CHƯƠNG 1

VECTƠ

BÀI 1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

TÓM TẮT LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. Để xác định một véctơ cần biết một trong hai điều kiện sau:

- Điểm đầu và điểm cuối của vectơ.

- Độ dài và hướng.

2. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

3. Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

4. $\vec{a}=\vec{b}$ khi và chỉ khi $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

5. Với mỗi điểm A ta gọi vectơ $\overrightarrow{AA}$ là vectơ-không. Vectơ-không được kí hiệu là $\vec{0}$ và quy ước rằng $|\vec{0}|=0$, vectơ $\vec{0}$ cùng phương cùng hướng với mọi vectơ.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTƠ, SỰ CÙNG PHƯƠNG VÀ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

PHƯƠNG PHÁP

- Để xác định vectơ ta cần biết điểm đầu và điểm cuối của vectơ hoặc biết độ dài và hướng của chúng. Chẳng hạn với hai điểm A, B phân biệt, ta có hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
- Vectơ $\vec{a}$ là vectơ-không khi và chỉ khi $|\vec{a}|=0$ hoặc $\vec{a}=\overrightarrow{AA}$ với A là điểm bất kì.

Bài 1. Cho 5 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

Lời giải

Xét các điểm A, B, C, D, E phân biệt.

Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}$.

Vậy có 20 véctơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

Bài 2. Cho Hãy tính số các vectơ mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau đây:

a) Hai điểm. **b)** Ba điểm. **c)** Bốn điểm.

Lời giải

a) Xét hai điểm A, B phân biệt. Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$.

Vậy có 2 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

b) Xét các điểm A, B, C phân biệt.

Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Vậy có 6 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

c) Xét các điểm A, B, C, D phân biệt.

Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trên là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

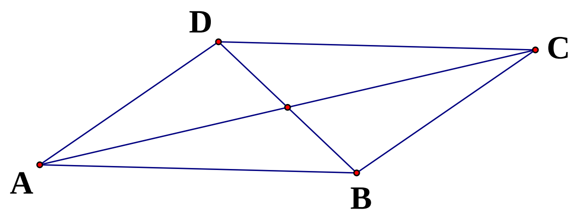
Vậy có 12 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho.

Bài 3. Cho hình bình hành. Hãy chỉ ra các vectơ khác nhau và khác vectơ – không, có điểm đầu và điểm cuối một trong bốn điểm của hình hành. Trong các vectơ trên hãy chỉ ra:

a) Các cặp vectơ cùng phương.

b) Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.

Lời giải



Giả sử hình bình hành là $ABCD$. Có 12 vectơ khác nhau và khác vectơ – không, có điểm đầu và điểm cuối một trong bốn điểm của hình hành là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$

a) Các bộ vectơ cùng phương với nhau:

* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$.

* $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.

* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$.

* $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

b) Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{DB}$.

Bài 4. Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt A, B, C trong các trường hợp sau:

a) AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|AB| > |AC|$.

b) AB và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.

c) AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|AB| < |AC|$.

Lời giải

a) AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng, $|AB| > |AC|$.

AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng $\Rightarrow$ điểm A nằm ngoài đoạn BC. Do $|AB| > |AC|$ nên điểm C là điểm giữa của hai điểm A và B.

b) AB và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.

AB và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng nên điểm A là điểm giữa hai điểm B và C.

c) AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|AB| < |AC|$.

AB và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $|AB| < |AC|$ nên điểm B là điểm giữa của hai điểm A và C.

Bài 5. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u}$ và v. Có hay không có một vectơ cùng phương với hai vectơ đó?

Lời giải

Có, chọn vectơ đó là vectơ $\vec{0}$, vectơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Bài 6. Cho ba vectơ cùng phương $\vec{u}, v, w$. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vectơ trong ba vectơ đó cùng hướng.

Lời giải

Chú ý rằng hai vectơ cùng phương chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Giả sử $\vec{u}$ và v không cùng hướng.

Khi đó vì w cùng phương với $\vec{u}$ nên w cùng hướng hoặc ngược hướng với $\vec{u}$.

Nếu w cùng hướng với $\vec{u}$ thì bài toán được chứng minh.

Nếu w ngược hướng với $\vec{u}$ thì v, w cùng ngược hướng với $\vec{u}$ nên hai vectơ v, w cùng hướng nhau.

Bài 7. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba thì cùng phương.

b) Hai vecto cùng phương với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

c) Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba thì cùng hướng.

d) Hai vecto cùng hướng với một vecto thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.

e) Hai vecto ngược hướng với một vecto khác $\vec{0}$ thì cùng hướng.

f) Điều kiện cần và đủ để hai vecto bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Lời giải

Trong các khẳng định trên thì:

a) Khẳng định sai trong trường hợp vecto thứ ba là vecto $\vec{0}$.

b) Khẳng định đúng.

c) Khẳng định sai trong trường hợp vecto thứ ba là vecto $\vec{0}$.

d) Khẳng định đúng.

e) Khẳng định đúng.

f) Khẳng định sai. Vì: điều kiện cần và đủ để hai vecto bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau và cùng hướng.

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU

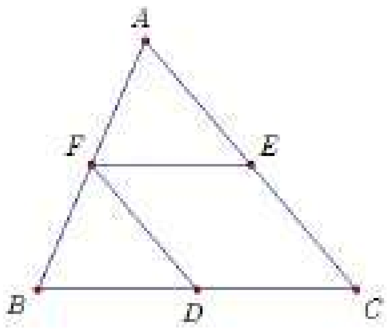
PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

- **Cách 1:** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a};\vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow a = b$.
- **Cách 2:** Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = DC$ và $BC = AD$.
- **Cách 3:** Nếu $\vec{a} = \vec{b}; \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{c}$.

Bài 1. Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh $EF = CD$

Lời giải



Theo giả thiết, ta có: D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình ΔABC và $EF = \frac{1}{2}BC$ (1).

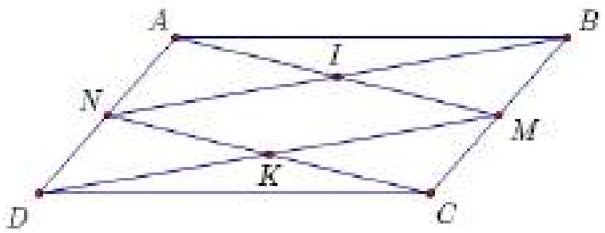
Lại có D là trung điểm $BC \Rightarrow CD = \frac{1}{2}CB$ (2).

Dễ thấy $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng CD (3)

Từ $(1);(2);(3) \Rightarrow EF = CD$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$

Lời giải



• Chứng minh $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Ta có:

M trung điểm $BC \to MC = \frac{1}{2}BC$.

N trung điểm $AD \to AN = \frac{1}{2}AD$.

Mà $AD = BC \Rightarrow AN = MC \Rightarrow$ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

• Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

Ta có: $\begin{cases} AN // MB \\ AN = MB \\ MN // AB \end{cases} \Rightarrow ABMN$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm $NB \Rightarrow NI = \frac{1}{2}NB$ (1).

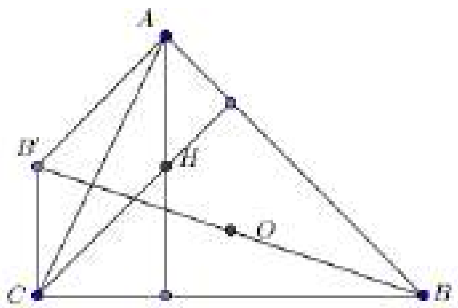
Ta có: $\begin{cases} DN // MC \\ DN = MC \\ MN // DC \end{cases} \Rightarrow CDNM$ là hình bình hành $\Rightarrow K$ là trung điểm $MD \Rightarrow DK = \frac{1}{2}DM$ (2).

Dễ thấy $BNDM$ là hình bình hành do $\begin{cases} BN // MD \\ BN = MD \end{cases}$ nên $ND = BM$ (3).

Từ $(1);(2);(3) \Rightarrow \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Lời giải



Ta có B' là điểm đối xứng của B qua O nên BB' là một đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $OC = \frac{1}{2}BB'$ nên tam giác CBB' vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} B'C \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow B'C \,//\, AH \quad (1)$.

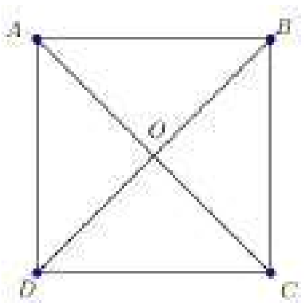
Tương tự: $OA = \frac{1}{2}BB'$ nên tam giác ABB' vuông tại A.

Ta có: $\begin{cases} B'A \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow B'A \,//\, CH \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Liệt kê tất cả các véctơ bằng nhau nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông là điểm đầu và điểm cuối.

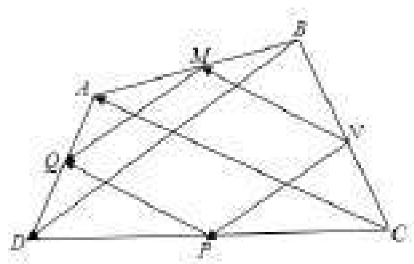
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$; $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

Lời giải

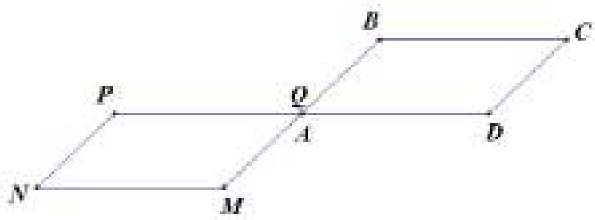


Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải



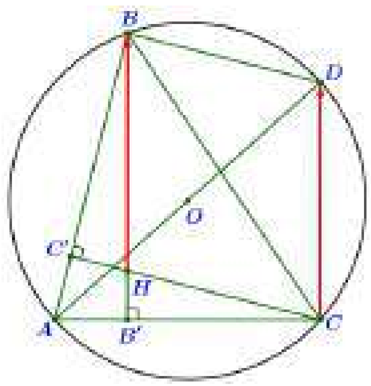
Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} \end{cases}$.

Ta có: $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tia AO cắt đường tròn tâm O tại D. Chứng minh $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải



Vì H là trực tâm của tam giác ABC

nên $HB \perp AC$

Vì tia AO cắt đường tròn tâm O tại D

nên AD là đường kính của đường tròn tâm O

$\Rightarrow$ $ACD = 90^\circ$

$\Leftrightarrow$ $CD \perp AC$

Từ và $\Rightarrow$ $HB // CD$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow$ $BD // HC$

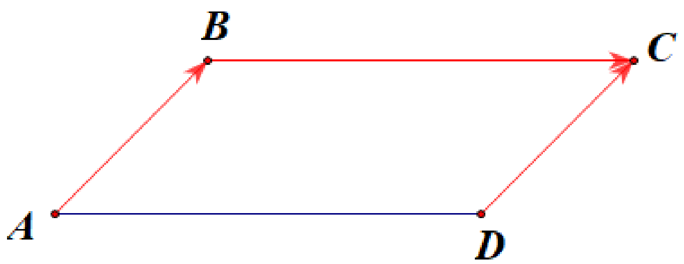
Do đó tứ giác $BDCH$ là hình bình hành

Khi đó ta có: $\vec{HB}$ cùng chiều với $\vec{CD}$ và $|\vec{HB}| = |\vec{CD}|$

Vậy $\vec{HB} = \vec{CD}$.

Bài 8. Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu có $\vec{AB} = \vec{DC}$ và $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$.

Lời giải



Vì $\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow AB = DC$ và AB cùng phương với $DC \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AB // DC \end{cases}$

Nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

Vì $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| \Leftrightarrow AB = BC$

Nên $ABCD$ là hình thoi.

Bài 9. Cho $|\vec{a}+\vec{b}| = 0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}| = 0 \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ đối nhau. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, ngược chiều và cùng độ dài.

Bài 10. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác vectơ_không. Khi nào đẳng thức sau xảy ra?

a) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. **b)** $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

Lời giải

a) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2.\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2.\vec{a}.\vec{b}$.

Và $(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2.|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Do đó $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$, mà $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

$\Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = 1 \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0°$.

$\Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng chiều.

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$.

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|-\vec{b}\right|=\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(-\vec{b}\right)\right|$.

hay $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(-\vec{b}\right)\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+\left|-\vec{b}\right|$.

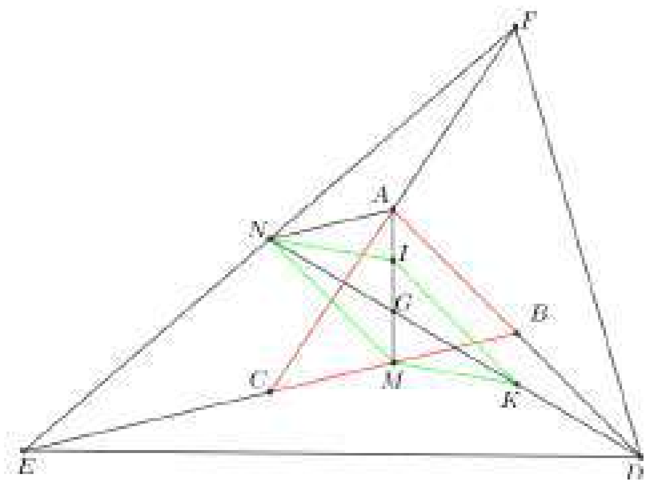
Áp dụng phần a) ta suy ra $\vec{a}+\vec{b}$ và $-\vec{b}$ là hai vectơ cùng chiều.

Hay $\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ ngược chiều.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Vẽ D đối xứng với A qua B, E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A. Gọi G là giao điểm của trung tuyến AM của tam giác ABC với trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi I và K lần lượt là trung điểm GA và GD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}$. **b)** $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{NI}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}$.

