

LƯ SĨ PHÁP

Giáo Viên Toán _ Trường THPT Tuy Phong

HÌNH HỌC 10



CHƯƠNG I

VECTƠ

0355334679 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 10.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Nội dung gồm 3 phần

Phần 1. Kiến thức cần nắm

Phần 2. Dạng bài tập có hướng dẫn giải và bài tập đề nghị

Phần 3. Phần bài tập trắc nghiệm.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355334679 – 0916.620.899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

Gv_Trường THPT Tuy Phong – Bình Thuận

MỤC LỤC
CHƯƠNG I
VECTƠ

§1. Các định nghĩa	1 – 4
§2. Tổng và hiệu của hai vectơ.....	5 – 11
§3. Tích của vectơ với một số.....	12 – 19
§4. Hệ tọa độ	20 – 26
ÔN TẬP CHƯƠNG I.....	27 – 32

CHƯƠNG I. VECTO

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

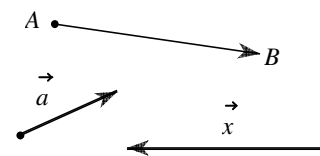
A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Khái niệm vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

- Vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B được kí hiệu là \overrightarrow{AB} và đọc là “vectơ AB”

- Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.



2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

- Như vậy, hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng

- Ba điểm A, B và C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} cùng phương

3. Hai vectơ bằng nhau

- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của \overrightarrow{AB} được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$

- Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị

- Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài. Nếu hai vectơ \vec{a} và \vec{b} bằng nhau thì ta viết $\vec{a} = \vec{b}$

- Khi cho trước một vectơ \vec{a} và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

4. Vectơ - không

- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vectơ không, kí hiệu $\vec{0}$, nghĩa là

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \dots \text{ với mọi điểm } A, B, M, \dots \text{ và } |\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}| = 0$$

- Vectơ không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Có hay không một vectơ cùng phương với hai vectơ đó?

HD & Giải

Có. Đó là vectơ không

Bài 1.2. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ không. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Nếu hai vectơ \vec{a} và \vec{b} cùng phương với \vec{c} thì \vec{a} và \vec{b} cùng phương

b) Nếu \vec{a} và \vec{b} cùng ngược hướng với \vec{c} thì \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.

HD & Giải

a) Đúng

b) Đúng

Bài 1.3. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{BC} cùng hướng

b) \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{AB} cùng hướng

c) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} ngược hướng

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$

f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$

HD & Giải

a) Sai

b) Đúng

c) Đúng

d) Sai

e) Đúng

f) Đúng

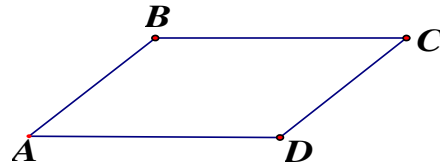
Bài 1.4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

HD & Giải

Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì $AB = DC$ và hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} cùng hướng. Vậy

$\overline{AB} = \overline{DC}$

Ngược lại, nếu $\overline{AB} = \overline{DC}$ thì $AB = DC, AB // DC$.
 Vậy tứ giác ABCD là hình bình hành

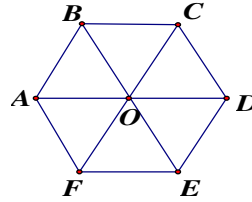


Bài 1.5. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

- a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với \overline{OA}
- b) Hãy tìm các vectơ bằng vectơ \overline{AB}

HD & Giải

- a) Các vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với \overline{OA} là $\overline{DA}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CB}, \overline{AO}, \overline{OD}, \overline{DO}, \overline{EF}, \overline{FE}$
- b) Các vectơ bằng vectơ \overline{AB} : $\overline{OC}, \overline{ED}, \overline{FO}$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1.6. Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy vẽ các vectơ bằng vectơ \overline{AB} và có

- a) Các điểm đầu là B, F, C
- b) Các điểm cuối là F, D, C

Bài 1.7. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC. Hãy xác định các vectơ cùng hướng với các vectơ $\overline{BP}, \overline{PN}$

Bài 1.8. Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC

Bài 1.9. Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Các câu sau đây đúng hay sai?

- a) $\overline{AB} = \overline{AC}$
- b) $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$
- c) $\overline{AB} = \overline{CA}$
- d) $\overline{HC} = \overline{BH}$

Bài 1.10. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng $\overline{NP} = \overline{MQ}$ và $\overline{PQ} = \overline{NM}$

Bài 1.11. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng nếu $\overline{AB} = \overline{DC}$ thì $\overline{AD} = \overline{BC}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overline{AB} = \overline{AC}$.
- B. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \overline{AB} cùng phương với \overline{AC} .
- C. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, \overline{MA} cùng phương với \overline{AB} .
- D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, \overline{MA} cùng phương với \overline{AB} .

Câu 2. Cho hình thoi ABCD cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{BD} = \overline{AC}$.
- B. $\overline{BC} = \overline{DA}$.
- C. $\overline{AB} = \overline{AD}$.
- D. $|\overline{BD}| = a$.

Câu 3. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ bằng \overline{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 6.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 2.

Câu 4. Cho $\overline{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$?

- A. Vô số.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 0.

Câu 5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Hỏi cặp vectơ nào dưới đây cùng hướng?

- A. \overline{MA} và \overline{MB} . B. \overline{AN} và \overline{CA} . C. \overline{MN} và \overline{CB} . D. \overline{AB} và \overline{MB} .

Câu 6. Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
 B. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.
 C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
 D. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

Câu 7. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{HC}$ và $\overline{OB} = \overline{OD}$. B. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{CH}$.
 C. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{HC}$. D. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AC} = \overline{CH}$.

Câu 8. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với \overline{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 9. B. 4. C. 6. D. 7.

Câu 9. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $|\overline{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overline{AM} = a$. D. $\overline{MB} = \overline{MC}$.

Câu 10. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\overline{AA} = \vec{0}$. B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.
 C. $|\overline{AB}| > 0$. D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Câu 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $|\overline{MN}| = |\overline{AC}|$. B. $\overline{MN} = \overline{QP}$. C. $|\overline{QP}| = |\overline{MN}|$. D. $\overline{MQ} = \overline{NP}$.

Câu 12. Với \overline{DE} (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

- A. Giá của \overline{ED} . B. Độ dài của \overline{ED} . C. Phương của \overline{ED} . D. Hướng của \overline{ED} .

Câu 13. Vectơ có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là

- A. \overline{ED} . B. \overline{DE} . C. DE . D. $|\overline{DE}|$.

Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Câu 15. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào dưới đây sai?

- A. $\overline{AB} = \overline{ED}$. B. $|\overline{AB}| = |\overline{AF}|$. C. $\overline{OD} = \overline{BC}$. D. $\overline{OB} = \overline{OE}$.

Câu 16. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A. $ABCD$ là hình bình hành. B. $ABDC$ là hình bình hành.
 C. $AC = BD$. D. $AB = CD$.

Câu 17. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overline{AB} = \overline{CD}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $ABCD$ là hình bình hành. B. \overline{AB} cùng hướng \overline{CD} .
 C. \overline{AB} cùng phương \overline{CD} . D. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Câu 18. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{OA} = \overline{OC}$. B. \overline{OB} và \overline{OD} cùng hướng.
 C. \overline{AC} và \overline{BD} cùng hướng. D. $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$.

Câu 19. Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- A. 4. B. 9. C. 3. D. 6.

Câu 20. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $|\overline{BC}| = 2|\overline{MN}|$. B. $\overline{MA} = \overline{MB}$. C. $\overline{AB} = \overline{AC}$. D. $\overline{MN} = \overline{BC}$.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{AC} = \overline{BD}$. B. $\overline{AB} = \overline{CD}$.
 C. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$. D. Hai vector $\overline{AB}, \overline{AC}$ cùng hướng.

Câu 22. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.
 B. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.
 C. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.
 D. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.

Câu 23. Cho $\overline{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 24. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào dưới đây sai?

- A. $\overline{CB} = \overline{DA}$. B. $\overline{OB} = \overline{DO}$. C. $\overline{OA} = \overline{OC}$. D. $\overline{AB} = \overline{DC}$.

ĐÁP ÁN

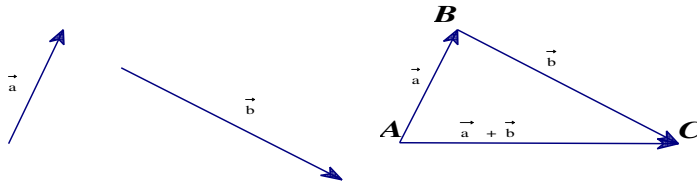
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Tổng của hai vector

- Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overline{AB} = \vec{a}$ và $\overline{BC} = \vec{b}$. Vector \overline{AC} được gọi là tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} . Ta kí hiệu tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} là $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$
- Phép toán tìm tổng của hai vector còn được gọi là phép cộng vector.



