 16x(4x^2 - 3) - \frac{2}{\sqrt{3 - 4x}} < 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục và nghịch biến trên miền $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ và $(2) \Leftrightarrow g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.

Thử lại, kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Nhận xét.

- Bài toán số 66 nằm ở vị trí câu VI, Đề thi chính thức năm 2010, theo truyền thống hiện hành vị trí câu VI khi đó là câu hỏi có mức độ tư duy tổng hợp, tổng hòa kiến thức, phân loại thí sinh. Hơn nữa đây cũng là hệ phương trình đầu tiên mở màn cho phương pháp sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tiếp tục kế thừa với mức độ cao hơn tại các Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán khối A các năm tiếp theo, 2012, 2013 và 2014.
- Phương trình (1) hệ quả trong lời giải trên có sử dụng phép nhân hai vế với hằng số 2, mục tiêu làm xuất hiện dạng thức tương đồng hàm số. Ngoài phương cách trên các bạn có thể đặt ẩn phụ để có cảm giác an toàn hơn như sau

Đặt $\sqrt{5 - 2y} = t, t \geq 0 \Rightarrow 5 - 2y = t^2 \Rightarrow y = \frac{5 - t^2}{2}$ dẫn đến

$$(4x^2 + 1)x + \left(\frac{5 - t^2}{2} - 3\right)t = 0 \Leftrightarrow 2x(4x^2 + 1) = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = t^3 + t.$$

Đến đây có thể sử dụng phân tích nhân tử, không nhất thiết sử dụng đơn điệu hàm số

$$2x = u \Rightarrow u^3 + u = t^3 + t \Leftrightarrow u^3 - t^3 + u - t = 0 \Leftrightarrow (u - t)(u^2 + ut + t^2 + 1) = 0.$$

- Điểm đặc biệt thứ hai của bài toán là sử dụng đồng bộ phương pháp hàm số đối với cả hai phương trình,

mấu chốt biến đổi hệ quả $2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 5 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$

Từ đây mới xuất hiện chặn miền giá trị $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ phục vụ đắc lực cho tính chất đơn điệu (nghịch biến) của

hàm số $g(x)$ tiếp theo. Dĩ nhiên do bài toán có nghiệm hữu tỷ $x = \frac{1}{2}$ nên có thể sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời với chú ý điều kiện của x ở trên.

Bài toán 67. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} + y = 6, \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq -1; x \geq -6$. Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{y+1}\sqrt{x^2-4x+5} &= \sqrt{y+1}\sqrt{(x-2)^2+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{I}, \forall y \geq -1 \\ \Rightarrow (x-2)\sqrt{y+2} &\geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai biến đổi thành $(x-2)^2(y+2) = (y+1)[(x-2)^2+1] \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{[(x-2)^2+1]} = \frac{y+1}{y+1+1}$.

Đặt $(x-2)^2 = u; y+1 = v \Rightarrow \frac{u}{u+1} = \frac{v}{v+1} \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1}; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, hàm liên tục và đồng biến.

Ta được $(1) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (x-2)^2 = y+1 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3$. Phương trình thứ nhất trở thành

$$\begin{aligned} 2(x-2)\sqrt{x+6} &= -x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt{x+6}-3) = -x^2 + 4x + 3 - 6(x-2) \\ \Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt{x+6}-3) + x^2 + 2x - 15 &= 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+6}+3} + (x-3)(x+5) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{2(x-2)}{\sqrt{x+6}+3} + x+5 \right] &= 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\forall \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+6}+3} + x+5 > 0, \forall x \geq 2). \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $x = 3; y = 0$.

Nhận xét.

- Lời giải bài toán 67 ở trên mục đích minh họa cho sức mạnh công phá nhất thời của phương pháp hàm số, vì nó chỉ đơn thuần dạng thức quen thuộc $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ nên chúng ta có thể hoàn toàn xử lý phương trình thứ hai dựa vào biến đổi thông thường, phân tích nhân tử, thậm chí còn đơn giản hơn nữa.

Sau khi nhận dạng đặt ẩn phụ u và v thu được $\frac{u}{u+1} = \frac{v}{v+1} \Leftrightarrow uv + u = uv + v \Leftrightarrow u = v$.

Tuy nhiên vẫn bắt buộc sử dụng nhận định $(x-2)\sqrt{y+2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

Tạo điều kiện bình phương hai vế dễ dàng và phục vụ cho lập luận khi thực hiện liên hợp phương trình vô tỷ ẩn x tại hệ quả phương trình thứ nhất.

- Lưu ý thêm khi sử dụng hàm số $(x-2)^2 = u; y+1 = v \Rightarrow \frac{u}{u+1} = \frac{v}{v+1} \quad (1)$. Có lẽ sẽ có nhiều bạn độc giả có

suy nghĩ “đơn giản” nhưng “nguy hiểm” hơn khi xét hàm số dưới dạng thức sau $\frac{u+1}{u} = \frac{v+1}{v}$. Đây là manh

nhà rất tự nhiên và không cần thiết xét đạo hàm vì $\frac{u+1}{u} = \frac{v+1}{v} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{v} \Leftrightarrow u = v$, điểm

đáng chú ý là giả dụ hàm $\frac{u^2+1}{u} = \frac{v^2+1}{v}$ không nên lạm dụng vì sẽ bị gián đoạn và phải xét thêm trường hợp

cộng kênh $u = 0 \vee v = 0$, mach nhỏ một liệu pháp an toàn hơn là xét hàm số sao cho mẫu số luôn luôn dương với miền giá trị biến, tức là nên dùng hàm hình thức nghịch đảo $\frac{u}{u^2+1} = \frac{v}{v^2+1}; f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

Hoặc để chắc chắn hơn các trường hợp bạn nên sử dụng phân tích đa thức thành nhân tử!

Bài toán 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^4(\sqrt{4x^2-2x}+\sqrt{2x-1})=y^2+\sqrt{1+y^4}, \\ x^2y^2+y^2+1=3xy^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét các trường hợp $y=0 \vee x=\frac{1}{2}$ đều không thỏa mãn hệ đã cho.

Ngoài các khả năng đó, phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$\begin{aligned} \sqrt{2x(2x-1)}+\sqrt{2x-1} &= \frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{1+y^4}{y^4}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}(\sqrt{2x}+1) &= \frac{1}{y^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{y^4}}+1\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t(\sqrt{t^2+1}+1); t>0 \Rightarrow f'(t)=1+\frac{1}{(t^2+t)^2}>0, \forall t>0$.

Hàm số liên tục, đồng biến với $t>0$ nên $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{2x-1})=f\left(\frac{1}{y^2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\frac{1}{y^2}$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} y^2(x^2-3x+1)+1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x-1}}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1}+4x^2-12x+4 &= 0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=4(2x-1)-4\sqrt{2x-1}+1 \\ \Leftrightarrow (2x-1)^2 &= (2\sqrt{2x-1}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2x-1} & (1) \\ 1-x=\sqrt{2x-1} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp sau

$$\begin{aligned} \text{➤ } (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \\ \text{➤ } (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x^2-2x+1=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{2} \Rightarrow y^2=\sqrt{2}+1 \Rightarrow y \in \{\sqrt{\sqrt{2}+1}; -\sqrt{\sqrt{2}+1}\}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ban đầu ta có bốn cặp nghiệm $(x; y)=(1;1), (1;-1), (2-\sqrt{2}; \sqrt{\sqrt{2}+1}), (2-\sqrt{2}; -\sqrt{\sqrt{2}+1})$.

Nhận xét.

Bài toán 68 này yếu tố hàm số đã gần như lộ liễu, các bạn học sinh cố gắng cô lập hai ẩn về “Hai bên vĩ tuyến”, tuy nhiên lưu ý đạo hàm của hàm số phân thức, liên tục trên khoảng, do đó cần xét các trường hợp đặc biệt trước khi chia, trước khi sử dụng công cụ đạo hàm. Để giải phương trình một ẩn x , có rất nhiều phương án, ngoài lời giải phân tích bình phương như trên, chúng ta có thể sử dụng đại lượng liên hợp (kèm theo nhân nghiệm), nâng lũy thừa – biến đổi tương đương hay thậm chí đưa về hệ đối xứng loại 2, nhưng e chừng tình hình sẽ phức tạp hơn!

Bài toán 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y(1+\sqrt{y^2+1})=2x+2\sqrt{x^2+4}, \\ 2\sqrt{y^2+3}+\sqrt{4+3x^2}=4x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{I}$.

Từ phương trình thứ hai ta có $4x = 2\sqrt{y^2 + 3} + \sqrt{4 + 3x^2} > 0, \forall x; y \in \mathbb{I} \Rightarrow x > 0$.

$$\text{Kết hợp } \begin{cases} x^2(1 + \sqrt{y^2 + 1}) > 0, \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{I} \\ 2x + 2\sqrt{x^2 + 4} > 0, \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow y > 0.$$

Phương trình thứ nhất biến đổi

$$y(1 + \sqrt{y^2 + 1}) = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x}\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1} \Leftrightarrow y + y\sqrt{y^2 + 1} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x}\sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 1} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}, t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục, đồng biến.

Thu được $f(y) = f\left(\frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{4}{x^2} + 3} + \sqrt{4 + 3x^2} &= 4x \Leftrightarrow \frac{2}{x}\sqrt{4 + 3x^2} + \sqrt{4 + 3x^2} = 4x \\ \Leftrightarrow (x + 2)\sqrt{4 + 3x^2} &= 4x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4)(4 + 3x^2) = 16x^4 \\ \Leftrightarrow 13x^4 - 12x^3 - 16x^2 - 16x - 16 &= 0 \Leftrightarrow (x - 2)(13x^3 + 14x^2 + 12x + 8x + 8) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $13x^3 + 14x^2 + 12x + 8x + 8 > 0, \forall x \geq 2$ nên $(2) \Leftrightarrow x = 2$. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Thí dụ 69 tương tự thí dụ 68, với tư tưởng cô lập biến về hai bên, sử dụng lập luận các biến dương để tránh khỏi tình huống chia trường hợp và thuận lợi cho thao tác xét đạo hàm, suy ra tính chất đơn điệu hàm số phía sau. Một điều may mắn là hàm số của chúng ta luôn luôn đồng biến trên tập hợp số thực nên không nhất thiết cần có điều kiện $y > 0$. Hơn nữa khi đến chặng đường phương trình hệ quả ẩn x , ngoài cách bình phương trực tiếp hai vế quy về phương trình (2), các bạn có thể sử dụng công cụ hàm số thêm một lần nữa, cũng do một chút duyên số đã bố trí

$$(x + 2)\sqrt{4 + 3x^2} = 4x^2 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4 + 3x^2}}{x} = 4 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{3 + \left(\frac{2}{x}\right)^2} = 4 \Leftrightarrow (y + 1)\sqrt{3 + y^2} = 4.$$

Hàm số $g(y) = (y + 1)\sqrt{3 + y^2}; y = \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow g'(y) > 0$, hàm đơn điệu đồng biến, liên tục.

Thu được $g(y) = g(1) \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2; y = 1$.

$$\text{Bài toán 70. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3(16y^2 + 1) + \sqrt{x(x^2 + 4)} = 20, \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

$$\text{Xét trường hợp } x > 0, \text{ kết hợp } \begin{cases} x^2(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) > 0, \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{I} \\ x + \sqrt{x^2 + 1} > 0, \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow y > 0.$$

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ

$$y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2} \Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}; t>0 \Rightarrow f'(t)=1+\frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t \in \mathbb{R}_+$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}_+$.

Thu được $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow 2xy=1$. Phương trình thứ nhất: $x(4+x^2)+\sqrt{x(4+x^2)}=20 \quad (2)$.

Đặt $\sqrt{x(4+x^2)}=u, u>0$ thì

$$\begin{cases} u>0 \\ u^2+u=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u>0 \\ (u-4)(u+5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u>0 \\ u \in \{-5; 4\} \end{cases} \Leftrightarrow u=4 \Leftrightarrow u^2=16$$

$$\Leftrightarrow x^3+4x-16=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x+1)^2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x=2; y=\frac{1}{4}$.

Nhận xét.

Vẫn xoay quanh thủ pháp cũ, cô lập các ẩn về hai bên chiến tuyến, nếu tìm mọi cách thiết lập được dạng tương đồng hàm số thì chúng ta thực hiện ngay, lưu ý nếu thiết lập bất khả thi thì bài toán không thể giải bằng phương pháp này nhé, kiểu như dùng thuyền bơi dưới nước mà muốn bay lên trời như phi cơ vậy, hoang đường.

Một lưu ý nhỏ khi gặp biểu thức $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$, trong bài toán trên chúng ta có căn nguyên điều kiện $x \geq 0$ nên dễ dàng thu được $f(x)=x+\sqrt{x^2+1} \geq 1 > 0$, thực ra nó luôn luôn dương với mọi giá trị của x vì

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1} > x+\sqrt{x^2}=x+|x|=\begin{cases} x+x=2x>0; x \geq 0 \\ x-x=0; x < 0 \end{cases}$$

Mặc dù hàm số phía sau của chúng ta đơn điệu đồng biến trên toàn trục số nhưng buộc cần có điều kiện $x > 0$ để

đưa thừa số vào sâu trong căn thức $\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}$.

Bài toán 71. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{1}{y(x-1)^2}, & (x; y \in \mathbb{R}_+) \\ 24y\sqrt{x-1}=x^3-x^2+2x+4. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 1; y \neq 0$.

Nhận xét $2+2\sqrt{4y^2+1} > 0, \forall y \in \mathbb{R}$ và $y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow y > 0$.

Phương trình thứ nhất tương đương

$$2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{(2y)^2+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$.

Thu được $f(2y) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2(x-1)}$. Phương trình thứ hai trở thành

$$24\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{2(x-1)} = x^3 - x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + 2x + 4)\sqrt{x-1} = 12 \quad (2).$$

Xét các hàm số

$$g(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4; x > 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{I}$$

$$h(x) = \sqrt{x-1}; x > 1 \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0, \forall x > 1$$

Hai hàm số $g(x), h(x)$ này đều liên tục, đồng biến với $x > 1$ nên hàm tích $g(x).h(x)$ đồng biến.

Mặt khác $g(2).h(2) = 12 \Rightarrow x = 2$. Dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $x = 2; y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét.

Bài toán số 71 vẫn sử dụng motif hàm số đơn điệu đồng biến

$$f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Trong đó một trong hai ẩn hàm đã được phức tạp với $2y; \frac{1}{x-1}$, làm cho bài toán có hình thức khá công kênh, chưa kể kèm theo lộ liễu. Thông qua phương trình thứ hai của hệ các bạn chú ý các tính chất cơ bản

1. Tổng các hàm số đơn điệu là một hàm đơn điệu.
2. Tích các hàm số đơn điệu là một hàm đơn điệu.
3. Thương của hai hàm khác tính đơn điệu xác định theo hàm tử thức: $\frac{\uparrow}{\downarrow} \Rightarrow \uparrow; \frac{\downarrow}{\uparrow} \Rightarrow \downarrow$.
4. Thương của hai hàm cùng tính đơn điệu chưa khẳng định điều gì.

Bài toán 72. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x+1} - x), \\ \sqrt{y} - 2\sqrt{4-x} = \frac{4x+y-16}{\sqrt{2x^2+18}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 4; y \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{x+1} = y^2 + 2\sqrt{y} \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2\sqrt{x+1} = y^2 + 2\sqrt{y} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 + 2t; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 + 2 > 0, \forall t \geq 0$, hàm liên tục và đồng biến với $t \geq 0$.

Thu được $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{y}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x+1 = y$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} &= \frac{4x+x+1-16}{\sqrt{2x^2+18}} \\ \Leftrightarrow \frac{5x-15}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}} &= \frac{5(x-3)}{\sqrt{2x^2+18}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x} = \sqrt{2x^2+18} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow -3x + 17 + 4\sqrt{-x^2 + 3x + 4} = 2x^2 + 18 \\&\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 + 4\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + 4 = x^2 + 6x + 9 \\&\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + 2\right)^2 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 3x + 4} = x + 1 & (2) \\ \sqrt{-x^2 + 3x + 4} = -x - 5 & (3) \end{cases}\end{aligned}$$

Rõ ràng (3) vô nghiệm với điều kiện xác định phía trên.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -x^2 + 3x + 4 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}.$$

So sánh điều kiện ta được nghiệm của hệ $(-1; 0), \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right), (3; 4)$.

Bài toán 73. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + y)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x - 2)\sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 1} = 0, \\ 5 - \frac{y}{2} + \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{x + 3}}{2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x + y)\sqrt{(x - 2)^2 + 1} + (x - 2)\sqrt{(x + y)^2 + 1} = 0.$$

Xét trường hợp $x = 2 \Rightarrow y = -2$ hoặc $x + y = 0 \Rightarrow x = 2; y = -2$.

Xét trường hợp $(x + y)(x - 2) > 0$ thì phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}{x - 2} + \frac{\sqrt{(x + y)^2 + 1}}{x + y} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x + y)^2 + 1}}{x + y} = \frac{\sqrt{(2 - x)^2 + 1}}{2 - x} \\&\Leftrightarrow \frac{(x + y)^2 + 1}{(x + y)^2} = \frac{(2 - x)^2 + 1}{(2 - x)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x + y)^2} = \frac{1}{(2 - x)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 - x \\ x + y = x - 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Nếu $x + y = x - 2 \Rightarrow 2(x - 2)\sqrt{(x - 2)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 2; y = -2$. Với $x + y = 2 - x \Leftrightarrow 2x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$.

Ta có phương trình thứ hai khi đó

$$\begin{aligned}\frac{10 - (2 - 2x)}{2} + \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{x + 3}}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{3}{x} + 4 = \frac{\sqrt{x + 3}}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{x + 3} = 2x^2 + 8x + 6 \\&\Leftrightarrow x(\sqrt{x + 3} - 1) = 2x^2 + 7x + 6 \Leftrightarrow \frac{x(x + 2)}{\sqrt{x + 3} + 1} = (x + 2)(2x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \frac{x}{\sqrt{x + 3} + 1} = 2x + 3 \end{cases} \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x + 3} = t, t \geq 0 \Rightarrow x = t^2 - 3$. Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 3}{t + 1} = 2(t^2 - 3) + 3 \Leftrightarrow t^2 - 3 = (2t^2 - 3)(t + 1) \\&\Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = -2\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x = -2; y = 6 \vee x = 3; y = -4$.

Nhận xét.

Bài toán số 73 nếu sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số tất nhiên khả thi, tất nhiên không phải phương án tối ưu, vô tình chúng ta làm phức tạp bản chất ban đầu vì nếu xét thì $f(t) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$, với điều kiện $t \neq 0$. Một số bài toán có sự may mắn sẽ cho hàm nghịch biến, tuy nhiên một số trường hợp lại gián đoạn và dẫn đến làm mất nghiệm nền tảng của nó. Diễn hình các bạn có thể quan sát phương trình sau với $\frac{u^2-2}{u} = \frac{v^2-2}{v} \Leftrightarrow u - \frac{2}{u} = v - \frac{2}{v}$.

➤ Xét hàm số $f(t) = t - \frac{2}{t}; t \neq 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2}{t^2} > 0, \forall t \neq 0$ dẫn đến hàm số đồng biến và $u = v$.

➤ Phân tích nhân tử

$$\begin{aligned} \frac{u^2-2}{u} = \frac{v^2-2}{v} &\Leftrightarrow u^2v - 2v = v^2u - 2u \Leftrightarrow uv(u-v) + 2(u-v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (u-v)(uv+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Trong thao tác xét hàm số ở trên thực tế hàm số đã bị gián đoạn tại điểm $t = 0$, tuy cho trường hợp đẹp để $u = v$ nhưng nhiều khi điều này lại bị loại khi thay thế vào phương trình còn lại. Nếu sử dụng phân tích nhân tử sẽ là biện pháp an toàn và tránh được những rủi ro không đáng có, mong bạn đọc hết sức chú ý, không nên lạm dụng hàm số khi không cần thiết. Sau đây là một thí dụ tương tự.

Bài toán 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2x+1}{2y} = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{y^2+3}}, \\ 2\sqrt{2x-1} + 7 = 5x + y + \frac{1}{x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện: Vì $\begin{cases} x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{I} \\ y^2+3 > 0, \forall y \in \mathbb{I} \end{cases}$ nên $x \geq \frac{1}{2}; y \neq 0$.

Kết hợp $\frac{2x+1}{2y} = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{y^2+3}}$ và $2x+1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow y > 0$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{y} &= \sqrt{\frac{4x^2+4x+4}{y^2+3}} \Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{y^2} = \frac{(2x+1)^2+3}{y^2+3} \\ &\Leftrightarrow (2x+1)^2 y^2 + 3(2x+1)^2 = (2x+1)^2 y^2 + 3y^2 \\ &\Leftrightarrow 3(2x+1)^2 = 3y^2 \Leftrightarrow |2x+1| = |y| \Leftrightarrow 2x+1 = y \end{aligned}$$

Thay thế vào phương trình thứ hai ta có

$$2\sqrt{2x-1} + 6 = 7x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x\sqrt{2x-1} = 7x^2 - 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{2x-1} - 1) = 7x^2 - 8x + 1 \Leftrightarrow \frac{4x(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1} = (x-1)(7x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{4x}{\sqrt{2x-1}+1} = 7x-1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $\frac{4x}{\sqrt{2x-1}+1} \leq \frac{4x}{1} = 4x < 7x-1, \forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 1; y = 3$.