Ta có A, N lần lượt là trung điểm của FC, FE

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

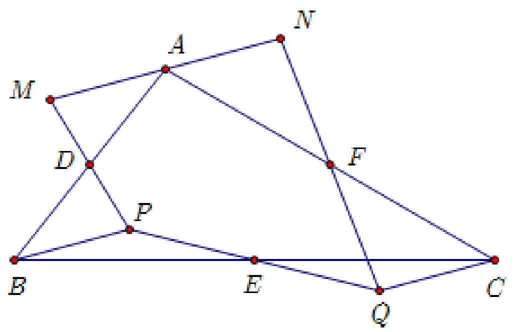
Mà $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ suy ra $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BM} \Rightarrow$ tứ giác $ANMB$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{NI}$.

Ta có I, K lần lượt là trung điểm của GA và $GD \Rightarrow \overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM} \Rightarrow$ tứ giác $INMK$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{NI}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vẽ điểm P đối xứng với M qua D, điểm Q đối xứng với P qua E, điểm N đối xứng với Q qua F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$.

Lời giải



Ta có :

+) D là trung điểm AB và M đối xứng P qua $D \Rightarrow D$ là trung điểm MP.

Nên $AMBP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BP}$ (1).

+) E là trung điểm BC và P đối xứng Q qua $E \Rightarrow E$ là trung điểm PQ.

Nên $BPCQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QC}$ (2).

+) F là trung điểm AC và Q đối xứng N qua $F \Rightarrow F$ là trung điểm NQ.

Nên $QCNA$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AN}$ (3).

Từ $(1);(2)$ và $(3) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MA} \Rightarrow MA = AN$.

Bài 13. Cho tam giác ABC và tam giác AEF có cùng trọng tâm G. Chứng minh: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

Lời giải

Ta có G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (1).

Và G là trọng tâm $\Delta AEF \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ (2).

Từ (1) và (2):

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BE}$$

BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. Định nghĩa tổng và hiệu của hai véctơ và quy tắc tìm tổng

- Cho hai véctơ tùy ý $\vec{a};\vec{b}$. Lấy điểm A tùy ý, dựng $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- Với ba điểm $M;N;P$ tùy ý ta luôn có: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$ (quy tắc ba điểm).
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

2. Định nghĩa véctơ đối

- Vectơ $\vec{b}$ là vectơ đối của véctơ $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ và $\vec{a};\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.

Kí hiệu: $\vec{b}=-\vec{a}$.

- Nếu $\vec{a}$ là vectơ đối của véctơ $\vec{b}$ thì $\vec{b}$ là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ hay $-(-\vec{a})=\vec{a}$.
- Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$.
- Vectơ đối của $\vec{0}$ là $\vec{0}$.

3. Định nghĩa hiệu của hai véctơ và quy tắc tìm hiệu

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, với ba điểm O, A, B bất kỳ (quy tắc trừ).

4. Tính chất của phép cộng các véctơ

Với ba véctơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kỳ ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán).
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (tính chất kết hợp).
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$ (tính chất véctơ không).
- $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$.

5. Tính chất trung đểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

a) Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

DẠNG TOÁN 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, hệ thức trung điểm, trọng tâm kết hợp với các tính chất phép cộng, phép trừ, phép nhân để biến đổi tương đương cho biểu thức cần chứng minh. Khi đó ta có hướng sau:

• ***Cách 1:*** Biến đổi một vế thành một vế còn lại. Khi đó nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức. Còn nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện phép phân tích vectơ.

• ***Cách 2:*** Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng. Hoặc ngược lại, biến đổi một đẳng thức vectơ là luôn đúng thành đẳng thức vectơ cần chứng minh.

Bài 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$. **b)** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{ED}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

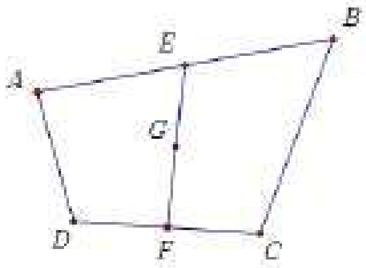
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$.

Bài 2. Cho cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm EF. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$. **b)** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$.

• $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{EF}$ (1).

Do E là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.

Do F là trung điểm CD nên $2\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ với O là một điểm tùy ý.

$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OF}-2\overrightarrow{OE}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}}_{\vec{0}}\right)-\left(\underbrace{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}}_{\vec{0}}\right)=\vec{0}\Rightarrow$ ĐPCM.

- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}\ (2)$.

Do E là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.

Do F là trung điểm CD nên $2\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ với O là một điểm tùy ý.

$(2)\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OF}-2\overrightarrow{OE}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}}_{\vec{0}}\right)-\left(\underbrace{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}}_{\vec{0}}\right)=\vec{0}\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\ (3)$.

Do E là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ với O là một điểm tùy ý.

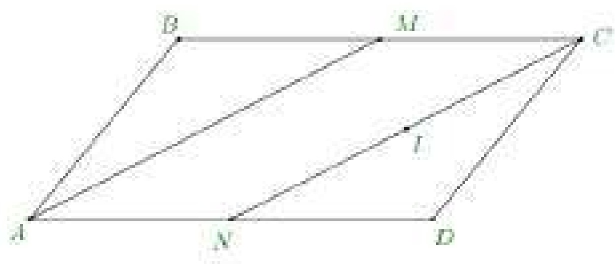
Do F là trung điểm CD nên $2\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ với O là một điểm tùy ý.

$(3)\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{GE}-\overrightarrow{GB}\right)+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\left(2\overrightarrow{GF}-\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\underbrace{\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}}_{\vec{0}}\right)=\vec{0}\Rightarrow$ ĐPCM.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tìm tổng của hai vectơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

Lời giải



Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$, nên: $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$, nên: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ND}$.

Gọi I là trung điểm NC.

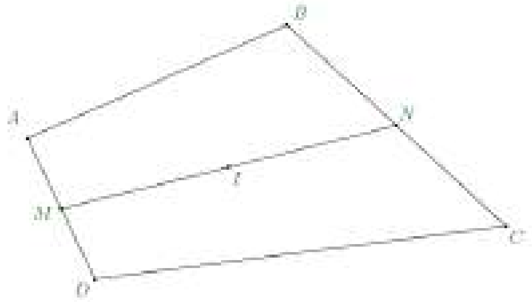
Vì $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AN}$, nên $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi hai điểm M và N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AD, BC.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)$.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)$.

• Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

Vì M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$

Vì N là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{0}$

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$$

• Chứng minh $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\Rightarrow.$$

Vậy: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\right)\Rightarrow$.

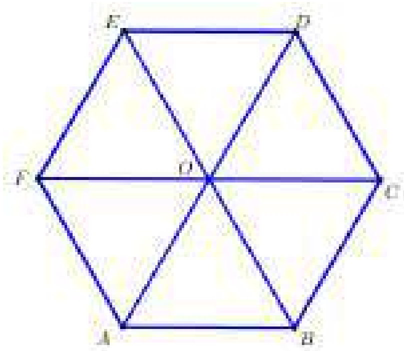
b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$.

Áp dụng hệ thức trung điểm, ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)=2.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}.$$

Bài 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải



Vì O là tâm của hình lục giác đều $ABCDEF$ nên ta có: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OF}$ là các cặp vectơ đối nhau nên ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$.

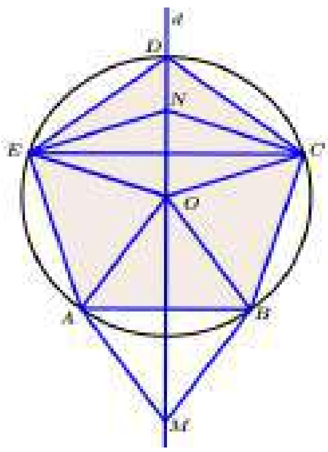
Bài 6. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O.

a) Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

b) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều. Ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và $M\in d$.

Tương tự: $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{ON}$, trong đó N là đỉnh của hình thoi $OENC$ và $N\in d$.

Do đó: hai vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ đều có giá là đường thẳng d nên cùng phương với nhau và cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

b) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

Ta có: $OAMB$ và $OENC$ là các hình thoi nên ta có: $\begin{cases} EC\perp d \\ AB\perp d \end{cases}\Rightarrow AB\,//\,EC$.

Do đó: hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EC}$ cùng phương.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Theo câu a) ta có:

$$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}\right)+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$$

Nên $\vec{v}$ có giá là đường thẳng d.

Mặt khác: $\vec{v}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OE}$ thì $\vec{v}$ có giá là đường thẳng OE.

Vì $\vec{v}$ có 2 giá khác nhau nên $\vec{v}=\vec{0}$.

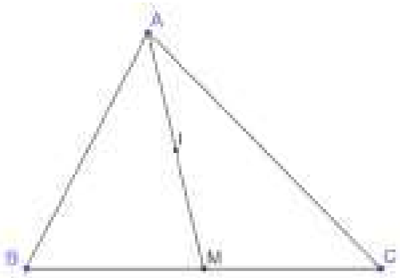
Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IM}$ ($\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$ do M là trung điểm BC)

$=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}\right)$

$=\vec{0}$ ($\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\vec{0}$ do I là trung điểm của AM).

b) Với O là điểm bất kì, chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

Ta có: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IO}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IO}+2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-4\overrightarrow{IO}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$.

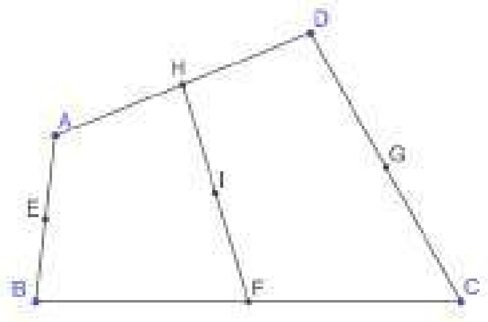
Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm AB,BC,CD,DA và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm FH .

Lời giải



a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\right)=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm FH .

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$=2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF}$ do F là trung điểm BC)

$=2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AH}$

$=2\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}\right)=4\overrightarrow{AI}$ ($\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AI}$ do I là trung điểm FH).

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

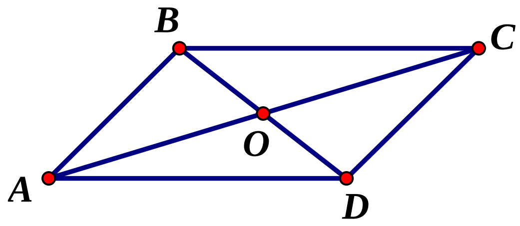
a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

b) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$

c) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}.$

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Ta có: O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Vậy: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

b) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$

Ta có: $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

Vậy: $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}.$

c) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}.$

Ta có: O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}.$

Do đó: $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}.$

Vậy: $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}.$

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}.$

Ta có: O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Do đó: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{MO}.$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{MO}.$

Vậy: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}.$

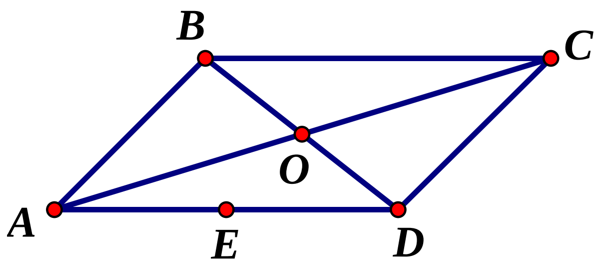
Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và E là trung điểm của AD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

b) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}.$

c) $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Ta có: O là trung điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Vậy: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}.$

b) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}.$

Ta có: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=4\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}$

$=2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\right)+3\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

Vậy: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}.$

c) $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}.$

Vì E là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{0}$

Ta có: $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}\right)+2\overrightarrow{ED}$

$=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}.$

Vậy: $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}.$

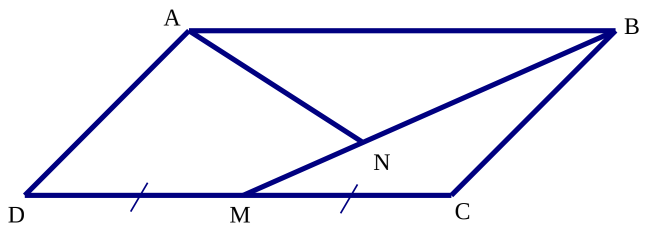
Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng:

a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}.$

b) $\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.

c) $\overrightarrow{AN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$

Lời giải



a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}.$

Ta có $3.\overrightarrow{AB}+4.\overrightarrow{CD}=3.\overrightarrow{AB}+3.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}=3.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{CD}$.

Vậy $3.\overrightarrow{AB}+4.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}.$

b) $\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.