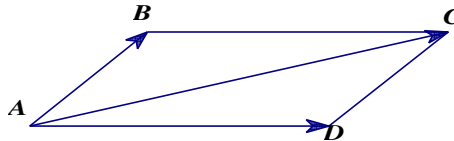
2. Các quy tắc cần nhớ

a. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C tùy ý, ta luôn có $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

b. Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì ta có: $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$



3. Tính chất của phép cộng các vector

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý, ta có

- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Tính chất giao hoán)
- b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Tính chất kết hợp)
- c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (Tính chất của vector không)

4. Hiệu của hai vector

a) Vector đối

- Nếu tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} là vector không, thì ta nói \vec{a} là vector đối của vector \vec{b} , hoặc vector \vec{b} là vector đối của vector \vec{a} .
- Vector đối của vector \vec{a} kí hiệu là $-\vec{a}$. Như vậy: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
- Nhận xét: Vector đối của vector \vec{a} là vector ngược hướng với vector \vec{a} và có cùng độ dài với \vec{a} .
- Đặc biệt, vector đối của vector $\vec{0}$ là vector $\vec{0}$

b) Định nghĩa hiệu của hai vector

- Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Ta gọi hiệu của hai vector \vec{a} và \vec{b} là vector $\vec{a} + (-\vec{b})$. Kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$. Như vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Quy tắc về hiệu của vector: Với ba điểm O, A, B tùy ý, ta có: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

5. Áp dụng

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D, ta có $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

HD & Giải

Ta dùng qui tắc ba điểm, ta có $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$

Khi đó $v\vec{t} \quad \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{AD} + \overline{BC} = v\vec{p}$ (đpcm)

Bài 2.2. Cho hình bình hành ABCD và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$

HD Giải

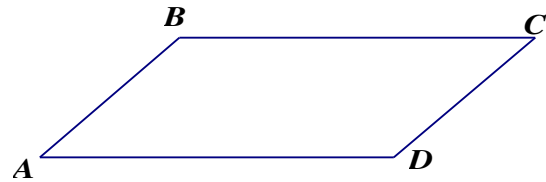
Ta sử dụng quy tắc ba điểm

$$vt = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB})$$

, vì ABCD là hình bình hành

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \vec{0} = vp$$



Bài 2.3 Chứng minh rằng đối với tứ giác ABCD bất kì, ta luôn có

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$

HD Giải

a) $vt = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = vp$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (luôn đúng; áp dụng qui tắc ba điểm trừ)

Bài 2.4. Cho bốn điểm A, B, C, D và E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

HD Giải

Ta có $vt = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DE} - (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} = vp$ (đpcm)

Bài 2.5. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

e) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

HD Giải

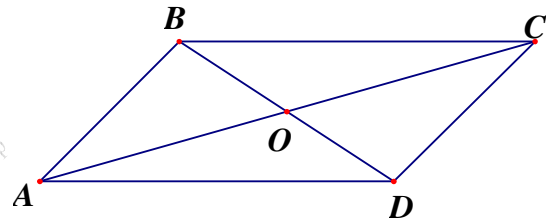
a) Ta có $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$ (Vì O là trung điểm của AC)

nên $vt = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = vp$

b) Vì ABCD là hình bình hành, nên ta có

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $vt = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} = vp$

c), d), e) học sinh tự chứng minh.



Bài 2.6. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

HD Giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{ID}) + \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{JB}) + \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \Leftrightarrow I \equiv J$$

Bài 2.7. Cho hình vuông ABCD cạnh a, có tâm O.

Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$; $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$; $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

HD Giải

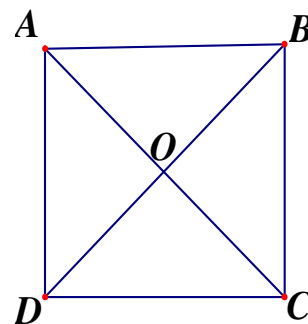
Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$,

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$. Do đó

$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BO}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}| = 2a$ (Vì \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} là hai vector cùng hướng)

Ta có $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$ (Vì $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$)



Bài 2.8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tìm:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = ?$

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = ?$

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = ?$

d) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = ?$

HD Giải

Gọi AH là đường cao của tam giác đều ABC. D là đối xứng của A qua B.

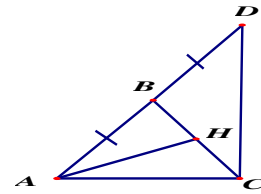
Ta có

a) $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2|\overline{AH}| = 2AH = a\sqrt{3}$

b) $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{CB}| = CB = a$

c) $|\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC = a$

d) $|\overline{AB} - \overline{BC}| = |\overline{BD} - \overline{BC}| = |\overline{CD}| = CD = a\sqrt{3}$



Bài 2.9. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|$ thì tam giác ABC vuông tại C.

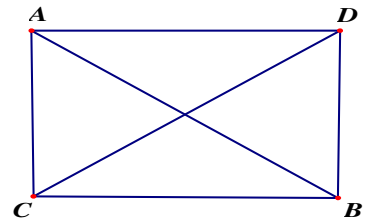
HD & Giải

Vẽ hình bình hành CADB. Ta có $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CD}$ (qui tắc hbh). Do đó

$|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CD}| = CD.$

$|\overline{CA} - \overline{CB}| = |\overline{BA}| = BA.$ Từ giả thiết $|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|$ suy ra $CD = AB$

Vậy tứ giác CADB là hình chữ nhật. Từ đó ta có tam giác CAB vuông tại C.



Bài 2.10. Cho hai lực \vec{F}_1 và \vec{F}_2 có điểm đặt O và tạo với nhau một góc 60° . Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy, biết rằng cường độ của hai lực \vec{F}_1 và \vec{F}_2 đều là 100N.

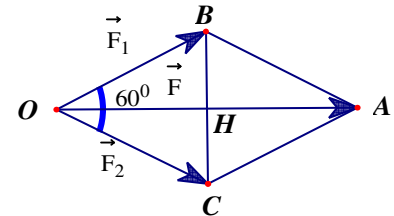
HD & Giải

Ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} = \overline{OA}$. Do đó $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overline{OA}| = OA$

Mặt khác, Vẽ hình thoi OCBA, ta có tam giác OCB đều nên

$OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $OA = 2OH$

Vậy cường độ của hợp lực là $100\sqrt{3}$ N.



Bài 2.11. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overline{MA}$, $\vec{F}_2 = \overline{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overline{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 và \vec{F}_2 đều là 100N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực \vec{F}_3

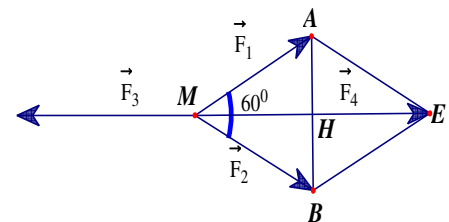
HD & Giải

Vật đứng yên do đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Vẽ hình thoi MAEB, ta có

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_4 = \overline{ME}$ và lực \vec{F}_4 có cường độ là $100\sqrt{3}$ N.

Ta có $\vec{F}_4 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, do đó \vec{F}_3 là vectơ đối của \vec{F}_4 .

Như vậy \vec{F}_3 có cường độ là $100\sqrt{3}$ N và ngược hướng với \vec{F}_4



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 2.12. Cho ngũ giác ABCDE. Chứng minh $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AE} - \overline{DE}$

Bài 2.13. Cho lục giác đều ABCDEF và M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng $\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{ME} = \overline{MB} + \overline{MD} + \overline{MF}$

Bài 2.14. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC. Chứng minh rằng với điểm O bất kì, ta có $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$

Bài 2.15. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Chứng minh rằng

a) $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA} = \vec{0}$ b) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \vec{0}$

Bài 2.16. Cho hai lực \vec{F}_1 ; \vec{F}_2 có điểm đặt tại O và tạo với nhau một góc 120° . Tìm cường độ tổng hợp hai

lực ấy, biết rằng hai lực $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ có đều cường độ là 100N.

Bài 2.17. Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ và CARS. Chứng minh rằng: $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$

Bài 2.18. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F.

Chứng minh rằng: $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE}$

Bài 2.19. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{BC} + \vec{DE} + \vec{FA} = \vec{0}$ b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình bình hành ABCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{AC}$. B. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$. C. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{BD}$. D. $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{CA}$.

Câu 2. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$. B. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
 C. $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$. D. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CB}$.

Câu 3. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vector $(\vec{AO} - \vec{DO})$ bằng vector nào trong các vector sau?

A. \vec{DC} . B. \vec{AC} . C. \vec{BA} . D. \vec{BC} .

Câu 4. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{BE} + \vec{BF} - \vec{DO} = \vec{0}$. B. $\vec{OC} = \vec{EB} + \vec{EO}$.
 C. $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$. D. $\vec{DO} = \vec{EB} - \vec{EO}$.

Câu 5. Cho \vec{a} và \vec{b} là các vector khác $\vec{0}$ với \vec{a} là vector đối của \vec{b} . Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng độ dài. B. Hai vector \vec{a}, \vec{b} chung điểm đầu.
 C. Hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng phương. D. Hai vector \vec{a}, \vec{b} ngược hướng.

Câu 6. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a\sqrt{3}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$.

Câu 7. Cho hình thoi ABCD có AC = 2a và BD = a. Tính $|\vec{AC} + \vec{BD}|$.

A. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = 5a$. B. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = a\sqrt{3}$. C. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = a\sqrt{5}$. D. $|\vec{AC} + \vec{BD}| = 3a$.

Câu 8. Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\vec{BC} = 2\vec{HC}$. B. $\vec{HC} = -\vec{HB}$. C. $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$. D. $\vec{AB} = \vec{AC}$.