Bài toán 75. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - 8y^2 + \frac{1}{y} - \frac{4}{x} = 3x - \sqrt{x-1} - 12y + 2\sqrt{y - \frac{1}{4}}, \\ \sqrt{x + \frac{x}{y}} = 4y + 1 - \frac{18}{x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1; y \geq \frac{1}{4}$. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} - 3x + \sqrt{x-1} &= 8y^2 - \frac{1}{y} - 12y + \sqrt{4y-1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} - 3x + \sqrt{x-1} &= \frac{(4y)^2}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4y} - 3 \cdot 4y + \sqrt{4y-1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{t} - 3t + \sqrt{t-1}; t \geq 1$ ta có

$$f'(t) = t + \frac{4}{t^2} + 3 + \frac{1}{2\sqrt{t-1}} = \frac{t^3 - 3t^2 + 4}{t^2} + \frac{1}{2\sqrt{t-1}} = \frac{(t+1)(t-2)^2}{t^2} + \frac{1}{2\sqrt{t-1}} > 0, \forall t \geq 1.$$

Hàm số liên tục và đồng biến với $f(x) = f(4y) \Leftrightarrow x = 4y$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &= x+1 - \frac{18}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+4} = (x+1)^2 - 18 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+4} = x^2 + 2x - 17 \\ \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+4} &= x^2 - x - 20 + 3x + 3 \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+4} - 3) = x^2 - x - 20 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-5)}{\sqrt{x+4}+3} &= (x-5)(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+4}+3} = x+4 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $x \geq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+4}+3} \leq \frac{x+1}{3+\sqrt{5}} < x+1 < x+4$. Hệ có nghiệm $x=5; y=\frac{5}{4}$.

Bài toán 76. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2y}{x}}(2y+3x) = x\sqrt{x}(x+3), \\ (x+1)\sqrt{x-1} = 2xy + 6y - 4x - 9. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1; y \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{\frac{2y}{x}} \left(\frac{2y}{x} + 3 \right) = \sqrt{x}(x+3) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2y}{x}} \right)^3 + 3\sqrt{\frac{2y}{x}} = x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục, đồng biến trên toàn trục số.

Ta thu được $f\left(\sqrt{\frac{2y}{x}}\right) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2y}{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{2y}{x} = x \Leftrightarrow 2y = x^2$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(x+1)\sqrt{x-1} = x^3 + 3x^2 - 4x - 9 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x-1} = x^3 + 3x^2 - 5x - 10 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x-1}-1) = x^3 + 3x^2 - 5x - 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(x^2+5x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}+1} = x^2+5x+5 \end{cases} \quad (1)$$

Chú ý $\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+1} \leq \frac{x+1}{1} = x+1 < x+1+(x+2)^2 = x^2+5x+5, \forall x \geq 1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy bài toán có nghiệm duy nhất $x=2; y=2$.

Bài toán 77. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 6x - 12y = \sqrt{2y-1} - \sqrt{x-1}, \\ 3(x+5)\sqrt{x+4} + 2y = x^3 - 5x^2 + 18x + 17. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1; y \geq \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x - 3 + \sqrt{x-1} = 8y^3 - 12y^2 + 6y - 1 + 6y - 3 + \sqrt{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1) + \sqrt{x-1} = (2y-1)^3 + 3(2y-1) + \sqrt{2y-1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^6 + 3t^2 + t; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 6t^5 + 6t + 1 > 0, \forall t \geq 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến tập số thực nên

$$(*) f(x-1) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$3(x+5)\sqrt{x+4} + x^2 - 2x + 2 = x^3 - 5x^2 + 18x + 17 \Leftrightarrow 3(x+5)\sqrt{x+4} = x^3 - 6x^2 + 20x + 15$$

$$\Leftrightarrow 3(x+5)\sqrt{x+4} = x^3 - 6x^2 + 11x - 30 + 9(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+5)(\sqrt{x+4} - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 30$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+5)(x-5)}{\sqrt{x+4}+3} = (x-5)(x^2-x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{3(x+5)}{\sqrt{x+4}+3} = x^2-x+6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Nhận xét } \begin{cases} \frac{3(x+5)}{\sqrt{x+4}+3} < \frac{3(x+5)}{3} = x+5, \forall x \geq 1 \\ x^2 - x + 6 = x+5 + (x-1)^2 \geq x+5, \forall x \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow \frac{3(x+5)}{\sqrt{x+4}+3} < x^2 - x + 6 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=5; y=\frac{17}{2}$.

Bài toán 78. Trích lược câu II.2; Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hải Dương; Năm học 2013 – 2014.

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 3xy(1+\sqrt{9y^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}, \\ x^3(9y^2+1) + 4(x^2+1)\sqrt{x} = 10. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho.

Khi $x > 0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$3xy(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Leftrightarrow 3y(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow 3y(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3y + 3y\sqrt{9y^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$.

Thu được $(*) \Leftrightarrow f(3y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^3 + x^2 + 4(x^2 + 1)\sqrt{x} = 10.$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 + x^2 + 4(x^2 + 1)\sqrt{x}; x \geq 0$ ta có $g'(x) = 3x^2 + 2x + 8x\sqrt{x} + 2(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với x dương nên ta có $f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2; y = \frac{1}{3}$.

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán này so với các bài toán trước đó đã có sự ẩn giấu đôi chút khi dạng thức hàm số ngoài phép chia cô lập ẩn còn có phép sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời. Trên thực tế để xử lý hệ phương trình trong đề thi tuyển sinh đại học môn Toán, các bạn cần có tâm lý an toàn, cần có kỹ năng biến đổi thành thạo theo các hướng biến đổi tương đương để xuất hiện nhân tử, triệt phá mẫu thức – căn thức, đại lượng liên hợp, đặt ẩn phụ làm quang đãng sự chằng chịt, đánh giá – hàm số để phá bỏ các chốt chương ngại vật, kết hợp với kiến thức cơ bản như xét trường hợp, chia khoảng, điều kiện xác định,... để đi đến đáp số cuối cùng.

Bài toán 79. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2, \\ 12y^2 - 10y + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{I}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x + \sqrt{x^2 + 4} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \frac{2(\sqrt{y^2 + 1} - y)}{y^2 + 1 - y^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{y^2 + 1} - 2y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = -2y + \sqrt{(-2y)^2 + 4}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 4}; t \in \mathbb{I}$ thì $f'(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{t + \sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq \frac{t + |t|}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được $f(x) = f(-2y) \Leftrightarrow x = -2y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x + 2 = x^3 + 1 + 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = x^3 + 1 + 2\sqrt[3]{x^3 + 1}$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{I}$ ta có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, suy ra hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó phương trình ẩn x trở thành

$$\begin{aligned} g(x+1) &= g(\sqrt[3]{x^3+1}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3+1} \\ &\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1 = x^3+1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0\} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (-1; 2), (0; 0)$.

Nhận xét.

Lời giải bài toán 79 sử dụng tính chất đơn điệu hàm số đối với phương trình thứ nhất dựa trên phép liên hợp

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) &= 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \frac{2}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = \frac{2(\sqrt{y^2 + 1} - y)}{y^2 + 1 - y^2} \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{y^2 + 1} - 2y \end{aligned}$$

Sau đó tiếp tục biến đổi tương đương hàm số $x + \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4y^2 + 4} - 2y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 4} = -2y + \sqrt{(-2y)^2 + 4}$.

Tuy nhiên ngoài cách làm này các bạn có thể lập luận $x = -2y$ chỉ bằng phép liên hợp như sau

Nên tảng $x + \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{y^2 + 1} - 2y$. Thực hiện tương tự với biểu thức chứa x ta có

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{2(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{x^2 + 4 - x^2} \Leftrightarrow 2y + 2\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 4} - x.$$

$$\text{Kết hợp lại thu được } \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 4} + 2y - 2\sqrt{y^2 + 1} = 0 \\ 2y + 2\sqrt{y^2 + 1} + x - \sqrt{x^2 + 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y + 2y + x = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = -2y.$$

Lưu ý thêm công đoạn lập luận dấu đạo hàm, chú ý rằng $\sqrt{A^2} + A = |A| + A = \begin{cases} A + A = 2A \geq 0; A \geq 0 \\ -A + A = 0; A < 0 \end{cases}$

Vì vậy hàm số dạng tương tự luôn luôn đơn điệu (đồng biến).

Bài toán 80. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ x^2 + \sqrt{3 - x} = 2y^2 - 4\sqrt{2 - y} + 5, \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 3; y \leq 2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + y} \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1} - y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = -y + \sqrt{(-y)^2 + 1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0; \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Thu được hệ thức $f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x + y = 0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} x^2 + \sqrt{3 - x} &= 2x^2 - 4\sqrt{x + 2} + 5 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} + 4\sqrt{x + 2} = x^2 + 5 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3 - x} - 1 + 4\sqrt{x + 2} - 8 = x^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{2 - x}{\sqrt{3 - x} + 1} + \frac{4(x - 2)}{\sqrt{x + 2} + 2} = (x - 2)(x + 2) \\ &\Leftrightarrow (x - 2) \left(x + 2 + \frac{1}{\sqrt{3 - x} + 1} - \frac{4}{\sqrt{x + 2} + 2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -2)$.

Bài toán 81. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1+\sqrt{x^2+2x+2})(y+\sqrt{y^2+1})=1, \\ x^3-3x^2=8y^3-12y^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I})$$

Lời giải.

Điều kiện các căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi $x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}; t \in \mathbb{I}$ ta có

$$f'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0; \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(x)>0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được

$$f(x+1)=f(-y) \Leftrightarrow x+1=-y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} -(y+1)^3-3(y+1)^2 &= 8y^3-12y^2 \Leftrightarrow -y^3-3y^2-3y-1-3y^2-6y-3=8y^3-12y^2 \\ \Leftrightarrow 9y^3-6y^2+9y+4 &= 0 \Leftrightarrow (3y+1)(3y^2-3y+4)=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}; x=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 82. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{y^2+9}+y)=3, \\ 3x=\sqrt{9-y}\sqrt{15-y}+\sqrt{15-y}\sqrt{21-y}+\sqrt{21-y}\sqrt{9-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện căn thức xác định. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\sqrt{y^2+9}+y=3\sqrt{x^2+1}+3x=\sqrt{(3x)^2+9}+3x.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+9}; t \in \mathbb{I}$ thì $f'(t)=\frac{\sqrt{t^2+9}+t}{\sqrt{t^2+9}}\geq \frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+9}}\geq 0; \forall t \in \mathbb{I}.$

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực.

Thu được $f(y)=f(3x) \Leftrightarrow y=3x$. Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$y=\sqrt{9-y}\sqrt{15-y}+\sqrt{15-y}\sqrt{21-y}+\sqrt{21-y}\sqrt{9-y}.$$

Đặt $\sqrt{9-y}=a; \sqrt{15-y}=b; \sqrt{21-y}=c, (a; b; c \geq 0)$ ta thu được $y=9-a^2=15-b^2=21-c^2$.

Phương trình khi đó tương đương $y=ab+bc+ca$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9-a^2=ab+bc+ca \\ 15-b^2=ab+bc+ca \\ 21-c^2=ab+bc+ca \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca+a^2=9 \\ ab+ac+bc+b^2=15 \\ ab+ac+bc+c^2=21 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b(a+c)+a(a+c)=9 \\ a(b+c)+b(c+b)=15 \\ a(b+c)+c(b+c)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+c)(a+b)=9 & (1) \\ (b+c)(b+a)=15 & (2) \\ (c+a)(c+b)=21 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Nhân từng vế ba phương trình (1), (2), (3) thu được

$$[(a+b)(b+c)(c+a)]^2=9.15.21 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=9\sqrt{35} \text{ (Do } a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0).$$

Kết hợp lần lượt với (1), (2) và (3) ở trên ta có

$$\begin{cases} a+b=\frac{3\sqrt{35}}{7} \\ b+c=\sqrt{35} \\ c+a=\frac{3\sqrt{35}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{3\sqrt{35}}{7} \\ 2(a+b+c)=\frac{71\sqrt{35}}{35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{3\sqrt{35}}{7} \\ a+b+c=\frac{71\sqrt{35}}{70} \end{cases} \Rightarrow c=\frac{41\sqrt{35}}{70} \Rightarrow x=\frac{1259}{140}.$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 83. Trích lược Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Lâm Đồng; Năm học 2013 – 2014.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8x^3 + 2y = \sqrt{y+5x+2}, \\ (3x + \sqrt{1+9x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y + 5x + 2 \geq 0$. Phương trình thứ hai của hệ biến đổi

$$3x + \sqrt{1+9x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2} + y} = \sqrt{1+y^2} - y \Leftrightarrow 3x + \sqrt{(3x)^2 + 1} = -y + \sqrt{(-y)^2 + 1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}; t \in \mathbb{I}$ ta có

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0; \forall t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực. Ta thu được $f(3x) = f(-y) \Leftrightarrow y = -3x$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $8x^3 - 6x = \sqrt{2x+2}$. Đặt $x = \cos t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta được

$$\begin{aligned} 2(4\cos 3t - 3\cos t) &= \sqrt{2\cos t + 2} \Leftrightarrow 2\cos 3t = \sqrt{2(1 + \cos t)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}} &= \cos 3t \Leftrightarrow \cos \frac{t}{2} = \cos 3t \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{k4\pi}{5}; \frac{k4\pi}{7} \right\}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Do $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1; y = -3$. Bài toán có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 84. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}, \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2; y \leq \frac{3}{2}$. Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 1}{x^3} &= (4-2y)\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (4-2y)\sqrt{3-2y} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} + 1 - \frac{1}{x} &= (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + 1 - \frac{1}{x} &= (\sqrt{3-2y})^3 + \sqrt{3-2y} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục, đồng biến trên tập số thực.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f(\sqrt{3-2y}) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y}$. Thay thế vào phương trình thứ hai ta có

$$\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\left(1-\frac{1}{x}\right)} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-15} = 1 \quad (2).$$

Đặt ẩn phụ $\sqrt{x+2} = a; \sqrt[3]{x-15} = b, (a \geq 0) \Rightarrow a^2 - b^3 = 17$. Đưa (2) về hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2-b^3=17 \\ a \geq 0; b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b^2-2b+1-b^3=17 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-b \\ b^3-b^2+2b+16=0 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow x=7; y=\frac{111}{98}.$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 85. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \frac{x^3}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}, \\ x\sqrt{y+1} - 2x + \sqrt{x+1} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > -1; y \geq -1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (y+1)\sqrt{y+1} + \sqrt{y+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục, đồng biến trên tập số thực.

Ta thu được $f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$. Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} - 2x + \sqrt{x+1} &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{x+1})^2 &= 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; y = 0$.

Bài toán 86. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2}, \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Xét $x = 0 \Rightarrow (x; y) = (0; y)$ thỏa mãn hệ phương trình. Xét $x \neq 0$ thì phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$2y - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^4+x^2}{x^4}} - 2y\sqrt{4y^2+1} \Leftrightarrow 2y + 2y\sqrt{4y^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2xy = 1$. Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$4\sqrt{x+1} = 3x+1+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}.$$

Đặt $a = \sqrt{1+x}; b = \sqrt{1-x}; (a \geq 0; b \geq 0) \Rightarrow ab = \sqrt{1-x^2}$ và $3x+1 = x-1+2(1+x) = 2a^2 - b^2$.

Ta thu được

$$\begin{aligned} 4a &= 2a^2 - b^2 + 2b + ab \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 + ab + 2b - 4a = 0 \\ &\Leftrightarrow (2a-b)(a+b-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = 2-a \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $b = 2a \Leftrightarrow b^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 4x+4 = 1-x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = -\frac{5}{6}$.

Nếu $b = 2-a \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy bài toán có ba cặp nghiệm.

Bài toán 87. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x\sqrt{8x-4}-12y^2-5=4y^3+13y+\sqrt{18x-9}, \\ 4x^2-8x+4\sqrt{2x-1}+2y^3+2y^2+2y=0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (8x-3)\sqrt{2x-1} &= 4y^3+12y^2+13y+5 \\ &\Leftrightarrow [4(2x-1)+1]\sqrt{2x-1} = 4(y^3+3y^2+3y+1)+y+1 \\ &\Leftrightarrow 4(2x-1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x-1} = 4(y+1)^3+y+1 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3+t; t \in \mathbb{I}$ ta có $f'(t) = 12t^2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Vậy $f(t)$ liên tục và đồng biến.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{2x-1}) = f(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = y+1 \Rightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ 2x = y^2+2y+2 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} (y^2+2y+2)^2 - 4(y^2+2y+2) + 4(y+1) + 2y^3+2y^2+2y &= 0 \\ &\Leftrightarrow (y^2+2y)^2 + 2y^3+2y^2+6y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^3+6y^2+6y+6 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Để thấy $y^3+6y^2+6y+6 = y^2(y+6)+6(y+1) > 0, \forall y \geq -1$ nên (2) vô nghiệm.

Với $y = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Kết luận hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.

Bài toán 88. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (\sqrt{x^2+2x+2}+x+1)(\sqrt{y^4+1}+y^2) = 1, \\ \sqrt{\frac{x^2+3y^2+5}{x^2-2y^2-2}} + x+1 = 0 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^2-2y^2-2 \neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+2}+x+1 &= \frac{1}{\sqrt{y^4+1+y^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}+x+1 &= \sqrt{y^4+1}-y^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}+x+1 &= \sqrt{(-y^2)^2+1}-y^2 \quad (1)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+1}+t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} \geq \frac{|t|+1+t}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Như vậy hàm số đang xét đồng biến, và $(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(-y^2) \Leftrightarrow x+1+y^2 = 0$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x}} = -x-1 \quad (2)$.

Điều kiện $x \geq 2 \vee 0 < x \leq 1 \vee x < -2$. Ta thu được

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 = (x^2+2x)(x^2+2x+1) \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x+2)(x^2+3x-1) = 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 89. Trích lược câu 3, Đề thi luyện thi trực tuyến số 3 năm 2014, Diễn đàn Nguoithay.vn.

Tác giả: Phạm Tuấn Khải.

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x+3y+1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x+4}{\sqrt{x+1}}, \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y+2} = 2y+3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq \frac{2}{9}; x > -1$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$x+1 - \frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x+1 - \frac{3(x+1)+1}{\sqrt{x+1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x+1 - 3\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \quad (*).$$

Vì $y \geq \frac{2}{9}; x > -1$ nên ta xét $f(t) = t^2 - 3t - \frac{1}{t}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 2t - 3 + \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{t^2} = \frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2} \geq 0, \forall t > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền t dương nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x = y^2 - 1.$$

Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3 \Leftrightarrow [\sqrt{9y-2} - (y+2)] + [\sqrt[3]{7y^2+2y-5} - (y+1)] = 0 \quad (1).$$

Đặt $\sqrt[3]{7y^2+2y-5} = a; y+1 = b \Rightarrow a^2 + ab + b^2 > 0$ vì $a = b = 0 \Leftrightarrow y \in \emptyset$. Cho nên

$$(1) \Leftrightarrow \frac{9y-2 - (y^2+4y+4)}{\sqrt{9y-2} + y+2} + \frac{7y^2+2y-5 - (y^3+3y^2+3y+1)}{a^2+ab+b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2} + y+2} + \frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{a^2+ab+b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6) \left[\frac{1}{\sqrt{9y-2} + y+2} + \frac{y+1}{a^2+ab+b^2} \right] = 0 \quad (2)$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{9y-2}+y+2} + \frac{y+1}{a^2+ab+b^2} > 0, \forall y \geq \frac{2}{9}$ nên $(2) \Leftrightarrow (y-2)(y-3) = 0 \Leftrightarrow y \in \{2; 3\} \Rightarrow (x; y) = (8; 3), (3; 2)$.

Thử lại, kết luận hệ có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Bài toán số 89 có một nét đặc sắc nằm ở biểu thức đạo hàm, đó là một biểu thức phân thức, hơn nữa nó luôn dương với mọi giá trị t dương, dẫn đến hàm số khảo sát xảy ra đồng biến, đơn điệu, từ đó dẫn đến lời giải. Chúng ta có thể thiết lập muôn vàn hàm số dạng tương tự bằng cách lấy nguyên hàm một biểu thức đạo hàm không âm. Có thể thực hiện theo các bước như sau

- Chọn biểu thức đạo hàm xác định dương, nên chọn dạng $\frac{(t-m)^2(t+n)}{t^{2n}}$ với $m \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{R}^+$.
- Khai triển tung tóe và lấy nguyên hàm $\int \frac{(t-m)^2(t+n)}{t^{2n}} = f(t)$, thu được hàm số gốc.
- Lựa chọn hai ẩn hàm $t_1, t_2 > 0$, có thể là đa thức, phân thức, căn thức đảm bảo xác định dương theo điều kiện xác định ban đầu của bài toán. Để tránh xảy ra tình trạng hàm số siêu việt nên lựa chọn sao cho khai triển $\frac{(t-m)^2(t+n)}{t^{2n}}$ không xuất hiện đại lượng $\frac{m}{t}$ vì lý do nguyên hàm $\int \frac{m}{t} = m \ln|t| + C$.
- Lưu ý ở đây tác giả dùng chân hàm số đơn thuần, không chặn miền giá trị biến. Về vấn đề này, kính mong độc giả tìm đọc Lý thuyết Hệ phương trình chứa căn thức phần thứ 6.