Ta có $2.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AN}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$

Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

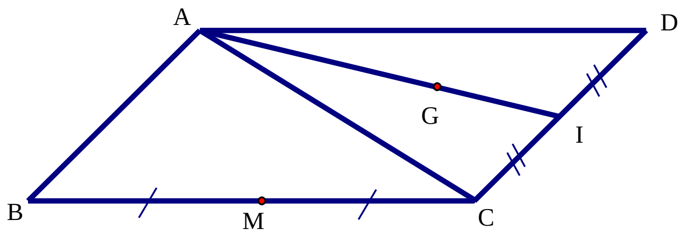
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$ **b)** $\overrightarrow{MG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

b) $\overrightarrow{MG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

Ta có $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}$

$$=-\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)$$

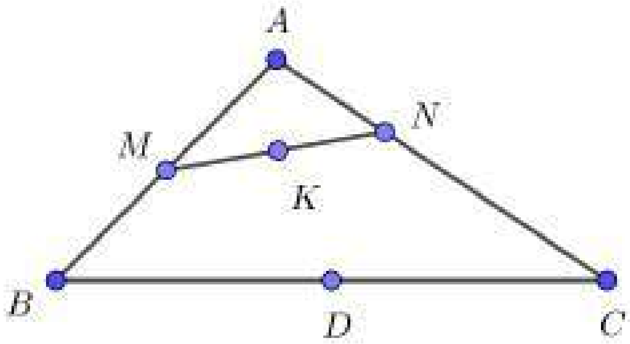
$$=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$$

Bài 13. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm của BC và AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Chứng ming rằng:

a) $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ **b)** $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Vì K là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

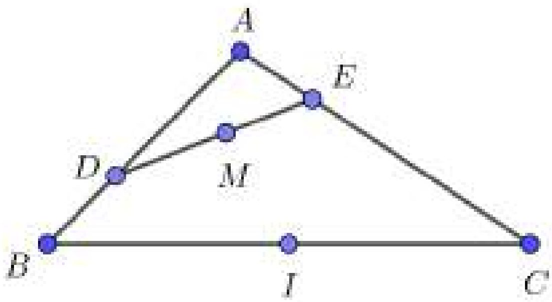
b) Vì D là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Ta có: $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC, trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm của DE và I là trung điểm của BC. Chứng ming rằng:

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$ **b)** $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}.$

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$

Vì M là trung điểm của DE nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

b) $MI = \frac{1}{6}AB + \frac{3}{8}AC.$

Vì I là trung điểm của BC nên $AI = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC$

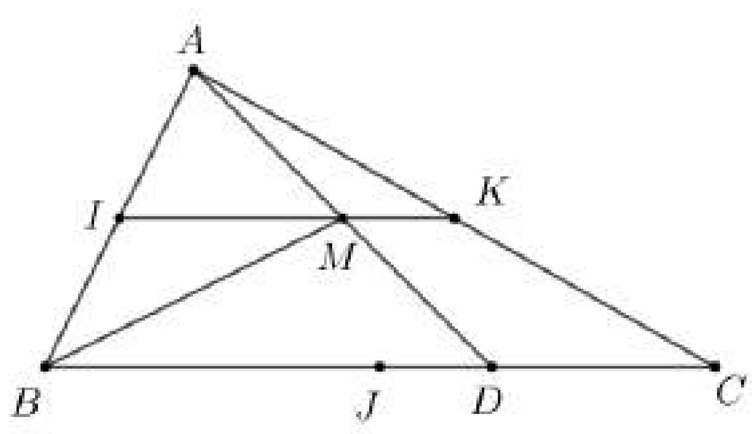
Ta có: $MI = AI - AM = \left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC\right) - \left(\frac{1}{3}AB + \frac{1}{8}AC\right) = \frac{1}{6}AB + \frac{3}{8}AC$.

Bài 15. Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $DB = \frac{2}{3}BC$ và M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh $AK + CJ + BI = 0$.

b) Chứng minh $6BM = 2AC - 5AB$.

Lời giải



a) Chứng minh $AK + CJ + BI = 0$.

Ta có $VT = AK + CJ + BI = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB + \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}\left(AC + CB + BA\right) = 0 = VP$.

b) Chứng minh $6BM = 2AC - 5AB$.

Do M là trung điểm của AD nên ta có

$$BM = \frac{1}{2}\left(BA + BD\right) = \frac{1}{2}\left(BA + \frac{2}{3}BC\right) = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}BC = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}\left(AC - AB\right) = \frac{1}{3}AC - \frac{5}{6}AB.$$

Do đó $6BM = 2AC - 5AB$.

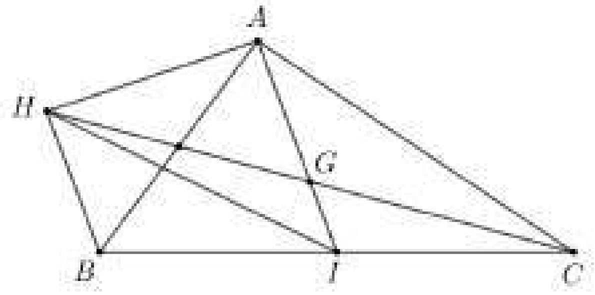
Bài 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G. Chứng minh.

a) $AH = \frac{2}{3}AB - \frac{1}{3}AC$.

b) $HB = \frac{1}{3}\left(AB + AC\right)$.

c) $IH = \frac{1}{6}AB - \frac{5}{6}AC$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do G là trung điểm của HC nên ta có

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=2.\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=2.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{HB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Ta có $VT=\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=VP$.

c) $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $VT=\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{HB}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}=VP$.

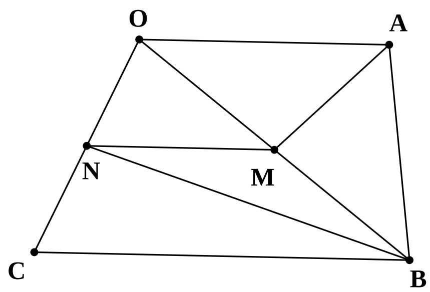
Bài 17. Cho hình thang $OABC$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của OB,OC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

b) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Theo quy tắc hiệu ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, mà M là trung điểm của OB nên $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ do đó $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

b) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hiệu ta có $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hiệu ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Lời bàn: *Đề bài là hình thang mà chưa nói rõ đáy là gì? Nếu bám theo giả thiết đó cần xét 2 trường hợp rối rắm mà không giải quyết bài toán, cho nên theo tôi nên thay giả thiết hình thang bằng tứ giác. Tiếp đến là ý c) cần thay kết quả chứng minh* $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ *bằng* $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC, gọi G,H,O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

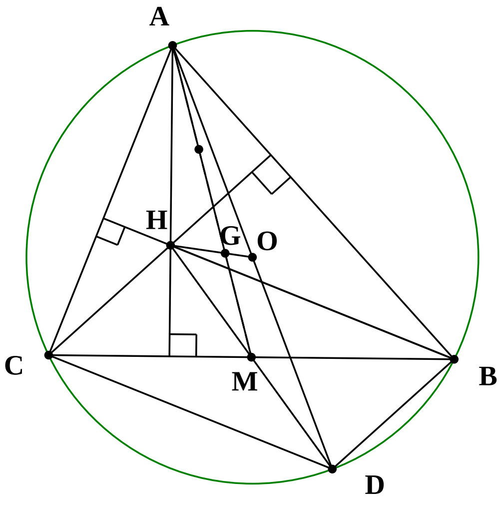
c) $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

e) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

Xét tứ giác $BHCD$ có $BH//CD$ và $CH//BD$ nên nó hình bình hành. Áp dụng quy tắc hình bình ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=2\overrightarrow{HO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=2\overrightarrow{HO}=VP$.

c) $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}-\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{OA}=VP$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\right)+\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}\right)=3\overrightarrow{OH}+\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

$=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}+2\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HO}\right)=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{OH}=VP$.

e) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Theo d) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, mà G là trọng tâm của ΔABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ nên ta suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Ta có $BHCD$ là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên suy ra M cũng là trung điểm của HD.

Xét ΔDHA có $MD=MH$ và $OM=OA$ suy ra OM là đường trung bình $\Rightarrow OM=\dfrac{1}{2}HA$

hay $HA=2OM$ và $\overrightarrow{HA},\overrightarrow{OM}$ cùng hướng $\Rightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

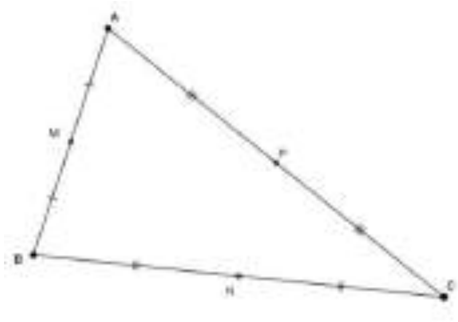
Bài 19. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}\right)$.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$.

c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}\right)$.

Xét VP $=2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}\right)=2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}\right)=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}=$ VT.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$.

Xét VT $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{CP}$

$=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}=$ VP.

c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}.$

Xét $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CM}$

$$=\vec{0}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$$

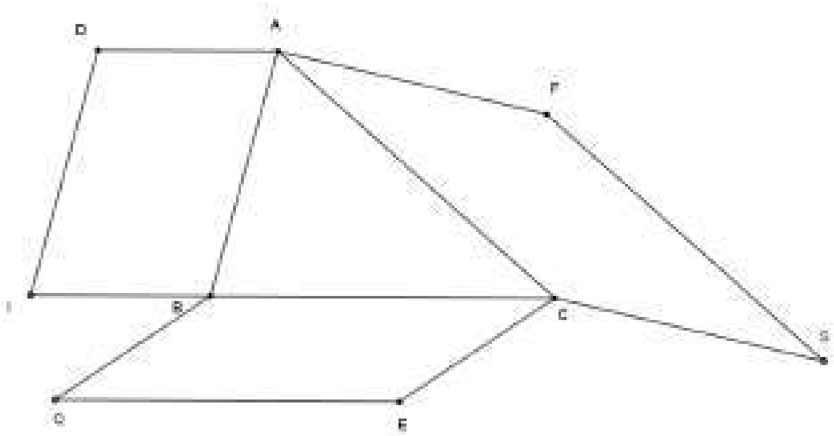
$$=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{NB}$$

$$=\vec{0}.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}.$

Bài 20. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}.$

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{RF}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}$; $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}$

$\Rightarrow \overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}$

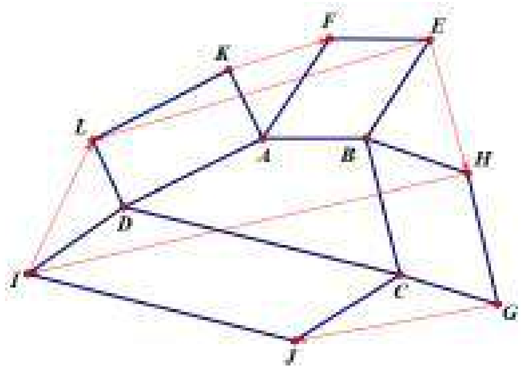
$=\left(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS}\right)+\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}\right)$

$=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$

Bài 21. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng bên ngoài tứ giác các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}.$ **b)** $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}.$

Lời giải



a) $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DL}$

Theo tính chất hình bình hành: $VT=\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{DL}\right)+\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EB}\right)+\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

$VT=\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KL}-\left(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JI}\right)$

$=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$

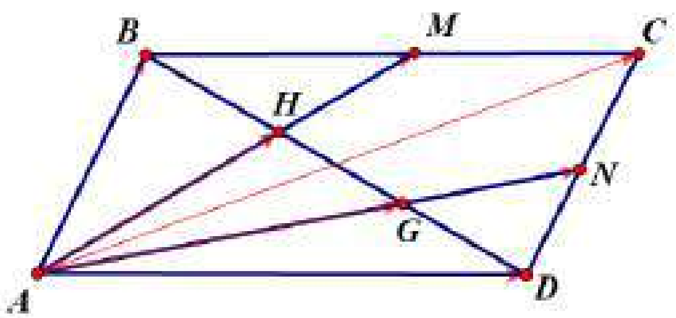
$=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

Bài 22. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo lấy các điểm BD lấy G và H sao cho $DG=GH=HB$. Gọi M,N là giao điểm của AH, BC và AG, DC. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}$.

b) $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{HB}=-\overrightarrow{GD}$

$VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AG}+\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{GD}\right)=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AG}$

b) $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.

Do $BM\,//\,AD$ nên $\dfrac{HM}{AH}=\dfrac{BH}{HD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AM=\dfrac{3}{2}AH\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AH}$.

Chứng minh tương tự ta có $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Từ đó $2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AH}\right)=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=3\overrightarrow{AC}$.

Bài 23. Chứng minh rằng các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải

$(\Rightarrow)$ Giả sử các tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm G. Ta chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$.

Thật vậy, ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\right)=\overrightarrow{0}$.

$(\Leftarrow)$ Giả sử $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$. Ta chỉ ra các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Thật vậy, gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $ABC, A'B'C'$.

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=\overrightarrow{0}$

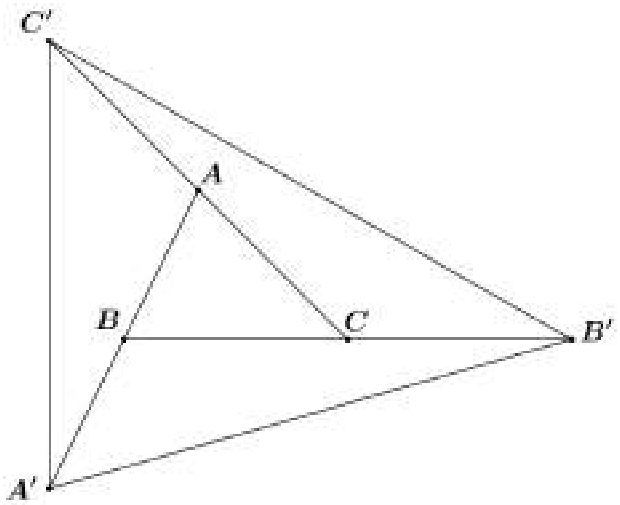
$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)+3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow G\equiv G'$.

Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 24. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải



Theo bài 23, để chứng minh hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm ta chỉ ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{0}$

Thật vậy ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}$

$=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=2\overrightarrow{AA}=2.0=\overrightarrow{0}$.

Vậy hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 25. Cho tam giác ABC và I, J, K xác định bởi: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0},\ 2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IJK có cùng trọng tâm.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Theo đề:

- $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{IG}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\ (1)$

Tương tự:

- $2\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JA}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JG}+2\overrightarrow{GC}+3\overrightarrow{GA}=\vec{0}\ (2)$
- $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{KG}+2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}\ (3)$

$(1)+(2)+(3)$, ta được: $5\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{KG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$.

Do đó, G cũng là trọng tâm của tam giác IJK. Ta được đpcm.

Bài 26. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP, ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{QP}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GQ}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{QP}\right)=\vec{0}$.

Ta thấy: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$.

Nên G cũng là trong tâm của tam giác CMQ. Ta được đpcm.

Bài 27. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là những điểm được xác định bởi: $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA},\ \overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB}$. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}, \forall O$ bất kỳ.   **b)** ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

a) $2\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}, \forall O$ bất kỳ.

Theo giả thiết:

$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}\right)\Leftrightarrow3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow2\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB},\forall O$ bất kỳ.

b) ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG},\forall O$ bất kỳ.