Câu 9. Cho $\vec{AB} = -\vec{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. ABCD là hình bình hành. B. $\vec{AB} + \vec{DC} = \vec{0}$.
 C. \vec{AB} và \vec{CD} cùng hướng. D. \vec{AB} và \vec{CD} cùng độ dài.

Câu 10. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $\vec{AI} = \vec{BI}$. B. $IA = IB$. C. $\vec{IA} = \vec{IB}$. D. $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{BM}$.

B. $\overline{MA} = \overline{BC}$.

C. $MABC$ là hình bình hành.

D. $\overline{AM} + \overline{AB} = \overline{AC}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $|\overline{AH} + \overline{HB}| = |\overline{AH} + \overline{HC}|$.

B. $\overline{AH} - \overline{AB} = \overline{AH} - \overline{AC}$.

C. $\overline{BC} - \overline{BA} = \overline{HC} - \overline{HA}$.

D. $|\overline{AH}| = |\overline{AB} - \overline{AH}|$.

Câu 13. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overline{CA} - \overline{HC}|$.

A. $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

B. $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{a}{2}$.

C. $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{3a}{2}$.

D. $|\overline{CA} - \overline{HC}| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{GA} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{BD}$.

B. $\overline{GA} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{CD}$.

C. $\overline{GA} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{O}$.

D. $\overline{GA} + \overline{GD} + \overline{GC} = \overline{CD}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overline{MB} - \overline{MC}| = |\overline{BM} - \overline{BA}|$ là

A. đường thẳng qua A và song song với BC .

B. đường thẳng AB .

C. trung trực đoạn BC .

D. đường tròn tâm A , bán kính BC .

Câu 16. Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BA} = \overline{O}$.

B. $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{AB}$.

C. $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$.

D. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AM}$.

Câu 17. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{CA}$.

B. $\overline{CA} - \overline{BA} = \overline{BC}$.

C. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$.

D. $\overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CB}$.

Câu 18. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

A. $\overline{IA} = \overline{IB}$.

B. $IA = IB$.

C. $\overline{IA} + \overline{IB} = \overline{O}$.

D. $\overline{IA} - \overline{IB} = \overline{O}$.

Câu 19. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$.

B. $\overline{MP} + \overline{NM} = \overline{NP}$.

C. $\overline{CA} + \overline{BA} = \overline{CB}$.

D. $\overline{AA} + \overline{BB} = \overline{AB}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

B. $\overline{CA} = -\overline{AB}$.

C. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}| = a$.

D. $\overline{CA} = -\overline{BC}$.

Câu 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\overline{AB} - \overline{AD}| = |\overline{AB} + \overline{AD}|$.

B. $|\overline{BC} + \overline{BD}| = |\overline{AC} - \overline{AB}|$.

C. $\overline{AC} = \overline{BD}$.

D. $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{O}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $|\overline{AB} + \overline{AC}|$.

A. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = \frac{a}{2}$.

B. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2a$.

C. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a\sqrt{3}$.

D. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a$.

Câu 23. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng \overline{CA} ?

A. $\overline{DC} - \overline{CB}$.

B. $-\overline{OA} + \overline{OC}$.

C. $\overline{BA} + \overline{DA}$.

D. $\overline{BC} + \overline{AB}$.

Câu 24. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OE} = \overline{O}$.

B. $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} = \overline{EB}$.

C. $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{O}$.

D. $\overline{BC} + \overline{EF} = \overline{AD}$.

Câu 25. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến MT, MT' (T và T' là hai tiếp điểm). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$. B. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$. C. $MT + MT' = TT'$. D. $MT = MT'$.

Câu 26. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. B. $AB + BC = AC$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 27. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$. B. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OB}$. C. $OA = -OB$. D. $AB = -BA$.

Câu 28. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- A. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

Câu 29. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- A. \overrightarrow{MP} . B. \overrightarrow{MN} . C. \overrightarrow{PR} . D. \overrightarrow{MR} .

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$.
B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.
D. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Câu 31. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}|$.

- A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$. B. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 2a$. C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 0$. D. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a$.

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$. C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M .

- A. M trùng với C .
B. M là trọng tâm tam giác ABC .
C. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.
D. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3, AC = 4$. Tính $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}|$.

- A. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$. B. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$. C. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 5$. D. $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = 2$.

Câu 36. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 38. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính $|\overline{OB} + \overline{OC}|$.

A. $|\overline{OB} + \overline{OC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $|\overline{OB} + \overline{OC}| = a\sqrt{2}$.

C. $|\overline{OB} + \overline{OC}| = \frac{a}{2}$.

D. $|\overline{OB} + \overline{OC}| = a$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overline{HB} + \overline{HC} = \vec{0}$.

B. $\overline{AB} = \overline{AC}$.

C. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AH}$.

D. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \vec{0}$.

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} = \overline{MD}$ là

A. tập rỗng.

B. một đoạn thẳng.

C. một đường tròn.

D. một đường thẳng.

Câu 41. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overline{AB} + \overline{AC}|$.

A. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a\sqrt{2}$.

B. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2a$.

D. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = a$.

Câu 42. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overline{BC} - \overline{BA} = \overline{DC} - \overline{DA}$.

B. $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{CD}$.

C. $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OD} - \overline{OA}$.

D. $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overline{MB} + \overline{MC} = \overline{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

A. M là trung điểm của AC .

B. M là trung điểm của AB .

C. M là trung điểm của BC .

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Câu 44. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vector $\overline{MP} + \overline{NP}$ bằng vector nào trong các vector sau?

A. \overline{AP} .

B. \overline{BP} .

C. \overline{MN} .

D. $\overline{MB} + \overline{NB}$.

Câu 45. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của vector $\vec{v} = \overline{GB} + \overline{GC}$.

A. $|\vec{v}| = 4$.

B. $|\vec{v}| = 2$.

C. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$.

D. $|\vec{v}| = 8$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	

§3. TÍCH CỦA VECTOR VỚI MỘT SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

- Cho số $k \neq 0$ và vector \vec{a} . Tích của vector \vec{a} với số k là một vector, kí hiệu $k.\vec{a}$, được xác định như sau:

- + Nếu $k \geq 0$ thì vector $k.\vec{a}$ cùng hướng với vector \vec{a}
- + Nếu $k < 0$ thì vector $k.\vec{a}$ ngược hướng với vector \vec{a}
- + Độ dài của vector $k.\vec{a}$ bằng $|k|.\|\vec{a}\|$

- Phép lấy tích của vector với một số gọi là phép nhân vector với số (hoặc phép nhân số với vector)

- Ta qui ước $0.\vec{a} = \vec{0}, k.\vec{0} = \vec{0}$

2. Tính chất của phép nhân vector với một số

Với hai vector \vec{a} và \vec{b} bất kì, với mọi số thực h và k , ta có

- i) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- ii) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- iii) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- iv) $1.\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

- Nếu I là trung điểm của AB thì với mọi điểm M , ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M , ta có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

4. Điều kiện để hai vector cùng phương

- Điều kiện cần và đủ để hai vector \vec{a} và \vec{b} ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\vec{AB} = k\vec{AC}$

5. Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Khi đó mọi vector \vec{x} đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vector \vec{a} và \vec{b} , nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$

B. BÀI TẬP

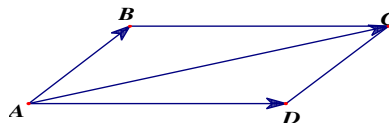
Bài 3.1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$

HD & Giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ . Do đó}$$

$$vt = (\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC} = vp$$



Bài 3.2. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{AD}$$

HD & Giải

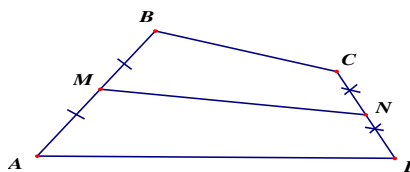
Ta có

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$$

$$+ \vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}$$

$$2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD}$$

Phần còn lại chứng minh tương tự



Bài 3.3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng

a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

b) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, với mọi M

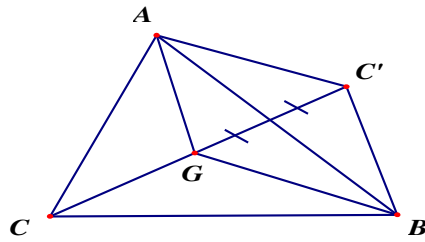
HD & Giải

a) Trọng tâm G nằm trên đường trung tuyến CM và $GC = 2GM$. Để tính tổng $\vec{GA} + \vec{GB}$, ta dựng hình bình hành $AGBC'$. Muốn vậy, ta lấy điểm C' sao cho M là trung điểm của GC' .

Khi đó $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{GC}' = \vec{CG}$. Do đó $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{CG} + \vec{GC} = \vec{CC} = \vec{0}$

b) $vt = \vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC} = (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + 3\vec{MG} = 3\vec{MG} = vp$

(vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ chứng minh trên)



Bài 3.4. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G và G'. Chứng minh rằng : $3\vec{GG'} = \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

HD & Giải

Ta có

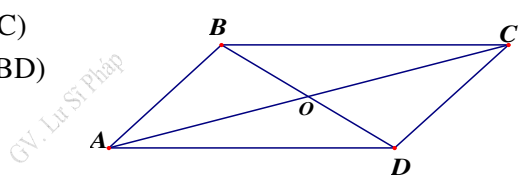
$$\begin{aligned} \vec{AA'} &= \vec{AG} + \vec{GG'} + \vec{G'A'} \\ + \vec{BB'} &= \vec{BG} + \vec{GG'} + \vec{G'B'} \\ \vec{CC'} &= \vec{CG} + \vec{GG'} + \vec{G'C'} \\ \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} &= 3\vec{GG'} \end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ và G' là trọng tâm của tam giác A'B'C' nên $\vec{G'A'} + \vec{G'B'} + \vec{G'C'} = \vec{0}$.