Bài toán 90. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x^3-6x^2-8}{x} + \frac{6y+20}{\sqrt{y+2}} = y+2, \\ 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{1+\sqrt{y+2}} = 16\sqrt{y+2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1, y > -2$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{x^3-6x^2-8}{x} = y+2 - \frac{6(y+2)+8}{\sqrt{y+2}} \Leftrightarrow x^2-6x-\frac{8}{x} = y+2-6\sqrt{y+2}-\frac{8}{\sqrt{y+2}} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 6t - \frac{8}{t}; t > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}f'(t) = t - 3 + \frac{4}{t^2} = \frac{t^3 - 3t^2 + 4}{t^2} = \frac{(t-2)^2(t+1)}{t^2} \geq 0, \forall t > 0$.

Rõ ràng hàm số trên liên tục và đồng biến trên toàn tia Ox thực nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{y+2}) \Leftrightarrow x = \sqrt{y+2}.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \Leftrightarrow 16x - 13\sqrt{x-1} - 9\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(x-1-\sqrt{x-1}+\frac{1}{4}\right) + 3\left(x+1-3\sqrt{x+1}+\frac{9}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{7}{16}\right)$.

Bài toán 91. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y + \frac{12x^2 + 76}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 + 10\sqrt{y} + 12 + \frac{64}{\sqrt{y+1}}, \\ \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y} = 1 - \frac{1}{4}x^4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; y \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 12 + x^2 - \frac{12x^2 + 76}{\sqrt{1+x^2}} &= y - 10\sqrt{y} - \frac{64}{\sqrt{y+1}} \\ \Leftrightarrow 1 + x^2 - \frac{12(1+x^2) + 64}{\sqrt{1+x^2}} &= y - 10\sqrt{y} - 11 - \frac{64}{\sqrt{y+1}} \\ \Leftrightarrow 1 + x^2 - \frac{12(1+x^2) + 64}{\sqrt{1+x^2}} &= y + 2\sqrt{y} + 1 - 12(\sqrt{y} + 1) - \frac{64}{\sqrt{y+1}} \\ \Leftrightarrow 1 + x^2 - 12\sqrt{1+x^2} - \frac{64}{\sqrt{1+x^2}} &= (\sqrt{y} + 1)^2 - 12(\sqrt{y} + 1) - \frac{64}{\sqrt{y+1}} \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{1+x^2} > 0, \sqrt{y} + 1 > 0, \forall x; y \in \mathbb{I}$ nên ta xét hàm số $f(t) = t^2 - 12t - \frac{64}{t}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 2t - 12 + \frac{64}{t^2}$.

Rõ ràng $\frac{1}{2}f'(t) = t - 6 + \frac{32}{t^2} = \frac{t^3 - 6t^2 + 32}{t^2} = \frac{(t-4)^2(t+2)}{t^2} \geq 0, \forall t > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền t dương nên có $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{1+x^2}) = f(\sqrt{y} + 1) \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{y} + 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} - 1 &= 1 - \frac{1}{4}x^4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} = 2 - \frac{1}{4}x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2 + 2\sqrt{1-x^4} = 4 + \frac{1}{16}x^8 - x^4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{16}x^8 + 1 - x^4 - 2\sqrt{1-x^4} + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{16}x^8 + (\sqrt{1-x^4} - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x = 0 \\ \sqrt{1-x^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (x; y) = (0; 0) \end{aligned}$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 92. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8y = \frac{12y+13}{\sqrt{y+1}} - \frac{1}{3x-1} + 9x^2 - 42x + 5, \\ x\sqrt{2x-1} + 2x^3 + 8x^2 = y + 6x + 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y > -1; x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} 8y + 8 - \frac{12(y+1) + 1}{\sqrt{y+1}} &= 9x^2 - 42x + 13 - \frac{1}{3x-1} \\ \Leftrightarrow 8y + 8 - 12\sqrt{y+1} - \frac{1}{\sqrt{y+1}} &= 9x^2 - 6x + 1 - 12(3x-1) - \frac{1}{3x-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{y+1} > 0, 3x-1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên ta xét hàm số

$$f(t) = 8t^2 - 12t - \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 16t - 12 + \frac{1}{t^2} = \frac{16t^3 - 12t^2 + 1}{t^2} = \frac{(2t-1)^2(4t+1)}{t^2} \geq 0, \forall t > 0.$$

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền t dương nên thu được

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+1}) = f(3x-1) \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = 3x-1 \Leftrightarrow y+1 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow y = 9x^2 - 6x.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $x\sqrt{2x-1} + 2x^3 + 8x^2 = 9x^2 - 6x + 6x + 2 \Leftrightarrow x\sqrt{2x-1} + 2x^3 - x^2 - 2 = 0.$

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $x\sqrt{2x-1} = t, t > 0 \Rightarrow t^2 = x^2(2x-1)$. Phương trình ẩn x tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x-1} + x^2(2x-1) = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2(2x-1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (x-1)(2x^2+x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận hệ ban đầu có nghiệm $x = 1; y = 3$.

Bài toán 93. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 2xy + y^2 + 2y = \sqrt{2x+2} + 3x^2 + 6x + 3, \\ 6(x+y-2)\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 3(y-1)^2 + x = 15. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{4}{3}; x+y+1 \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2y &= \sqrt{2x+2} + 3(x+1)^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2(x+y) &= \sqrt{2x+2} + 4x^2 + 4x + 1 + 2(2x+1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2(x+y) &= \sqrt{2x+2} + (2x+1)^2 + 2(2x+1) \quad (*) \end{aligned}$$

Rõ ràng trường hợp $x+y = 2x+1 = 0$ không xảy ra.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + \sqrt{t+1}; t \geq -1 \Rightarrow f'(t) = 2t + 2 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} > 0, \forall t > -1.$

Hàm số liên tục, đơn điệu tăng trên miền đang xét nên $(*) \Leftrightarrow f(x+y) = f(2x+1) \Leftrightarrow x+y = 2x+1 \Leftrightarrow x+1 = y.$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 6(x+x+1-2)\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 3x^2 + x &= 15 \Leftrightarrow 6(2x-1)\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 3x^2 + x = 15 \\ \Leftrightarrow 9x - 12 + 6(2x-1)\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 4x^2 - 4x + 1 &= x^2 + 4x + 4 \\ \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 2x - 1\right)^2 &= (x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 2x - 1 = x + 2 \\ 3\sqrt{x-\frac{4}{3}} + 2x - 1 = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x-\frac{4}{3}} = 3 - x & (1) \\ 3\sqrt{x-\frac{4}{3}} = -3x - 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-12 = x^2 - 6x + 9 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 15x + 21 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15 - \sqrt{141}}{2}.$$

Vì $-3x-1 < 0, \forall x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{15 - \sqrt{141}}{2}; y = \frac{17 - \sqrt{141}}{2}$.

Bài toán 94. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x-2y = 9 \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} - 18 \cdot \frac{y+1}{\sqrt{2y-1}}, \\ x^4 - 4y^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{2y+2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 1; y > \frac{1}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x-2y &= 9 \cdot \frac{x-1+3}{\sqrt{x-1}} - 9 \cdot \frac{2y-1+3}{\sqrt{2y-1}} \\ &\Leftrightarrow x-2y = 9\sqrt{x-1} + \frac{27}{\sqrt{x-1}} - 9\sqrt{2y-1} - \frac{27}{\sqrt{2y-1}} \\ &\Leftrightarrow x-1-9\sqrt{x-1} - \frac{27}{\sqrt{x-1}} = 2y-1-9\sqrt{2y-1} - \frac{27}{\sqrt{2y-1}} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 9t - \frac{27}{t}; t > 0$ ta có $f'(t) = 2t - 9 + \frac{27}{t^2} = \frac{2t^3 - 9t^2 + 27}{t^2} = \frac{(t-3)^2(2t+3)}{t^2} > 0, \forall t > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với t dương nên

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x-1}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x-1 = 2y-1 \Leftrightarrow x = 2y.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 3x + 5 &= 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 + 2x + 1 + x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (x+1)^2 + (\sqrt{x+2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x+1 = 0 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thấy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 95. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + 12 + \sqrt{y} = 4(y+1)\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x}, \\ x-y-1 = 5 \cdot \frac{3x+3y+31}{\sqrt{x+y+2}} + 10 \cdot \frac{3y+17}{\sqrt{2y+3}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq \frac{9}{5}; y \geq 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} x-y-1 &= 5 \cdot \frac{3(x+y+2)+25}{\sqrt{x+y+2}} + 5 \cdot \frac{3(2y+3)+25}{\sqrt{2y+3}} \\ x-y-1 &= 15\sqrt{x+y+2} + \frac{125}{\sqrt{x+y+2}} + 15\sqrt{2y+3} + \frac{125}{\sqrt{2y+3}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2 - 15\sqrt{x + y + 2} - \frac{125}{\sqrt{x + y + 2}} = 2y + 3 - 15\sqrt{2y + 3} - \frac{125}{\sqrt{2y + 3}} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 15t - \frac{125}{t}; t > 0$ ta có đạo hàm

$$f'(t) = 2t - 15 + \frac{125}{t^2} = \frac{2t^3 - 15t^2 + 125}{t^2} = \frac{(t-5)^2(2t+5)}{t^2} \geq 0, \forall t > 0.$$

Như vậy hàm số liên tục và đồng biến với t dương, dẫn đến hệ quả

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x + y + 2}) = f(\sqrt{2y + 3}) \Leftrightarrow \sqrt{x + y + 2} = \sqrt{2y + 3} \Leftrightarrow x + y + 2 = 2y + 3 \Leftrightarrow x = y + 1.$$

Phương trình thứ nhất trở thành

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} &= 4x\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{9-5x} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{5x-1} + 5x - 1 + 9 - 5x - 4\sqrt{9-5x} + 4 + \sqrt{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - \sqrt{5x-1})^2 + (\sqrt{9-5x} - 2)^2 + \sqrt{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{5x-1} \\ \sqrt{9-5x} = 2 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x + 1 = 0 \\ 9 - 5x = 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất của hệ $x = 1; y = 0$.

Bài toán 96. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{y^2 + x}} = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\ 4(y^2 + x - 1)\sqrt{2y^2 - 2x^2 + 3x + 4}\sqrt{3x - 2} = x^4 + 7x + 10. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}; y^2 + x > 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2 + 2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = y^2 + x + 1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 + x}} \Leftrightarrow x^2 + 2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2 - 1}} = y^2 + x + 1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 + x + 1 - 1}} \quad (*).$$

Nhận xét $y^2 + x + 1 > 1; x^2 + 2 > 1; \forall x \geq \frac{2}{3}, \forall y \in \mathbb{I}$. Xét $f(t) = t - \frac{1}{\sqrt{t-1}}; t > 1 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1$.

Hàm số liên tục và đồng biến với t lớn hơn 1 nên có hệ quả $(*) \Leftrightarrow f(x^2 + 2) = f(y^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^2 = y^2 + x - 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 4(y^2 + x - 1)\sqrt{2y^2 - 2x^2 + 3x + 4}\sqrt{3x - 2} &= x^4 + 7x + 10 \\ \Leftrightarrow 4x^2\sqrt{2(y^2 - x^2 + x) + x + 4}\sqrt{3x - 2} &= x^4 + 7x + 10 \\ \Leftrightarrow 4x^2\sqrt{2 + x} + 4\sqrt{3x - 2} &= x^4 + 7x + 10 \\ \Leftrightarrow x^4 - 4x^2\sqrt{2 + x} + 4(x + 2) + 3x - 2 - 4\sqrt{3x - 2} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2\sqrt{2 + x})^2 + (\sqrt{3x - 2} - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2\sqrt{2 + x} \\ \sqrt{3x - 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2\sqrt{x + 2} \\ 3x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm $(x; y) = (2; \sqrt{3}), (2; -\sqrt{3})$.

Bài toán 97. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5x-1}{y+1} \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{2y-1}, \\ x^2 + 2\left(\frac{1}{x} + 2y\right) \sqrt{3x+1} = 9 + \frac{1}{3-2y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $2 - \frac{1}{x} \geq 0; x \neq 0; \frac{1}{2} \leq y \neq \frac{3}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} (5x-1) \sqrt{2-\frac{1}{x}} &= 2x(y+1) \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \left(5-\frac{1}{x}\right) \sqrt{2-\frac{1}{x}} = 2(y+1) \sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow \left(2-\frac{1}{x}\right) \sqrt{2-\frac{1}{x}} + 3\sqrt{2-\frac{1}{x}} &= (2y-1) \sqrt{2y-1} + 3\sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)^3 + 3\sqrt{2-\frac{1}{x}} &= (\sqrt{2y-1})^3 + 3\sqrt{2y-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số trên liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên dẫn đến

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2y = 3.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} x^2 + 6\sqrt{3x+1} &= 9 + x \Leftrightarrow 3x+1 - 6\sqrt{3x+1} + 9 = x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 3)^2 &= (x+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{3x+1} - 3| = |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = 2-x \\ \sqrt{3x+1} = x+4 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} = 2-x &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 3x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7-\sqrt{37}}{2}. \\ \sqrt{3x+1} = x+4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 3x+1 = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + 5x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 98. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x\sqrt{(5y-1)(3x+1)} + 8x + 5 = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2}, \\ 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 5x^3y\sqrt{5y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq \frac{1}{5}; x \geq -\frac{1}{3}$.

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Xét trường hợp $x \neq 0$ thì phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x^3} &= 5y\sqrt{5y-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 2 = 5y\sqrt{5y-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 1 + 1 + \frac{1}{x} &= (5y-1)\sqrt{5y-1} + \sqrt{5y-1} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 + 1 + \frac{1}{x} &= (\sqrt{5y-1})^3 + \sqrt{5y-1} \quad (*)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên ta có hệ quả

$$(*) \Leftrightarrow f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = f(\sqrt{5y-1}) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = \sqrt{5y-1} \Leftrightarrow x+1 = x\sqrt{5y-1}.$$

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned}x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} + 8x + 5 &= 2\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} + 3x + 1 + x + 2 - 2\sqrt{(x+2)(2x+1)} + 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1 - \sqrt{3x+1})^2 + (\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{3x+1} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 3x + 1 \\ x + 2 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Bài toán 99. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 + x + 2)\sqrt{x+2} = x^3(y+1)\sqrt{y}, \\ x(x^2 + xy - 2) = 3\sqrt{x+2} + 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2; y \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Xét trường hợp $x \neq 0$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned}\frac{(x^2 + x + 2)\sqrt{x+2}}{x^3} &= (y+1)\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{x^2\sqrt{x+2}}{x^3} + \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x^3} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x}\right)^3 + \frac{\sqrt{x+2}}{x} &= y\sqrt{y} + \sqrt{y} \quad (*)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực.

Dẫn đến $(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{x+2}}{x}\right) = f(\sqrt{y}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}}{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x+2 = x^2y$. Phương trình thứ nhất của hệ khi đó

$$\begin{aligned}x^3 + x^2y - 2x &= 3\sqrt{x+2} + 2 \Leftrightarrow x^3 + x + 2 - 2x = 3\sqrt{x+2} + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - x &= 3\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - x - 6\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x^2+2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} = x^2+2x+3 \end{cases} \quad (1)$$

Để thấy $x \geq -2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{3}{2} < 2 \leq 2 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + 3$, vậy (1) vô nghiệm.

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1; y = 3$.

Bài toán 100. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 9 \cdot \frac{2x-1}{2y-1} - 18x + 12\sqrt{3x^2(2y-1)+2} = 31, \\ (2x^2 + 2x - 1)\sqrt{2x-1} = x^3(2y+1)\sqrt{2y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}; y \geq \frac{1}{2}$. Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Xét trường hợp $x \neq 0$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \frac{(2x^2 + 2x - 1)\sqrt{2x-1}}{x^3} &= (2y+1)\sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow \frac{(2x-1)\sqrt{2x-1}}{x^3} + \frac{2x^2\sqrt{2x-1}}{x^3} &= (2y-1+2)\sqrt{2y-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}\right)^3 + \frac{2\sqrt{2x-1}}{x} &= (\sqrt{2y-1})^3 + \sqrt{2y-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục và đồng biến với t thực nên

$$(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{x}\right) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-1}}{x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2x-1 = x^2(2y-1) \Rightarrow x^2 = \frac{2x-1}{2y-1}.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x + 12\sqrt{3(2x-1)+2} &= 31 \Leftrightarrow 6x-1-12\sqrt{6x-1}+36 = 9x^2-12x+4 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{6x-1}-6)^2 &= (3x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x-1}-6 = 3x-2 \\ \sqrt{6x-1}-6 = 2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x-1} = 8-3x & (1) \\ \sqrt{6x-1} = 3x+4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai khả năng

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 8-3x \geq 0 \\ 6x-1 = 9x^2-48x+64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{8}{3} \\ 9x^2-54x+65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow 6x-1 = 9x^2+24x+16 \Leftrightarrow 9x^2+18x+17 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm $x = \frac{5}{3}; y = \frac{23}{25}$.

Bài toán 101. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (3x^2 + 2x + 2y)\sqrt{x+y} = x^3(2x+3)\sqrt{x}, \\ x\sqrt{x^3-y} + \sqrt{12-x} = \frac{2x^3}{x+y}\sqrt{3(x^2+1)}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 12; x+y > 0; x^3-y \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Xét trường hợp $x \neq 0$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} \frac{(3x^2 + 2x + 2y)\sqrt{x+y}}{x^3} &= (2x+3)\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \frac{2(x+y)\sqrt{x+y}}{x^3} + \frac{3x^2\sqrt{x+y}}{x^3} &= 2x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{x+y}}{x}\right)^3 + 3\frac{\sqrt{x+y}}{x} &= 2x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 2t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục và đồng biến với t thực.

Rõ ràng $(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{x+y}}{x}\right) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+y}}{x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x+y = x^3$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} = 2\sqrt{3(x^2+1)}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$(x\sqrt{x} + \sqrt{12-x})^2 \leq (x^2+1)(x+12-x) = 12(x^2+1) \Rightarrow x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} \leq 2\sqrt{3(x^2+1)}.$$

Do đó phương trình ẩn x có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra, tức là

$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{12-x}}{1} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{12-x} \Leftrightarrow x = 12-x \Leftrightarrow x = 6.$$

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $x = 6; y = 210$.

Bài toán 102. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (6y-x)\sqrt{2-\frac{x}{y}} = y(2x-y+4)\sqrt{2x-y}, \\ \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{1+y-\frac{x}{y}} = \sqrt{3x^2+4x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $2-\frac{x}{y} \geq 0; 1+y-\frac{x}{y} \geq 0; 2x-y \geq 0; y \neq 0; x \geq 0 \vee x \leq -2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \left(2-\frac{x}{y}+4\right)\sqrt{2-\frac{x}{y}} &= (2x-y+4)\sqrt{2x-y} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-\frac{x}{y}}\right)^3 + 4\sqrt{2-\frac{x}{y}} &= (\sqrt{2x-y})^3 + 4\sqrt{2x-y} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục và đồng biến với t thực.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2-\frac{x}{y}}\right) = f(\sqrt{2x-y}) \Leftrightarrow \sqrt{2-\frac{x}{y}} = \sqrt{2x-y} \Leftrightarrow 2-\frac{x}{y} = 2x-y \Leftrightarrow y-\frac{x}{y} = 2x-2$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2} + 1 \cdot \sqrt{2x-1})^2 \leq (x+1)(3x+1) = 3x^2+4x+1.$$

Dẫn đến $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} \leq \sqrt{3x^2+4x+1}$. Phương trình ẩn x có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow 2x^2 - x = x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta được hai nghiệm của hệ $x = 2; y = 1 \pm \sqrt{2}$.

Bài toán 103. Trích lược câu 8, Đề thi thử kỳ thi THPT Quốc gia, Môn Toán; Kỳ thi thử lần thứ 2; Trường THPT Dân lập Lương Thế Vinh, Thành phố Hà Nội; Năm học 2014 – 2015.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x(x^2 - 3x + 3)} = \sqrt[3]{y+2} + \sqrt{y+3} + 1, \\ 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = \sqrt[3]{y+2} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 1; y \geq -2 \\ x^2 - 6x + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 + \sqrt{3}; y \geq -2.$$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $x - 1 + \sqrt{(x-1)^3 + 1} = \sqrt[3]{y+2} + \sqrt{(\sqrt[3]{y+2})^3 + 1} \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^3 + 1} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3 + 1}} > 0, \forall t > -1.$

Hàm số liên tục và đồng biến nên ta có $(1) \Leftrightarrow f(x-1) = f(\sqrt[3]{y+2}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{y+2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+2} + 1 = x.$

Phương trình thứ hai trở thành $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = x \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} - x = \sqrt{x^2 - 6(x-1)}.$

Đặt $\sqrt{x-1} = u; u > 0$ ta được

$$\begin{aligned} 3u - x = \sqrt{x^2 - 6u^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u \geq x \\ u > 0 \\ 9u^2 - 6ux + x^2 = x^2 - 6u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \geq x \\ u > 0 \\ 3u(5u - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 5u = 2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 25u^2 = 4x^2 \\ x \geq 3 + \sqrt{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 25x - 25 = 0 \\ x \geq 3 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25 + 5\sqrt{41}}{8}; y = \left(\frac{17 + 5\sqrt{41}}{8}\right)^3 - 2 \end{aligned}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 104. Trích lược câu 8, Thử sức trước kỳ thi Đại học 2015, Đề số 2, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam; Số 448, Tháng 10 năm 2014.