Tương tự câu a) ta có: $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow2\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$;

$\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NA}\Leftrightarrow2\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$;

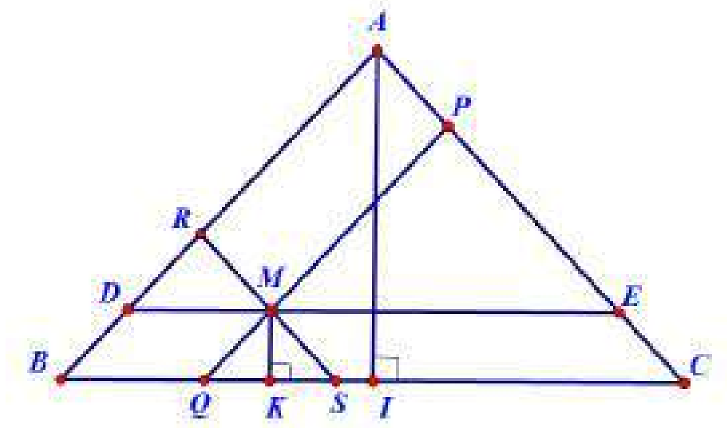
$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PB}\Leftrightarrow2\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Cộng theo vế ta có: $2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=6\overrightarrow{OG},\forall O$ bất kỳ.

Do đó $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG},\forall O$ bất kỳ. Vậy tam giác MNP cũng nhận điểm G làm trọng tâm.

Bài 28. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm M bất kì nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Dựng MK vuông góc với BC tại K và gọi I là trung điểm BC. Chứng minh $2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MI}$.

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lần lượt tại P, Q; kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA, BC lần lượt tại R, S.

ΔABC cân tại A nên ΔMQS cân tại M $\Rightarrow K$ là trung điểm QS $\Rightarrow\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MS}=2\overrightarrow{MK}$ (1)

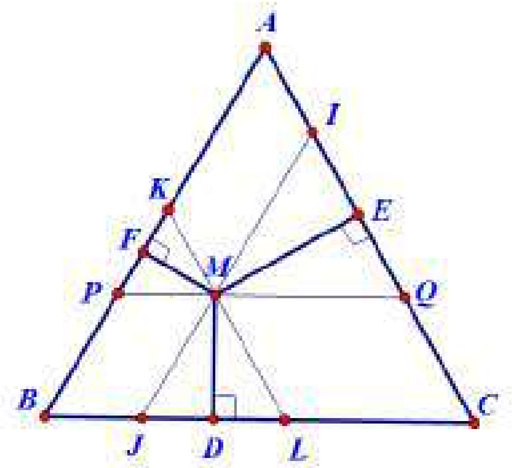
Theo cách dựng đường thẳng song song thì các tứ giác $MQBD$ và $MSCE$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}$ (2)

Từ và ta có $2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MD}\right)$

$\Leftrightarrow2\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$.

Bài 29. Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm M bất kì nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC và BC lượt tại I,J; kẻ đường thẳng song song với AC cắt BA,BC lần lượt tại K,L; kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB,AC lần lượt tại P,Q.

Theo cách dựng, các tứ giác $MPBJ$, $MLCQ$, $MIAK$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MA}$.

ΔABC đều nên $\Delta MJL;\Delta MQI;\Delta MKP$ cũng đều. Do đó $E;F;D$ lần lượt là trung điểm của $IQ;PK;JL$.

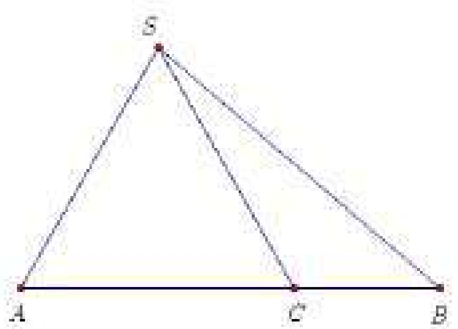
Ta có: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{ML}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MQ}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MP}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MP}\right)+\left(\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MP}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\right]=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Vậy $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài 30. Cho đoạn thẳng AB. Trên đoạn AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ và S là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{SB}$.

Lời giải



Từ giả thiết: $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$

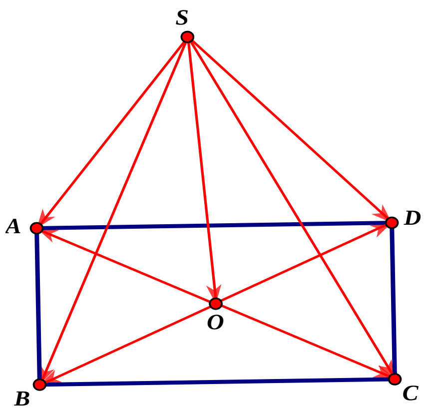
$\Rightarrow \frac{AC}{(AC+CB)}=\frac{m}{m+n}$

$\Leftrightarrow AC=\frac{m}{m+n}(AC+CB)\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}(*)$.

Từ $(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}=\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{SC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{SA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}$.

Bài 31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O và S là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$ (1)

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{SO}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{SO}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{SO}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}^2$

$\Leftrightarrow 2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+2.\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}^2$

Mặt khác tứ giác $ABCD$ hình chữ nhật tâm O có $OA=OB=OC=OD\Rightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=\overrightarrow{OD}^2$ nên

$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$

Lại có O là trung điểm của $AC, BD\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\end{cases}$. Khi đó

$(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}\left(\vec{0}\right)=\overrightarrow{SO}\left(\vec{0}\right)$ (đpcm).

DẠNG TOÁN 2: TÌM MÔĐUN VECTƠ

PHƯƠNG PHÁP

Để tính $\left|\vec{a}\pm\vec{b}\pm\vec{c}\pm\vec{d}\right|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

• ***Bước 1:*** Biến đổi và rút gọn biểu thức vectơ $\vec{a}\pm b\pm\vec{c}\pm d=\vec{v}$ dựa vào qui tắc Chasles, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,… sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.

• ***Bước 2:*** Tính môđun của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

Bài 1. Chứng minh các khẳng định sau:

a) Nếu $\vec{a}$ và b cùng hướng thì $\left|a+\vec{b}\right|=|a|+\left|\vec{b}\right|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và b ngược hướng và $\left|\vec{b}\right|\ge|\vec{a}|$ thì $\left|a+b\right|=\left|b\right|-|a|$.

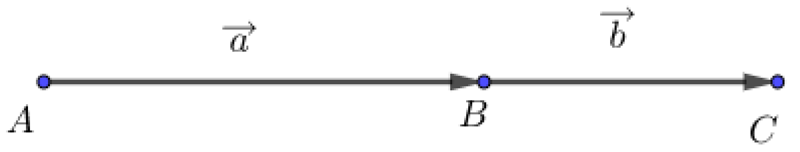
c) $\left|a+b\right|\le|a|+\left|b\right|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Lời giải

Giả sử: $a=\overrightarrow{AB}$ và $b=BC$ thì $a+b=AB+BC=AC$.

a) Nếu $\vec{a}$ và b cùng hướng thì $\left|a+\vec{b}\right|=|a|+\left|\vec{b}\right|$.

Nếu $\vec{a}$ và b cùng hướng thì 3 điểm A,B,C cùng thuộc một đường thẳng và B nằm giữa A,C.

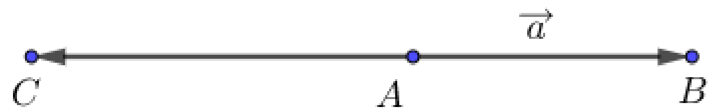


Do đó $\left|a+b\right|=\left|AB+BC\right|=\left|AC\right|=AB+BC=|a|+\left|b\right|$.

Vậy $\left|a+\vec{b}\right|=|a|+\left|\vec{b}\right|$.

b) Nếu $\vec{a}$ và b ngược hướng và $\left|\vec{b}\right|\ge|\vec{a}|$ thì $\left|a+b\right|=\left|b\right|-|a|$.

Nếu $\vec{a}$ và b ngược hướng và $\left|\vec{b}\right|\ge|\vec{a}|$ thì ba điểm A,B,C cùng thuộc một đường thẳng và A nằm giữa B,C.



Do đó $\left|a+b\right|=\left|AB+BC\right|=AC=BC-AB=\left|b\right|-|a|$.

Vậy $\left|a+b\right|=\left|b\right|-|a|$.

c) $\left|a+b\right|\le|a|+\left|b\right|$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Từ chứng minh ở câu a và b:

$\Rightarrow$ nếu $\vec{a}$ và b cùng phương thì $\left|a+\vec{b}\right|=|a|+\left|\vec{b}\right|$ hoặc $\left|a+b\right|<|a|+\left|b\right|$.

Nếu $\vec{a}$ và b không cùng phương thì A, B, C không thẳng hàng.

Xét ΔABC có hệ thức $AC < AB + BC$. Do đó $\left|a+b\right| < \left|a\right| + \left|b\right|$.

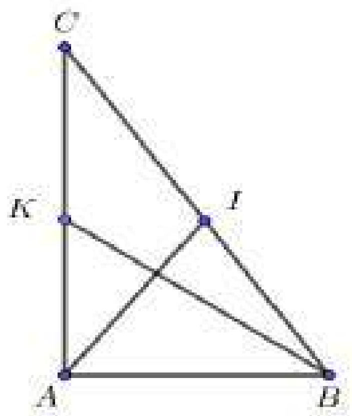
Như vậy, trong mọi trường hợp ta có: $\left|a+b\right| \le \left|a\right| + \left|b\right|$, đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$ và b cùng hướng.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3\left(\text{cm}\right)$, $AC = 4\left(\text{cm}\right)$. Gọi I là trung điểm BC. Xác định và tính độ dài các vectơ:

a) $u = BA + \overrightarrow{BC}$.

b) $v = 2IA - CA$.

Lời giải



a) $u = BA + \overrightarrow{BC}$.

Gọi K là trung điểm AC khi đó $2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Nên $\left|\vec{u}\right| = \left|BA + \overrightarrow{BC}\right| = \left|2\overrightarrow{BK}\right| = 2\left|BK\right|$.

Xét ΔABK vuông tại $A: BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{\left(2\right)^2 + \left(3\right)^2} = \sqrt{13}$.

Vậy $\left|\vec{u}\right| = 2\left|\overrightarrow{BK}\right| = 2\sqrt{13}(\text{cm})$.

b) $v = 2IA - CA$.

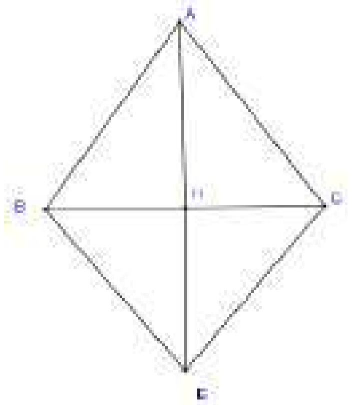
Theo giả thiết: I là trung điểm BC khi đó $2AI = AB + AC$.

$\vec{v} = 2\overrightarrow{IA} - CA = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \underbrace{- \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA}}_{\vec{0}} = -AB$.

Khi đó: $\left|v\right| = \left|-\overrightarrow{AB}\right| = \left|AB\right| = 3(\text{cm})$.

Bài 3. Cho tam giác ABC đều cạnh a, gọi G là trọng tâm tam giác ABC và H là trung điểm của BC. Tính theo a: $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|; \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|; \left|GB + \overrightarrow{GC}\right|; \left|\overrightarrow{GA} - GC\right|; \left|AH + BC\right|$.

Lời giải



- $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE$ với $ABEC$ là hình bình hành.

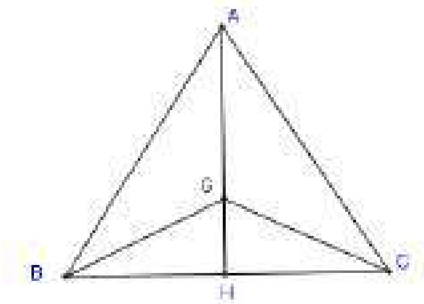
Do ΔABC đều nên $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AE=2AH=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

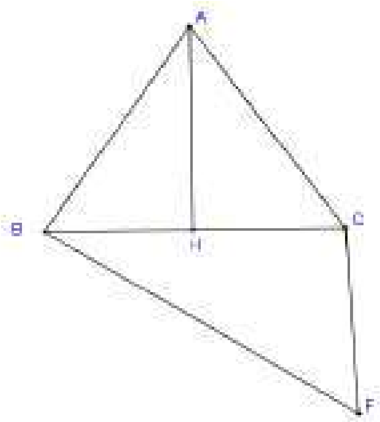
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|==a\sqrt{3}$

- $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a$.

- $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



- $\left|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=CA=a$.

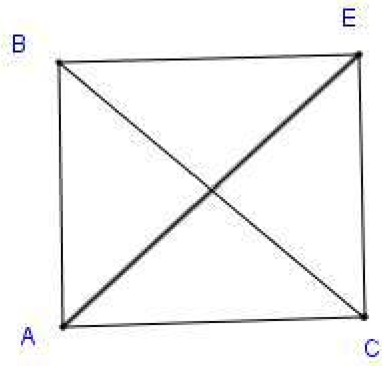


- $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right|=\left|\overrightarrow{BF}\right|=BF$ với $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AH}$

Có $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

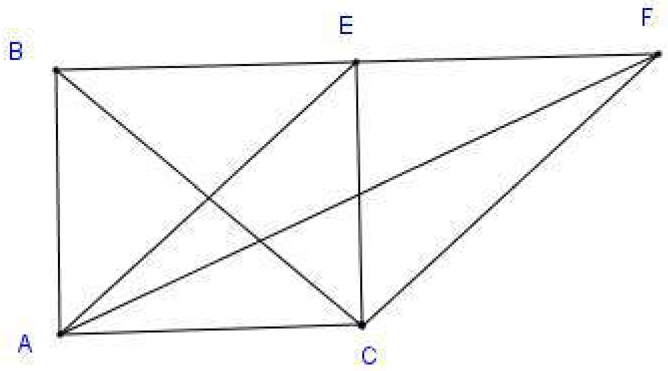
Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=a$. Tính theo a: $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|,\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|,\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải



Ta có $BC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

- $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a\sqrt{2}$.
- $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE=BC=a\sqrt{2}$, với $ABEC$ là hình vuông.
- $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|=AF$, với $AEFC$ là hình bình hành.