Bài 3.5. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với mọi điểm M bất kì, ta luôn có $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$

HD & Giải

Ta có $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$ (Vì O là trung điểm AC)
 Và $\vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$ (Vì O là trung điểm của BD)
 Vậy $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$



Bài 3.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

- a) Chứng minh rằng tứ giác HCDB là hình bình hành
- b) Chứng minh:
 - i) $\vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO}$; ii) $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$; iii) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$
- c) G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh: $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. Từ đó có kết luận gì về ba điểm O, H, G ?

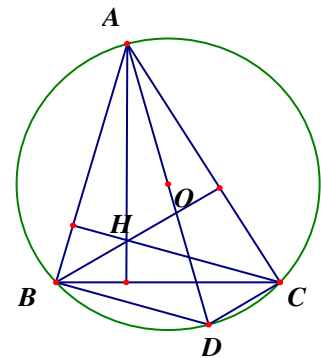
HD & Giải

a) Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD \perp AB, DC \perp AC$. Ta có $BH \perp AC, CH \perp AB$ nên suy ra $CH \parallel BD$ và $BH \parallel DC$. Vậy tứ giác HBDC là hình bình hành.

b) Vì O là trung điểm của AD nên có $\vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO}$ (1)
 Vì HBDC là hình bình hành nên ta có $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HD}$. Vậy (1) suy ra $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ (2)

Theo qui tắc ba điểm, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ (3)

c) G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$
 Từ (3), suy ra $\vec{OH} = 3\vec{OG}$. Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.



Bài 3.7. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM (M là trung điểm của BC). Phân tích vectơ \vec{AM} theo hai vectơ \vec{AB} và \vec{AC} .

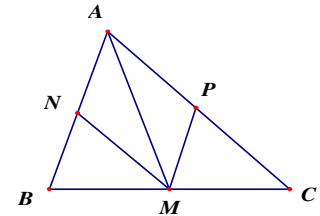
HD & Giải

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Ta có tứ giác ANMP là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Ta có thể chứng minh cách khác

Ta có M là trung điểm của BC nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

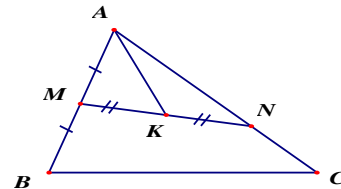


Bài 3.8. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho NA = 2 NC. Gọi K là trung điểm của MN. Phân tích vectơ \overrightarrow{AK} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

HD\>Giải

Ta có K là trung điểm của MN, nên

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$



Bài 3.9. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

HD\>Giải

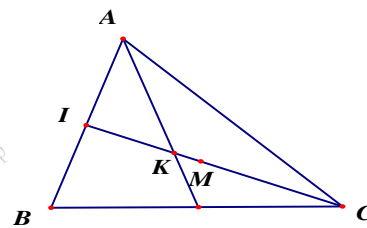
a) $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

\Leftrightarrow K là trọng tâm của tam giác ABC

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (I là trung điểm của AB)

Hay $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của IC



Bài 3.10. Cho tam giác đều ABC có O là trọng tâm và điểm M một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

HD\>Giải

Qua M kẻ các đường thẳng

$K_1K_4 // AB; K_2K_5 // AC, K_3K_6 // BC$

$(K_1, K_2 \in BC, K_3, K_4 \in AC, K_5, K_6 \in AB)$

Ta có

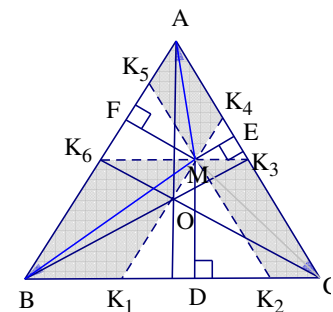
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \overrightarrow{MK_3} + \overrightarrow{MK_4} + \overrightarrow{MK_5} + \overrightarrow{MK_6})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \quad (1)$$

(Vì $MK_5AK_4, MK_3CK_2, MK_1BK_6$, là các hình bình hành)

Mặt khác, O là trọng tâm của tam giác ABC, nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$

Từ (1) suy ra $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}.3\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM}$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3.11. Cho bốn điểm O, A, B, C sao cho $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng

Bài 3.12. Cho tam giác ABC và hai điểm I, J thoả $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 3.13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và hai điểm M, N thoả $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ba điểm M, N, G thẳng hàng.

Bài 3.14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và hai điểm M, N thoả $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$

- Xác định hai điểm M, N
- Tính vectơ \overrightarrow{MN} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC}
- Tính vectơ \overrightarrow{MG} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Suy ra ba điểm M, N, G thẳng hàng

Bài 3.15. Cho tam giác ABC. Gọi K điểm đối xứng của trọng tâm G qua B

- Chứng minh rằng $\overrightarrow{KA} - 5\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
- Tính vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} theo hai vectơ \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AK}

Bài 3.16. Cho tam giác ABC. Gọi P là trung điểm của AB và Q là một điểm trên cạnh AC sao cho $QC = 2QA$. Gọi K là trung điểm của PQ, D là trung điểm BC. Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài 3.17. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4$, $BC = 3$. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC, CD.

- Tính \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{AK} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD}
- Tính: $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AK}|$

Bài 3.18. Cho hai hình bình hành ABCD và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DD'}$
- Hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

Bài 3.19. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

- Chứng minh rằng I là trọng tâm của tam giác BCD, với D là trung điểm của cạnh AC
- Biểu thị vectơ \overrightarrow{AI} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC}

Bài 3.20. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Bài 3.21. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC và AB. chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

Bài 3.22. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

Bài 3.23. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A, M và trọng tâm tam giác ABC thẳng hàng.
- $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
- Ba điểm C, M, B thẳng hàng.
- AM là phân giác trong của góc \widehat{BAC} .

Câu 2. Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM = AB$ và N là trung điểm của AC. Tính \overrightarrow{MN} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

$$A. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$B. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$C. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$D. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng ?

$$A. \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}.$$

$$B. \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}.$$

$$C. \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}.$$

$$D. \overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$.

Tính \overrightarrow{AM} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

$$A. \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$B. \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$C. \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$D. \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính \overrightarrow{AB} theo \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{BC} .

$$A. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

$$B. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

$$C. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

$$D. \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là

A. trung trực của đoạn thẳng AB .

B. trung trực của đoạn thẳng AD .

C. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AC}{2}$.

D. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB + BC}{2}$.

Câu 7. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

A. $m = 1, n = 2$.

B. $m = -1, n = -2$.

C. $m = 2, n = 1$.

D. $m = -2, n = -1$.

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Mệnh đề nào sau đây sai ?

$$A. \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AO}.$$

$$B. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}.$$

$$C. \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

$$D. \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Câu 9. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

A. đường trung trực đoạn thẳng IA .

B. đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$.

C. đường tròn đường kính AB .

D. đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Câu 10. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

$$A. \overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}.$$

$$B. \overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}.$$

$$C. \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}.$$

$$D. \overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}.$$

Câu 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k$ là

A. một điểm.

B. một đoạn thẳng.

C. một đường thẳng.

D. một đường tròn.

Câu 12. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ \overrightarrow{MN} theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{BC}$.

B. $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{2}{3}\overline{BC}$.

C. $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{BC}$.

D. $\overline{MN} = \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{BC}$.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\overline{AC} - \overline{AD} = \overline{CD}$.

B. $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

C. $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$.

D. $\overline{AC} - \overline{BD} = 2\overline{CD}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{2}\overline{AC}$.

B. $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB} + 3\overline{AC}$.

C. $\overline{AG} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

D. $\overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overline{IB} + 2\overline{IC} + \overline{IA} = \vec{0}$.

B. $\overline{IB} + \overline{IC} + 2\overline{IA} = \vec{0}$.

C. $2\overline{IB} + \overline{IC} + \overline{IA} = \vec{0}$.

D. $\overline{IB} + \overline{IC} + \overline{IA} = \vec{0}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$.

B. $\overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC}$.

C. $\overline{AI} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

D. $\overline{AI} = \frac{1}{4}(\overline{AB} - \overline{AC})$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \vec{0}$.

B. $\overline{AB} + \overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AG}$.

C. $\overline{BA} + \overline{BC} = 3\overline{BG}$.

D. $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{CG}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = \overline{AC} + 2\overline{BC}$.

B. $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{AC} + \overline{BC}$.

C. $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{CA} + \overline{CB}$.

D. $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{CB} - \overline{CA}$.

Câu 19. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} + 2\overline{MB}|$ là

A. đường trung trực đoạn thẳng IA .B. đường tròn tâm A , bán kính AB .C. đường trung trực của đoạn thẳng AB .D. đường tròn đường kính AB .

Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính \overline{AB} theo \overline{AC} và \overline{BD} .

A. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{BD}$.

B. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BD}$.

C. $\overline{AB} = \overline{AM} - \frac{1}{2}\overline{BC}$.

D. $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BD}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC}$.

B. $\overline{MB} = \overline{MC}$.

C. $\overline{MB} = -\overline{MC}$.

D. $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

Câu 22. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{DC} - \overline{BC}$.