Tác giả: Trần Quốc Luật – Giáo viên Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + y^3 = 2y\sqrt{y-1}(x + \sqrt[3]{x}), \\ x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x(y-1)^3 + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq 1; x^3 - x^2 + 1 \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$x^2 + 2x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + y^3 - y^2 = 2y\sqrt{y-1}(x + \sqrt[3]{x})$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt[3]{x})^2 + (y\sqrt{y-1})^2 = 2y\sqrt{y-1}(x + \sqrt[3]{x})$$

Đặt $x + \sqrt[3]{x} = a; y\sqrt{y-1} = b$ thu được $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x + \sqrt[3]{x} = (y-1)\sqrt{y-1} + \sqrt{y-1}.$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}.$

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên $f(\sqrt[3]{x}) = f(\sqrt{y-1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = (y-1)^3 \end{cases}$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 - 1 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 - 1 - \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - x^2 + 1} + x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2 - 1)(\sqrt{x^3 - x^2 + 1} + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^3 + x + 1) = 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 \leq 1; x \geq 0 \\ x^4 - x^3 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Từ đây suy ra hệ có hai nghiệm $(x; y) = (0; 1), (1; 2)$.

Bài toán 105. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^4y^2 + 2x^2 + 4y^2 = 1, \\ (x-y)^3 + 6y = (x+y)^3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{I}$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x^4y^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 2y^2 = 1 \\ (x-y)^3 - 3(x-y) = (x+y)^3 - 3(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + (x+y)^2 + 3x^4y^2 + 2y^2 = 1 \\ (x-y)^3 - 3(x-y) = (x+y)^3 - 3(x+y) \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $\begin{cases} (x-y)^2 \leq 1 \\ (x+y)^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-y| \leq 1 \\ |x+y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-y \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1 \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t; t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$, hàm số liên tục, nghịch biến.

Phương trình thứ hai khi đó có dạng $f(x-y) = f(x+y) \Leftrightarrow x-y = x+y \Leftrightarrow y = 0$.

Từ đây suy ra $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right)$. Hệ ban đầu có hai cặp nghiệm.

Bài toán 106. Trích lược câu VII, Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Lê Quý Đôn; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2(x-7y) = -12, \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y-3} = x^2 + y^2 - 10x - 5y + 22. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 3; y \geq 3$. Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x = y^3 - 6y^2 + 14y - 12$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x = (y-2)^3 + 2(y-2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y-2 \Leftrightarrow y = x+2$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = x^2 + x^2 + 4x + 4 - 10x - 5x - 10 + 22 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2x^2 - 11x + 16.$$

Với điều kiện $x \in [1; 3]$ ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} - 1 + \sqrt{x-1} - 1 &= 2x^2 - 11x + 14 \\ \Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} &= (x-2)(2x-7) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + 7 = \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} + 2x \end{cases} &(2) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + 7 > 7$; $\frac{1}{\sqrt{3-x}+1} + 2x \leq \frac{1}{1} + 2.3 = 7, \forall x \in [1; 3]$ nên (2) vô nghiệm.

Từ đây dẫn đến bài toán có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 4)$.

Bài toán 107. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x-1 + \sqrt{2x(4x^2-3x+3)} = \sqrt[3]{y+1} + \sqrt{y+2}, \\ \sqrt{4x^2-x+1} - \sqrt[3]{y+1} = \sqrt{2(8x^2-5x+2)}. \end{cases} \quad (x \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\begin{aligned} 2x-1 + \sqrt{8x^3-12x^2+6x} &= \sqrt[3]{y+1} + \sqrt{y+2} \\ \Leftrightarrow 2x-1 + \sqrt{(2x-1)^3+1} &= \sqrt[3]{y+1} + \sqrt{(\sqrt[3]{y+1})^3+1} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^3+1} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}} > 0, \forall t > -1$.

Hàm số liên tục và đồng biến nên ta có (1) $\Leftrightarrow f(2x-1) = f(\sqrt[3]{y+1}) \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{y+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} = 2x-1$.

Phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{4x^2-x+1} + 1 - 2x = \sqrt{2[(4x^2-x+1) + (4x^2-4x+1)]}$.

Đặt $\sqrt{4x^2-x+1} = u; 1-2x = v, (u > 0; v \in \mathbb{I})$ ta được

$$\begin{aligned} u+v &= \sqrt{2(u^2+v^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+2uv+v^2 = 2u^2+2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u, v > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 1 \\ 4x^2-x+1 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=-2 \end{aligned}$$

Đổi chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -2)$.

Bài toán 108. Trích lược câu 8; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ 3; Mùa thi 2015; Trường THPT Lê Quý Đôn; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x-2} + y^2 = 2x^2 + y - 2, \\ y(y^2+1) + (x+1) = y^2 + (x+2)\sqrt{x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$y^3 + y - y^2 = (x+2)\sqrt{x+1} - (x+1) \Leftrightarrow y^3 - y^2 + y = (x+1)\sqrt{x+1} - (x+1) + \sqrt{x+1} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 + 2t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên $(1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x+1 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} + x+1 &= 2x^2 + \sqrt{x+1} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 - x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} &= (x+1)(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} = x+1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta thấy (1) vô nghiệm vì $\frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} < 1 < x+1, \forall x \geq \frac{2}{3}$.

Như vậy ta thu được nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài toán 109. Trích lược câu 4; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Đề thi chính thức; Mùa thi 2015; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Lâm Đồng.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 6y - 4 = \sqrt{2(1-y)(x^3+1)}, \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0. \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $x \leq 2; \frac{1}{3} \leq y \leq 1$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên

$$f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2-x = 2y-1 \Leftrightarrow x = 3-2y.$$

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned} x^2 + 3(3-x) - 4 &= \sqrt{2\left(1 - \frac{3-x}{2}\right)(x^3+1)} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = \sqrt{(x-1)(x^3+1)} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - x + 1) - 2(x^2 - 1) &= \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2-1} = u; \sqrt{x^2-x+1} = v; u, v > 0$ ta có

$$3v^2 - 2u^2 = uv \Leftrightarrow (v-u)(3v+2u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ 3v+2u=0 \end{cases} \Rightarrow u=v$$

$$\Rightarrow u^2 = v^2 \Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Từ đó đi đến hệ có nghiệm duy nhất $x = 2; y = \frac{1}{2}$.

Bài toán 110. Trích lược câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Phan Thúc Trục; Huyện Yên Thành; Tỉnh Nghệ An.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2}+\sqrt{x}=\sqrt{x^5}+(y-3x)\sqrt{y+2}, \\ \sqrt{9x^2+16}-2\sqrt{2y+8}=4\sqrt{2-x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq -2; x \in [0; 2]$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\begin{aligned} (xy-3+3x-y)\sqrt{y+2} &= x^2\sqrt{x}-\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow (y+3)(x-1)\sqrt{y+2} &= (x-1)(x+1)\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y+2)\sqrt{y+2}+\sqrt{y+2} &= x\sqrt{x}+\sqrt{x} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét trường hợp $x=1$ thì phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{25}-2\sqrt{2y+8}=4 \Leftrightarrow y=-\frac{31}{8} < -2$ (loại).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t)=3t^2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên $(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+2})=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2}=\sqrt{x} \Leftrightarrow y+2=x$.

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$\begin{aligned} 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{2(4-x^2)} &= 9x^2+16 \\ \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16 &= x^2+8x+16 \\ \Leftrightarrow \left[2\sqrt{2(4-x^2)}+4\right]^2 &= (x+4)^2 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2(4-x^2)}+4\right|=|x+4| \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}+4 &= x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}=x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 32-8x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left\{\frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 111. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2(4y^2+3)}-\sqrt{3x^2+1}+2xy=1, \\ \sqrt{5x+1}-\sqrt{3x-2}=\frac{2x+3}{2(x-1)^2+6xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}; 2(x-1)^2+6xy \neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\sqrt{x^2(4y^2+3)}+2xy=\sqrt{3x^2+1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{4y^2+3}+2y=\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}+\frac{1}{x}.$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+3}+t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+1=\frac{t+\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{t^2+3}} > \frac{t+|t|}{\sqrt{t^2+3}} \geq 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow 2xy=1$.

Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned} (2x^2 - 4x + 5)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-2}) &= 2x+3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 = \sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+1} \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{3x-2} + x+1 - \sqrt{5x-1} + 2(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{3x-2}} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1 + \sqrt{5x-1}} + 2(x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(\frac{1}{x + \sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+1 + \sqrt{5x-1}} + 2 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \Rightarrow (x; y) = \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(2; \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Kết luận hệ có hai nghiệm.

Bài toán 112. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x^2(3y^2+1)} - \sqrt{3x^2+1} + 3xy = 1, \\ (2x-3xy)(3\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}) = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét hệ không nhận nghiệm với $x = 0 \Rightarrow x > 0$. Khi đó phương trình thứ nhất tương đương

$$\sqrt{x^2(9y^2+3)} + 3xy = \sqrt{3x^2+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{9y^2+3} + 3y = \sqrt{\frac{1}{x^2}+3} + \frac{1}{x}.$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+3} + t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}} + 1 = \frac{t + \sqrt{t^2+3}}{\sqrt{t^2+3}} > \frac{t + |t|}{\sqrt{t^2+3}} \geq 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên $f(3y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 3y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 3xy = 1$.

Phương trình thứ hai khi đó trở thành

$$\begin{aligned} (2x-1)(3\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}) &= 1 \Leftrightarrow (6x-1)(2x-1) = 3\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} \\ \Leftrightarrow 12x^2 - 8x + 1 &= 3\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 3(x - \sqrt{x}) + x+1 - \sqrt{3x+1} + 12(x^2 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} + \frac{x^2 - x}{x+1 + \sqrt{3x+1}} + 12(x^2 - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - x) \left(3 \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x+1 + \sqrt{3x+1}} + 12 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = \left(1; \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Kết luận hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 113. Trích lược câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Mùa thi 2016; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thủ đô Hà Nội.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1-xy, \\ (2x-7xy)(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3xy}) = 5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình thứ nhất tương đương

$$|x|\sqrt{y^2+1}+xy=\sqrt{x^2+1}+1 \Leftrightarrow x\sqrt{y^2+1}+xy=\sqrt{x^2+1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}+\frac{1}{x}.$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+1=\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{t+|t|}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên $f(y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy=1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} (2x-7)(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}) &= 5 \Leftrightarrow (2x-7)(2x-5)=5(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+3}) \\ \Leftrightarrow 4x^2-24x+35 &= 5\sqrt{3x-2}+5\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow 3x+2-5\sqrt{3x-2}+x+9-5\sqrt{x+3}+4(x^2-7x+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9(x^2-7x+6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{x^2-7x+6}{x+9+5\sqrt{x+3}}+4(x^2-7x+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-7x+6)\left(\frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}}+4\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x \in \{1; 6\} \Rightarrow (x; y) &= (1; 1), \left(6; \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Kết luận hệ đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 114. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x^2-3x+2+x^3(6y-3)=4x^3(y+1)\sqrt{2y-1}, \\ \sqrt[3]{12y-\frac{9}{2}}-\sqrt{2x^3-6x^2+6x-1}+x^2=x+2y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq \frac{1}{2}$. Xét $x=0 \Rightarrow \begin{cases} (y+1)\sqrt{2y-1}=\frac{1}{2} \\ 2y=\sqrt[3]{12y-\frac{9}{2}} \end{cases} \Rightarrow y \in \emptyset.$

Khi $x \neq 0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x} &= (4y+4)\sqrt{2y-1}-6y+3 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x} &= 2(2y-1)\sqrt{2y-1}-3(2y-1)+6\sqrt{2y-1} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2+6t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=6t^2-6t+6=6(t^2-t+1)>0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập số thực nên ta được

$$(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2=2y-1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình thứ hai tương đương
$$\sqrt[3]{6x^2+\frac{3}{2}}-\sqrt{2x^3-6x^2+6x-1}=x+1 \quad (2).$$

Điều kiện $2x^3 - 6x^2 + 6x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{1}{2} \geq 0$. Từ phương trình (2) ta có

$$x + 1 \leq \sqrt[3]{6x^2 + \frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \leq 6x^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Kết hợp điều kiện

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{1}{2} \geq 0 &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; y = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện $x > 0$ ta thu được nghiệm duy nhất.

Bài toán 115. Tìm nghiệm hữu tỷ của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x(2xy - 1) = (2xy^2 - y)(y^2 + 1)\sqrt{2xy - 1}, \\ 2xy^3 + 1 = y^2 + \sqrt{6(x+1)} + \sqrt{4x+3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{Q}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{4}; xy \geq \frac{1}{2}$.

Xét $2xy = 1$ thì phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{6(x+1)} + \sqrt{4x+3} = 1$ (1).

Rõ ràng $x \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{6(x+1)} + \sqrt{4x+3} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} + 0 > 1$, dẫn đến (1) vô nghiệm.

Xét $2xy > 1$ thì phương trình thứ nhất tương đương

$$\frac{x^3}{(2xy-1)\sqrt{2xy-1}} + \frac{x}{\sqrt{2xy-1}} = y^3 + y \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2xy-1}} \right)^3 + \frac{x}{\sqrt{2xy-1}} = y^3 + y \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{Q} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{Q}$. Hàm liên tục và đồng biến dẫn đến

$$(2) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{\sqrt{2xy-1}}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2xy-1}} = y \Leftrightarrow x = y\sqrt{2xy-1} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \\ x^2 = y^2(2xy-1) \end{cases}$$

Khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$\begin{aligned} y^2(2xy-1)+1 &= \sqrt{6(x+1)} + \sqrt{4x+3} \Leftrightarrow x^2+1 = \sqrt{6(x+1)} + \sqrt{4x+3} \\ &\Leftrightarrow x^2-2x-2+x+2-\sqrt{6x+6}+x+1-\sqrt{4x+3}=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x-2+\frac{x^2-2x-2}{x+2+\sqrt{6x+6}}+\frac{x^2-2x-2}{x+1+\sqrt{4x+3}}=0 \\ &\Leftrightarrow (x^2-2x-2)\left(1+\frac{1}{x+2+\sqrt{6x+6}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{4x+3}}\right)=0 \end{aligned}$$

Rõ ràng $1+\frac{1}{x+2+\sqrt{6x+6}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{4x+3}} > 0, \forall x \geq -\frac{3}{4}$, nên ta được $x^2-2x-2=0 \Rightarrow x \in \{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\} \notin \mathbb{Q}$.

Kết luận hệ đã cho không có nghiệm hữu tỷ.

Bài toán 116. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy(1+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{4+y}-\sqrt{y})=8, \\ -3x^4y+2x^2y+26x=2\sqrt[3]{x^3-14}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{Q}).$$

Lời giải.

Điều kiện $y \geq 0$.

Xét trường hợp $y = 0$ không thỏa mãn hệ, khi $y > 0$ thì phương trình thứ nhất tương đương

$$xy(1 + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{8}{\sqrt{4 + y} - \sqrt{y}} \Leftrightarrow xy(1 + \sqrt{1 + x^2}) = 2(\sqrt{4 + y} + \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow x(1 + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{2}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{4}{y^2} + 1} + \frac{2}{\sqrt{y}}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}, t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Hàm số liên tục, đồng biến nên ta được $f(x) = f\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$

Phương trình thứ hai trở thành

$$-3x^2 \cdot 4 + 8 + 26x = 2\sqrt[3]{x^3 - 14} \Leftrightarrow -6x^2 + 13x + 4 = \sqrt[3]{x^3 - 14}$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 + 12x - 6 + x - 2 - \sqrt[3]{x^3 - 14} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6(x^2 - 2x - 1) - \frac{6(x^2 - 2x - 1)}{(x - 2)^2 - (x - 2)\sqrt[3]{x^3 - 14} + (\sqrt[3]{x^3 - 14})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 - (x - 2)\sqrt[3]{x^3 - 14} + (\sqrt[3]{x^3 - 14})^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy $(x - 2)^2 - (x - 2)\sqrt[3]{x^3 - 14} + (\sqrt[3]{x^3 - 14})^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$ nên (1) vô nghiệm

Với $x^2 - 2x - 1 = 0; x > 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}; y = 12 - 8\sqrt{2}$, hệ có duy nhất nghiệm.

Bài tập tương tự.