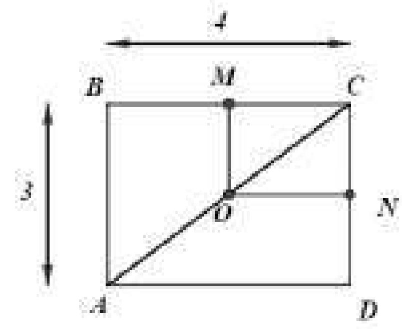
Do ΔABF vuông tại B và $BF=BE+EF=BE+AC=2a$ nên ta có

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=a\sqrt{5}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{5}$.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$, $BC=4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$.

Lời giải



Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AC$

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$AC^2=AB^2+BC^2\Leftrightarrow AC^2=25\Rightarrow AC=5$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=2AC=10$

• Tính $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|$

Ta có: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

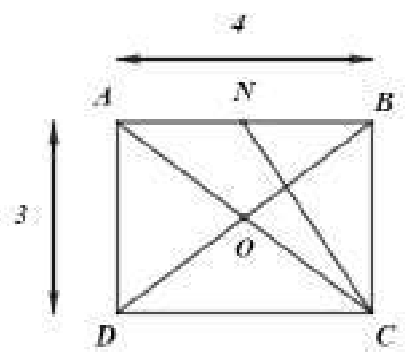
$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DN}\right)$

$=\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OC}\right|=AC+\dfrac{AC}{2}=\dfrac{15}{2}$ ($\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OC}$ là hai vec tơ cùng hướng).

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O và có $AB=4$, $AD=3$. Gọi M là điểm tùy ý. Hãy tính: $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải



• Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right| = 2BC = 6$.

• Tính $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$.

Gọi N là trung điểm của AB, ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}+\overrightarrow{CN}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right| = 2CN = 2\sqrt{CB^2+BN^2} = 2\sqrt{13}$.

Bài 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O, lấy điểm M tùy ý. Chứng minh rằng các vectơ sau không đổi và tính độ dài của chúng.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$.

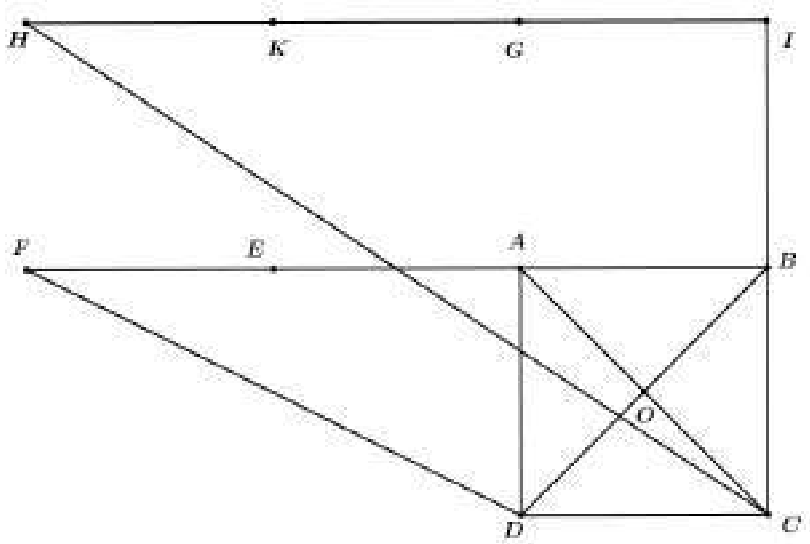
c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$.

d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$.

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$.

f) $\vec{w} = 4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$.

Lời giải



a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$.

$\Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{BO}\right| = BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}$.

$\vec{v} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$.

$\Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = a\sqrt{2}$

c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$.

$\vec{x} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

$= 2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{DA}$

$\Rightarrow |\vec{x}| = |3\overrightarrow{DA}| = 3DA = 3a$.

d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

$\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + 2\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB}$

Gọi I, H là các điểm sao cho $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{BA}$ từ đó ta có

$\vec{y} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CH}$

$|\vec{y}| = |\overrightarrow{CH}| = CH = \sqrt{CI^2 + IH^2} = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13}$.

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

$\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right)$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{CA}$

$= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow |\vec{z}| = |2\overrightarrow{CA}| = 2CA = 2a\sqrt{2}$.

f) $\vec{w} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

$\vec{w} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

$= 3\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right)$

$= 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

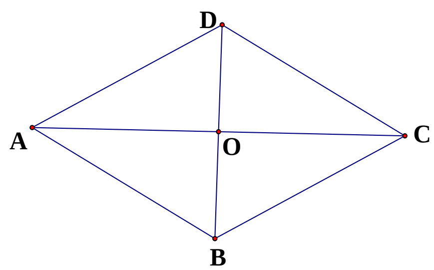
Gọi F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BA}$ từ đó ta có;

$\vec{w} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DF}$

$\Rightarrow |\vec{w}| = |\overrightarrow{DF}| = DF = \sqrt{DA^2 + AF^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60°$ và cạnh là a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tính theo a: $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải



• Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2AO$.

Do $\widehat{BAD} = 60°$ nên tam giác ABD đều $\Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

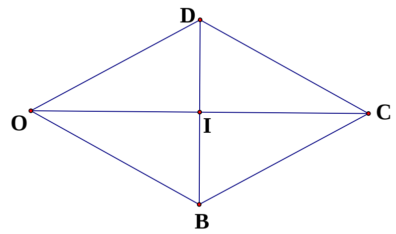
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{3}$.

- Tính $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$: Ta có $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = CA = a\sqrt{3}$.

- Tính $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$: Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right| = OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 9. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có điểm đặt O và tạo với nhau một góc $60°$. Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ đều là 100N.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OD}$.

Dựng hình bình hành $OBCD$. Khi đó $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$.

$\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = OC = 2OI$.

Do $\widehat{BOD} = 60°$ và $OB = OD$ nên tam giác OBD đều.

Do đó $OI = \dfrac{OB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,\text{N}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính độ dài của các vectơ sau:

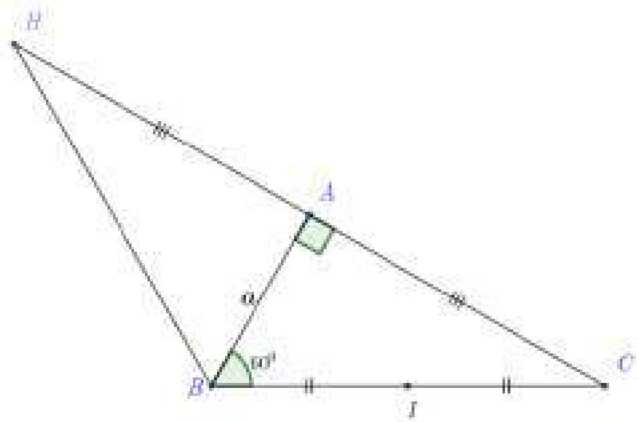
a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{IC}$.

Lời giải



a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB$.

Xét tam giác ABC vuông tại A: $\cos ABC = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos ABC} = \dfrac{a}{\cos 60^\circ} = 2a$.

Vậy $\left|\vec{a}\right| = 2a$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Trên tia đối của tia AC lấy điểm H sao cho $HA = AC$. Khi đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC}$.

Ta có $\left|\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA}\right| = \left|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{HB}\right| = HB$.

Xét tam giác HBC có: BA là đường cao, BA là đường trung tuyến

$\Rightarrow \Delta HBC$ cân tại $B \Rightarrow BH = BC = 2a$.

Vậy $\left|\vec{b}\right| = 2a$.

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$.

Ta có $\left|\vec{c}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right| = IB$.

Do I là trung điểm của BC nên $IB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

Vậy $\left|\vec{c}\right| = a$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$.

Ta có $\left|\vec{d}\right| = \left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right| = CA$.

Xét tam giác ABC vuông tại A: $\tan ABC = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB.\tan ABC = a.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\vec{d}\right| = a\sqrt{3}$.

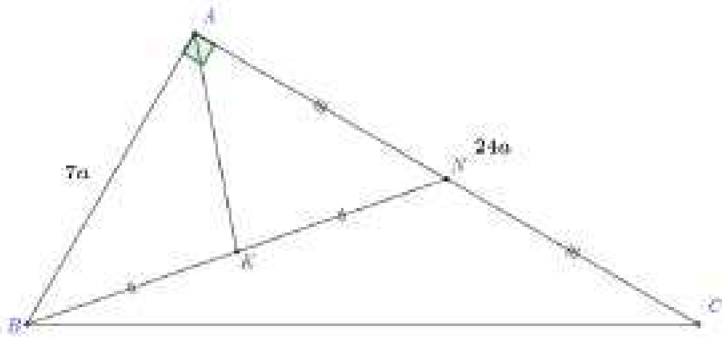
Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 7a$, $AC = 24a$. Gọi N và K lần lượt là trung điểm cạnh AC và BN.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BK}$.

b) Chứng minh rằng $4\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải



a) Chứng minh $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}$.

Ta có: $VT=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KN}$

$=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}=VP.$

Vậy $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BK}$.

b) Chứng minh $4\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Ta có $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Vậy $4\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

c) Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Xét tam giác ABC vuông tại A: $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow BC=\sqrt{(7a)^2+(24a)^2}=25a$.

Ta có N là trung điểm của AC nên $AN=\frac{1}{2}AC=12a$.

Xét tam giác ABN vuông tại A: $BN^2=AB^2+AN^2 \Leftrightarrow BN=\sqrt{(7a)^2+(12a)^2}=a\sqrt{193}$.

Do AK là đường trung tuyến trong tam giác vuông ABN nên $AK=\frac{1}{2}BN=\frac{a\sqrt{193}}{2}$.

$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=BC=25a$.

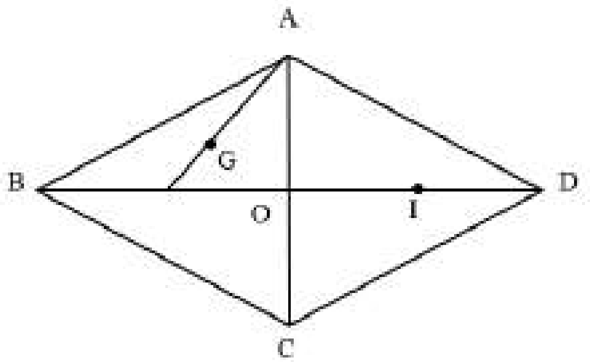
$\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|4\overrightarrow{AK}\right|=4\left|\overrightarrow{AK}\right|=4AK=4.\frac{a\sqrt{193}}{2}=2a\sqrt{193}$.

Bài 12. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O, cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC}=60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm tam giác ABO.

a) Tính theo a độ dài $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|$.

b) Chứng minh rằng $4\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



a) Tính theo a độ dài $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|$.

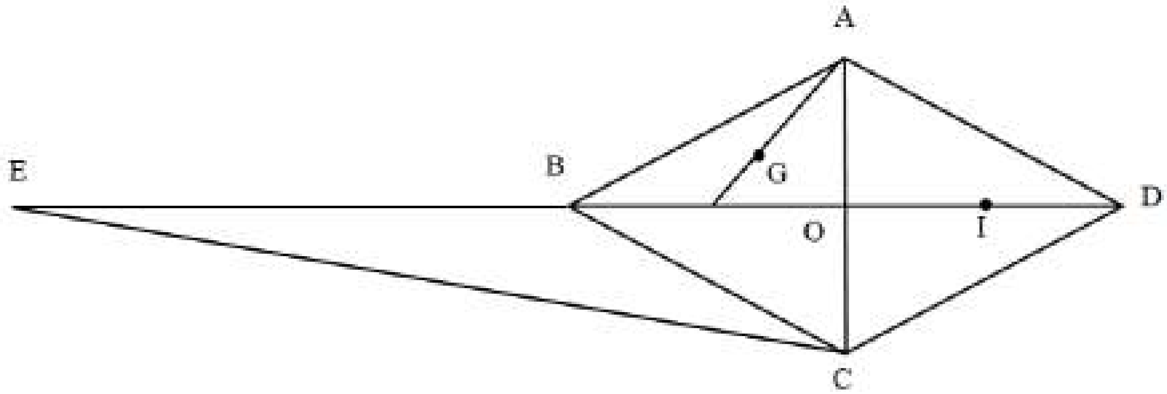
- Tính $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$.

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=2BO$.

Do $ABC=60^{\circ}$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow BO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=a\sqrt{3}$.

- Tính $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|$:



Trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho $EB=BD$. Khi đó $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BD}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{EC}\right|=EC$.

Xét tam giác vuông EOC có: $OC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{2}$

$EO=EB+BO=3BO=\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$

$\Rightarrow EC^2=EO^2+OC^2\Leftrightarrow EC=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{7}a}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right|=\dfrac{2\sqrt{7}a}{2}$.

b) Chứng minh rằng $4\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Do I là trung điểm của đoạn DO nên:

$$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow 4\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}=-\left(\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}\right)$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AI}+\left(\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{0}.$$

Ta có:

$$VP=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}\right)=4\overrightarrow{IC}+4\overrightarrow{AI}+\left(\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=4\overrightarrow{IC}+4\overrightarrow{AI}+\left(\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}\right)=4\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{0}=4\overrightarrow{IC}=VT.$$

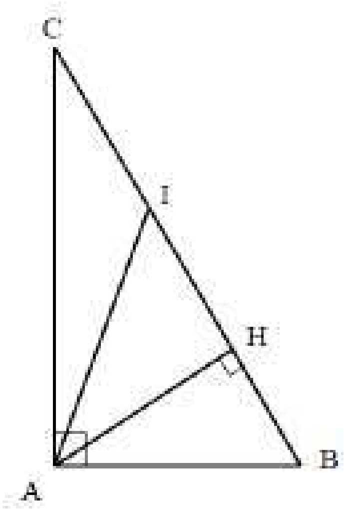
Vậy $4\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH, $AB=a, HC=2a, (a>0)$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}$.

b) Tính theo a: $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$; $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}\right)+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}=VP.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HB}$.

b) Tính theo a: $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$; $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right|$.

- Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=BA=a.$

• Tính $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Gọi I là trung điểm của $HC \Rightarrow CI = IH = a$

Ta có: $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AI}\right|=2AI$.

Gọi $HB = x$, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC được:

$AB^2 = BC.HB \Leftrightarrow a^2 = (2a+x).x \Leftrightarrow x = a\left(\sqrt{2}-1\right)$.

$AH^2 = HB.HC = \left(a\sqrt{2}-a\right)2a = 2\sqrt{2}a^2 - 2a^2$.

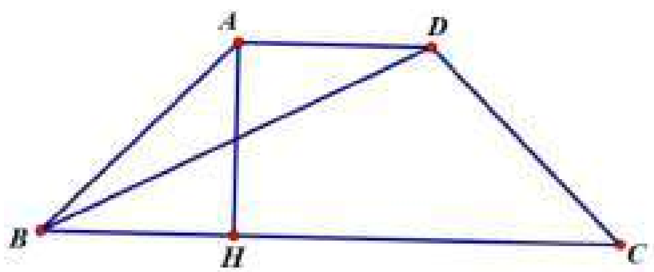
Trong tam giác vuông AHI , ta có

$AI^2 = AH^2 + HI^2 = 2\sqrt{2}a^2 - 2a^2 + a^2 = 2\sqrt{2}a^2 - a^2 \Rightarrow AI = a\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right| = 2AI = 2a\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Bài 14. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AD và đường cao AH đều bằng a góc $\widehat{ABC}=45^o$. Hãy tính $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải



Vì hình thang cân $ABCD$ có đường cao AH và $\widehat{ABC}=45^o$ nên ΔAHB vuông cân tại H, suy ra

$BH = AH = a$, $\widehat{ABC}=45^o \Rightarrow \widehat{BAD}=135^o$.

$AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

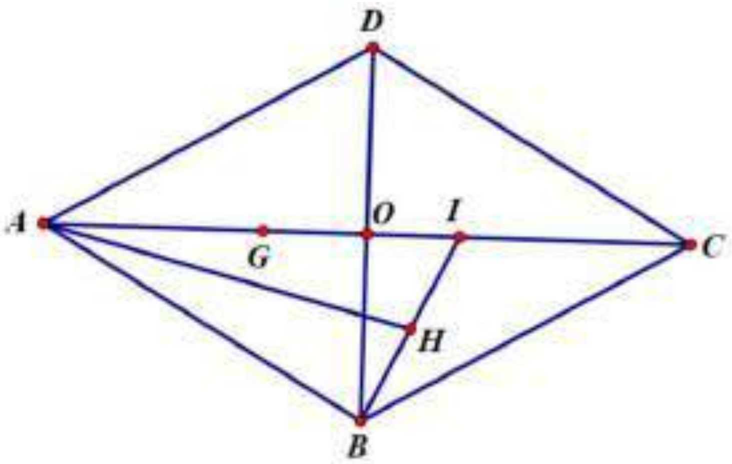
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 135^o = a^2 + 2a^2 + 2\sqrt{2}a^2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5a^2$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD=a\sqrt{5}$.

Bài 15. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O, $\widehat{BAD}=60^o$, G là trọng tâm ΔABD. Tính $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AG}\right|$ theo a.

Lời giải

Vì hình thoi $ABCD$ có $BAD = 60^o$ nên tam giác BAD và tam giác BCD là các tam giác đều cạnh a .



Gọi I là trọng tâm ΔBCD, H là trung điểm IB.

Ta có: $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right| = 2\left|\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}\right| = 2AB = 2a$.

$\left|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}\right| = \left|2\overrightarrow{AH}\right| = 2AH.$

$BI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, AC = 2AO = a\sqrt{3}.$

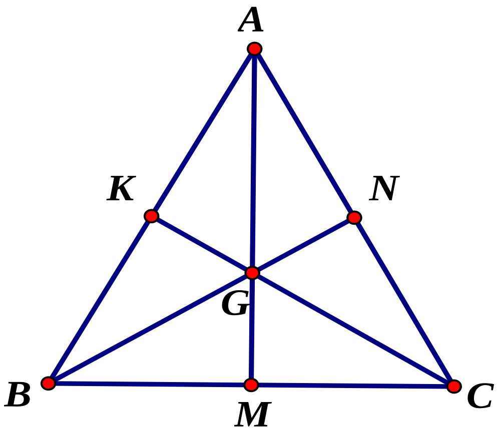
$$AH^2 = \frac{AI^2 + AB^2}{2} - \frac{BI^2}{4} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2}{2} - \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

Bài 16. Cho tam giác ABC cân tại A, có $AB = 4$, $BC = 6$. Gọi AM, BN, CK lần lượt là trung tuyến của tam giác ABC và G là trọng tâm.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = 0$. **b)** Tính: $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

Lời giải

a) Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = 0$.



Ta có M là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$; $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{0}$.

b) Tính: $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\sqrt{AB^2-BM^2}=\frac{2}{3}\sqrt{16-9}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

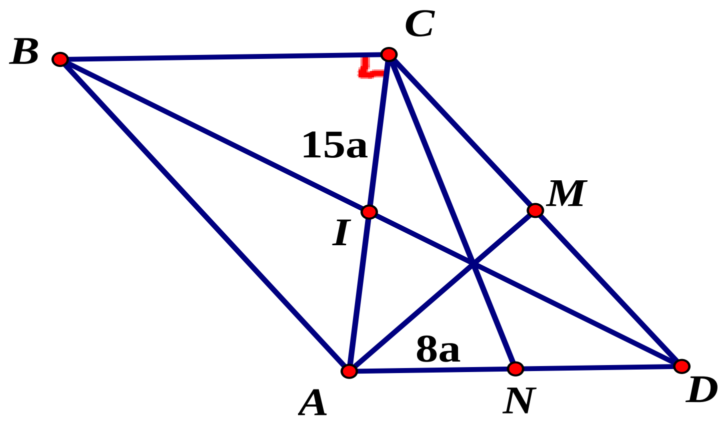
Bài 17. Cho hình bình hành $ABCD$, có tam giác ABC vuông tại C, $AD=8a, AC=15a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BD}-2.\overrightarrow{CN}=2.\overrightarrow{AM}$.

c) Tính: $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DM}=3.\overrightarrow{DM}$.

$VP=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+2.\overrightarrow{DM}=3.\overrightarrow{DM}$.

Từ và suy ra đpcm.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BD}-2.\overrightarrow{CN}=2.\overrightarrow{AM}$.

Ta có $VT=\overrightarrow{BD}-2.\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AM}=VP$.

c) Tính: $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|2.\overrightarrow{AM}\right|=2AM=CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=17a$.

Gọi I là tâm hình bình hành

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$; $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right|=BI=\sqrt{BC^2+CI^2}=\frac{\sqrt{481}}{2}a$.

Bài 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, $AB=4$, $AD=3$, M là một điểm tùy ý. Chứng minh $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$

$=4\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$

$=4\overrightarrow{MA}-\left(4\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=4\overrightarrow{MA}-\left(4\overrightarrow{MO}+\vec{0}\right)$

$=4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MO}$.

$=4\overrightarrow{OA}$, do O, A không đổi nên $\vec{u}$ không phụ thuộc vào M.

Xét tam giác ABD vuông tại A nên theo Pi-Ta-Go ta có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=4\left|\overrightarrow{OA}\right|=4OA=2AC=2BD=10$.

Bài 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3a$, $BC=4a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, E là trung điểm của GD, F là trung điểm của BC và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{ME}$ và tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{ME}$

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{ME}$.

Ta có tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên cũng là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, nên theo Pi-Ta-Go ta có:

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{9a^2+16a^2}=5a$.

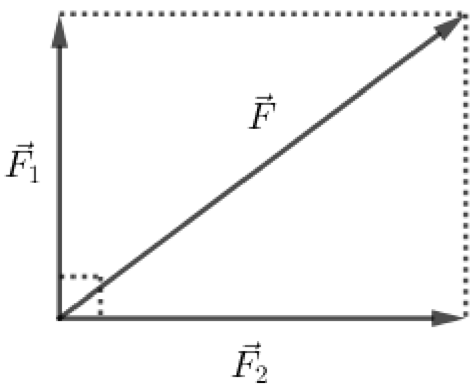
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\overrightarrow{AC}\right|=3AC=3.5a=15a$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\overrightarrow{DC}\right|=3CD=3AB=9a$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=15a$ và $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right|=9a$.

Bài 20. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn lần lượt là $30N$, $40N$ có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc $90°$. Tìm độ lớn lực tổng hợp của hai lực ấy?

Lời giải



Ta có: $\vec{F} = \dot{F_1} + F_2$.

Khi đó: $|\vec{F}| = \sqrt{|\dot{F_1}|^2 + |F_2|} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$.

Vậy tổng hợp của hai lực trên có độ lớn là 50 N.

BÀI 3. TÍCH CỦA VECTO VỚI MỘT SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT CƠ BẢN

1. Định nghĩa.

Cho số $k \neq 0$ và vecto $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ và số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$.

- $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Độ dài $\left|k\vec{a}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$.

2. Các tính chất.

Với hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ tùy ý và với mọi số $k, h \in \mathbb{R}$ ta có:

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a}+k\vec{b}$.
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a}+k\vec{a}$.
- $h\left(k\vec{a}\right) = (hk)\vec{a}$.
- $1.\vec{a} = \vec{a}; (-1).\vec{a} = -\vec{a}; 0.\vec{a} = \vec{0}; k.\vec{0} = \vec{0}$.

3. Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ta luôn tìm được số k để $\vec{a} = k\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ và khi đó số k tìm được là duy nhất.

4. Áp dụng:

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, với số k xác định.
- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$.

5. Cho hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, và $\vec{x}$ là một vecto tùy ý. Bao giờ cũng tìm được cặp số h và k duy nhất sao cho $\vec{x} = h\vec{a}+k\vec{b}$.

DẠNG TOÁN 1: BIỂU DIỄN VECTƠ

PHƯƠNG PHÁP

- Ba biểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, với số k xác định.
- Tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

- I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI},\ \forall M$.
- G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG},\ \forall M$.

Bài 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Cách 1: Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

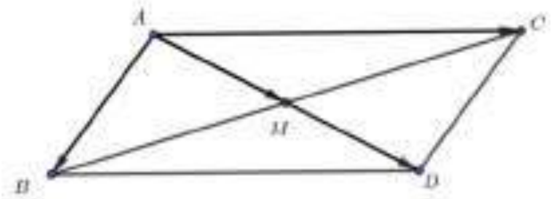
Cách 2: Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

Áp dụng quy tắc 3 điểm, ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$ (2)

Cộng vế với vế của $(1),(2)$ ta được: $2\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



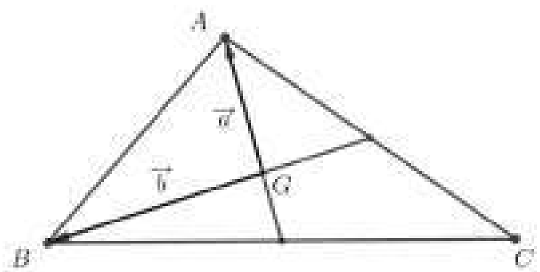
Cách 3: Xét hình bình hành $ABDC$ có M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của $AD \Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}$ (1)

Áp dụng quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (2)

Từ $(1)(2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bài 2. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{GC}; \overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA}, \vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

Lời giải

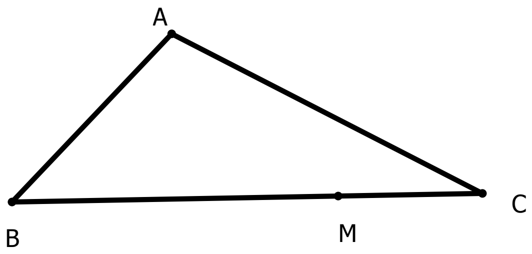


- Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\vec{b}-\vec{a}$.

- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow \overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}.$
- Ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=-\vec{b}+\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=-\vec{a}-2\vec{b}.$
- Ta có: $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}+\vec{b}.$

Bài 3. Cho tam giác ABC có M trên cạnh BC thỏa mãn $MB=2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ và $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vậy: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$.

Bài 4. Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k\neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O ta có $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Lời giải

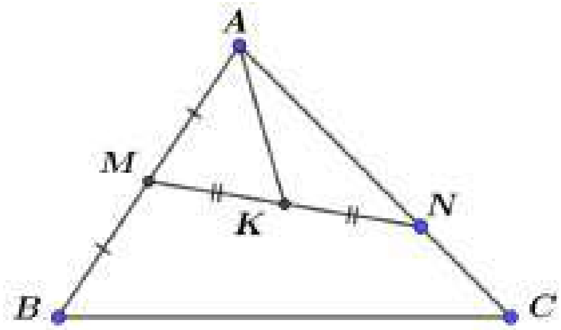
Từ giả thiết $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$, với $k\neq 1$, ta có:

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\Leftrightarrow(1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA=2NC$. Gọi K là trung điểm MN. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



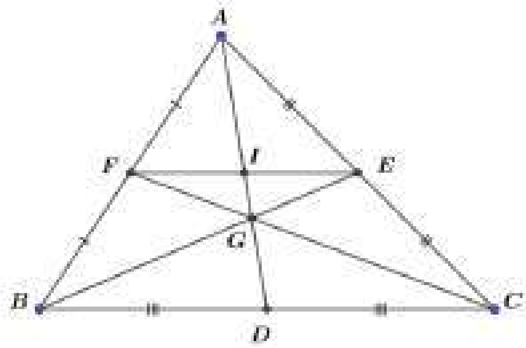
Ta có: M, K lần lượt là trung điểm của AB, MN nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$.