B. $\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{DC} + \overline{BC}$.

$$C. \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{CD} + \overline{BC}.$$

$$D. \overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{CD} - \overline{BC}.$$

Câu 23. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. M trùng C .

B. M là trọng tâm của tam giác ABC .

C. M trùng A .

D. M trùng B .

Câu 24. Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} + \overline{MC}|$ là

A. đường trung trực của đoạn BC .

B. đường tròn đường kính BC .

C. đường tròn tâm G , bán kính $\frac{a}{3}$.

D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Câu 25. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Tính $|2\overline{OA} - \overline{OB}|$.

A. a .

B. $(1 + \sqrt{2})a$.

C. $a\sqrt{5}$.

D. $2a\sqrt{2}$.

Câu 26. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó

$$A. \overline{AK} = \frac{1}{6}\overline{AB} - \frac{1}{4}\overline{AC}.$$

$$B. \overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} - \frac{1}{6}\overline{AC}.$$

$$C. \overline{AK} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}.$$

$$D. \overline{AK} = \frac{1}{6}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}.$$

Câu 27. Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây sai ?

$$A. \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

$$B. \overline{MN} = \overline{MD} + \overline{CN} + \overline{DC}.$$

$$C. \overline{MN} = \overline{AB} - \overline{MD} + \overline{BN}.$$

$$D. \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}).$$

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vector $\overline{MA} = x\overline{MB} + y\overline{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P = x + y$.

A. $P = 3$.

B. $P = 2$.

C. $P = -2$.

D. $P = 0$.

Câu 29. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC}| = |\overline{MB} - \overline{MA}|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính bán kính R theo a .

$$A. R = \frac{a}{2}.$$

$$B. R = \frac{a}{6}.$$

$$C. R = \frac{a}{3}.$$

$$D. R = \frac{a}{9}.$$

Câu 30. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây sai ?

$$A. \overline{CN} = -\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

$$B. \overline{AC} = 2\overline{NC}.$$

$$C. \overline{BC} = -2\overline{MN}.$$

$$D. \overline{AB} = 2\overline{AM}.$$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây sai ?

$$A. \overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC} + \overline{MD}.$$

$$B. \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

$$C. \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}.$$

$$D. \overline{BA} + \overline{BC} = 2\overline{BM}.$$

Câu 32. Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 3$?

A. Vô số.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Câu 33. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. $\overline{GB} + \overline{GC} = \overline{GM}$. B. $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{AG}$. C. $\overline{GA} = \overline{BG} + \overline{CG}$. D. $\overline{GA} = -\frac{2}{3}\overline{AM}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a} = \overline{BC}$, $\vec{b} = \overline{AC}$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

- A. $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$. B. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.
 C. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$. D. $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Câu 35. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. $|11\overline{OA}| - |6\overline{OB}| = 5a$. B. $|3\overline{OA} + 4\overline{OB}| = 5a$.
 C. $|2\overline{OA}| + |3\overline{OB}| = 5a$. D. $|7\overline{OA} - 2\overline{OB}| = 5a$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

GV. Lưu Sĩ Pháp

§4. HỆ TRỤC TOA ĐỘ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Trục và độ dài đại số trên trục

- Trục tọa độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ đơn vị \vec{i} có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là gốc tọa độ, vectơ \vec{i} gọi là vectơ đơn vị của trục tọa độ.



- Kí hiệu (O, \vec{i})

- Ta gọi số k là tọa độ của điểm M trên trục (O, \vec{i}) khi $\overline{OM} = k\vec{i}$

- Cho hai điểm A và B trên trục (O, \vec{i}) . Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overline{AB} = a\vec{i}$. Ta gọi số a đó là độ dài đại số của vectơ \overline{AB} đối với trục đã cho. Như vậy $\overline{AB} = AB\vec{i}$ và kí hiệu $\overline{AB} = a$

- Nếu \overline{AB} cùng hướng với \vec{i} thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu \overline{AB} ngược hướng với \vec{i} thì $\overline{AB} = -AB$

- Nếu điểm A(a) và B(b) trên trục (O, \vec{i}) thì $\overline{AB} = b - a$

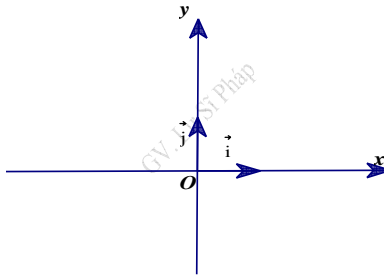
2. Hệ trục tọa độ

- Hệ trục tọa độ như hình vẽ. Nó bao gồm hai trục tọa độ Ox và Oy vuông góc với nhau

- Vectơ đơn vị trên trục Ox là \vec{i} , vectơ đơn vị trên trục Oy là \vec{j}

- Điểm O gọi là gốc tọa độ. Trục Ox gọi là trục hoành, trục Oy gọi là trục tung

- Hệ trục tọa độ vuông góc còn gọi đơn giản là hệ trục tọa độ và kí hiệu Oxy hay (O, \vec{i}, \vec{j})



3. Tọa độ của vectơ đối hệ trục tọa độ

- Đối với hệ trục tọa độ (O, \vec{i}, \vec{j}) , nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của vectơ \vec{u} , kí hiệu $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ \vec{u}

- Nhận xét: Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

$$\text{Nếu } \vec{u}(x; y), \vec{v}(x'; y') \text{ thì } \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{u}(x; y), \vec{v}(x'; y')$. Khi đó, ta có

$$\text{i) } \vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'); \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$$

$$\text{ii) } k\vec{u} = (kx; ky), \forall k \in \mathbb{R}$$

iii) Vectơ \vec{u} cùng phương với vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $x = kx', y = ky'$

5. Tọa độ của điểm

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vectơ \overline{OM} được gọi là tọa độ của điểm M. Như vậy cặp số $(x; y)$ được gọi là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overline{OM} = (x; y)$ và kí hiệu $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$. Số x gọi là hoành độ, y gọi là tung độ của điểm M
- Liên hệ giữa tọa độ điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng: Cho hai điểm

$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, ta có $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

6. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng. Toạ độ trọng tâm của tam giác

- Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Toạ độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ của AB được xác định

như sau: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

- Cho tam giác ABC, có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Khi đó toạ độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$

được xác định như sau: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Tìm toạ độ của các vectơ sau

- a) $\vec{a} = 2\vec{i}$ b) $\vec{b} = -3\vec{j}$ c) $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ d) $\vec{d} = 0, 2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$
 e) $\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i})$ f) $\vec{f} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$ g) $\vec{g} = 0, 15\vec{i} + 1, 3\vec{j}$ h) $\vec{h} = \pi\vec{i} - (\cos 24^\circ)\vec{j}$

HD & Giải

- a) $\vec{a} = (2; 0)$ b) $\vec{b} = (0; -3)$ c) $\vec{c} = (3; -4)$ d) $\vec{d} = (0, 2; \sqrt{3})$

Phần còn lại đọc giả làm tương tự

Bài 4.2. Cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (-3; 1), \vec{c} = (-4; -2)$. Tìm toạ độ các vectơ sau

- a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ c) $\vec{w} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$

HD & Giải

a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 2(1; 2) - 3(-3; 1) + (-4; -2) = (7; 1)$

Tương tự ta có b) $\vec{v} = (0; -\frac{2}{3}), c) \vec{w} = (-19; 0)$

Bài 4.3. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ Oxy, cho các điểm A(2; 0), B(0;4), C(1;3).

- a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác
 b) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC

HD & Giải

a) Ta có $\overline{AB} = (-2; 4)$ và $\overline{AC} = (-1; 3)$. Do $\frac{-2}{-1} \neq \frac{4}{3}$ nên hai vectơ $\overline{AB}, \overline{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng và chúng là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Vậy $G(1; \frac{7}{3})$

Bài 4.4. Cho hình bình hành ABCD có A(-1;-2), B(3;2), C(4;-1). Tìm toạ độ điểm D

HD & Giải

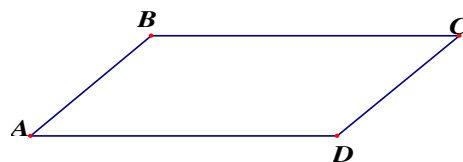
Gọi $D(x_D; y_D)$. Tứ giác ABCD là hình bình

hành, nên ta có $\overline{AB} = \overline{DC}$

Ta lại có $\overline{AB} = (4; 4)$ và $\overline{DC} = (4 - x; -1 - y)$

Do đó $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 4 \\ -1 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases}$

Vậy D(0;-5)



Bài 4.5. Cho tam giác ABC. Các điểm M(1;0), N(2;2) và P(-1;3) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

HD & Giải

Ta gọi toạ độ các đỉnh là $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và

$$C(x_C; y_C)$$

Ta có tứ giác NAPM là hình bình hành, suy ra

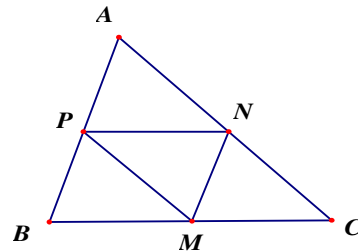
$$\overline{NA} = \overline{MP}$$

$$\overline{NA} = (x_A - 2; y_A - 2), \overline{MP} = (-2; 3). \text{ Suy ra:}$$

$$\begin{cases} x_A - 2 = -2 \\ y_A - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 5 \end{cases}$$

Vậy toạ độ điểm A (0;5)

Phần còn lại, làm tương tự B(-2;1) và C(4;-1)



Bài 4.6. Cho ba điểm A(-1;1), B(1;3), C(-2;0). Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

HD Giải

Ta có $\overline{AB} = (2; 2), \overline{AC} = (-1; -1)$. Vậy $\overline{AB} = -2\overline{AC}$. Do đó ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 4.7. Cho bốn điểm A(0;1), B(1;3), C(2;7) và D(0;3). Chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song.