Giải các hệ phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \begin{cases} \frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{2y^2+1} = 4y, \\ 2x^2 - 3xy + x + 8 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 8x^3 - 4x^2 - 3x = 3y - \frac{1}{2}, \\ x^3 + 5x + (x^3 - 2y + 6)\sqrt{x^3 - 2y + 1} = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2}, \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x}, \\ 2\sqrt[3]{12x^2 + 3xy - 18x + 6x + y} = x^3 + 5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 8x^3 + 6(2x+y)xy = 6x^3 + 13, \\ x^3 + 5x + (x^3 - 2y + 6)\sqrt{x^3 - 2y + 1} = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1, \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = y^2 + 8. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^3 + 2x^2 = 5 - 2y, \\ (15-2x)\sqrt{6-x} - (4y+9)\sqrt{2y+3} = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1}) + 3y(2+\sqrt{9y^2+3}) = 0, \\ 4x^3 - 3y + 5 + 3\sqrt{1-3y} = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^3(4y^2+1) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6, \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2y^3 - 2x\sqrt{1+x} = 3\sqrt{1+x} - y, \\ \sqrt{2x^2+y^2+8} + \sqrt{2x^2-y^2+2} = x+4. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1, \\ \sqrt{x}\sqrt{6x^2+2xy+1} = -4xy+6y+1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{y^3}{x} - 9xy = \frac{3x-y}{\sqrt{x}}, \\ y^2 + 9\sqrt{x} = 6y. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ x - \sqrt{3x - 2} + \frac{x^2 + 3y + 2}{x + y + \sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ \sqrt{2x - 1} + 1 = y(x - 3). \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} (x - 3)(x + 4) = y(y - 7), \\ \frac{y^2}{\sqrt{x - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{2 - y}}. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4, \\ \sqrt{3x + 1} + \sqrt{y^2 + 3} = 4. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12}, \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)}. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} (8x - 3)\sqrt{2x - 1} = 4y^3 + y, \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 = 2y - 3. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} (3 - x)\sqrt{2 - x} = 2y\sqrt{2y - 1}, \\ \sqrt[3]{x + 2} + 2\sqrt{y + 2} = 5. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1 - x} = 3\sqrt{1 - x}, \\ \sqrt{2y^2 + 1} - y = 2 - x. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 16\sqrt{3y + 4} + 2x = 85, \\ 16(x^3 - y) = 24x^2 - 18x + 6\sqrt[3]{1 + y} + 21. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y, \\ \sqrt{2x + 3} + x = y. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x^2y + y^3 = x^6 + 2x^4, \\ (x+2)\sqrt{1+y} = (1+x)^2. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2x^2y)\sqrt{3-2y} + 4x + \frac{1}{x}, \\ \sqrt{2 - \sqrt{3-2y}} = \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3} + x + 2}{2x + 1}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x(x^2 + y^2) = y^4(y^2 + 1), \\ 4\sqrt{\frac{y^4}{3}} + 4 = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \sqrt{6x}. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + \frac{2x+2}{y}} = \sqrt{2(y-1)} + 2x - 3, \\ (6x - 6y + 29)\sqrt{x-y+2} = (6y+23)\sqrt{y+1}. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} (2012 - 3x)\sqrt{4-x} + (6y - 2009)\sqrt{3-2y} = 0, \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x+9)\sqrt{x+4}, \\ 3x^2 - 14x - 8 = \sqrt{6-4y-y^2} - \sqrt{3x+1}. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 12y^2 - 12y + 6x = \sqrt{2y-1} - \sqrt{x-1}, \\ \sqrt{2x}(2xy+1) = 6y\sqrt{x^2+4y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$31. \begin{cases} 2y^2 - 9y - \frac{4}{x} + 2 = 0, \\ 4\sqrt{x+1} + xy\sqrt{y^2+4} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$32. \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x}, \\ x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{13-3y^2} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$33. \begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0, \\ x^2 + 7x - y = (2x+1)\sqrt{x^2+2y+5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$34. \begin{cases} \sqrt{3-x} + \sqrt{2+y} + 4\left(y + \frac{x}{y}\right) = y^3 + x^2 + |2x-y| + |x-1|, \\ (9x-3y+14)\sqrt{3x-y+3} = 6(x-y) + 2(3y+7)\sqrt{2y+3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$35. \begin{cases} (54-5x)\sqrt{10-x} + (5y-49)\sqrt{9-y} = 0, \\ -2y\sqrt{x^2+x+y} + 2x+1 = x^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$36. \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+x+y} + \sqrt{x-1} = 5-y, \\ x^3+x^2+5x+y+6 = (11-y)\sqrt{6-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$37. \begin{cases} (24-3x)\sqrt{7-x} + (3y-21)\sqrt{6-y} = 0, \\ \frac{6x^2-8x-2y+3}{4x-1} = \sqrt{6x^2-6y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$38. \begin{cases} (10-3x)\sqrt{2-x} = (7-3y)\sqrt{1-y}, \\ \sqrt{3x-2} - \frac{(y+1)^2}{\sqrt{3y+1}} = 2(x-1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$39. \begin{cases} \frac{x^2+2}{\sqrt{3-y}} = \frac{5-y}{x}, \\ \sqrt{2x+7-y} + \sqrt{2-x} = \sqrt{8-x^3} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$40. \begin{cases} \frac{2x-y+13}{x+2} \sqrt{2x-y+3} = \sqrt{x+2}, \\ y\sqrt{x+8} = x^2+y+3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$41. \begin{cases} 14\sqrt{x+35} + 6\sqrt{x+1} = 84 + \sqrt{36x-6y+52}, \\ x(x^2+2x+9) + 12y = 34 + 2(13-3y)\sqrt{17-6y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$42. \begin{cases} (x-y+6)\sqrt{x-y-1} = (y+6)\sqrt{y-1}, \\ \sqrt[3]{2(y+3)} + 2x^2 - 4y^2 = 7 - \sqrt{x - \frac{2y}{x}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$43. \begin{cases} (2y-2x+11)\sqrt{y-x+1} = (4x+11)\sqrt{2x+1}, \\ 2\sqrt[3]{3x-4} + x + 2\sqrt{\frac{5y}{2}-4} = \frac{8y}{x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$44. \begin{cases} \sqrt{2y+2} - 2\sqrt{4-x} = \frac{10(y-1)}{\sqrt{2(x^2+9)}}, \\ (x-y+7)\sqrt{x-y} - (y+8)\sqrt{y+1} = x-2y-1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$45. \begin{cases} x(2\sqrt{2x-1}+1) + y = (x-y+1)\sqrt{x-y}+1, \\ (x+3)\sqrt{x^2-y+3} = y^2-2y+3x+5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$46. \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2x-y}} - 1 = \frac{2y+x^2}{1+2x^2-y^2}, \\ (2x-y+3)\sqrt{2x-y} + 4(x-y) = (y+3)\sqrt{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$47. \begin{cases} (2x-y+2)\sqrt{2x-y+1} + x = (x+2)\sqrt{x+1} + y, \\ \sqrt{x^2-y} + \frac{2x}{y} = \frac{x^3+2y^2-3x+1}{y^2+2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$48. \begin{cases} (2x+y+4)\sqrt{2x+y} = 4x-2y+2 + (2y+3)\sqrt{2y-1}, \\ 4(x-4)(\sqrt{y-x}+1)^2 = (y-1)^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$49. \begin{cases} \sqrt{x+2y+5} - 2\sqrt{2-x} = 2 \cdot \frac{6y-1}{\sqrt{4y^2+4y+5}}, \\ (x-y+6)\sqrt{x-y+2} - (y+7)\sqrt{y+7} = 3(x-2y-1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$50. \begin{cases} (4x-2y+11)\sqrt{2x-y+3} + 4y-4x-2 = (2y+9)\sqrt{y+2}, \\ \frac{2y-1}{\sqrt{8x+1}-2(y-x)} = \frac{3\sqrt{2x-1}+1}{4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$51. \begin{cases} (3x+y+5)\sqrt{3x+y} + x-y = 2(4x+5)\sqrt{x}, \\ (\sqrt{1+y}+1)(\sqrt{1+x}+x+y-5) = y^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$52. \begin{cases} \sqrt{9y^2+6y+25} - \sqrt{x^2+15} = 3x-2, \\ \frac{x+2y+5}{2x-y+4} = \frac{\sqrt{2x-y}}{\sqrt{x+2y+1}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$53. \begin{cases} (4x+2y+5)\sqrt{2x+y+1} = (2x+4y+5)\sqrt{x+2y+1}, \\ \sqrt{y^2+91} = \sqrt{x^2+7} + \frac{10}{3}y-4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$54. \begin{cases} (2x - y + 7)\sqrt{2x - y} = (2y - x + 7)\sqrt{2y - x}, \\ 2y^2 - 5x = \sqrt{y - 2} + \sqrt{2y - 5} + \sqrt{4 - x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$55. \begin{cases} (x + y + 10)\sqrt{x + y} + 2(2y - x + 1) = (2x - y + 9)\sqrt{2x - y - 1}, \\ \sqrt{2(y - 1)} + \sqrt{5 - x} + 7x + 2 = 2(2y + 1)^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$56. \begin{cases} (4x - y + 11)\sqrt{4x - y} - (x + 2y + 14)\sqrt{x + 2y + 3} = 3(x - y - 1), \\ \frac{4}{y + 1} + \sqrt{y + 1} - \frac{1}{x} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{y + 1}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$57. \begin{cases} (3x - 6y + 1)\sqrt{x - 2y} + 2(x - 1) = (3x - 3y - 2)\sqrt{x - y - 1}, \\ \sqrt{5x - y} + \sqrt{x + y + 1} + x^3 - (y + 4)x^2 + 10xy = 13y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$58. \begin{cases} (3x - y + 15)\sqrt{3x - y + 2} - (x + y + 15)\sqrt{x + y + 2} = 6(x - y), \\ \sqrt{2x^2 + 16y + 18} + \sqrt{y^2 - 1} = x + y + 4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$59. \begin{cases} (x^2 + y + 6)\sqrt{x^2 + y} = (x + 7)\sqrt{x + 1}, \\ \frac{4x - 2y + 7}{4x - 1} = \sqrt{x - y + 4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$60. \begin{cases} (2x^2 - 2y + 11)\sqrt{x^2 - y} = (2y - 2x + 11)\sqrt{y - x}, \\ 2\sqrt{2(2 + x)} + 4\sqrt{2 - x} = \sqrt{9(2y - x) + 16}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$61. \begin{cases} \frac{6x^2 - 3y + 5}{6y^2 - 3x + 5} \cdot \sqrt{2x^2 - y} = \sqrt{2y - x}, \\ (12y - 8x^2 - 1)\sqrt{1 + x^3} = x(3y - x) + 2x + 1 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$62. \begin{cases} (2x^2 + 7)\sqrt{2x^2 - 1} = (2x - y + 8)\sqrt{2x - y}, \\ (2x^2 + y + 6)\sqrt{2x + 7} = \frac{2x - y + 1}{2} + 9x + 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$63. \begin{cases} 8y = \frac{12y + 13}{\sqrt{y + 1}} - \frac{1}{3x - 1} + 9x^2 - 42x + 5, \\ \sqrt{x + 2} + 3x^2 - 10 = \frac{y}{3} + \sqrt{2x - 3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$64. \begin{cases} \sqrt{8y+5x+1} - 2\sqrt{2y-x+1} = 9x-3, \\ (2x^2-2y+9)\sqrt{x^2-y+1} = (2y+9)\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$65. \begin{cases} (51y^2-17x+6)\sqrt{3y^2-x} = (51x-17y+6)\sqrt{3x-y}, \\ \sqrt{x+2} + \frac{3y^2+y}{2} = \sqrt{2x-3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$66. \begin{cases} (2y+3)\sqrt{y} - (4x+3)\sqrt{2x} = 0, \\ x^2-x-y-4 = (x^2-2y-2)\sqrt{\frac{y}{2}-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$67. \begin{cases} (3x^2+3xy+5)\sqrt{x^2+xy} = (3xy+3y+8)\sqrt{xy+y+1}, \\ \sqrt{x+2} + y-1 = \sqrt{3x-2} + x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$68. \begin{cases} (x^2-y+6)\sqrt{x^2-y} - (y^2-y+6)\sqrt{y^2-y} = 3(x^2-y^2), \\ (x+1)\sqrt{2y^2-x^2-2x+3} = x^2+1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$69. \begin{cases} (x^2+8)\sqrt{x^2+1} = 4(x^2-x-y+1) + (x+y+7)\sqrt{x+y}, \\ (3x+1)\sqrt{2x+y+1} = 3x^2+3x+2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$70. \begin{cases} x^2 + \sqrt{y+7} = 7, \\ (4x^2+13)\sqrt{x^2+3} = 3x(x-y) + (4xy+13)\sqrt{xy+3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$71. \begin{cases} \sqrt{y^2-x-2} - 2\sqrt{y-2} + 2 = \sqrt{x+1}, \\ (xy+x+13)\sqrt{xy+x} + 3(x-y)(x-1) = (x^2+y+13)\sqrt{x^2+y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$72. \begin{cases} (12x-7)\sqrt{3x-2} + y(4y^2+1) = 0, \\ x^2+y^2-2x+1 = (x+2)\sqrt{x^2-y^2+x} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$73. \begin{cases} (3x^2+6y+5)\sqrt{x^2+2y} = 5(x-2y)(x-1) + (3x+6xy+5)\sqrt{x^2+2xy}, \\ (4y^2+3)\sqrt{x^2-x+1} = x^3+12y^2-4x+1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$74. \begin{cases} y^4(\sqrt{4x^2-2x} + \sqrt{2x-1}) = y^2 + \sqrt{1+y^4}, \\ y^2(x^2-2x) = 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$75. \begin{cases} x^2 y(1 + \sqrt{y^2 + 1}) = 2x + 2\sqrt{x^2 + 4}, \\ x\sqrt{4 - y^2} + x|y| = 2\sqrt{5(4 - y^2)}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$76. \begin{cases} x + 2xy + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{3}{\sqrt{2y}}, \\ x^2 y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$77. \begin{cases} y(x-1)^2 \cdot \frac{2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}}{x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 1, \\ (x-1)\sqrt{y} = 3x - 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$78. \begin{cases} 3xy(1 + \sqrt{9y^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}, \\ 8 = 9y^2(15y\sqrt{x} + 6\sqrt{x^3 + 3x - x^2}). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$79. \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 8y^2 + \frac{1}{y} - \frac{4}{x} = 3x - \sqrt{x-1} - 12y + 2\sqrt{y - \frac{1}{4}}, \\ x^2 + 16y^2 + 36 = 7\sqrt{4x^2 y + 27}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$80. \begin{cases} y^2 + 6 = 2(x + y), \\ 2(x\sqrt{x-2} + 2) - 7y = 2y^3 + 3\sqrt{x-2} - 6y^2 + 1. \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x = (y+2)\sqrt{y+1} - 2, \\ x^2 + xy - 16x - 2y^2 + 22y - 36 = 0. \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} \frac{18}{x^2 + 1} + 9\sqrt{8(y + \sqrt{3-2y})} - 7 = 17 + 4(y + \sqrt{3-2y}), \\ 2x^3 - 4x^2 + 3x = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$83. \begin{cases} \sqrt[3]{2x-y-1} - \sqrt[3]{2y} = y - 2x + 1, \\ x^2 - 3x = y + 1 + \sqrt{6x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$84. \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} + y)(\sqrt{y^2 + 1} + x) = 1, \\ \sqrt{3x^3 + 2y^2 + 2} + \sqrt{3y^3 + x^2 + 2x - 1} = 2(y^2 + x + 1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Giải các hệ phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \begin{cases} xy + x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1} = 1, \\ (1 - y)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 1 + x^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$2. \begin{cases} (x + y)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x - 2)\sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 1} = 0, \\ \sqrt{5x^2 + y + 10x - 1} = \sqrt{1 - y} + \sqrt{x^2 - y + 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$3. \begin{cases} \frac{2x + 1}{2y} = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{y^2 + 3}}, \\ \sqrt{x^2 + y - x - 7} + 3\sqrt{x - 1} = \sqrt{3x^2 - 3y + 22}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{\frac{2y}{x}}(2y + 3x) = x\sqrt{x}(x + 3), \\ 20y + 3x + 1 = (6x + 1)\sqrt{3 + 2y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$5. \begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}}, \\ (\sqrt{x + 1} - 1)(2\sqrt{y - 1} + 3\sqrt[3]{y + 6}) = \sqrt{x + 1} + 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$6. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2, \\ 54x^2y + 23x - 1 = \sqrt[3]{52y + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$7. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ x^2 - 3y = (3 + y)\sqrt{-y^2 + x + 4}, \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$8. \begin{cases} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ y + 3 + \sqrt[3]{2x - y + 3} = x^3 + 3x^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$9. \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{y^2 + 9} + y) = 3, \\ 26 + x^2 = 5x + y + (x + 1)\sqrt{x^2 - 2y - 6}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$10. \begin{cases} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1)(\sqrt{y^4 + 1} + y^2) = 1, \\ (y^2 + 1)^2 + \sqrt[3]{x^2(x^2 - 1)} + 7y^2 = 3x - 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$11. \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}, \\ 9x^2 + \frac{12(x-1)}{\sqrt{3-2y}} = 2 + \sqrt{3x + \frac{8}{x} + 8\sqrt{3-2y}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$12. \begin{cases} x + \frac{x^3}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}, \\ 8(x+1)(y+1) + 11x = 3(1+2x)\sqrt{3x-2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$13. \begin{cases} \frac{x}{y} + 3x\sqrt{2x-2y} = 4x+1, \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4 + x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$14. \begin{cases} x^3 + 3x^2 = 3\sqrt[3]{5-y} + y + 1, \\ (3x + \sqrt{1+9x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$15. \begin{cases} x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 6x - 12y = \sqrt{2y-1} - \sqrt{x-1}, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{6x+2y+1} = \sqrt{(x+2)^3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$16. \begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 - 8}{x} + \frac{6y+20}{\sqrt{y+2}} = y+2, \\ \sqrt{4x-1} + \sqrt{4y+7} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$17. \begin{cases} y + \frac{12x^2 + 76}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 + 10\sqrt{y} + 12 + \frac{64}{\sqrt{y+1}}, \\ 4\sqrt{y} = 3x^2 + 12x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$18. \begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 2xy + y^2 + 2y = \sqrt{2x+2} + 3x^2 + 6x + 3, \\ 9\sqrt{4y-3} - 9\sqrt{3x-2} = 2x - y + 4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$19. \begin{cases} x - 2y = 9 \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} + 18 \cdot \frac{y+1}{\sqrt{2y-1}}, \\ 3x = \sqrt{2(x+y+5)}(\sqrt{4x-2y+1}-1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$20. \begin{cases} \sqrt{2x+y-1} + x + 2 = \sqrt{x+1} + x^2 + y^2 + 2y, \\ x - y - 1 = 5 \cdot \frac{3x+3y+31}{\sqrt{x+y+2}} + 10 \cdot \frac{3y+17}{\sqrt{2y+3}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$21. \begin{cases} x^2 - y^2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{y^2 + x}} = x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\ 3(2 + \sqrt{x-2}) = 2\sqrt{y^2 + x-1} + \sqrt{6+x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$22. \begin{cases} \frac{5x-1}{y+1} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = 2x\sqrt{2y-1}, \\ \sqrt{x+1} + \frac{2xy+1}{3x} = 4x^2 + \sqrt{1+2xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$23. \begin{cases} 2x^2 + x\sqrt{5y-1} + 9 = 7x + 5(x-2)\sqrt{x+1}, \\ 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 5x^3 y \sqrt{5y-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$24. \begin{cases} (x^2 + x + 2)\sqrt{x+2} = x^3(y+1)\sqrt{y}, \\ 2|x|\sqrt{y+1} = \frac{x^2 + 5(x^2 y - 2) + 2}{x+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$25. \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x^2 + y) - 2(3x - 2), \\ 2x^2 \left[y + \sqrt[3]{5x - (y+1)^3} \right] = 8x^2 - 17y - 9. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$26. \begin{cases} 2(2x^3 - y^3) + 5(2x - y) = 6xy(x - y), \\ 7x\sqrt{3x - y + 2} = 6y + \sqrt{22 - 3x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$27. \begin{cases} x^4 + 4x - 5 = y^3 + 3y^2 + 7y, \\ (x^3 + 2y)^3 + 2x^2(y+1) = 3(1-y). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$28. \begin{cases} x^3 + 5x + (x^3 - 2y + 6)\sqrt{x^3 - 2y + 1} = 0, \\ 2(7y + 1) + 3(5x^2 + 3x + 1) = (x^2 + 2y + 11x + 11)\sqrt{x(3x + 4)}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$29. \begin{cases} (8x+1)\sqrt{2x-1} + (11-12y)\sqrt{3y-4} = 0, \\ 3\sqrt{x+3y-6} - 2\sqrt{5x-4} = \frac{2}{3y-x-5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$30. \begin{cases} x^2 - y^2 + 2(x-2y) = 3 + 2(\sqrt{y+3} - \sqrt{x+2}), \\ \sqrt{x+1} + 6\sqrt{y-1} = 17 - 7x + 6y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$31. \begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24, \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$32. \begin{cases} x + y = 2 + 3\sqrt{x^2 - x - 4}, \\ 3y^2(y-3) + 11(y-4) = 2\sqrt[3]{13-x^3} - 3x^3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$33. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3, \\ x\sqrt{3x - 2xy + 1} = 4xy + 3x + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$34. \begin{cases} (5-2x)\sqrt{x+2y} = (6-x-2y)\sqrt{x-1}, \\ (x^3 - 2y - 3)\left[x + \sqrt{8x(3-x) + 4y^2 + 5}\right] = 21. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$35. \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5}, \\ x^2 + y^2 + x + y = 80. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$36. \begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y, \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$37. \begin{cases} 4(2x\sqrt{2x-1} - y^3 - 3y^2) = 15y + 7 + \sqrt{2x-1}, \\ \sqrt{\frac{y(y+2)}{2}} + \sqrt{6-x} = 2x^2 + 2y^2 - 15x + 4y + 12. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$38. \begin{cases} 32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$39. \begin{cases} 12x^3 - 3(\sqrt[3]{y+1} - 1) = y + 4x(x^2 - 3x - 3), \\ y^3 - 8\sqrt[3]{2x+1} = 2x - (3y+8)(y+1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$40. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ \sqrt{x-y+2}\sqrt[3]{4-y} = x^2 - y - 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$41. \begin{cases} 7x - \frac{13y}{x} = 2x\sqrt[3]{x(4+2y-x^2)} + \frac{5}{2y-x+2}, \\ 2\sqrt{x-y+1} - 6(x-y)^2 + 3 = 2\sqrt{2(x-y)} - 3(x-y). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$42. \begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1} - y - 4y^3 = 0, \\ 4x^2 - 8x + 2y^3 + y^2 - 2y + 3 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$43. \begin{cases} (2x+1)\sqrt{x-1} = (2y+3)\sqrt{2y-1}, \\ \frac{16}{x^3+8} + 2y = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$44. \begin{cases} y^3 + y + 4 = 3x + (x+2)\sqrt{x-2}, \\ (x+y-5)\sqrt{x-y} + 2y - 4 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$45. \begin{cases} 8x^3 + \sqrt{y-2} = y\sqrt{y-2} - 2x, \\ (\sqrt{y-2} - 1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$46. \begin{cases} (x-4)\sqrt{3-x} + y^3 + y = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 3x - 12 + \sqrt{5x+6} + \sqrt{7x+11} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$47. \begin{cases} 3y\sqrt{2+x} + 8\sqrt{2+x} = 10y - 3xy + 12, \\ 5y^3\sqrt{2-x} - 8 = 6y^2 + xy^3\sqrt{2-x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$48. \begin{cases} x^2y(1+\sqrt{4y^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{1}{2}, \\ x^3(4y^2+1) + 2(x^2+1)\sqrt{x} = 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$49. \begin{cases} x^4y + y^5 = x^{10} + x^6, \\ 4\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x} - 3x = 1 + \sqrt{1-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$50. \begin{cases} 2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x+9)\sqrt{x+4}, \\ \sqrt{3x+1} + 3x^2 - 14x - 8 = \sqrt{6-4y-y^2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$51. \begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+7} + x + y + 2 = 0, \\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$52. \begin{cases} 2x + 4x\sqrt{1+4x^2} - \sqrt{y} = 2\sqrt{y+y^2}, \\ -3x^2 + y^2 + 1 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$53. \begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y, \\ y+1 = 2x^2 + 2xy\sqrt{1+x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$54. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 4})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ 27x^6 = x^3 - 8y + 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$55. \begin{cases} 2x^2y - x = \sqrt{x^2 + 1} - 2x^2y\sqrt{4y^2 + 1}, \\ 4\sqrt{1 + 2x^2y} + 3x + 2 = 2\sqrt{1 - 2x^2y} + 4\sqrt{1 - x^2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$56. \begin{cases} x^2 + 2x + y - 8 = 6\sqrt{y + 4x + 2}, \\ (3x + \sqrt{1 + 9x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$57. \begin{cases} x + y - 4 = 2\sqrt{x^2 - 2x - 1}, \\ 4y^3 - 24y^2 + 49y - 90 = \sqrt[3]{14 - x^3} - 4x^3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$58. \begin{cases} x^3y^3 - 6x^2y^3 + 15xy^3 - 14y^3 + 3y^2 + 1 = 0, \\ 3y(1 - \sqrt{x}) + \sqrt{1 - 3y^2} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$59. \begin{cases} 12x^3 - 3(\sqrt[3]{y + 1} - 1) = y + 4x(x^2 - 3x + 3), \\ y^3 - 8\sqrt[3]{2x + 1} = 2x - (3y + 8)(y + 1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$60. \begin{cases} x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = (y - \sqrt{x})^3 + 3y, \\ y^4 + y^2 + 4x - 2014 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$61. \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1 - x} = 3\sqrt{1 - x}, \\ \sqrt{9 - 4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$62. \begin{cases} (y - 1)^3 + \sqrt{2y - 3} = 8x^3 + \sqrt{4x - 1}, \\ \sqrt[3]{y - 2x} + \sqrt{(y - 1)^2 - x + 1} = 2y - x - 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$63. \begin{cases} (x + y)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x - 2)\sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 1} = 0, \\ x - y(x^2 - y^2) = 2(1 - x^2 + y^2). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$64. \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2 - y)\sqrt{3 - 2y}, \\ \frac{18}{x^2 + 1} + 9\sqrt{8y - 17 + 8\sqrt{3 - 2y}} = 17 + 4y + 4\sqrt{3 - 2y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$65. \begin{cases} 4x^3(2y^2+1) + (x^2+2)\sqrt{x} = 9, \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$66. \begin{cases} \sqrt{x+10} + \sqrt{y-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y+10}, \\ (2x^2+1)^2 + 4x^2 + 2 = (y+2x)^2 + 2y + 4x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$67. \begin{cases} \sqrt{2x+3} - 2y = y(y+1) - 3\sqrt[4]{2x+3}, \\ y^4 - 2014x^2 - 2013 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$68. \begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12}, \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$69. \begin{cases} (4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1}) + 3y(2+\sqrt{9y^2+3}) = 0, \\ 4x^3 - 3y + 5 + 3\sqrt{1-3y} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$70. \begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2}, \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$71. \begin{cases} 2y^2 - 9y - \frac{4}{x} = -2, \\ 4\sqrt{x+1} + xy\sqrt{y^2+4} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$72. \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ 4\sqrt{1+x} - xy\sqrt{y^2+4} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$73. \begin{cases} \frac{25}{9} + \sqrt{9x^2-4} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{18x}{y^2-2y+2} + 25y \right), \\ 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$74. \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{3y-2} = 2, \\ x(x^2+3x+2) = 3y\sqrt{3y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$75. \begin{cases} \sqrt{x^2+7} + \sqrt{-2-x} + \sqrt{-1-10y} = 8, \\ x\sqrt{y^2-4y+5} + \sqrt{x^2+1} = y\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2-4y+5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Giải các hệ phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \begin{cases} (x+1)(y+1)+1=(x^2+x+1)(y^2+y+1), \\ x^3+3x+(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1}=0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$2. \begin{cases} 2x^3-2x\sqrt{1+x}=3\sqrt{1+x}-y, \\ \sqrt{5x^2+2y^2+12x+7}-\sqrt{x^2-y^2-19}=5y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$3. \begin{cases} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1, \\ 3x^2+y+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{4-5y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)}-\sqrt{1+x^2}=1-xy, \\ (2x-7xy)(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy})=5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$5. \begin{cases} x^3+x-2=y^3+3y^2+4y, \\ x^2-3x+y+3=\sqrt{3x-2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$6. \begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}+y\sqrt{y^2+3}+x+y+2=0, \\ \sqrt{x^2+y+1}=x-y+1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$7. \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{y}}+x+y=1, \\ \sqrt{1-x}+\sqrt{4+y}=2\sqrt{2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$8. \begin{cases} x^2y-2x^2-2y^2+5y-2=0, \\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}=2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$9. \begin{cases} (x+\sqrt{x^2+2x+2}+1)(y+\sqrt{y^2+1})=1, \\ \sqrt{y-xy+9}+2014=\sqrt{y^2+2y+4}+2015x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$10. \begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10, \\ \sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}=x^3-3x^2-10y+6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$11. \begin{cases} 2y^3+7y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}+3(2y^2+1), \\ \sqrt{2y^2-4y+3}=5-y+\sqrt{x+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$12. \begin{cases} \sqrt{x^3+1} - \sqrt{y^3+1} = y-x, \\ 4x^3y - 24x^2y + 47xy - 39y + 18. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$13. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+4})(y + \sqrt{y^2+4}) = 4, \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$14. \begin{cases} (x+y)^3 + 8xy = 2(x+y)(8+xy), \\ \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{x^2-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$15. \begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y}, \\ \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$16. \begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x+3} = 5 + \sqrt{y+3}, \\ \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y+3} = 5 + \sqrt{x-3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$17. \begin{cases} x + \sqrt{x+2} = y + \sqrt{y+2}, \\ x^2y - 4y + 2x + 1 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$18. \begin{cases} x^3 + 12y + x + 2 = 8y^3 + 8y, \\ \sqrt{x^2 + 8y^3} + 2y = 5x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$19. \begin{cases} x - \sqrt[3]{y^3+y} = y - \sqrt[3]{x^3+x}, \\ x^5 + y^5 = 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$20. \begin{cases} x^5 - \sqrt[3]{y} = y^5 - \sqrt[3]{x}, \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{3y-2} = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$21. \begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = (y-x)(xy+2), \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$22. \begin{cases} x^3 + x = 2(y+1)\sqrt{2y+1}, \\ x - 2\sqrt{2y+1} + 1 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$23. \begin{cases} x^3 + 2x = 3(y+1)\sqrt{3y+1}, \\ \sqrt{2x-3} + \sqrt{3y-2} = 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$24. \begin{cases} 3y^3 + 2y + 3x\sqrt{2-x} = 8\sqrt{2-x}, \\ \sqrt{5-4x} + \sqrt{3y+1} = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$25. \begin{cases} 3y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x}, \\ y + \sqrt{2y^2+1} = 4 + \sqrt{x+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$26. \begin{cases} x^3 - y^3 = (3y+1)(y+1) + 1 - x, \\ \sqrt{x+y+1} + 3\sqrt{3x+y+17} = 11 - y^3 - xy. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$27. \begin{cases} \sqrt{3x^2(3y^2+1)} - \sqrt{3x^2+1} + 3xy = 1, \\ (2x-3xy)\left(\frac{\sqrt{x}}{xy} - \sqrt{3x+1}\right) = 3xy. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$28. \begin{cases} \sqrt{x^2(4y^2+3)} - \sqrt{3x^2+1} + 2xy = 1, \\ 2xy\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{2x+3}{2(x-1)^2+6xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$29. \begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1 - xy, \\ \sqrt{x^2+24} - \sqrt{x^2+11} = x^2y^2(2x-9). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$30. \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = x^3(30 - 56y + 36y^2 - 8y^3), \\ (3x-1)\sqrt{2x^2y+2xy-2x^2-3} = 4x^3 - 9x^2y + \frac{23}{2}x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$31. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1, \\ 18x^3 + 16y^2 + 40xy + 34x^2 = 9\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{1-3x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$32. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1, \\ 3y^2 + 4\sqrt{1+3x} + 1 = 12x - 12\sqrt{1+x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$33. \begin{cases} \sqrt{x+y+1} + (x+y)^2 + 2y = \sqrt{2x+2} + 3(x+1)^2 + x^2, \\ \sqrt{2xy+2x-3} + \sqrt{5x^2+6x-3} = x+2y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$34. \begin{cases} 1 = (2x + \sqrt{1+4x^2})(y + \sqrt{1+y^2}), \\ x\sqrt{x-y-xy+1} = 2xy + x - y + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$35. \begin{cases} xy^2(1+\sqrt{x^2+1})=y+\sqrt{y^2+1}, \\ \frac{4y-1}{\sqrt{1+3y}+\sqrt{2-y}}+4\sqrt{\frac{1}{xy}+3}=\frac{1}{xy}+8. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$36. \begin{cases} 3x-2x^3-1=2x^3(y^2-1)\sqrt{1+2y^2}, \\ \sqrt[3]{x-4}+3=\sqrt{-4-x}\sqrt{1+2y^2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$37. \begin{cases} 7x^3+y^3+3xy(x-y)=12x^2-6x+1, \\ 2\sqrt{x^2+3}-\sqrt{9-y^2}=1-y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$38. \begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10, \\ x^3-3x^2-10y+6=\sqrt{2x+y+5}-\sqrt{3-x-y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$39. \begin{cases} (\sqrt{2016+x^2}+x)(\sqrt{504+y^2}+y)=1008, \\ x\sqrt{6x-4xy+1}=8xy+6x+1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ 2; Mùa thi 2016; Trường THPT Hồng Quang; Thành phố Hải Dương; Tỉnh Hải Dương).