Mặt khác: N thuộc cạnh AC và $NA=2NC \Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Lời giải



Ta có: E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB $\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ $\Rightarrow EF \parallel BC$

$\Rightarrow \frac{IE}{CD}=\frac{AI}{AD}=\frac{IF}{BD} \Rightarrow IF=IE \Rightarrow 2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$.

G là trọng tâm tam giác $ABC; D, E, F$ lần lượt là trung điểm của BC, CA AB

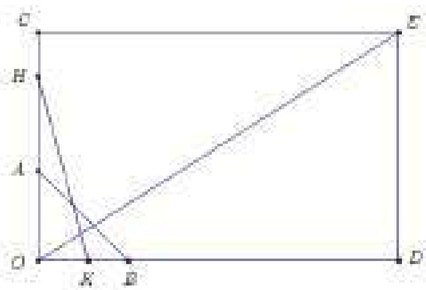
$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2}{3}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$.

DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow DE=\frac{1}{2}AB=AF \Rightarrow \overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AF}=-\vec{v}$.

EF là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow EF=CD \Rightarrow \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$.

Bài 7. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA=OB=a$. Dựng và tính độ dài các vectơ $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}; \frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải



- Tính $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|$.

Vẽ điểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OB}$, vẽ hình bình hành $CODE$ thì: $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$.

$\Rightarrow\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$.

- Tính $\left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right|$.

Vẽ điểm H, K sao cho: $\overrightarrow{OH}=\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OK}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$, khi đó: $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KH}$.

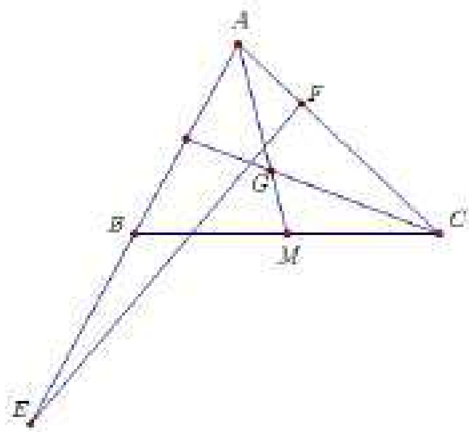
$\Rightarrow\left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{KH}\right|=\sqrt{OH^2+OK^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2+\left(\frac{3}{7}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6073}}{28}a$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm.

a) Hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi E, F là hai điểm xác định bởi các điều kiện: $\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{EB}, 3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{EF}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) Hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$AG\cap BC=M\Rightarrow M$ là trung điểm $BC\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

Mà G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2.\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi E, F là hai điểm xác định bởi các điều kiện: $\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{EB}, 3\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{EF}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$.

Theo gt: $EA = 2EB \Rightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AB}$.

Từ $3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

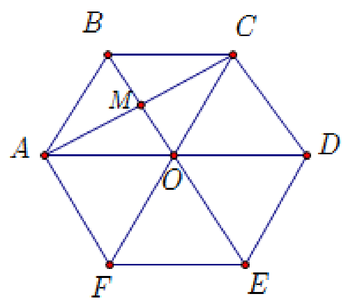
$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Bài 9. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O cạnh a:

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ theo a.

Lời giải



a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

a. Ta có: O là trung điểm AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

Lại có: $\begin{cases} AB // FO \\ AF // BO \end{cases} \Rightarrow ABOF$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

b) Tính độ dài của vectơ $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ theo a.

Ta có: $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right| = \left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}AC$.

Theo đề bài: $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\Delta ABO; \Delta CBO$ là tam giác đều cạnh a.

Gọi M là trung điểm $BO \Rightarrow AM; MC$ lần lượt là đường cao $\Delta ABO; \Delta CBO$ và $AC = AM + MC$

$\Rightarrow AC = AM + MC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

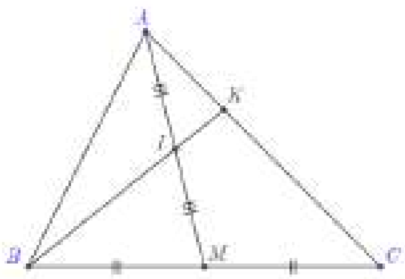
PHƯƠNG PHÁP

- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

- Để chứng minh hai điểm M, N trùng nhau ta chứng minh chúng thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ với O là một điểm nào đó hoặc $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{0}$.
- Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ và hai đường thẳng AB và CD phân biệt thì $AB // CD$.

Bài 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK=\dfrac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KA}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}$

Mà $AK=\dfrac{1}{3}AC$ nên $KC=2KA$ suy ra $\overrightarrow{KC}=-2\overrightarrow{KA}\Leftrightarrow \overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\overrightarrow{KC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{0}$.

Do đó $\overrightarrow{BI}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{0}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng $MN // AC$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{BC}$ nên $MA // BC$.

Do đó $M\notin AC$ (1).

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}\right)-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AC}$ (2).

Từ (1), (2) ta có $MN // AC$.

Bài 3. Cho 4 điểm O, A, B, C sao cho $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$. Chứng tỏ rằng A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Vậy: A, B, C thẳng hàng.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$ trên BC lấy điểm H, trên BD lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD}$. Chứng minh A, K, H thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BH}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD} \end{cases}$

Mà: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}=\dfrac{5}{6}\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AH}$

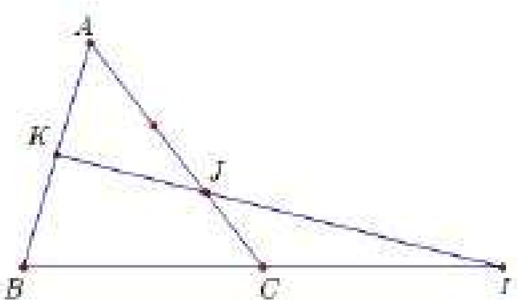
Vậy: A, K, H thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{JC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Tính $\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CJ}=-\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}=-2\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Theo câu a: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IK}=\dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{4}\overrightarrow{AC}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$.

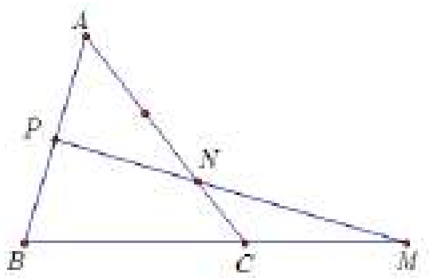
$\Rightarrow I,J,K$ thẳng hàng.

Bài 6. Cho ΔABC. Trên các đường thẳng BC,AC,AB lần lượt lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC};\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{CN};\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM};\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Lời giải



a) Tính $\overrightarrow{PM};\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}\rightarrow P$ là trung điểm AB.

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

b) Chứng minh ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Theo câu a: $\begin{cases} \overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PM}$.

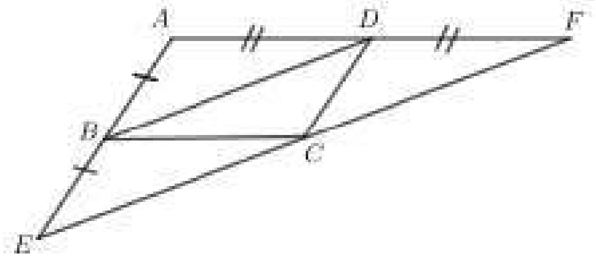
$\Rightarrow N,M,P$ thẳng hàng.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các tia AD,AB lần lượt lấy các điểm F,E sao cho $AD=\dfrac{1}{2}AF, AB=\dfrac{1}{2}AE$. Chứng minh:

a) Ba điểm F,C,E thẳng hàng.

b) Các tứ giác $BDCE, BDFC$ là hình bình hành.

Lời giải



a) Ba điểm F, C, E thẳng hàng.

Theo đề ra ta có D là trung điểm của đoạn thẳng AF, B là trung điểm của đoạn thẳng AE.

Ta có $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FC}$ nên ba điểm F, C, E thẳng hàng..

b) Các tứ giác $BDCE, BDFC$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} BE \,//\, DC \\ BE = DC \end{cases} \Rightarrow BDCE$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} DF \,//\, BC \\ DF = BC \end{cases} \Rightarrow BDFC$ là hình bình hành.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Hai điểm I, J được xác định bởi $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=0 \\ \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \\ \left(\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IB}\right)+3\left(\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0} \\ 6\overrightarrow{JI}+2\overrightarrow{IB}+\left(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0} \end{cases}$

$\Rightarrow 6\overrightarrow{JI}+2\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IB}=-3\overrightarrow{JI}$.

Vậy ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 9. Cho ΔABC. Hai điểm M, N lần lượt xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh 3 điểm M, N, G thẳng hàng, với G là trọng tâm ΔABC.

Lời giải

Theo đề ra ta có:

$3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\vec{MA}+\vec{MB}\right)+\vec{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3.\left(3\vec{MG}-\vec{MC}\right)+\vec{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\vec{MG}-3\vec{MC}+\vec{MB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\vec{MG}-3\left(\vec{MN}+\vec{NC}\right)+\left(\vec{MN}+\vec{NB}\right)=\vec{0}$

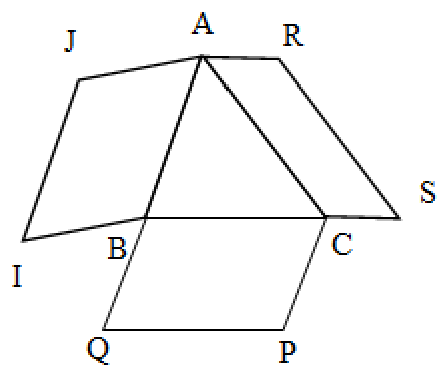
$\Leftrightarrow 9\vec{MG}-2\vec{MN}+\left(\vec{NB}-3\vec{NC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\vec{MG}-2\vec{MN}+\vec{0}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{MG}=\dfrac{2}{9}\vec{MN}$.

Vậy 3 điểm M, N, G thẳng hàng.

Bài 10. Cho ΔABC. Về phía ngoài ΔABC vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh các tam giác RIP, JQS có cùng trọng tâm.

Lời giải



Cách 1. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔRIP, ΔJQS.

Ta có $\vec{RS}+\vec{IJ}+\vec{PQ}=\vec{RG}+\vec{GG'}+\vec{G'S}+\vec{IG}+\vec{GG'}+\vec{G'J}+\vec{PG}+\vec{GG'}+\vec{G'Q}=3\vec{GG'}$

Mà $\vec{RS}=\vec{AC}; \vec{IJ}=\vec{BA}; \vec{PQ}=\vec{CB}$

$\Rightarrow \vec{AC}+\vec{BA}+\vec{CB}=3\vec{GG'}$

$\Leftrightarrow \vec{BC}+\vec{CB}=3\vec{GG'}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GG'}=\vec{0}$

Vậy các tam giác RIP, JQS có cùng trọng tâm.

Cách 2. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔRIP, ΔJQS.

Ta có: $3\vec{GG'}=\vec{GJ}+\vec{GQ}+\vec{GS}$.

$=\left(\vec{GI}+\vec{IJ}\right)+\left(\vec{GP}++\vec{PQ}\right)+\left(\vec{GR}+\vec{RS}\right)$

$=\left(\vec{GI}+\vec{GP}+\vec{GR}\right)+\left(\vec{IJ}+\vec{PQ}+\vec{RS}\right)$

$=\qquad \vec{0} \qquad +\left(\vec{BA}+\vec{CB}+\vec{AC}\right)$

$=\vec{0}$

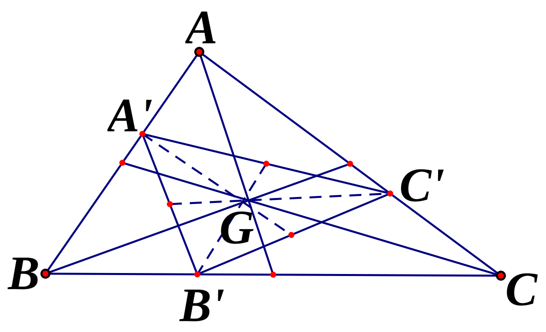
Suy ra $G \equiv G'$.

Vậy các tam giác RIP, JQS có cùng trọng tâm.

Bài 11. Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lấy các điểm A', B', C' sao cho $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} = \dfrac{CC'}{AC}$.

Chứng minh các tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có chung trọng tâm.

Lời giải



Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

Khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$.

Ta đặt: $\dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{BB'}{BC} = \dfrac{CC'}{AC} = k > 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CA} \end{cases}$.

Do G là trọng tâm của các ΔABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{A'A}\right) + \left(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{B'B}\right) + \left(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{C'C}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}\right) - \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} - k\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} - k.\vec{0} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G'$

Vậy các tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có chung trọng tâm.

Bài 12. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm K, I, J của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm N.

b) Chứng minh rằng khi M di động thì đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Lời giải

a) Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm N.

a) Gọi O, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'. Ta có:

$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

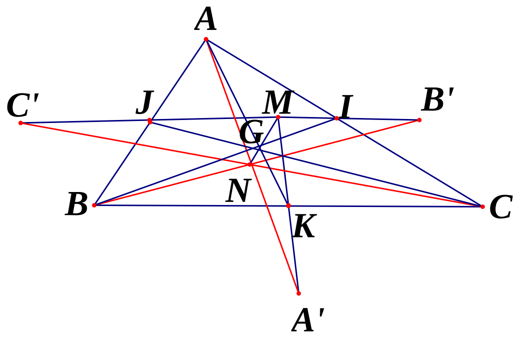
$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}\Rightarrow O\equiv P\equiv Q$.

Do đó ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm $N\left(\equiv O\equiv P\equiv Q\right)$ của mỗi đường.

b) Chứng minh rằng khi M di động đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.



Vì G là trọng tâm của ΔABC nên ta có $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$. Do đó 3 điểm M, N, G thẳng hàng.

Vậy khi M di động đường thẳng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Bài 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thỏa mãn $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}; \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Chứng ming đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 7\overrightarrow{MG}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\ (1)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}, (2)$

Thay vào ta được: $7\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 7\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$.

Lại có $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=7\overrightarrow{MG}$.

Vậy ba điểm M, N, G thẳng hàng.

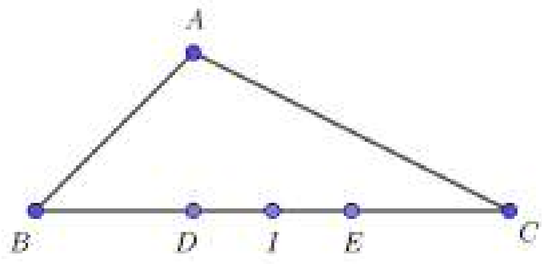
Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC. Hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$.

Chứng ming rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$

b) Tính $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$

Theo giả thiết ta có I là trung điểm của BC và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$ nên I cũng là trung điểm của DE. Do vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$.

b) Tính $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$. Suy ra ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AI}$.

Vì $\overrightarrow{AS}=4\overrightarrow{AI}$ nên ba điểm A, I, S thẳng hàng.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.

a) Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

b) Xác định x để đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC. Tính $\dfrac{IM}{IN}$.

Lời giải

a) Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

+) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$

+) $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{BC}+(x+1)\overrightarrow{AC}$

Khi đó A, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại $k\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BC}+(x+1)\overrightarrow{AC}=2k\overrightarrow{BC}-k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}-1=2k\\ x+1=-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $x=-\dfrac{1}{2}$ thì A, M, N thẳng hàng.

b) Xác định x để đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC. Tính $\dfrac{IM}{IN}$.

Ta có:

+) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(x+2)\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}$

+) $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}-\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$

Khi đó đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC thì M, N, I thẳng hàng

$\Rightarrow$ tồn tại $l\in\mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{MN}=l\overrightarrow{MI}$ $\Leftrightarrow (x+2)\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}=2l\overrightarrow{AC}-\frac{5l}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}2l=x+2\\ -\frac{5l}{2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}l=\frac{6}{5}\\ x=\frac{2}{5}\end{cases}$.

Vậy $x=\frac{2}{5}$ thì đường thẳng MN đi qua trung điểm I của BC.

Bài 16. Cho ba điểm cố định A, B, C và ba số thực a, b, c sao cho $a+b+c\neq 0$.

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm điểm G thỏa mãn $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

b) Gọi M, P là hai điểm di động sao cho $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Lời giải

a) Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm điểm G thỏa mãn $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Ta lấy một điểm O nào đó thì:

$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}\right)+b\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}\right)+c\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}\right)=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{OG}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)$

Vậy G hoàn toàn xác định và duy nhất.

b) Gọi M, P là hai điểm di động sao cho $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$. Chứng minh ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Với điểm M ta có $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{MP}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$.

Suy ra $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{a+b+c}\overrightarrow{MP}$.

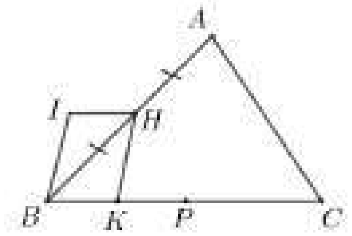
Vậy ba điểm G, M, P thẳng hàng.

Bài 17. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}=\overrightarrow{BK}$

Với H, P, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, BP.

Vậy I là đỉnh hình bình hành $BKHI$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=4\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{MI}$.

Vậy MN luôn qua I cố định.

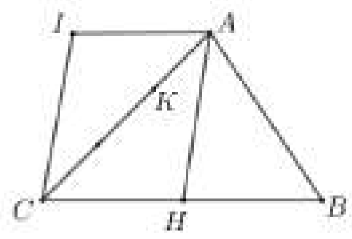
Bài 18. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

a) Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi P là trung điểm của BN. Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Tìm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{CP}$.

Với H là trung điểm của BC.

Vậy I là đỉnh hình bình hành $CHAI$.

b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{MI}$.

Vậy MN luôn qua I cố định.

c) Gọi P là trung điểm của BN. Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định.

Do P là trung điểm của BN nên

$2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=3\overrightarrow{MK}$.

Với K thuộc cạnh AC và $CK=2KA$.

Chứng minh đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định K.

DẠNG TOÁN 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VECTƠ

PHƯƠNG PHÁP

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức vectơ, ta biến đổi đẳng thức vectơ đó về các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Chẳng hạn:

- Tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
- Tập hợp các điểm các đều một điểm cố định một khoảng không đổi là đường tròn có tâm là điểm cố định và bán kính là khoảng không đổi.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **b)** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.

+) Ta có $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$.

Vì A và B là hai điểm phân biệt nên không tồn tại điểm M.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

Gọi G là điểm thoản mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Khi đó

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{0}\Rightarrow M\equiv G$.

Vậy tập hợp điểm M là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

c) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

Lời giải

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$.

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=AB$..

Gọi I là trung điểm AB, khi đó $(1)\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=AB\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=AB\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.

b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|3\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow 3MG=3MI\Leftrightarrow MG=MI$.

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI.

c) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$.

Gọi I và J lần lượt là các điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{0}$.

Biểu thức $(*)\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MI}\right|=\left|3\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow 3MJ=3MJ\Leftrightarrow MI=MJ$.

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn IJ.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

b) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

c) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, I là trung điểm của BC. Ta có:

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\dfrac{3}{2}\left|2\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow MG=MI$.

Vậy, tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn GI.

b) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Gọi P,Q là hai điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{0}$, $4\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{0}$. Ta có:

$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|4\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MP}\right|=\left|3\overrightarrow{MQ}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|\overrightarrow{MQ}\right|\Leftrightarrow MP=MQ$

Vậy, tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn PQ.

c) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, K là trung điểm của AG. Ta có:

$$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}\right)\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right)\right|$$

$\Leftrightarrow\left|6\overrightarrow{MK}\right|=\left|3\overrightarrow{GA}\right|\Leftrightarrow MK=\dfrac{GA}{2}$. Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R=\dfrac{GA}{2}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC.

a) Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm M,N xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm tập hợp điểm H sao cho: $\left|3\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right|$.

d) Tìm tập hợp điểm K sao cho: $2\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|=3\left|\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|$.

Lời giải

a) Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

a) Gọi E là trung điểm của AC.

Ta có: $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{IE}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{AB}$.

Vậy, I là đỉnh của hình bình hành $ABEI$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm M,N xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow M,N,I$ thẳng hàng.

Do đó đường thẳng nối hai điểm M,N luôn đi qua điểm I cố định.

c) Tìm tập hợp điểm H sao cho: $\left|3\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right|$.

Ta có: $\left|3\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{HI}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow HI=\dfrac{AB}{2}$.

Vậy, tập hợp điểm H là đường tròn tâm I bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.

d) Tìm tập hợp điểm K sao cho: $2\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|=3\left|\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, F là trung điểm của BC. Ta có:

$2\left|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|=3\left|\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right|\Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{KG}\right|=6\left|\overrightarrow{KF}\right|\Leftrightarrow KG=KF$.

Vậy, tập hợp điểm K là đường trung trực của đoạn GF.

Bài 5. Cho tam giác ABC.

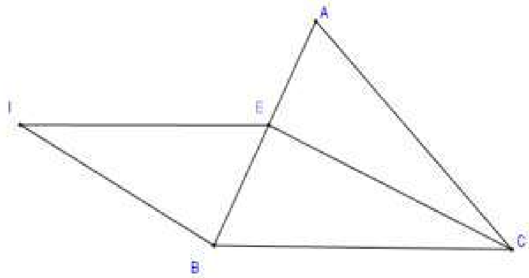
a) Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm A,I,D thẳng hàng.

d) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải



a) Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE}+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{0}$, với E là trung điểm của AB.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IE}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IE}=\overrightarrow{BC}$.

Vậy điểm I thoả mãn $IECB$ là hình bình hành.

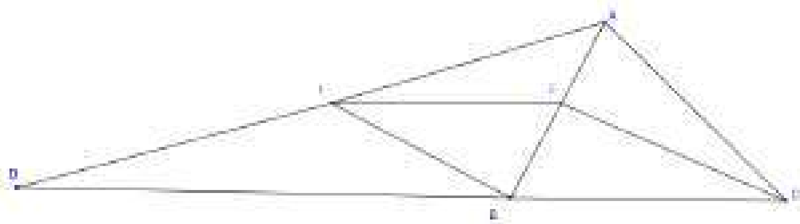
b) Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

$3\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+2\left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{BC}$.

Vậy điểm D thẳng hàng với B,C và D thuộc tia đối của tia BC thoả mãn $DB=2BC$.



c) Chứng minh rằng ba điểm A,I,D thẳng hàng.

Có $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{IE} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IA}$. Vậy ba điểm A,I,D thẳng hàng.

d) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

$\left|\vec{MA}+3\vec{MB}-2\vec{MC}\right|=\left|2\vec{MA}-\vec{MB}-\vec{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\vec{MI}+3\vec{MI}-2\vec{MI}+\vec{IA}+3\vec{IB}-2\vec{IC}\right|=\left|2\vec{MA}-\left(\vec{MB}+\vec{MC}\right)\right|$

$\Leftrightarrow\left|\vec{MI}+3\vec{MI}-2\vec{MI}+\vec{0}\right|=\left|2\vec{MA}-2\vec{MJ}\right|\Leftrightarrow\left|2\vec{MI}\right|=\left|2\vec{JA}\right|\Leftrightarrow IM=\text{AJ}$, với J là trung điểm của BC.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\text{AJ}$, với J là trung điểm của BC.

Bài 6. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định được điểm M sao cho $\vec{OM}=m\vec{u}+(1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp điểm M khi m thay đổi.

Lời giải

Từ O dựng $\vec{OA}=\vec{u}$; $\vec{OB}=\vec{v}$ thì A,B cố định.

$\vec{OM}=m\vec{OA}+(1-m)\vec{OB}\Leftrightarrow\vec{OM}=m\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)+\vec{OB}$.

$\Leftrightarrow\vec{OM}-\vec{OB}=m\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)\Leftrightarrow\vec{BM}=m\vec{BA}$.

Từ đó suy ra A,B,M thẳng hàng. Vậy tập hợp điểm M chính là đường thẳng AB.

Bài 7. Cho ΔABC và ba vectơ cố định $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\vec{AA'}=t\vec{u}$, $\vec{BB'}=t\vec{v}$, $\vec{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$3\vec{GG'}=\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{GC'}$

$=\vec{GA}+\vec{AA'}+\vec{GB}+\vec{BB'}+\vec{GC}+\vec{CC'}$

$=\left(\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}\right)+\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}$

$=\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}$

$=t\vec{u}+t\vec{v}+t\vec{w}$

$=t\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)$

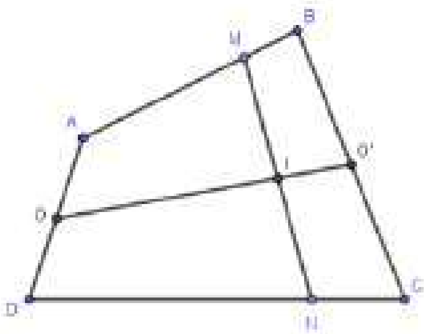
Đặt $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ cố định và $\vec{GG'}=\dfrac{1}{3}t\vec{\alpha}$.

Trường hợp 1: Nếu $\vec{\alpha}=\vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G.

Trường hợp 2: Nếu $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Với mỗi số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\vec{AM}=k\vec{AB}$, $\vec{DN}=k\vec{DC}$ Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Khi đó: $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(OA + AB + OD + DC\right)$

$= \frac{1}{2}\left(AB + DC\right)$.

Tương tự, vì O và I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên:

$OI = \frac{1}{2}\left(AM + DN\right) = \frac{k}{2}\left(AB + DC\right)$

$= k\overrightarrow{OO'}$.

Do đó: khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.

Bài 9. Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng t. Chứng minh rằng với cách chọn Δ khác nhau, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng t luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Giả sử năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng là A, B, C, D, E.

Gọi G là điểm thỏa mãn: $GA + GB + GC + GD + GE = 0$. (1)

$\Rightarrow G$ là điểm cố định.

Gọi G' là trọng tâm của Δ qua ba đỉnh A, B, C $\Rightarrow GA + GB + GC = 3GG'$. (2)

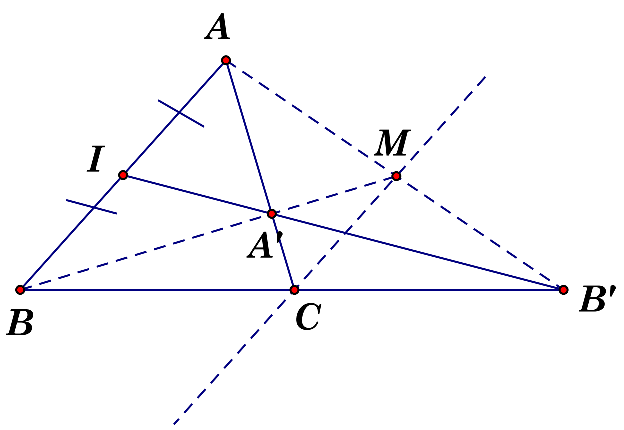
M là trung điểm của hai đỉnh còn lại $D, E \Rightarrow GD + GE = 2GM$. (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) $\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0} \Rightarrow G, G', M$ thẳng hàng.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10. Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua I, lần lượt cắt hai đường thẳng CA, CB tại A', B'. Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và $A'B$ nằm trên một đường thẳng cố định

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$

Xét tam giác ABB' với ba đường đồng quy là AC, MB và $B'I$.

Vì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ nên theo định lí Xê- va, ta có $-mn = -1$ hay $mn = 1$.

Từ $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$ ta suy ra $m\overrightarrow{MB'} = mn\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}$.

Vậy ta có $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$ và $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB'}$, điều này chứng tỏ rằng $CM \,//\, AB$.

Vậy điểm M luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua C và song song với AB.

……………………………………..Hết……………………………………..