HD Giải

Ta có $\overline{AB} = (1; 2), \overline{CD} = (-2; -4)$. Vậy $\overline{AB} = -2\overline{CD}$, do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

Ta lại có $\overline{AC} = (2; 6)$, mà $\overline{AB} = (1; 2)$. Vậy hai vectơ $\overline{AB}, \overline{AC}$ không cùng phương. Do đó điểm C không thuộc đường thẳng AB

Vậy $AB \parallel CD$.

Bài 4.8. Cho các điểm A'(-4;1), B'(2; 4), C'(2;-2) lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Tính toạ độ các đỉnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C' trùng nhau.

HD Giải

Giải tương tự như bài 4.5, tìm được A(8;1), B(-4;-5) và C(-4;7)

Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là G(0;1) và toạ độ trọng tâm của tam giác A'B'C' là G'(0;1)

Vậy G trùng với G'.

Bài 4.9. Cho vectơ $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (1; 4)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (5; 0)$ theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

HD Giải

Giả sử $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}; h, k \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta có $\begin{cases} 2h + k = 5 \\ -2h + 4k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases}$. Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

Bài 4.10. Cho ba điểm A(2;5), B(1;1), C(3;3)

a) Tìm toạ độ điểm D sao cho $\overline{AD} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC}$

b) Tìm toạ độ của điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm toạ độ tâm của hình bình hành đó.

HD Giải

a) Gọi D(x;y), Ta có $\overline{AB} = (-1; -4), \overline{AC} = (1; -2)$.

$$\overline{AD} = 3\overline{AB} - 2\overline{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3(-1) - 2 \cdot 1 \\ y - 5 = 3(-4) - 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ . Vậy } D(-3; -3)$$

b) Gọi E(x;y). Tứ giác ABCE là hình bình hành, suy ra $\overline{AE} = \overline{BC}$,

$$\text{do đó } \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \text{ . Vậy } E(4; 7)$$

Gọi I(x;y) là tâm của hình bình hành, cũng là trung điểm của AC. Vậy $I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$

Bài 4.11. Cho tam giác ABC có A(-1;1), B(5;-3), đỉnh C nằm trên trục Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm toạ độ đỉnh C, G.

HD Giải

Ta có $C \in Oy \Rightarrow C(0; y_C), G \in Ox \Rightarrow G(x_G; 0)$. Do đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{-1+5+0}{3} \\ 0 = \frac{1-3+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4}{3} \\ y_C = 2 \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{4}{3}; 0\right); C(0; 2)$

Bài 4.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(4;0), B(2;-2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M. Trong ba điểm A, B, M, điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại.

HD & Giải

Gọi $M(0; y)$, ta có $\overline{AB} = (-2; -2), \overline{AM} = (-4; y)$. Vì ba điểm A, B, M thẳng hàng nên vector \overline{AB} và \overline{AM} cùng phương, suy ra $y = -4$. Vậy $M(0; -4)$. Khi đó $\overline{AB} = (-2; -2), \overline{AM} = (-4; -4)$, suy ra $\overline{AM} = 2\overline{AB}$. Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A và M.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4.13. Cho $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vector sau $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{z} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$

Bài 4.14. Cho $A(-1; 8), B(1; 6), C(3; 4)$. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 4.15. Cho bốn điểm $A(-2; -3), B(3; 7), C(0; 3), D(-4; -5)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Bài 4.16. Cho tam giác ABC. Các điểm $M(1; 1), N(2; 3), P(0; -4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, tọa độ trọng tâm của tam giác ABC và MNP

Bài 4.17. Cho tam giác ABC, có $A(-5; 6), B(-4; -1), C(4; 3)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AC, tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2; -3), B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

- A. $I(8; -21)$. B. $I(6; 4)$. C. $I(2; 10)$. D. $I(3; 2)$.

Câu 2. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2; 3), N(0; -4), P(-1; 6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ đỉnh A?

- A. $A(1; -10)$. B. $A(1; 5)$. C. $A(-3; -1)$. D. $A(-2; -7)$.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (2; -4), \vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $\vec{u} = (-1; 5)$. B. $\vec{u} = (9; -11)$. C. $\vec{u} = (9; -5)$. D. $\vec{u} = (7; -7)$.

Câu 4. Cho $\vec{u} = (3; -2), \vec{v} = (1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}$ cùng phương. B. \vec{u}, \vec{v} cùng phương.
C. $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng. D. $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng.

Câu 5. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3; 5), B(1; 2), C(5; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

- A. $G(9; 9)$. B. $G(3; 3)$. C. $G(-3; -3)$. D. $G\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của vector $\vec{i} + \vec{j}$ là

- A. (1;1). B. (1;-1). C. (-1;1). D. (0;1).

Câu 7. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $C(-6;-3)$. B. $C(-3;6)$. C. $C(6;-3)$. D. $C(-6;3)$.

Câu 8. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(-2;0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overline{BA} + 2\overline{CA} = \vec{0}$. B. A, B, C thẳng hàng.
C. $\overline{BA} = \frac{2}{3}\overline{BC}$. D. $\overline{AB} = 2\overline{AC}$.

Câu 9. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{u} = (4;2)$, $\vec{v} = (8;3)$ cùng phương. B. $\vec{a} = (6;3)$, $\vec{b} = (2;1)$ ngược hướng.
C. $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (-4;0)$ cùng hướng. D. $\vec{c} = (7;3)$ là vector đối của $\vec{d} = (-7;3)$.

Câu 10. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ vector \overline{MN} ?

- A. $\overline{MN} = (2;-8)$. B. $\overline{MN} = (1;-4)$. C. $\overline{MN} = (10;6)$. D. $\overline{MN} = (5;3)$.

Câu 11. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0}$.

- A. $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. B. $I(2;-2)$. C. $I(1;2)$. D. $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$.

Câu 12. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(-2;-4)$, trọng tâm $G(0;4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2;0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

- A. 4. B. 8. C. -2. D. 2.

Câu 13. Cho $\vec{a} = (-1;2)$, $\vec{b} = (5;-7)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} - \vec{b}$.

- A. (6;-9). B. (4;-5). C. (-6;9). D. (-5;-14).

Câu 14. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3;-2)$, $B(7;1)$, $C(0;1)$, $D(-8;-5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB}, \overline{CD}$ cùng hướng. B. A, B, C, D thẳng hàng.
C. $\overline{AB}, \overline{CD}$ là hai vector đối nhau. D. $\overline{AB}, \overline{CD}$ ngược hướng.

Câu 15. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(4;3)$. B. $D(3;4)$. C. $D(4;4)$. D. $D(8;6)$.

Câu 16. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(4;3)$, $D(3;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AC}, \overline{AD}$ cùng phương. B. $G(9;7)$ là trọng tâm tam giác BCD .
C. $\overline{AB} = \overline{CD}$. D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 17. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0;3)$, $D(2;1)$ và $I(-1;0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ tung điểm của cạnh BC .

- A. (-3;-2). B. (-4;-1). C. (1;2). D. (-2;-3).

Câu 18. Cho $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (4;x)$. Tìm x để hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng phương.

- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = -5$. D. $x = 4$.

Câu 19. Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(-4; 6)$. B. $(2; -2)$. C. $(4; -6)$. D. $(-3; -8)$.

Câu 20. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$, điểm C thuộc trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. \overline{AB} có tung độ khác 0. B. Hai điểm A, B có tung độ khác nhau.
C. C có hoành độ bằng 0. D. $x_A + x_C - x_B = 0$.

Câu 21. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của vectơ \overline{AB} ?

- A. $\overline{AB} = (15; 10)$. B. $\overline{AB} = (2; 4)$. C. $\overline{AB} = (5; 6)$. D. $\overline{AB} = (50; 16)$.

Câu 22. Cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Xác định x sao cho \vec{u} và \vec{v} cùng phương.

- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = -\frac{1}{2}$. D. $x = \frac{1}{4}$.

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

- A. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. B. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$. C. $M(1; 0)$. D. $M(4; 0)$.

Câu 24. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2)$, $B(3; 5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $C(1; 7)$. B. $C(-1; -7)$. C. $C(2; -2)$. D. $C(-3; -5)$.

Câu 25. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0; -3)$, $B(2; 1)$, $D(5; 5)$ Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $C(-7; -9)$. B. $C(3; 1)$. C. $C(-3; -1)$. D. $C(7; 9)$.

Câu 26. Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- A. $x = -15$. B. $x = 3$. C. $x = 15$. D. $x = 5$.

Câu 27. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-5; -2)$, $B(-5; 3)$, $C(3; 3)$, $D(3; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$. B. $\overline{AB}, \overline{CD}$ cùng hướng.
C. $ABCD$ là hình chữ nhật. D. $I(-1; 1)$ là trung điểm AC .