$$40. \begin{cases} x^3-y^3-6y^2+3x-15y=14, \\ \sqrt[3]{4x+2y+9}=xy^2+4x^2-10x+y-3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$41. \begin{cases} x^2+\frac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)}, \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Vĩnh Phúc).

$$42. \begin{cases} 4y^3-(4x+29)\sqrt{x+7}+y=0, \\ y^3+3x^2-y^2\sqrt{x+7}+6x-\frac{y}{\sqrt{3}}=0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Kim Liên; Quận Đống Đa; Thành phố Hà Nội).

$$43. \begin{cases} x^3+y^3+3(x+y)=6y(y-2)+14, \\ 27x^3+27x^2+20x+4=4\sqrt[3]{y+2x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Thống Nhất; Huyện Yên Định; Tỉnh Thanh Hóa).

$$44. \begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0, \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ 3; Mùa thi 2016; Trường THPT Đông Du; Thành phố Buon Ma Thuật; Tỉnh Đắk Lắk).

$$45. \begin{cases} xy^2(\sqrt{x^2+1}+1) = 3\sqrt{y^2+9} + 3y, \\ (xy-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{2-2x+xy} = \sqrt{34-34x+2xy+10x^2-x^3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu VII; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Tháng 4; Mùa thi 2016; Trường THPT Chuyên Nguyễn Chí Thanh; Thị xã Gia Nghĩa; Tỉnh Đắk Nông).

$$46. \begin{cases} (2x + \sqrt{4x^2+1})(2y + \sqrt{4y^2+1}) = 1, \\ \sqrt[3]{x^4-x^2} + 4 = 4y^2 + 3y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Trần Phú; Thành phố Vĩnh Yên; Tỉnh Vĩnh Phúc).

$$47. \begin{cases} x - 2\sqrt{x^2-2x+4} = y + 1 - 2\sqrt{y^2+3}, \\ \sqrt{4x^2+x+6} - 5\sqrt{y+2} = \sqrt{xy-2y-x+2} - 1 - 2y - |x-2|. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Thuận Thành 1; Huyện Thuận Thành; Tỉnh Bắc Ninh).

$$48. \begin{cases} y^6 - 3y^4 + 4y^2 = x^3 + 6x^2 + 13x + 12, \\ \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{y^2+3} = 4. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Trần Bình Trọng; Huyện Cam Lâm; Tỉnh Khánh Hòa).

$$49. \begin{cases} x^3y^3 - 6x^2y^3 + 15xy^3 - 14y^3 + 3y^2 + 1 = 0, \\ 3y(1-\sqrt{x}) + \sqrt{1-3y^2} = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$50. \begin{cases} (4x^2+1)x + (y-1)\sqrt{1-2y} = 0, \\ 4x^2 + y^2 + 4y + 2\sqrt{3-4x} = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 5; Đề thi khảo sát trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Mùa thi 2014; Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc; Thành phố Vĩnh Yên; Tỉnh Vĩnh Phúc).

$$51. \begin{cases} 2(y^3 - x^3) = 6x^2 + 7x - y + 3, \\ 4\sqrt{3-y} + 2\sqrt{2(1+y)} = \sqrt{9x^2+16}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 5; Đề thi khảo sát chất lượng học kỳ I; Môn Toán; Năm học 2015 – 2016; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thái Bình).

$$52. \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0, \\ x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 5y - 2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát chất lượng học kỳ II; Môn Toán; Năm học 2015 – 2016; Trường THPT Nguyễn Đức Cảnh; Thành phố Thái Bình; Tỉnh Thái Bình).

$$53. \begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y, \\ x^3 + 3x - 2y + 40 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu II.2; Đề thi khảo sát trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ 3; Mùa thi 2014; Trường THPT Gia Lộc; Huyện Gia Lộc; Tỉnh Hải Dương).

$$54. \begin{cases} (18x+9)\sqrt{x^2+x+1} = y\sqrt{4y^2+27}, \\ (2y+3)^2 = 24\sqrt{x}(2y-9). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$55. \begin{cases} (x+2)\sqrt{x-1} = y^3 + 3y, \\ x^2 + y^2 = (x+2)\sqrt{y^4+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Hàn Thuyên; Thành phố Bắc Ninh; Tỉnh Bắc Ninh).

$$56. \begin{cases} \sqrt{3-x} + \sqrt{y+1} = x^3 + 2y^2 - 9x - 5, \\ x^3 - y^3 + 12x - 3y = 3y^2 - 6x^2 - 7. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ hai; Mùa thi 2016; Trường THPT Anh Sơn II; Huyện Anh Sơn; Tỉnh Nghệ An).

$$57. \begin{cases} 8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1}) = y(y^2-2y+4), \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+3x)} = 5y + 12x - 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Bảo Yên số 1; Huyện Bảo Yên; Tỉnh Lào Cai).

$$58. \begin{cases} 2y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = (2x+1)\sqrt{2x-1}, \\ 2y^2 + 2y - 3 = \sqrt{1-y} - \sqrt{2x-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Trần Văn Dư; Huyện Phú Ninh; Tỉnh Quảng Nam).

$$59. \begin{cases} 5x^3 - 26x^2 + 44x - 20 + 5(1-y)\sqrt{y-1} - 4y = 0, \\ \sqrt{x^2+x-6} + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{6x+3y+4} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi khảo sát trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Thừa Lưu; Huyện Phú Lộc; Tỉnh Thừa Thiên Huế).

$$60. \begin{cases} \sqrt{x^3+2x^2} + 3x(x-y+1) = (x+2)\sqrt{y-1} + 6(y-1), \\ 2x^4 - x^3 + 8x - (x+2)^2(y + 2\sqrt{12y-20} - 3) + 8 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 3; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lớp 12B1; Mùa thi 2014; Trường THPT Kim Sơn A; Huyện Kim Sơn; Tỉnh Ninh Bình).

$$61. \begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0, \\ (4y+3)\sqrt{x^3+1} - 2x^3 - 2y - 3 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 3; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2014; Trường THPT Chuyên Phan Bội Châu; Thành phố Vinh; Tỉnh Nghệ An).

$$62. \begin{cases} x^3 - y^3 - 6y^2 + 3x - 15y = 14, \\ \sqrt[3]{4x+2y+9} = xy^2 + 4x^2 - 10x + y - 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu II.2; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2014; Trường THPT Yên Phong số 1; Huyện Yên Phong; Tỉnh Bắc Ninh).

$$63. \begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{3-y} = y^2 - x^2 + 4x - 6y + 5, \\ \sqrt{2x^2 - x + 3y - 5} - \sqrt{2x+1} = 3 - y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 2.2; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ 2; Mùa thi 2014; Trường THPT Cẩm Thủy số 1; Huyện Cẩm Thủy; Tỉnh Thanh Hóa).

$$64. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1, \\ 2x^2 + y^2 = 3xy + 24. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 3; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2014; Trường THPT Trần Quốc Tuấn; Thành phố Quảng Ngãi; Tỉnh Quảng Ngãi).

$$65. \begin{cases} (4x+2)(1+\sqrt{x^2+x+1}) + 3y(2+\sqrt{9y^2+3}) = 0, \\ 4x^3 - 3y + 5 = -3\sqrt{1-3y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 4; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Lục Ngạn số 1; Huyện Lục Ngạn; Tỉnh Bắc Giang).

$$66. \begin{cases} \sqrt{x+2}(x+5) - 3x - 8 = y^3 + 3y^2 + 3y, \\ 8x^3 - 12x^2 + 7(y+2)^2 - 14 = (x+1)\sqrt{3x^2-1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 3; Đề thi thử sức trước kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng; Môn Toán; Mùa thi 2014; Trường THPT Lê Văn Thịnh; Huyện Gia Bình; Tỉnh Bắc Ninh).

$$67. \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} - y\sqrt{y-1} = 0, \\ x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x(y-1)^3 - 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I})$$

$$68. \begin{cases} -x^3 + 6x + 12\sqrt{3-y} = 2y(x + 2\sqrt{3-y}), \\ \sqrt{x+5} - 2\sqrt[3]{x^2+4x+4y-11} = 2x - 4y + 11. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2015; Trường THPT Trần Nhân Tông; Huyện Đông Triều; Tỉnh Quảng Ninh).

$$69. \begin{cases} \sqrt{1-x^3} - \sqrt{y\sqrt{y+1}} - \sqrt{y} = x, \\ (4x+3)\left(\sqrt{4-\sqrt{y}} + \sqrt[3]{3x+8} - 1\right) = 9. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 4; Đề thi kiểm tra chất lượng học kỳ II; Môn Toán; Đề thi chính thức; Năm học 2014 – 2015; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hà Tĩnh).

$$70. \begin{cases} x^3 + 18x - (y+19)\sqrt{y+1} = 0, \\ x^2 + 2\sqrt{x^2 + 7y} - xy = 12. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$71. \begin{cases} 2x^3y(4y^2 + \sqrt{4y^2 + 1}) = 1 + x\sqrt{x^2 + 1}, \\ \sqrt{5y-4} - \sqrt{9 - \frac{1}{x}} = (1-x)^3 + 6y(2x+1). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$72. \begin{cases} (18x+9)\sqrt{x^2+x+1} = y\sqrt{4y^2+27}, \\ (2y+3)^2 = 24\sqrt{x}(2y-9). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$73. \begin{cases} 8y^3 + 6xy(2x+y) = 6x^3 + 13, \\ x^3 + 5x + (x^3 - 2y + 6)\sqrt{x^3 - 2y + 1} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$74. \begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 = -6x + 15y - 10, \\ y\sqrt{x+3} + (y+6)\sqrt{x+10} = y^2 + 4x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$75. \begin{cases} 3xy(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{1 + \sqrt{9y^2 + 1}}, \\ x^2 + \frac{1}{3y^2} = 5\sqrt{x+2} - 5x - 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$76. \begin{cases} (\sqrt{x^2+1} - 4x^2y+1)(\sqrt{4y^2+1}+1) = 8x^2y^3, \\ (x^3 - 6x^2y+1)\sqrt{x^2+2xy+20} + x^4 + 3x = \frac{3}{4y^2} + \frac{1}{y} + 2xy + 20. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$77. \begin{cases} \sqrt[3]{2+2x^2y^2} + 4\sqrt{x} + 2y = 4, \\ x\sqrt{4y^2+1} + 2y\sqrt{x^2+1} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$78. \begin{cases} x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1}, \\ 3\sqrt{1-x^2} + 4\sqrt{1-x} = \frac{1}{2y} + 5\sqrt{\frac{1}{2y}} + 1 + 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$79. \begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 4x - y - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x - y + 3 = 5\sqrt{x^2y + xy + y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$80. \begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1 - xy, \\ x^2 - 11x + 4xy = \sqrt{13x - 2xy} + xy\sqrt{17x + 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$81. \begin{cases} \frac{x(x^2 - 6x + 13)}{y^2 + y + 10} = 1, \\ \sqrt{2x + y + 5} - \sqrt{3 - x - y} = x^3 - 3x^2 - 10y + 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$82. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \\ x^2 + \sqrt{3 - x} = 2y^2 - 4\sqrt{2 - y} + 5. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$83. \begin{cases} x^3 + 4x = y^3 + 3y^2 + 7y + 5, \\ x^3 - 3x + 1 = \sqrt{-3x^2 - 6y - 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$84. \begin{cases} xy^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1) = 3\sqrt{y^2 + 9} + 3y, \\ (x - xy)(x^2 - 2x + 2) + \sqrt{x^2 + 3 - xy} = x\sqrt[3]{3x^2y - 6xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$85. \begin{cases} 11\sqrt{x+3} + 2 - 4y = \sqrt{57y - 4x^2 - 22}, \\ y\sqrt{y^2 - 2y + 2} - x\sqrt{x^2 + 6x + 10} = 3\sqrt{x^2 + 6x + 10} + \sqrt{y^2 - 2y + 2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$86. \begin{cases} (y - 2)\sqrt{x + 2} - x\sqrt{y} = 0, \\ (\sqrt{y} + 1)\sqrt{x + 1} = (y - 3)(1 + \sqrt{x^2 - 3x + y}). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$87. \begin{cases} \sqrt[3]{x + y} + y = x^3, \\ x^4 + 3x + \sqrt{x^2(1 - x) + 4x + y} = xy + 6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$88. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y - 2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x + y} + \sqrt{y - 2}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + y + 1}}, \\ \sqrt{y - 2} + 2\sqrt{x} = 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$89. \begin{cases} x^3 - y^3 - 6x^2 + 3y^2 + 13 = 4y + 8, \\ \sqrt{5x^2 + 14y - 5} - \sqrt{x^2 - y - 19} = 5\sqrt{y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Giải các hệ phương trình sau trên tập số thực

$$1. \begin{cases} xy^2\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = x^2y - x, \\ \sqrt[3]{24x^2y-11} - 16x\sqrt{2x-1} = xy. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$2. \begin{cases} x^3 - 6y^2 + 12 - 7 = \sqrt[3]{-y^3 + 9x^2 - 19y + 11}, \\ \sqrt[4]{(y-2)(4-x)} + \sqrt[4]{y-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3y} = y^3 + 30. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$3. \begin{cases} 8x^3 - y^3 - 3y^2 = 5y - 4x + 3, \\ \sqrt{2x+y+5} + 2x = 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$4. \begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1, \\ y^2 + 7y + 25 = 9x + 2(x-6)\sqrt{5-2y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$5. \begin{cases} 3y^2 + 3x\sqrt{1-x} = 5\sqrt{1-x} - 2y, \\ x^2 - y^2\sqrt{1-x} = \sqrt{2y+5} - \sqrt{1-x}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$6. \begin{cases} \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{y-x}}{\sqrt{y-x}} = \frac{24}{2(y-x)^3 + 11}, \\ 2y(y^2 + 3x^2) = 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$7. \begin{cases} x^3 + y^3 - 3(x^2 + 2y^2 - 2x - 5y) = 18, \\ \sqrt{2x+y-1} + \sqrt{3x+2y-8} = \sqrt{5x-6}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$8. \begin{cases} (x+1)^3 = \sqrt{8y^3 - 12y^2} + \sqrt{2y-3} + 12x^2 + 10x + 3, \\ 2\sqrt{2y-4(x^2+2)} + y - 12x + 6 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$9. \begin{cases} -2x^3 + 3x - 1 = 2x^3(y^2 - 1)\sqrt{1+2y^2}, \\ \sqrt[3]{x-4} + 3 = \sqrt{-4-x}\sqrt{1+2y^2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$10. \begin{cases} 6\sqrt{2-x} + 3y\sqrt{1-y} + 2 + 2y = 3\sqrt{1-y} + 3x\sqrt{2-x}, \\ \sqrt{4y+x+7} - \sqrt{y+1} = \sqrt{6+x-x^2}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$11. \begin{cases} x\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 10 + y^3 + 12y^2 + 7y, \\ 10x^3y^2 + 40x^3y + 103x^3 - 97x^2 - 93x - 24 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$12. \begin{cases} \sqrt{x-1} - \frac{1}{x-1} = \sqrt{y-1} - \frac{1}{y-1}, \\ x^2 + y = 30. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$13. \begin{cases} x^3 - 12x^2 - y^3 + 6y^2 - 16 = 0, \\ 4x^2 - 3x + 3x\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4y-y^2} = 10. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$14. \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012, \\ x^2 + z^2 - 4(y+z) + 8 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$15. \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = y^6 + 3y^4, \\ 2x^2 + 5y^2 - 1 = 7\sqrt{x^2y^2 - 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$16. \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} = 2y\sqrt{2y-1}, \\ 3x^2 + 3x + 2 = (2y+x)(x+6)\sqrt{3x^2 - 2x - 3}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$17. \begin{cases} (y-1)^3 + \sqrt{2y-3} = 8x^3 + \sqrt{4x-1}, \\ \sqrt[3]{y-2x} + \sqrt{(y-1)^2 - x + 1} = 2y - x - 2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$18. \begin{cases} x^4 + 5y^2 - 6 = 0, \\ \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{-x^2-x+4} - x^2 - x + 4}{1 + \sqrt{-x^2-x+4}} - \frac{\sqrt{y^2+y}}{1 + \sqrt{-y^2-y+4}} = \sqrt{-x^2-x+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$19. \begin{cases} 8x^3 + 2xy + 2x = y^3 + y^2 + y, \\ \sqrt{y}(2xy+1) = 6x\sqrt{y^2+4y+1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$20. \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y, \\ 2(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(1 + \sqrt{y+2}) = \sqrt{x(y+3)}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$21. \begin{cases} (x+1+\sqrt{x^2+2x+2})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1, \\ \sqrt{y-xy+9} + 2012 = \sqrt{y^2+2y+4} + 2013x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$22. \begin{cases} \sqrt{2x-9} = (y^2+2013)(11-y) + \sqrt{y}, \\ \sqrt{2y-1}(x+y-1) = (2y-2)\sqrt{x+y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$23. \begin{cases} 8x^3 - y^3 - 12x^2 - 6y^2 + 10x - 14y - 15 = 0, \\ \sqrt{y^2 + 12x - 8} = 2x - 6\sqrt{x} + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$24. \begin{cases} (x^2 + 1)x + (y - 4)\sqrt{3 - y} = 0, \\ 22x^2 + 9y^2 + 18\sqrt{4 - 3x} = 76. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$25. \begin{cases} xy + y\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{y^2 + 1} - 1, \\ 4x^3y^2 + xy^2\sqrt{(1 - 12x^2)^2} - y^2 + 12 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$26. \begin{cases} 8\sqrt{3y + 4} = -x + \frac{85}{2}, \\ 16(x^3 - y) + 6x(3 - 4x) = 16y + 21 + 6\sqrt[3]{y + 1}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$27. \begin{cases} (x + \sqrt{1 + x^2})(1 + \sqrt{1 + y^2}) = 1, \\ x\sqrt{3x - 2xy + 1} = 4xy + 3x + 1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$28. \begin{cases} x^2y(1 + \sqrt{1 + y^2}) = 2(x + \sqrt{x^2 + 4}), \\ y(7\sqrt{x} - \sqrt{4x^2 - 7x + 9}) = 2(4 - 3y). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$29. \begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4, \\ x^2 + y^2 - 6x + y - 10 = \sqrt{x + 5} - \sqrt{4x + y}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$30. \begin{cases} x(x^2 + 1) - y\sqrt{2y - 1} = 0, \\ -2x^2 + xy + 3x - \sqrt{\frac{x}{2}} + 2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$31. \begin{cases} 2x\sqrt{x} + 1 + 2y(3 - \sqrt{2y - 1}) + \sqrt{2y - 1} = 8y^3 - x^3 + 12y^2, \\ 2\sqrt{4y^2 - x^2} + 2 + 5\sqrt[3]{x + 2y + 1} = 16. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$32. \begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{xy} + y - 2\sqrt{y} - \sqrt{x} + 2 = 0, \\ 3x - y + 5\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$33. \begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + 3\sqrt{y} - 7\sqrt{x} = 4, \\ (2\sqrt{y} - 1)^2 - y\sqrt{xy} = (2\sqrt{x} - 1)^2 - x\sqrt{xy}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$34. \begin{cases} y^2 - \frac{13}{2}x^2 + 4x^2(\sqrt{y}+1) + 8(\sqrt{y}+1) + 4x = 15, \\ x^2\sqrt{1+x^2} - 2\sqrt{1+x^2} + 2 = y\sqrt{y} + 3y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$35. \begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0, \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Phùng Khắc Khoan; Huyện Thạch Thất; Thủ đô Hà Nội).

$$36. \begin{cases} (x+5)\sqrt{x+1} - 3(x-y+1) - (y+4)\sqrt{y} = 0, \\ x^2 + 6y + 7 = 2\sqrt{3y+1} + 3\sqrt{x+4y+5}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Yên Phong; Tỉnh Bắc Ninh).

$$37. \begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0, \\ (2x^2 - 2y + 3)(2x - 1) + (8x^2 - 8y + 9)\sqrt{y-1} - x^2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ nhất; Mùa thi 2016; Trường THPT Nguyễn Quán Nho; Huyện Thiệu Hóa; Tỉnh Thanh Hóa).

$$38. \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + x + 1 = 2y + \sqrt{4y^2 - 4y + 2}, \\ 2x^2 - 5 + \sqrt{5x+6} = 8y - \sqrt{14y+4}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

(Câu 9; Đề thi thử sức trước kỳ thi THPT Quốc gia; Môn Toán; Lần thứ hai; Mùa thi 2016; Trường THPT Nam Duyên Hà; Huyện Hưng Hà; Tỉnh Thái Bình).

$$39. \begin{cases} xy(1 + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{4+y} - \sqrt{y}) = 8, \\ (2x-3)\sqrt{3x^3 - 7x + 10} = 5x^2 - 13x + 3x^2y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$40. \begin{cases} 6x^2 - 3x + 2 + x^3(6y-3) = 4x^3(y+1)\sqrt{2y-1}, \\ (x-3)\sqrt{3x^3 - 9x^2 + 3x + 15} = 4y - 11x + 15. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$41. \begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1 - xy, \\ (2x-3)\sqrt{3x^3 - 7x^2y + 10xy} = 5x^2 - 13x + 12. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

$$42. \begin{cases} xy(1 + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{4+y} - \sqrt{y}) = 8, \\ 5\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2\sqrt{(x-1)(3x+5)} = \frac{1}{2}x^2y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Bài toán 117. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + \sqrt{y^2 - 2y + 5} = 3x + \sqrt{x^2 + 4}, \\ y^2 - x^2 - 3y + 3x + 1 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{R}$. Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta thu được

$$y^2 - 2y + 5 + \sqrt{y^2 - 2y + 5} = x^2 + 4 + \sqrt{x^2 + 4}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$. Vậy hàm số liên tục, đồng biến khi $t > 0$.

Ta thu được

$$\begin{aligned} f(\sqrt{y^2 - 2y + 5}) &= f(\sqrt{x^2 + 4}) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 5} = \sqrt{x^2 + 4} \Leftrightarrow (y-1)^2 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-x-1)(y+x-1) = 0 \Leftrightarrow y = x+1; x = 1-y \end{aligned}$$

$$\text{➤ Với } y = x+1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 - x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{3}{2}.$$

$$\text{➤ Với } x = 1-y \Rightarrow y^2 - 3y - (y^2 - 2y + 1) + 3 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow -4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}; x = \frac{1}{4}.$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right), \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right) \right\}$.

Bài toán 118. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1}, \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 4x^2 - 22x + 18 = 4y \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình trên thu được

$$y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 - (4x^2 - 22x + 18) = (2x+1)\sqrt{2x-1} - 4y$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = (2x+1)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + 2(y+1) = (2x-1+2)\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3 + 2(y+1) = (2x-1)\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2x-1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến với t dương.

Ta có $(1) \Leftrightarrow f(y+1) = f(\sqrt{2x-1}) \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-1} - 1$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$2x^2 - 11x + 9 = 2(\sqrt{2x-1} - 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 11 = 2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 22x + 22 = 4\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 2x - 1 + 4\sqrt{2x-1} + 4$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 = (\sqrt{2x-1} + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 = \sqrt{2x-1} & (2) \\ 3-2x = \sqrt{2x-1} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 28x + 49 = 2x - 1 \\ 2x - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 30x + 50 = 0 \\ 2x \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 2. \\ \diamond (3) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 3 \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (5; 2), (1; 0)$.

Bài toán 119. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y - x + 2 = 0, \\ (\sqrt{x^2 + 1} - 3x^2y + 2)(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) = 8x^2y^3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Thay thế $2 = x - x^2y$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x^2 + 1} - 3x^2y + x - x^2y)(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) = 8x^2y^3 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} - 4x^2y + x)(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) = 8x^2y^3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 4x^2y + x = \frac{2x^2y \cdot 4y^2}{\sqrt{4y^2 + 1} + 1} = 2x^2y(\sqrt{4y^2 + 1} - 1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x = 2x^2y(\sqrt{4y^2 + 1} + 1) \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $x = 0$ không là nghiệm của (1) nên $\sqrt{x^2 + 1} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq -x + x = 0, \forall x \neq 0$.

$$\text{Lúc đó kết hợp } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x > 0; x \neq 0 \\ \sqrt{4y^2 + 1} + 1 > 0, \forall y \in \mathbb{I} \end{cases} \Rightarrow y > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2} > 0 \Rightarrow x > 2.$$

Lại biến đổi phương trình (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x^2} = 2y\sqrt{4y^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2y\sqrt{(2y)^2 + 1} + 2y.$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}; t > 0 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{2t^2 + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{I}$, hàm liên tục và đồng biến trên $\mathbb{I}$.

Thu được $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y) \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$ và phương trình thứ nhất trở thành $x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{8}$.

Kết luận hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 120. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2}, \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned} &2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} = 2y^2 + 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} + 4y + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 = y^2 + 2y + 1 + 2(y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 2} + y^2 + 2y + 2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 = (y + 1 + \sqrt{y^2 + 2y + 2})^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta nhận xét $\sqrt{x^2+1}+x > \sqrt{x^2}+x=|x|+x \geq -x+x=0$ nên nếu đặt $y+1=u$ thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}+x)^2 = (\sqrt{u^2+1}+u)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{x^2+1}+x| = |\sqrt{u^2+1}+u| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \sqrt{u^2+1}+u \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-\sqrt{u^2+1}+x-u=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-u)(x+u)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{u^2+1}}+x-u=0 \Leftrightarrow (x-u)\left[\frac{x+u}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{u^2+1}}+1\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=u \\ (\sqrt{x^2+1}+x)+(\sqrt{u^2+1}+u)=0 \end{cases} \Rightarrow x=u \Leftrightarrow x=y+1 \end{aligned}$$

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $3y^2+4y-4=0 \Leftrightarrow y \in \left\{-2; \frac{2}{3}\right\} \Rightarrow (x; y) = (-1; -2), \left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Kết luận bài toán có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 121. Trích lược câu 1, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Bắc Giang; Năm học 2013 – 2014.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2-8x+2(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}=2(y+2)\sqrt{y^2+4y+5}, \\ x^2+2y^2=4x-8y-6. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x; y \in \mathbb{R}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} &2(x^2-2x+1)+2(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}=-x^2+4x+2+2(y+2)\sqrt{y^2+4y+5} \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}=2y^2+8y+8+2(y+2)\sqrt{y^2+4y+5} \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)^2+2(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}=2(y+2)^2+2(y+2)\sqrt{(y+2)^2+1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+2t\sqrt{t^2+1}; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t)=4t+2\sqrt{t^2+1}+\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên toàn trục số thực, dẫn đến

$$(*) \Leftrightarrow f(x-1)=f(y+2) \Leftrightarrow x-1=y+2 \Leftrightarrow x=y+3.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành $y^2+6y+9+2y^2=4y+12-8y-6 \Leftrightarrow 3y^2+10y+3=0 \Leftrightarrow y \in \left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$.

Từ đây dẫn đến hệ có nghiệm $(x; y) = (0; -3), \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét.

5 bài toán từ 117 đến 121 không nằm ngoài phạm vi lớp hệ phương trình chứa căn giải được bằng phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu – khảo sát hàm số. Tuy nhiên đây là chuyên mục thứ 2, mở màn với bài toán số 100, không đơn thuần là khai thác một phương trình duy nhất của hệ như trước, yêu cầu kết hợp tổng hòa các phép thế, sử dụng biến đổi tương đương, liên hợp từ cả hai phương trình để thiết lập tương đồng hàm số. Lấy điển hình bài toán số 121, tầm vóc một bài toán chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT môn Toán, tỉnh Bắc Giang, một địa phương trung du miền Bắc có bề dày truyền thống học tập và anh dũng.

Quan sát phương trình thứ nhất của hệ phương trình 121 chúng ta thấy có một chút tương đồng hàm số, và phương trình thứ hai sẽ dùng một phép biến đổi nào đó để xử lý, tất nhiên phép thế là phương cách trước nhất.

$$3x^2 - 8x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 2(y+2)\sqrt{y^2 + 4y + 5}$$

$$\Leftrightarrow m(x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} = m(y+2)^2 + 2(y+2)\sqrt{y^2 + 4y + 5}$$

Rõ ràng cần chú ý đồng nhất sao cho $m(x-1)^2 - m(y+2)^2 \equiv 3x^2 - 8x$.

Lại có $x^2 + 2y^2 = 4x - 8y - 6 \Leftrightarrow 2y^2 + 8y + 8 = -x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (y+2)^2 = \frac{-x^2 + 4x + 2}{2}$.

Khi đó

$$m(x-1)^2 - m(y+2)^2 = m[(x^2 - 2x + 1) - (y+2)^2]$$

$$= m\left[(x^2 - 2x + 1) - \frac{-x^2 + 4x + 2}{2}\right] = \frac{m}{2}(3x^2 - 8x)$$

Thực hiện đồng nhất $\frac{m}{2}(3x^2 - 8x) \equiv 3x^2 - 8x \Leftrightarrow m = 2$, dẫn đến lời giải trên.

Bài toán 122. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 5\sqrt{x} + 5 = 0, \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2 + 2y + 3} - \frac{1}{5}y^2 + y. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y^2 = 5\sqrt{x} - 5 \\ \sqrt{x+2} = \sqrt{y^2 + 2y + 3} - \frac{1}{5}(5\sqrt{x} - 5) + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x} - 5 \geq 0 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{y^2 + 2y + 3} + y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2 + 2} + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \\ \sqrt{(\sqrt{x})^2 + 2} + \sqrt{x} = \sqrt{(y+1)^2 + 2} + y + 1 \quad (*) \end{cases}$$

Chú ý rằng $\begin{cases} |A| = A, A \geq 0 \\ |A| = -A, A < 0 \end{cases} \Rightarrow |A| + A \geq 0, \forall A \in \mathbb{I}$ nên ta xét hàm số

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} + 1 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 2}}{\sqrt{t^2 + 2}} > \frac{t + \sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2 + 2}} = \frac{t + |t|}{\sqrt{t^2 + 2}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Hàm số liên tục và đồng biến trên toàn trục số nên thu được $(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = f(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = y+1$.

Phương trình thứ nhất lại trở thành $y^2 = 5(y+1) - 5 \Leftrightarrow y(y-5) = 0 \Leftrightarrow y \in \{0; 5\} \Rightarrow (x; y) = (1; 0), (36; 5)$.

Kết luận hệ đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 123. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2}, \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Do $\sqrt{x^2 + 2} \neq x, \forall x \in \mathbb{I}$ nên phương trình thứ nhất của hệ biến đổi về

$$2 = y\sqrt{x^2 + 2} - xy \Leftrightarrow 2 = y(\sqrt{x^2 + 2} - x) \Leftrightarrow 2 = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} + x = y.$$

Phương trình thứ hai của hệ khi đó trở thành

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x \\
& \Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{x^2+2}+2+2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=2x^2-4x \\
& \Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0 \\
& \Leftrightarrow x+x\sqrt{x^2+2}+x+1+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0 \\
& \Leftrightarrow x+1+(x+1)\sqrt{(x+1)^2+2}=-x+(-x)\sqrt{(-x)^2+2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+2}; t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=1+\frac{2t^2+2}{\sqrt{t^2+2}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Như vậy hàm số liên tục và đồng biến trên toàn trục số thực. Dẫn đến

$$(*) \Leftrightarrow f(-x)=f(x+1) \Leftrightarrow -x=x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 124. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2+3y^2+5=10xy, \\ 1+\frac{3}{2(x-y)}=\frac{x^2+2xy+y^2-4}{\sqrt{2(x-y+1)}}. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $-1 < x-y \neq 0$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)^2=4(x-y)^2+5 \\ 1+\frac{3}{2(x-y)}=\frac{(x+y)^2-4}{\sqrt{2(x-y+1)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-4=4(x-y)^2+1 \\ [2(x-y)+3]\sqrt{2(x-y+1)}=2(x-y)[4(x-y)^2+1] \end{cases}$$

Đặt $x-y=t$ ta có phương trình ẩn t : $(2t+3)\sqrt{2t+2}=2t(4t^2+1) \Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{2t+2}+\sqrt{2t+2}=8t^3+2t \quad (1).$

Xét hàm số $f(u)=u^3+u; u \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(u)=3u^2+1>0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực nên ta có

$$f(\sqrt{2t+2})=f(2t) \Leftrightarrow \sqrt{2t+2}=2t \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2-t-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x-y=1.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} x-y=1 \\ (x+y)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y \in \{-3; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y)=(2; 1), (-1; -2).$$

Đổi chiều điều kiện ta có hai cặp nghiệm kể trên.

Bài toán 125. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)^2(1+\sqrt{3x^2-xy+y^2+2})=3, \\ 2x^2+y^2+xy=1. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Nhận xét $3x^2-xy+y^2=(2x^2+y^2+xy)+2+x^2-2xy+y^2=3+(x-y)^2$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành $(x-y)^2 \left[1+\sqrt{(x-y)^2+3}\right]=3$. Đặt $(x-y)^2=t; t>0$ ta có

$$t(1+\sqrt{t^2+3})=3 \Leftrightarrow t(\sqrt{t^2+3}-2)+3t-3=0 \Leftrightarrow \frac{t(t^2-1)}{\sqrt{t^2+3}+2}+3(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1) \left[\frac{t(t+1)}{\sqrt{t^2+3}+2} + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x-y \in \{-1; 1\}.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ \quad \begin{cases} x-y=1 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x^2+(x-1)^2+x(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1), \left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right). \\ \circ \quad \begin{cases} x-y=-1 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x^2+(x+1)^2+x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; 1), \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Kết luận hệ đã cho có bốn cặp nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Hệ phương trình chứa căn được mang tên hệ sử dụng tính chất đơn điệu hàm số hay GTLN, GTNN của hàm số khi xảy ra sự tương đồng với hai ẩn hàm khác nhau theo hai biến, có thể tùy ý xuất phát từ một trong hai phương trình của hệ. Hai bài toán 124 và 125 ở trên chỉ là hệ phương trình chứa căn thức giải bằng phương pháp thế, có thông qua một chút ẩn phụ (nếu muốn), sau khi thay thế ta được phương trình một ẩn, quan trọng hơn là không nhất thiết sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số. Trong thao tác giải hệ phương trình chắc chắn chúng ta sẽ tổng hợp nhiều công đoạn, nhiều kỹ năng, kỹ thuật, chưa kể lồng ghép hỗn hợp các hướng xử lý phương trình vô tỷ, phương trình hữu tỷ, do đó ít có ranh giới phân định rạch ròi phương pháp trong hệ phương trình.