Câu 28. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $N(5; -3)$ và C thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

- A. $C(0; -4)$. B. $C(2; 4)$. C. $C(0; 2)$. D. $C(0; 4)$.

Câu 29. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 0)$, $B(0; 3)$ và $C(-3; -5)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P = |2\overline{MA} - 3\overline{MB} + 2\overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(4; 0)$. B. $M(-4; 0)$. C. $M(16; 0)$. D. $M(-16; 0)$.

Câu 30. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overline{AB} - \overline{AC}$.

- A. $(-1; 1)$. B. $(-5; -3)$. C. $(1; 1)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 31. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 1)$, $B(-2; -2)$, $C(7; 7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB}, \overline{AC}$ cùng hướng. B. B ở giữa hai điểm A và C .

C. A ở giữa hai điểm B và C .

D. $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Câu 32. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét hai mệnh đề:

(I). $ABCD$ là hình bình hành. (II). AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng.

D. Cả (I) và (II) đều sai.

Câu 33. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy . Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$.

B. $\overrightarrow{OM_2} = 4$.

C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3;-4)$.

D. $\overrightarrow{OM_1} = -3$.

Câu 34. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2;1)$, $\vec{b} = (3;4)$, $\vec{c} = (7;2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ là

A. $k = 3,4; h = -0,2$.

B. $k = 2,5; h = -1,3$.

C. $k = 4,6; h = -5,1$.

D. $k = 4,4; h = -0,6$.

Câu 35. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1;5)$, $B(5;5)$, $C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

B. A, B, C thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

- a) Với m tùy ý, hãy chứng minh $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$
- b) Chứng minh rằng $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$

HD & Giải

- a) $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{OM}$ và $\overline{MB} + \overline{MD} = 2\overline{OM}$. Vậy $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$
- b) $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC} \Rightarrow |\overline{AB} + \overline{AD}| = AC, |\overline{AB} - \overline{AD}| = DB$. Vì hai đường chéo hình chữ nhật bằng nhau nên $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AB} - \overline{AD}|$.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và BI. Chứng minh:

- a) $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AI}$
- b) $\overline{AK} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$

HD & Giải

- a) Vì K là trung điểm của BI nên $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AI}$ (1)
- b) Vì I là trung điểm của BC nên $\overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$ (2). Thay (2) vào (1), ta có $\overline{AK} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA.

- a) Chứng minh rằng $\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} = \vec{0}$
- b) Chứng minh rằng $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \vec{0}$

HD & Giải

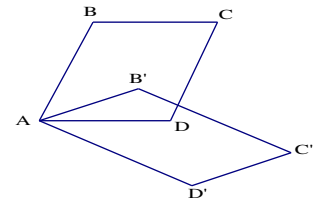
- a) Ta có $\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} = \frac{1}{2}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GC} + \overline{GA}) = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$
- b) Ta có $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{BA} + \overline{CB} + \overline{CA}) = \frac{1}{2}.\vec{0} = \vec{0}$

Bài 4. Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A. Chứng minh rằng

- a) $\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$
- b) Hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm.

HD & Giải

- a) Ta có $\overline{CC'} = \overline{AC'} - \overline{AC} = \overline{AB'} + \overline{AD'} - \overline{AB} - \overline{AD} = (\overline{AB'} - \overline{AB}) + (\overline{AD'} - \overline{AD}) = \overline{BB'} + \overline{DD'}$



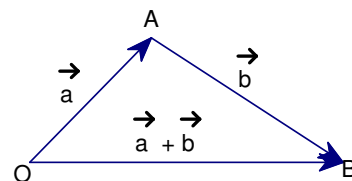
- b) Từ $\overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'}$, với mọi điểm G ta có $\overline{GC'} - \overline{GC} = \overline{GB'} - \overline{GB} + \overline{GD'} - \overline{GD} \Leftrightarrow \overline{GB} + \overline{GD} + \overline{GC'} = \overline{GB'} + \overline{GD'} + \overline{GC}$
Suy ra $\overline{GB} + \overline{GD} + \overline{GC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GB'} + \overline{GD'} + \overline{GC} = \vec{0}$. Vậy nếu G là trọng tâm của tam giác BC'D thì G cũng là trọng tâm tam giác B'CD'.

Bài 5. Chứng minh rằng với hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} , ta có $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$

HD & Giải

Từ điểm O bất kì, ta vẽ $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$. Vì \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nên ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác OAB ta có:

$OA - AB < OB < OA + AB$ hay là $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$



Bài 6. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{u} = \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

HD & Giải

Với mọi điểm O, ta có

$$\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{OA} - \vec{OM} + \vec{OB} - \vec{OM} + 2\vec{OC} - 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 4\vec{OM}$$

Ta chọn điểm O sao cho $\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = \vec{0}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\vec{v} = \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = 4\vec{OG} + \vec{GC}$

Bởi vậy, để $\vec{v} = \vec{0}$, ta chọn điểm O sao cho $\vec{GO} = \frac{1}{4}\vec{GC}$

Vậy, ta có $\vec{u} = -4\vec{OM} \Rightarrow |\vec{u}| = 4OM$. Độ dài của vectơ \vec{u} nhỏ nhất khi và chỉ khi 4OM nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các điểm M, N, P, Q sao cho

a) $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$

b) $\vec{NA} + \vec{NB} + 2\vec{NC} = \vec{0}$

c) $\vec{PA} - \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$

d) $\vec{QA} - \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0}$

HD & Giải

a) Gọi I là trung điểm của AB, thì ta có $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0}$ khi và chỉ khi

$$2(\vec{MI} - \vec{MC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{CI} = \vec{0}. \text{ Không có điểm M nào như thế.}$$

b) Ta có $\vec{NA} + \vec{NB} + 2\vec{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\vec{NI} + \vec{NC}) = \vec{0}$. N là trung điểm của CI

c) $\vec{PA} - \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} + 2\vec{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{PC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Như vậy, nếu lấy điểm D sao cho ABCD là hình bình hành thì P là trung điểm của CD.

d) $\vec{QA} - \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{QC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{QC} = \vec{AB}$. Q là điểm sao cho ABCQ là hình bình hành.

Bài 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm A(-1;3), B(4;2), C(3;5)

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $\vec{AD} = -3\vec{BC}$

c) Tìm toạ độ điểm E sao cho O là trọng tâm của tam giác ABE

HD & Giải

a) Ta có $\vec{AB} = (5; -1)$, $\vec{BC} = (-1; 3)$.

Vì $\frac{5}{-1} \neq \frac{-1}{3}$ nên hai vectơ \vec{AB} , \vec{BC} không cùng phương, nghĩa là ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi $D(x; y)$, ta có $\vec{AD} = (x+1; y-3)$ và $-3\vec{BC} = (3; -9)$.

$$\text{Ta có } \vec{AD} = -3\vec{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ y-3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-6 \end{cases}. \text{ Vậy } D(2; -6)$$

c) Gọi $E(x; y)$ và O là trọng tâm của tam giác ABE. Ta có $\begin{cases} \frac{-1+4+x}{3} = 0 \\ \frac{3+2+y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases}$. Vậy $E(-3; -5)$

Bài 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm G(1;2). Tìm toạ độ điểm A thuộc Ox và điểm B thuộc Oy sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.

HD & Giải

Gọi $A(x; 0)$, $B(0; y)$. G là trọng tâm của tam giác OAB khi và chỉ khi $\frac{x+0+0}{3} = 1$ và $\frac{0+y+0}{3} = 2$

Vậy $A(3; 0)$, $B(0; 6)$

Bài 10. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm A(1;4) và B(2;2). Đường thẳng đi qua A và B cắt trục Ox tại M và cắt trục Oy tại N. Tính diện tích tam giác OMN.

HD & Giải

Gọi $M(0; x)$, $N(0; y)$. Khi đó $\vec{AB} = (1; -2)$, $\vec{AM} = (x-1; -4)$, $\vec{AN} = (-1; y-4)$

Vì \vec{AB} , \vec{AM} cùng phương nên $\frac{x-1}{1} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x=3$. Vậy $M(3; 0)$

Và $\overline{AB}, \overline{AN}$ cùng phương nên $\frac{-1}{1} = \frac{y-4}{-2} \Rightarrow y = 6$. Vậy $M(0; 6)$

Diện tích tam giác OMN là $S = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} |\overline{OM}| |\overline{ON}| = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (đvdt).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho bốn điểm A, B, C, D. Tìm các vector:

a) $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{DC} + \overline{BD} + \overline{CA}$

b) $\vec{v} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA}$

Bài 12. Cho lục giác đều ABCDEF và điểm M tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overline{MA} + \overline{MC} + \overline{ME} = \overline{MB} + \overline{MD} + \overline{MF}$

Bài 13. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N. Tính $\vec{u} = \overline{AE} + \overline{AF} + \overline{AN} + \overline{MN}$

Bài 14. Cho hai điểm A và B. Điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$. Chứng minh rằng

$$OM = \frac{1}{2} AB, \text{ với } O \text{ là trung điểm của } AB.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vector $\vec{u} = \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M. Hãy dựng điểm D sao cho $\overline{CD} = \vec{u}$.

Bài 16. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $2\overline{IA} + 3\overline{IB} = \vec{0}$

a) Tìm số k sao cho $\overline{AI} = k\overline{AB}$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $\overline{MI} = \frac{2}{5}\overline{MA} + \frac{3}{5}\overline{MB}$

Bài 17. Cho các vector $\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (3; -4), \vec{c} = (-7; 2)$.

a) Tìm tọa độ các vector sau $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$

b) Tìm x sao cho $x\vec{a} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$

c) Tìm các số h và k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

Bài 18. Cho hai vector $\vec{u} = (3; -4), \vec{v} = (2; 5)$

a) Tìm tọa độ các vector $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}$ và $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) Tìm a sao cho $\vec{w} = (a; 16)$ và \vec{u} cùng phương. Khi đó \vec{u} và \vec{w} cùng hướng hay ngược hướng?

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A(-3;6), B(9;-10), C(-5;4).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) Tìm tọa độ trung điểm I của BC và tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác BGCD là hình bình hành.

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A(4;0), B(8;0), C(0;4), D(0;6) và M(2;3)

a) Chứng minh rằng ba điểm B, C, M thẳng hàng và A, D, M thẳng hàng

b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OM, AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, R thẳng hàng

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(2;8) và B(4;4). Đường thẳng đi qua A và B cắt trục Oy tại M và cắt trục Ox tại N. Tính diện tích tam giác OMN.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm G(2;4). Tìm tọa độ điểm A thuộc Oy và điểm B thuộc Ox sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm A(-2; 4), B(1; 3), C(3; 2)

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overline{AD} = -3\overline{BC}$

c) Tìm tọa độ điểm E sao cho O là trọng tâm của tam giác ACE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}| = a$. B. $\overline{CA} = -\overline{BC}$. C. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. D. $\overline{CA} = -\overline{AB}$.

Câu 2. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vector bằng \overline{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh

của lục giác là

- A.** 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = \vec{0}$. **B.** $\overline{PB} + \overline{MC} = \overline{MP}$.
C. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$. **D.** $\overline{AP} + \overline{BM} + \overline{CN} = \vec{0}$.

Câu 4. Cho $\overline{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 5. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC . Hỏi vectơ $\overline{MP} + \overline{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

- A.** \overline{MN} . **B.** $\overline{MB} + \overline{NB}$. **C.** \overline{AP} . **D.** \overline{BP} .

Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào dưới đây sai?

- A.** $\overline{AB} = \overline{ED}$. **B.** $|\overline{AB}| = |\overline{AF}|$. **C.** $\overline{OD} = \overline{BC}$. **D.** $\overline{OB} = \overline{OE}$.

Câu 7. Vectơ có điểm đầu là D , điểm cuối là E được kí hiệu là

- A.** \overline{DE} . **B.** DE . **C.** $|\overline{DE}|$. **D.** \overline{ED} .

Câu 8. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overline{HB} + \overline{HC} = \vec{0}$. **B.** $\overline{AB} = \overline{AC}$.
C. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AH}$. **D.** $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \vec{0}$.

Câu 9. Cho $\overline{AB} = -\overline{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $\overline{AB} + \overline{DC} = \vec{0}$.
C. \overline{AB} và \overline{CD} cùng hướng. **D.** \overline{AB} và \overline{CD} cùng độ dài.

Câu 10. Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A.** Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
B. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.
C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
D. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

Câu 11. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overline{OB} - \overline{OC}$.

- A.** $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{BC}$. **B.** $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{DA}$. **C.** $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OD} - \overline{OA}$. **D.** $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{AB}$.

Câu 12. Với \overline{DE} (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

- A.** Độ dài của \overline{ED} . **B.** Hướng của \overline{ED} . **C.** Giá của \overline{ED} . **D.** Phương của \overline{ED} .

Câu 13. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CB}$. **B.** $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{CA}$. **C.** $\overline{CA} - \overline{BA} = \overline{BC}$. **D.** $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hai vectơ $\overline{AB}, \overline{AC}$ cùng hướng. **B.** $\overline{AC} = \overline{BD}$.
C. $\overline{AB} = \overline{CD}$. **D.** $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$.

Câu 15. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A.** $\overline{BC} = \overline{DA}$. **B.** $|\overline{BD}| = a$. **C.** $\overline{BD} = \overline{AC}$. **D.** $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Câu 16. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overline{AB} = \overline{CD}$?

- A.** $AB = CD$. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.
C. $AC = BD$. **D.** $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 17. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\overline{OA} = -\overline{OB}$. **B.** $\overline{AB} = -\overline{OB}$. **C.** $OA = -OB$. **D.** $AB = -BA$.

Câu 18. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với \overline{OC} có

điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 9. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\overline{MN} = \overline{QP}$. B. $|\overline{QP}| = |\overline{MN}|$. C. $\overline{MQ} = \overline{NP}$. D. $|\overline{MN}| = |\overline{AC}|$.

Câu 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{MB} = \overline{MC}$. B. $\overline{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overline{AM} = a$. D. $|\overline{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overline{BC} - \overline{BA} = \overline{HC} - \overline{HA}$. B. $|\overline{AH}| = |\overline{AB} - \overline{AH}|$.
C. $|\overline{AH} + \overline{HB}| = |\overline{AH} + \overline{HC}|$. D. $\overline{AH} - \overline{AB} = \overline{AH} - \overline{AC}$.

Câu 22. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

- A. $\overline{AI} = \overline{BI}$. B. $IA = IB$. C. $\overline{IA} = \overline{IB}$. D. $\overline{IA} = -\overline{IB}$.

Câu 23. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

- A. $\overline{IA} = \overline{IB}$. B. $\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$. C. $\overline{IA} - \overline{IB} = \vec{0}$. D. $IA = IB$.

Câu 24. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector. B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vector.
C. $|\overline{AB}| > 0$. D. $\overline{AA} = \vec{0}$.

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{DB}$. B. $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{BD}$. C. $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{CA}$. D. $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AC}$.

Câu 26. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp vector nào dưới đây cùng hướng?

- A. \overline{MN} và \overline{CB} . B. \overline{AB} và \overline{MB} . C. \overline{MA} và \overline{MB} . D. \overline{AN} và \overline{CA} .

Câu 27. Tính tổng $\overline{MN} + \overline{PQ} + \overline{RN} + \overline{NP} + \overline{QR}$.

- A. \overline{MP} . B. \overline{MN} . C. \overline{PR} . D. \overline{MR} .

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AA} + \overline{BB} = \overline{AB}$. B. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$. C. $\overline{MP} + \overline{NM} = \overline{NP}$. D. $\overline{CA} + \overline{BA} = \overline{CB}$.

Câu 29. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overline{AB} = \overline{AC}$.
B. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \overline{AB} cùng phương với \overline{AC} .
C. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , \overline{MA} cùng phương với \overline{AB} .
D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , \overline{MA} cùng phương với \overline{AB} .

Câu 30. Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- A. 4. B. 9. C. 3. D. 6.

Câu 31. Cho $\overline{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$?

- A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB} = \overline{BC}$. B. $\overline{AB} = \overline{CD}$. C. $\overline{AC} = \overline{BD}$. D. $|\overline{AD}| = |\overline{CB}|$.

Câu 33. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.
B. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.
C. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.
D. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.

Câu 34. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn

ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{CH}$. B. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{HC}$.
 C. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AC} = \overline{CH}$. D. $\overline{HA} = \overline{CD}$ và $\overline{AD} = \overline{HC}$ và $\overline{OB} = \overline{OD}$.

Câu 35. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $|\overline{BC}| = 2|\overline{MN}|$. B. $\overline{AB} = \overline{AC}$. C. $\overline{MN} = \overline{BC}$. D. $\overline{MA} = \overline{MB}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AM}$. B. $\overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BA} = \vec{0}$. C. $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{AB}$. D. $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overline{AB} = \overline{AC}$. B. $\overline{HC} = -\overline{HB}$. C. $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$. D. $\overline{BC} = 2\overline{HC}$.

Câu 38. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Câu 39. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overline{AB} - \overline{CA} = \overline{BC}$. B. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$.
 C. $\overline{AB} = \overline{BC} \Leftrightarrow |\overline{CA}| = |\overline{BC}|$. D. $AB + BC = AC$.

Câu 40. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$.
 B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$.
 C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{CB} + \overline{CD} = \overline{CA}$.
 D. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$.

Câu 41. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$. B. \overline{OB} và \overline{OD} cùng hướng.
 C. \overline{AC} và \overline{BD} cùng hướng. D. $\overline{OA} = \overline{OC}$.

Câu 42. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overline{BC} - \overline{BA} = \overline{DC} - \overline{DA}$. B. $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{CD}$. C. $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OD} - \overline{OA}$. D. $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$.

Câu 43. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào dưới đây sai?

- A. $\overline{OA} = \overline{OC}$. B. $\overline{CB} = \overline{DA}$. C. $\overline{AB} = \overline{DC}$. D. $\overline{OB} = \overline{DO}$.

Câu 44. Cho \vec{a} và \vec{b} là các vector khác $\vec{0}$ với \vec{a} là vector đối của \vec{b} . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng độ dài. B. Hai vector \vec{a}, \vec{b} chung điểm đầu.
 C. Hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng phương. D. Hai vector \vec{a}, \vec{b} ngược hướng.

Câu 45. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overline{AB} = \overline{CD}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. \overline{AB} cùng hướng \overline{CD} . B. \overline{AB} cùng phương \overline{CD} .
 C. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. D. $ABCD$ là hình bình hành.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	