Chẳng hạn có hai cách diễn đạt rất đáng lưu ý

- ✓ Trình độ học sinh lớp 8, 9, 10 chưa thể giải được các thí dụ 124, 125 vì sử dụng đạo hàm.
- ✓ Trình độ học sinh lớp 8, 9, 10 hoàn toàn giải được các thí dụ 124, 125.

Nếu nói theo cách thứ nhất, vô tình chúng ta đã ngộ nhận, ngăn ngừa và làm mất tư duy mạo hiểm của các em học sinh nhỏ tuổi, vì thực tế hai bài toán 124 và 125 khá đơn giản, chưa cần kiến thức đạo hàm – hàm số của liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 THPT. Nói cách khác, hai bài toán 110 và 111 không đặc thù cho phương thức sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số, tác giả đề cập tại đây hy vọng các bạn độc giả có cái nhìn đa chiều, khách quan và đúng bản chất đối với phương pháp cơ bản này.

Bài toán 126. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 17x^3 + 17x + 6(y+1)\sqrt{y+2} = 6x\sqrt{x+1} + 17y^2 + 6y + 34, \\ 17x^3 - 3x^2 + 11x = 14y^2 - 6y + 25. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1; y \geq -2$. Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 6(y+1)\sqrt{y+2} &= 6x\sqrt{x+1} + 3y^2 + 12y + 9 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2(y+1)\sqrt{y+2} &= 2x\sqrt{x+1} + y^2 + 4y + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x\sqrt{x+1} &= y^2 + 4y + 4 - 2(y+1)\sqrt{y+2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} &= (y+2)^2 - 2(y+2)\sqrt{y+2} + 2\sqrt{y+2} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 2t^3 + 2t; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 6t^2 + 2 = 2(t-1)^2(2t+1) \geq 0, \forall t \geq 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với t không âm nên ta được

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{y+2}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow x+1 = y+2 \Leftrightarrow x = y+1.$$

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$\begin{aligned} 17x^3 - 3x^2 + 11x &= 14(x-1)^2 - 6(x-1) + 25 \\ \Leftrightarrow 17x^3 - 17x^2 + 45x - 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(17x^2 + 45) &= 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0 \end{aligned}$$

Kết luận hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 127. Trích lược câu 3, Đề thi khảo sát chất lượng lớp 12 THPT, Môn Toán, Khối A và A1; Kỳ thi lần thứ 3; Năm học 2013 – 2014; Trường THPT Chuyên, Đại học Vinh, Tỉnh Nghệ An.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1}, \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2; y \geq -\frac{1}{2}$. Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + \sqrt{x+2} - 2y^2 - y + 2 &= 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + \sqrt{x+2} + 2 &= 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{x+2} &= (2y)^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}; t \geq -1 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$.

Ta có $f''(t) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}; f''(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sqrt{t+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}$.

Khảo sát hàm số $g(t) = f'(t) \Rightarrow \min_{t \geq -1} f'(t) = f'\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \geq -1$.

Do đó hàm số liên tục và đồng biến với $t > -1$ dẫn đến $(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$(2y-1)^2 + 2y^2 - 2(2y-1) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(6y-1) = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{1}{6}; 1\right\}.$$

Từ đây suy ra hệ có hai cặp nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$.

Nhận xét.

Ngoài phương án tính đạo hàm cấp hai để khảo sát biểu thức đạo hàm cấp một, các bạn có thể linh hoạt sử dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân với điểm rơi như sau

Trước tiên $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}; t \geq -1 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$.

Áp dụng $2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = 2(t+1) + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - 1 \geq 3\sqrt[3]{2(t+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t+1}}} - 1 = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - 1 > 0$.

Bài toán 128. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6(x^2 + \sqrt{x+2}) + 17x = 18y^2 + 3y + 8\sqrt{3y+1} - 16, \\ 5x^2 + 12x + 10 = 2\sqrt{x+2} + 9y^2. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2; y \geq -\frac{1}{3}$. Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6\sqrt{x+2} - 10 &= 9y^2 + 3y + 8\sqrt{3y+1} - 2\sqrt{x+2} - 16 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 + 8\sqrt{x+2} &= 9y^2 + 3y + 8\sqrt{3y+1} \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + x + 2 + 8\sqrt{x+3} &= 9y^2 + 3y + 8\sqrt{3y+1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + 8\sqrt{t+1}; t \geq -1 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 + \frac{4}{\sqrt{t+1}} = g(t); t > -1$.

Ta có $g'(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(t+1)^3}}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^3} = 1 \Leftrightarrow t+1=1 \Leftrightarrow t=0$.

Thực hiện khảo sát hàm $g(t) \Rightarrow \min_{t \geq -1} g(t) = g(0) = 5 > 0 \Leftrightarrow f'(t) > 0, \forall t \geq -1$.

Như vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến với $t \geq -1$, dẫn đến $(*) \Leftrightarrow f(x+2) = f(3y) \Leftrightarrow x+2 = 3y$. Dẫn đến

$$\begin{aligned} 5x^2 + 12x + 10 &= 2\sqrt{x+2} + (x+2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 &= x+2 + 2\sqrt{x+2} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + 1)^2 = (2x+3)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + 1 = 2x+3 \\ \sqrt{x+2} + 1 = -2x-3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 2x+2 & (1) \\ \sqrt{x+2} = -2x-4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+2 = 4x^2 + 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2 + 7x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{17}}{8}. \\ \diamond (2) &\Rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Quan sát bài toán 128, một hệ phương trình hình thức đơn giản nhưng rất thú vị và độc đáo, nó nằm trong đề thi khảo sát chất lượng của khối THPT Chuyên Đại học Vinh, Tỉnh Nghệ An như đã nói, một ngôi trường có bề dày thành tích học tập, thi cử cũng như các công trình nghiên cứu, hơn nữa nằm trong một địa phương nổi tiếng truyền thống hiếu học, văn vật, tự cường, mảnh đất Nghệ An quê hương Chủ tịch Hồ Chí Minh. Nhiều năm qua, đề thi của đơn vị này luôn được đầu tư công phu, có hàm lượng kiến thức bao hàm, đánh giá đúng năng lực thí sinh dự thi, và một số sĩ tử nói vui rằng “bám sát với đề thi chính thức của Bộ giáo dục và đào tạo”. Thực sự khi được phổ biến, bài toán đòi hỏi nhiều kỹ năng, tư duy lập luận nhạy bén, bắt đầu từ công đoạn cộng đại số thiết lập tương đồng hàm, cho đến giai đoạn nhận định ẩn hàm, chắc hẳn giáo viên ra đề đã tốn không ít công sức khi sáng tạo ra nó

$$f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}; t \geq -1 \Rightarrow f'(t) = 2t+1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

Có lẽ nhiều bạn đọc, ngay cả tác giả cũng có ý định tìm nghiệm của phương trình đạo hàm, tuy nhiên việc này là bất khả thi sở dĩ đạo hàm của hàm số đặc trưng cũng đã được bố trí để xác định dương, và phương án tối ưu nhất là đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạo hàm, cũng chính bằng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số, tức là chúng ta cần xét thêm một hàm số thứ hai, đồng nghĩa với việc tính đạo hàm cấp hai của hàm ban đầu.

$$\text{Hàm số thứ hai } g(t) = 2t+1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \Rightarrow g'(t) \equiv f''(t) = 2 - \frac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}.$$

$$\text{Con đường mở ra lại khá thuận lợi khi xuất hiện } f''(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sqrt{t+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Tiến hành khảo sát hàm số } g(t) \text{ dẫn đến } \min_{t \geq -1} g(t) = g\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow g(t) > 0, \forall t \geq -1 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \geq -1.$$

Rõ ràng đến đây thì hàm số đã đồng biến và liên tục thực sự.

Tác giả đã tiến hành một số quan sát nhỏ và phát hiện ra được công đoạn mấu chốt thiết lập hàm số, từ đó thiết lập muôn vàn bài toán tương tự, thực tế cũng không quá khó. Trước tiên lưu ý bạn đọc cần có kiến thức về nguyên hàm và tích phân như sau

$$\int \frac{1}{\sqrt{(t+m)^3}} = \int (t+m)^{-\frac{3}{2}} = -2(t+m)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{t+m}}; \int \frac{1}{\sqrt{(at+b)^3}} = \int (at+b)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{a}(at+b)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{a\sqrt{at+b}}.$$

Hai công thức trên chính nền tảng cho đạo hàm cấp hai, tức hàm số phụ $g(t)$

$$g'(t) = -\int \frac{1}{\sqrt{(t+m)^3}} \Rightarrow g(t) = \frac{2}{\sqrt{t+m}}$$

$$g'(t) = -\int \frac{1}{\sqrt{(at+b)^3}} \Rightarrow g(t) = \frac{2}{a\sqrt{at+b}}$$

Tiếp theo, có thể khái quát một số bước cơ bản như sau ($a, b, c, d > 0$).

- Lựa chọn nghiệm cho đạo hàm cấp hai

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow c - \frac{1}{\sqrt{(at+b)^3}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(at+b)^3} = c \Leftrightarrow at+b = \sqrt[3]{c^2} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{c^2} - b}{a}.$$

- Lấy nguyên hàm đối với hàm số $g(t)$

$$f'(t) = g(t) = ct + d + \frac{2}{a\sqrt{at+b}} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}ct^2 + td + \frac{4}{a^2}\sqrt{at+b}.$$

- Chú ý rằng nếu $f'(t) = g(t) = ct + d + \frac{2}{a\sqrt{at+b}} > 0, \forall t \geq -\frac{b}{a}$ thì thất bại, vì là trường hợp đơn giản. Do đó cần lựa chọn các hằng số thỏa mãn $-\frac{d}{c} > -\frac{b}{a}$ để bắt buộc xét hàm số phụ.

- Quy đồng và bỏ mẫu đảm bảo hàm số có các hệ số nguyên

$$f(t) = \frac{1}{2}ct^2 + td + \frac{4}{a^2}\sqrt{at+b} = \frac{ca^2t^2 + 2a^2td + 8\sqrt{at+b}}{a^2}.$$

Điển hình như bài toán số 114, tác giả đã găm nghiệm đẹp với $a = b = c = 1$.

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{(t+1)^3}}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^3} = 1 \Leftrightarrow t+1 = 1 \Leftrightarrow t = 0.$$

Lấy nguyên hàm ngược trở lại thì $f'(t) = g(t) = t + \frac{2}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4\sqrt{t+1} = \frac{t^2 + 8\sqrt{t+1}}{2}.$

Lấy hệ số nguyên thu được $f(t): t^2 + 8\sqrt{t+1}.$

Tăng cường mức độ phức tạp cho hàm số $f(t): t^2 + t + 8\sqrt{t+1} \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 + \frac{4}{\sqrt{t+1}}.$

Nếu chọn $f(t): t^2 + 3t + 8\sqrt{t+1} \Rightarrow f'(t) = 2t + 3 + \frac{4}{\sqrt{t+1}} > 0, \forall t > -1$, thất bại.

Sau khi tìm được mối liên hệ giữa hai biến, tiếp tục đi xây dựng phương trình thứ hai, tuy nhiên bài toán 113 tác giả bài toán sử dụng một phương trình bậc hai cơ bản, lại còn nghiệm hữu tỷ nữa, không lý do nào mà chúng ta không giải được.

Xuất phát từ các quan sát nhỏ ở trên, tác giả đã mạo hiểm triển khai và thành công với bài toán số 127, mặc dù mất chút ít thời gian nhưng có một niềm vui rất lớn, phần nhỏ vì bài toán ẩn giấu được bản chất thực hàm số, điều đặc biệt là găm được các con số rất đẹp vào phương trình thứ nhất của hệ, hai con số 17 và 6, ngày 17.06.1997, một ngày có ý nghĩa – ngày sinh nhật của một cô bé, cô bé đặc biệt, ngày xưa ấy.

Bài toán 129. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4\sqrt{x+3} = 3x^2 + 17x - 22y + 32, \\ 6x^2 - 17x + 4\sqrt{x+3} + 8\sqrt{3x+1} = 9y^2 - 40y + 8\sqrt{3y-2} + 41. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}; y \geq \frac{2}{3}.$

Trừ từng về hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned}
6x^2 + 8\sqrt{3x+1} &= 9y^2 - 3x^2 - 18y + 8\sqrt{3y-2} + 9 \\
\Leftrightarrow 9x^2 + 8\sqrt{3x+1} &= 9y^2 - 18y + 9 + 8\sqrt{3y-2} \\
\Leftrightarrow 9x^2 + 18x + 9 - 18x - 18 + 8\sqrt{3x+1} &= 9y^2 - 18y + 8\sqrt{3y-2} \\
\Leftrightarrow 9(x+1)^2 - 18(x+1) + 8\sqrt{3(x+1)-2} &= 9y^2 - 18y + 8\sqrt{3y-2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 9t^2 - 18t + 8\sqrt{3t-2}; t \geq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(t) = 18t - 18 + \frac{12}{\sqrt{3t-2}} = 18\left(t-1 + \frac{2}{\sqrt{3t-2}}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3t-2}} \Rightarrow g'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{(3t-2)^3}}$ và $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(3t-2)^3} = 1 \Leftrightarrow 3t-2=1 \Leftrightarrow t=1$.

Khảo sát hàm số $g(t) \Rightarrow \min_{t \geq \frac{2}{3}} g(t) = g(1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow f'(t) \geq 18 \cdot \frac{2}{3} = 12 > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên miền $t \geq \frac{2}{3}$. Dẫn đến $(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned}
4\sqrt{x+3} &= 3x^2 + 17x - 22(x+1) + 32 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 10 - 4\sqrt{x+3} = 0 \\
\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) + x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4 &= 0 \\
\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + (\sqrt{x+3} - 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x+3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x=1; y=2$.

Nhận xét.

Bài toán số 129 tiếp tục với motif cũ, bài toán 128, tác giả lựa chọn nghiệm cho đạo hàm cấp hai

$$f'(t) = g(t) = t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3t-2}} \Leftrightarrow f''(t) = g'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{(3t-2)^3}}.$$

Rõ ràng $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(3t-2)^3} = 1 \Leftrightarrow 3t-2=1 \Leftrightarrow t=1$.

Lấy nguyên hàm đưa về hàm số gốc dự kiến $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{4}{9}\sqrt{3t-2}$.

Quy đồng đưa về đạo hàm có hệ số nguyên $f(t) = 9t^2 - 18t + 8\sqrt{3t-2}; t \geq \frac{2}{3}$.

Từ đây găm các ẩn hàm tùy theo sở thích, và sử dụng biến đổi đại số các bạn sẽ thu được một bài toán với hằng số và nghiệm như ý. Lưu ý có thể sử dụng bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng – trung bình nhân như sau

$$\begin{aligned}
f'(t) = g(t) &= t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3t-2}} = \frac{3t-2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3t-2}} + \frac{1}{\sqrt{3t-2}} - \frac{1}{3} \\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{3t-2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3t-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3t-2}}} - \frac{1}{3} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0
\end{aligned}$$

Bài toán 130. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^4 - 4x^3 - 24\sqrt{2x+1} + x^2 + 9y + 34 = 0, \\ 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 33 = y^2 - 7y + 24\sqrt{y+2}. \end{cases} (x; y \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}; y \geq -2$. Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\begin{aligned}
4x^2 - 1 + 24\sqrt{2x+1} &= y^2 + 2y + 24\sqrt{y+2} \\
\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 24\sqrt{2x+1} &= y^2 + 2y + 24\sqrt{y+2} \\
\Leftrightarrow (2x-1)^2 + 2(2x-1) + 24\sqrt{2x+1} &= y^2 + 2y + 24\sqrt{y+2} \quad (*)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t + 24\sqrt{t+2}; t \geq -2 \Rightarrow f'(t) = 2t + 2 + \frac{12}{\sqrt{t+2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng – trung bình nhân ta có

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2t + 2 + \frac{12}{\sqrt{t+2}} = 2(t+2) + \frac{6}{\sqrt{t+2}} + \frac{6}{\sqrt{t+2}} - 2 \\
&\geq 3\sqrt[3]{2(t+2) \cdot \frac{6}{\sqrt{t+2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{t+2}}} - 2 = 3\sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 6} - 2 > 0
\end{aligned}$$

Do đó hàm số liên tục và đồng biến trên tập hợp số thực. Dẫn đến $(*) \Leftrightarrow f(2x-1) = f(y) \Leftrightarrow 2x-1 = y$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\begin{aligned}
4x^4 - 4x^3 - 24\sqrt{2x+1} + x^2 + 9(2x-1) + 34 &= 0 \\
\Leftrightarrow 9(2x+1) - 24\sqrt{2x+1} + 16 + 4x^4 - 4x^3 + x^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow (3\sqrt{2x+1} - 4)^2 + x^2(4x^2 - 4x + 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow (3\sqrt{2x+1} - 4)^2 + x^2(2x-1)^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2x+1} = 4 \\ x(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset
\end{aligned}$$

Kết luận hệ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 131. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 12x^3 + 2x^2 - xy + \sqrt{\frac{x}{2} + 2} = 3y\sqrt{2y-1}, \\ \sqrt{2}(-2x^2 + xy + 3x) - \sqrt{x+4} = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -4; y \geq \frac{1}{2}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} 12x^3 + 2x^2 - xy + \sqrt{\frac{x}{2} + 2} = 3y\sqrt{2y-1}, \\ -2x^2 + xy + 3x - \sqrt{\frac{x}{2} + 2} = 0. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình trên ta có

$$\begin{aligned}
3x(4x^2 + 1) &= 3y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x(4x^2 + 1) = y\sqrt{2y-1} \\
\Leftrightarrow 2x(4x^2 + 1) &= 2y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = (2y-1+1)\sqrt{2y-1} \\
\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x &= (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1} = (\sqrt{2y-1})^3 + \sqrt{2y-1}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{I} \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{I}$. Hàm số liên tục và đồng biến nên

$$f(2x) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 2y-1 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai trở thành

$$\begin{aligned}
 -2x^2 + xy + 3x - \sqrt{\frac{x}{2} + 2} &= 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x \cdot \frac{4x^2 + 1}{2} + 3x - \sqrt{\frac{x}{2} + 2} = 0 \\
 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 + 7x &= \sqrt{2x + 8} \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = \sqrt{2x + 8} - 3 \\
 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x^2 - 2x + 3) &= \frac{2x - 1}{\sqrt{2x + 8} + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ (x - 1)^2 + x^2 + 2 = \frac{1}{\sqrt{2x + 8} + 3} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Rõ ràng $(x - 1)^2 + x^2 + 2 > 2 > \frac{1}{3} > \frac{1}{\sqrt{2x + 8} + 3}, \forall x \geq 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Từ đây suy ra hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}; y = 1$.

Bài toán 132. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5y^2 - 9y + \sqrt{y - 1} = -3x^2 + 35x + \sqrt{x + 1} - 14, \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1; y \geq 1$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 5y^2 - 9y + \sqrt{y - 1} = -3x^2 + 35x + \sqrt{x + 1} - 14, \\ -4y^2 + 8y = 4x^2 - 32x + 16. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$$

Cộng từng vế hai phương trình ta được

$$(x + 1)^2 + (x + 1) + \sqrt{x + 1} = (y - 1)^2 + y - 1 + \sqrt{y - 1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^4 + t^2 + \sqrt{t}; t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 + 2t + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Hàm số liên tục và đồng biến với t không âm nên ta được

$$f(\sqrt{x + 1}) = f(\sqrt{y - 1}) \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow x + 1 = y - 1 \Leftrightarrow x = y - 2.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta giải được dễ dàng.

Bài tập tương tự.

Trích lược câu 2.1, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 THPT; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hải Dương; Năm học 2015 – 2016.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2 - 1} = 2(y + 1)\sqrt{y^2 + 2y + 2}, \\ 2x - 4y + 3 = x^2 + 2y^2. \end{cases}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{9(x^3 + 1)^3} - x^3 + 5 = y(y^2 - 7y + 12), \\ \sqrt{x^3 + 1} - 1 = y^2(2y - 3). \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{I}).$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng
– Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và
một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh
– Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp
– Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu
– Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương
– Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.

23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.*

Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.

24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*

Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.

25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*

Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.

26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*

Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.

27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*

Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.

28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*

Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.

29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*

Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.

30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*

Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.

31. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*

Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

32. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*

33. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*

34. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*

35. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*

36. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*

37. *Các tạp chí toán học:* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...

38. *Các diễn đàn toán học:* Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net;
Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...

39. *Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twitter;...*



**THÂN THỂ TẠI NGỰC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỰC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI**