

Chuyên đề 11 BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG ĐƯỢC SỬ DỤNG



① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)

- $\forall a, b \geq 0$, thì: $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = b$.
- $\forall a, b, c \geq 0$, thì: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{a.b.c}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacôpki)

- $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$, thì: $(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
- $\forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, thì: $(a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Hệ quả. Nếu a, b, c là các số thực và x, y, z là các số dương thì:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad \text{và} \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} : \text{bất đẳng thức cộng mẫu số.}$$

③ Bất đẳng thức véctơ

Xét các véctơ: $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (x; y)$. Ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi \vec{u} và \vec{v} cùng hướng.

④ Một số biến đổi hằng đẳng thức thường gặp

- $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.
- $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$.
- $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$.
- $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)]$.
- $(a - b)(b - c)(c - a) = ab^2 + bc^2 + ca^2 - (a^2b + b^2c + c^2a)$.
- $(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$.
- $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc}{a + b + c}$.
- $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.
- $\alpha.(a^2 + b^2) + \beta.ab = \frac{2\alpha + \beta}{4}(a + b)^2 + \frac{2\alpha - \beta}{2}(a - b)^2$ và $ab = \frac{(a - b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$.

⑤ Một số đánh giá cơ bản và bất đẳng thức phụ

Các đánh giá cơ bản thường được sử dụng (không cần chứng minh lại)

- $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
- $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$.
- $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$.
- $\forall x; y; z > 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x)$.
- $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$.

- f. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z).$
 g. $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z).$
 h. $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq (xy + yz + zx)^2.$
 i. $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)(xy + yz + zx) \leq \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x).$

Các bất đẳng thức phụ thường được sử dụng (chứng minh lại khi áp dụng)

- j. $\forall x; y \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x + y)^3.$
 k. $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}.$
 Suy ra: $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$
 l. $\forall x; y \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$
 m. $\forall x; y \in [0; 1] \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$
 n. $\forall \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{suy ra}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) \geq \left(\frac{2}{x+y} - 1\right)^2.$

Chứng minh các đánh giá cơ bản

- a. **Chứng minh:** $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$
 Áp dụng BĐT Cauchy: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy \\ y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2} = 2yz \\ z^2 + x^2 \geq 2\sqrt{z^2x^2} = 2zx \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$ Dấu "=" khi $x = y = z.$
- b. **Chứng minh:** $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$
 Áp dụng BĐT Cauchy $\begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ y + z \geq 2\sqrt{yz} \\ z + x \geq 2\sqrt{zx} \end{cases} \Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) \geq \sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz.$ Dấu "=" khi $x = y = z.$
- c. **Chứng minh:** $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2.$
 Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu số, ta được:
 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{1} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2.$ Dấu "=" khi $x = y = z.$
- d. **Chứng minh:** $\forall x; y; z > 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x).$
 Ta có: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + xy^2) + (y^3 + yz^2) + (z^3 + zx^2) + x^2y + y^2z + z^2x$
 Áp dụng BĐT Cauchy cho từng dấu (...) ta được:
 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2x^2y + 2y^2z + 2z^2x + x^2y + y^2z + z^2x = 3(x^2y + y^2z + z^2x).$ Dấu "=" khi $x = y = z.$
- e. **Chứng minh:** $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx).$
 Ta có: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx).$ Dấu "=" khi $x = y = z.$
- f. **Chứng minh:** $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z).$
 Đặt: $a = xy; b = yz; c = zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$: luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy (BĐT a.)

Dấu đẳng thức khi $x = y = z$ hoặc $y = z = 0$ hoặc $x = y = 0$ hoặc $z = x = 0$.

g. Chứng minh: $\forall x; y; z \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z)$.

Đặt: $a = xy; b = yz; c = zx$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$: luôn đúng theo BĐT e.

Dấu đẳng thức khi $x = y = z$ hoặc $y = z = 0$ hoặc $x = y = 0$ hoặc $z = x = 0$.

h. Chứng minh: $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq (xy + yz + zx)^2$.

Ta có: $3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 3 \cdot \left[\frac{(xy)^2}{1} + \frac{(yz)^2}{1} + \frac{(zx)^2}{1} \right] \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} (xy + yz + zx)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

i. Chứng minh: $\forall x; y; z \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{suy ra}} (x + y + z)(xy + yz + zx) \leq \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)$.

Ta có: $(x + y)(y + z)(z + x) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} = 8xyz$.

Mặt khác: $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz + (x + y)(y + z)(z + x)$. Suy ra:

$(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq \left(\frac{1}{8} + 1 \right) (x + y)(y + z)(z + x) = \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y = z$.

Chứng minh các bất đẳng thức phụ

j. Chứng minh: $\forall x; y \geq 0 \xrightarrow{\text{suy ra}} x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x + y)^3$.

Ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x \cdot y(x + y) \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} (x + y)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 \cdot (x + y) = \frac{(x + y)^3}{4}$. Dấu "=" khi $x = y$.

k. Chứng minh: $\forall xy \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \geq \frac{2}{1 + xy}$ và $\forall xy \leq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \leq \frac{2}{1 + xy}$.

Chứng minh: $\forall xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \geq \frac{2}{1 + xy}$ (1)

Bất đẳng thức (1) tương đương với: $\left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + xy} \right) + \left(\frac{1}{1 + y^2} - \frac{1}{1 + xy} \right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{xy - x^2}{(1 + x^2)(1 + xy)} + \frac{xy - y^2}{(1 + y^2)(1 + xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(y - x)}{(1 + x^2)(1 + xy)} + \frac{y(x - y)}{(1 + y^2)(1 + xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow (y - x) \cdot \frac{x(1 + y^2) - y(1 + x^2)}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + xy)} \geq 0 \Leftrightarrow (y - x) \cdot \frac{(x - y) + xy(y - x)}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y - x)^2(xy - 1)}{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + xy)} \geq 0$: đúng $\forall xy \geq 1$. Dấu "=" khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Chứng minh: $\forall xy \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \leq \frac{2}{1 + xy}$ (2)

Ta làm tương tự và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Suy ra: $\forall xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + y} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{xy}}$ và $\forall xy \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + y} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{xy}}$.

Mở rộng: $\forall x; y; z \geq 1$ thì $\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + z^2} \geq \frac{3}{1 + xyz}$ (3)

Chứng minh: Ghép từng cặp xoay vòng, cộng lại. Dấu "=" khi và chỉ khi: $x = y = z = 1$.

l. Chứng minh: $\forall x; y \geq 1 \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

Ta có: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right)^2 + \frac{2}{(1+x)(1+y)} - \frac{1}{1+xy} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2} + \frac{1+xy-x-y}{(1+x)(1+y)(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-x)^2}{(1+x)^2(1+y)^2} + \frac{(x-1)(y-1)}{(1+x)(1+y)(1+xy)} \geq 0$: đúng $\forall x, y \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

m. Chứng minh: $\forall x; y \in [0;1] \xrightarrow{\text{suy ra}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$.

Ta có: $1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}}$ (1)

Mặt khác $\forall x, y \in (0;1)$, thì $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ (2)

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{xy-y^2}{(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \leq 0$: đúng $\forall xy \leq 1$.

Từ (1), (2), suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$, $\forall x; y \in [0;1]$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y$.

n. Chứng minh: $\forall \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x+y > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{suy ra}} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \geq \left(\frac{2}{x+y} - 1 \right)^2$.

Ta có: $BDT \Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq \frac{4}{(x+y)^2} - \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{4}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)^2} \geq \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(1-x-y) \geq 0$: đúng với mọi $x+y < 1$ và dấu "=" khi và chỉ khi: $x = y$.

§ 2. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN SỐ

☆☆☆

I. Bài toán hai biến có tính đối xứng

VD 1. (CĐ – 2008) Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. ĐS: $\begin{cases} \min P = -7 \text{ khi } x = y = -1 \\ \max P = \frac{13}{2} \text{ khi } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{cases}$

VD 2. Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y + 1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức: $P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$. ĐS: $\max P = 1$ khi $x = y = 1$.

VD 3. (D – 2009) Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. ĐS: $\begin{cases} \min P = \frac{191}{16} \text{ khi } x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}; y = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{4} \\ \max P = \frac{25}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2} \end{cases}$

VD 4. Cho các số thực x, y thỏa: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2y+3} = x + y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của:

$$P = 8\sqrt{5-x-y} + x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1). \quad \text{ĐS: } \begin{cases} \min P = 2 + 8\sqrt{5} \text{ khi } x = \frac{3}{2}; y = -\frac{3}{2}. \\ \max P = 34 \text{ khi } x = \frac{7}{2}; y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

VD 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $2x^2 + 2y^2 - xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của: $P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$. $\text{ĐS: } \begin{cases} \min P = \frac{18}{25} \text{ khi } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}; y = \mp \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \max P = \frac{70}{33} \text{ khi } xy = \frac{7}{33}, x^2 + y^2 = \frac{20}{33} \end{cases}$

VD 6. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 - xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$. $\text{ĐS: } \min P = \frac{11}{15} \text{ và } \max P = 6 - 2\sqrt{6}$.

VD 7. (B – 2011) Cho $a, b > 0$ thay đổi thỏa mãn điều kiện: $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của: $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$. $\text{ĐS: } \min P = -\frac{23}{4} \text{ khi } \begin{cases} a = 2, b = 1 \\ a = 1, b = 2 \end{cases}$

VD 8. (HSG – Hà Tĩnh – 2014) Cho các số thực dương x, y thỏa: $x + y + 2 = 3\left(\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{x}\right)$. Hãy tìm

giá trị nhỏ nhất của: $P = (x-y)^2 \left(\frac{x^2}{y^4} + \frac{y^2}{x^4} - \frac{3}{xy}\right)$. $\text{ĐS: } \min P = \frac{2596}{81} \text{ khi } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

II. Bài toán hai biến có tính đẳng cấp

VD 9. Cho các số thực dương x và y thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 \neq 0$. Tìm giá trị lớn nhất

và giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{2xy + y^2}{3x^2 + 2xy + y^2}$. $\text{ĐS: } \begin{cases} \max P = 1 \text{ khi } x = 0; y \in \mathbb{R}^* \\ \min P = -0,5 \text{ khi } x = -y \neq 0 \end{cases}$

VD 10. (B – 2008) Cho hai số thực x và y thay đổi thỏa mãn hệ thức: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất

và giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$. $\text{ĐS: } \max P = 3 \text{ khi } \begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

VD 11. Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $4x^2 + 2xy + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + 2xy - y^2$. $\text{ĐS: } \min P = -2 \text{ và } \max P = \frac{1}{3}$.

VD 12. (D – 2013) Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa điều kiện: $xy \leq y - 1$. Hãy tìm giá trị

lớn nhất của: $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$. $\text{ĐS: } \max P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30} \text{ khi } x = \frac{1}{2}; y = 2$.

VD 13. Cho x và y là các số thực dương thỏa: $2y^2(11x^2 + 1) = 8x^4 + 6y^4 + 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)(y + \sqrt{4x^2 + y^2})}$. $\text{ĐS: } \min P = \frac{\sqrt{2}-1}{5} \text{ khi } x = \frac{1}{2}; y = 1$.

VD 14. Cho x và y là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy + \sqrt{x^4 + 9x^2y^2}}{x^2 + 8y^2}$.

$\text{ĐS: } \max P = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ khi } x = 6\sqrt{2} \text{ và } y = 1$.

VD 15. Cho hai số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y \leq 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức: $P = 7(x+2y) - 4\sqrt{x^2 + 2xy + 8y^2}$. $\text{ĐS: } \max P = 8 \text{ khi } x = \frac{4}{3}; y = \frac{2}{3}$.

III. Bài toán có hai biến mà cần đánh giá trước, rồi đặt ẩn phụ sau

VD 16. (D – 2012) Cho các số thực dương x và y thỏa: $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$. ĐS: $\min P = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$ khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

VD 17. Cho hai số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x, y > 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + y^3 - x^2 - y^2}{(x-1)(y-1)}$. ĐS: $\min P = 8$ khi $x = y = 2$.

VD 18. Cho hai số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $xy \leq 4$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{x^4} + \frac{2}{y^4} + \frac{3}{(x-y)^2}$. ĐS: $\min P = \frac{13}{8}$ khi $x = \sqrt{5} \pm 1, y = \sqrt{5} \mp 1$.

VD 19. Cho hai số thực dương a, b khác nhau và thỏa mãn điều kiện: $a^2 + 2b = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4}{a^4} + \frac{4}{b^4} + \frac{5}{8(a-b)^2}$. ĐS: $\min P = \frac{27}{64}$ khi $a = 2; b = 4$.

VD 20. (B – 2006) Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất: $P = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + |y - 2|$.
ĐS: $\min P = 2 + \sqrt{3}$ khi $x = 0, y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VD 21. Cho hai số thực dương x và y thay đổi thỏa: $x; y \leq \frac{3}{5}$ và $6xy = x + y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3x+1}{9y^2+1} + \frac{3y+1}{9x^2+1} + (3x+y)(3y+x)$. ĐS: $\min P = \frac{34}{9}$ khi $x = y = \frac{1}{3}$.

VD 22. Cho các số dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 4 \cdot \left(\frac{x+1}{y}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{y+1}{x}\right)^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$. ĐS: $\min P = 64 + \sqrt{2}$ khi $x = y = 1$.

VD 23. (D – 2014) Cho hai số thực dương thay đổi x và y thỏa: $1 \leq x; y \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$. ĐS: $\min P = \frac{7}{8}$ khi $x = 1, y = 2$.

VD 24. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $2x^2 + 2y^2 + 1/xy = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{3}{1+x^2} + \frac{3}{1+y^2} - \frac{4}{1+2xy}$. ĐS: $\max P = \frac{32}{15}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

VD 25. Cho $a, b > 0$, thỏa: $2ab + 2 = a^4 + 16b^4 + \frac{1}{2ab}$. Tìm giá trị lớn nhất: $P = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2}{1+4b^2} - \frac{3}{1+4ab}$?

VD 26. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa điều kiện: $x^4 + y^4 + 4 = 6/xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{3-2xy}{5-x^2-y^2}$. ĐS: $\min P = 1$ khi $x = y = 1$.

VD 27. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x, y \in (0;1)$ và $(x^3 + y^3)(x+y) - xy(x-1)(y-1) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + xy - (x+y)^2$. ĐS: $\max P = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{1}{9}$ khi $x = y = \frac{1}{3}$.

VD 28. Cho hai số thực dương a và b thay đổi thỏa điều kiện: $a^2 + b^2 + a + b = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = 2 \left(\frac{a^2+1}{a^2+a} + \frac{b^2+1}{b^2+b} \right) + \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+1}}$. ĐS: $\min P = 4 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$ khi $a = b = 1$.

VD 29. Cho hai số thực dương a và b thay đổi thỏa điều kiện: $a^4 + b^4 + 4 = \frac{6}{ab}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{a+1}{2a+1} + \frac{b+1}{2b+1} - \frac{\sqrt{ab}}{a^2+b^2-1}$. ĐS: $\min P = \frac{1}{3}$ khi $a = b = 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- BT 1.** Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = x^3 + y^3 + x^2y + y^2x$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 0 \text{ khi } x = y = 0 \\ \max P = 4 \text{ khi } x = y = 1 \end{cases}$.
- BT 2.** Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x+1)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (y+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)$. ĐS: $\min P = 4 + 3\sqrt{2}$ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- BT 3.** Cho $x, y > 0$ thỏa: $(xy+1)(9\sqrt{xy} - 2xy) = 7(x^2 + y^2) - 2xy - 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = xy + \sqrt{xy} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 4 \text{ khi } x = y = 1 \\ \max P = \frac{27}{4} \text{ khi } \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$.
- BT 4.** Cho các số thực x và y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1$ và $4xy = 3(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = x^3 + y^3 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{y^2}$. ĐS: $\begin{cases} \min P = \frac{65}{12} \text{ khi } x = y = \frac{3}{2} \\ \max P = \frac{74}{3} \text{ khi } \begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = 1 \end{cases} \end{cases}$.
- BT 5.** Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $xy + x^2 + y^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = x^4 + y^4 + 4xy - x^3y^3$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 5 \text{ khi } x = y = 1 \\ \max P = 33 \text{ khi } x = y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$.
- BT 6.** Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x, y \geq 1$ và $x + y + xy = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = x^2 + y^2 + x^2y^2$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 24 \text{ khi } x = y = 2 \\ \max P = \frac{51}{2} \text{ khi } x = \frac{7}{2}, y = 1 \end{cases}$.
- BT 7.** Cho các số thực x và y thỏa: $x + y = \sqrt{y+1} + \sqrt{2x-4} + 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{1}{\sqrt{x+y}} - \sqrt{9-x-y} + (x+y)^2$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 2 - 2\sqrt{2} \text{ khi } x = 2, y = -1 \\ \max P = \frac{33 - 2\sqrt{5}}{2} \text{ khi } x = 4, y = 0 \end{cases}$.
- BT 8.** (A – 2006) Cho x, y là các số thực khác 0 và thỏa mãn điều kiện: $(x+y).xy = x^2 + y^2 - xy$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$. ĐS: $\max P = 16$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.
- BT 9.** Cho các số không âm x và y thay đổi thỏa: $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = x^2 + y^2 - \frac{3x}{y+1} - \frac{3y}{x+1} - \frac{xy}{x+y}$. ĐS: $\begin{cases} \min P = -\frac{3}{2} \text{ khi } x = y = 1 \\ \max P = 0 \text{ khi } x = 0, y = 3 \end{cases}$.
- BT 10.** Cho các số thực dương x, y . Hãy tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{x^4 + y^4}{(x+y)^4} + \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^2} + \frac{5\sqrt{xy}}{x+y}$. ĐS: $\max P = \frac{7}{2}$ khi $x = y$.
- BT 11.** Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $xy \geq 0$ và $x + y > 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{x^2y - 4y^3}{x^3 + 8y^3}$. ĐS: $\begin{cases} \min P = -0,5 \text{ khi } x = 0, y > 0 \\ \max P = \frac{1}{6} \text{ khi } x = 4y \end{cases}$.

BT 12. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2 + 3y^2 + 1 = y(3x + 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x + 2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} - \frac{2x^2 + xy + 8y^2}{2xy + y^2}$.

BT 13. Cho x và y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 - xy + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + 2xy - 7y^2$.

Đáp số: $\min P = -16$ khi $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, $y = \pm 3\sqrt{\frac{7}{2}}$ và $\max P = \frac{8}{3}$ khi $x = \pm 5\sqrt{\frac{2}{21}}$; $y = \pm\sqrt{\frac{2}{21}}$.

BT 14. Cho x và y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2 + 3y^2 - xy \leq 2$ và $y \neq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + xy + 2y^2$.

BT 15. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x(4x^2 + 3) + y(4y^2 + 3)}{x + y + 4xy}$.

Đáp số: $\min P = 2$ khi $x = y = 0,5$.

BT 16. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $3xy + 3 = x^4 + y^4 + \frac{2}{xy}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{16}{x^2 + y^2 + 2} + x^2y^2$. ĐS: $\max P = \frac{20}{3}$ khi $x = y = \sqrt{2}$.

BT 17. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2y + y^2x = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = x^2 + y^2 + \frac{(1 + 2xy)^2 - 3}{2xy}$. ĐS: $\min P = \frac{71}{4}$ khi $x = y = 2$.

BT 18. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + 2y - xy = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{4 + 8y} + \frac{y^2}{1 + x}$. ĐS: $\min P = \frac{8}{5}$ khi $x = 4, y = 2$.

BT 19. Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2y + 2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + 2(x + 1)(y + 1) + 8\sqrt{4 - x - y}$.

Đáp số: $\min P = 18$ khi $x = 1, y = -1$ và $\max P = 25$ khi $x = 2, y = 1$.

BT 20. Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x\sqrt{3 - y^2} + y\sqrt{3 - x^2} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \sqrt{xy} + (x + y)^3 - 12(x - 1)(y - 1)$. ĐS: $\max P = 10$ khi $x = y = \frac{3}{2}$.

BT 21. Cho các số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $(x^2 + y^2 + 1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2 + y^2 + 1}$.

Đáp số: $\min P = 1$ khi $x = 0; y = \pm 1$ và $\max P = \frac{4}{3}$ khi $x = 0; y = \pm\sqrt{2}$.

BT 22. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = x + y + 2$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(\frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{x^2} - 3xy\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2$.

BT 23. Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $5(x + y)(xy + 3) = 6(x^2 + y^2) + 20xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 9\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - 16\left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) + 25\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$.

Đáp số: $\min P = \frac{14156}{27}$ khi $a = 1, b = 3$ hoặc $a = 3, b = 1$.

- BT 24.** Cho các số thực a và b thay đổi thỏa mãn điều kiện: $(a^2 + 2b^2)^2 + 3a^2b^2 = 2(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^3 + b^3}{b^3} + \frac{8b^3}{a^3} + \frac{[(a+b)^2 + 2a^2 + 5b^2] \cdot [(a-b)^2 + 2a^2 + 5b^2]}{ab(a^2 + b^2)}$.
- Đáp số:** $\min P = \frac{97}{3}$ khi $a = b = c = 1$.
- BT 25.** Cho hai số thực x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x^2 + 4y^2 + 4xy \leq x + 2y + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 4x + 8y + 6xy + 1$. **ĐS:** $\max P = 12$ khi $x = 1; y = 0,5$.
- BT 26.** Cho hai số thực x và y thỏa mãn điều kiện: $x + y = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} + 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{2}(x-y) + \frac{y}{2}(y-x) + \frac{2(1+xy\sqrt{x+y})}{\sqrt{x+y}}$.
- BT 27.** Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa: $3x^2 + 8y^3 = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$. **ĐS:** $\min P = 6$ khi $x = 2, y = 1$.
- BT 28. (B – 2009)** Cho các số thực x, y thay đổi thỏa: $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$. **ĐS:** $\min P = \frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.
- BT 29.** Cho x và y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện: $4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = xy + \sqrt{x+y} - x^2 - y^2$. **ĐS:** $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.
- BT 30.** Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x\left(1 - \frac{1}{y}\right) + y\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = xy + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$. **ĐS:** $\min P = 9 + 2\sqrt{10}$ khi $x = y = 3$.
- BT 31.** Cho x và y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x + y = 2\sqrt{x+2} + 3\sqrt{y-2014} + 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của: $P = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \frac{2015 + 2xy\sqrt{x+y+1}}{\sqrt{x+y+1}}$.
- Đáp số:** $\min P = 4044122 + \frac{2015}{\sqrt{2013}}$ khi $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2014 \end{cases}$ và $\max P = 4096577 + \frac{2015}{\sqrt{2026}}$ khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2023 \end{cases}$.
- BT 32.** Cho hai số thực dương x và y thay đổi thỏa: $x^2 + 9y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{(x+1)^2 + 3(2xy+1) + (3y+1)^2}{x+3y+1}$. **HD:** $f(t) = t + \frac{4}{t}, \begin{cases} t = x + 3y + 1 \\ t \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \end{cases}$.
- BT 33.** Cho x và y thỏa mãn điều kiện: $x^4 + 16y^4 + (2xy+1)^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x(x^2 + 3) + 2y(4y^2 + 3)$. **HD:** Bài toán đối xứng theo $x, 2y$.
- BT 34.** Cho các số thực dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $3 + \frac{3}{xy} = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + \frac{2}{x^2y^2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{16}{x^2 + y^2 + 2} + x^2y^2$. **ĐS:** $\min P = \frac{20}{3}$ khi $x = y = \sqrt{2}$.
- BT 35.** Cho $x, y > 0$ thỏa: $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{4x}{y+1} + \frac{4y}{x+1} + 2xy - \sqrt{7-3xy}$.
- Đáp số:** $\min P = 6$ khi $x = y = 1$.
- BT 36.** Cho các số thực dương x và y thỏa mãn điều kiện: $x^2 - xy + y^2 = (x+y)(xy+1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = (x^2 + y^2) \cdot \frac{x+y}{xy^2} + \frac{4(xy-1)^2}{3(x+y)} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$. **ĐS:** $\min P = 55$.

§ 3. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM BA BIẾN SỐ



I. Ba biến đối xứng

1. Đặt ẩn phụ trực tiếp

VD 30. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2xy + 2yz + 2zx + \frac{1}{x + y + z}$. ĐS: $\max P = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VD 31. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$. ĐS: $\min P = \frac{7}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 32. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (xy + yz + 2zx)^2 - \frac{8}{(x + y + z)^2 - xy - yz + 2}$. ĐS: $\min P = 3$ khi $x = -z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0$.

VD 33. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $\frac{1 - 16xyz}{4} = x^2 + y^2 + z^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{4xyz + 3\sqrt{xyz}}{1 + 4(x^2 + y^2 + z^2)}$. ĐS: $\max P = \frac{13}{28}$ khi $x = y = z = \frac{1}{4}$.

VD 34. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + x\sqrt{(1 - y^2)(1 - z^2)} + y\sqrt{(1 - z^2)(1 - x^2)} + z\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$. ĐS: $\max P = 2$ khi $x = y = z$.

2. Đánh giá trước, rồi đặt ẩn phụ sau

VD 35. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. ĐS: $\min P = \frac{15}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

VD 36. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 8\sqrt{xyz} + \sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}}$. ĐS: $\max P = 9$ khi $x = y = z = 1$.

VD 37. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x + y + z)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - \frac{1}{xy + yz + zx} \right)$. ĐS: $\min P = 4$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VD 38. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: $x \geq y \geq z$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x - y)(y - z)(x - z)(xy + yz + zx)$. ĐS: $\max P = 4$ khi $x = 2; y = 1; z = 0$.

VD 39. Cho x, y, z không âm thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3(xy + yz + zx) + x^2 + y^2 + z^2$. ĐS: $\min P = 1$ khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$.

VD 40. (B – 2010) Cho a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ĐS: $\min P = 2$ khi $(a; b; c) = (1; 0; 0)$.

VD 41. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2y + y^2z + z^2x}$. ĐS: $\min P = 4$ khi $x = y = z = 1$.

- VD 42.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. ĐS: $\min P = \frac{13}{3}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 43. (HSG Bình Phước 2014)** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} - \frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$. ĐS: $\max P = \frac{1}{4}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 44.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x > 1, y > 0, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2}} - \frac{2}{x(y+1)(z+1)}$. ĐS: $\max P = \frac{1}{4}$ khi $y = z = 1, x = 2$.
- VD 45.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{9}{\sqrt{(x+2z)(y+2z)xy}} - \frac{16}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}$. ĐS: $\min P = -5$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 46. (B – 2013)** Cho a, b, c là các số thực dương. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$. ĐS: $\max P = \frac{5}{8}$ khi $a = b = c = 2$.
- VD 47.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} + \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}} - 2$. ĐS: $\min P = 2$ khi $x = y = z$.
- VD 48.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{16}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 1}} + \frac{xy + yz + zx + 1}{x + y + z}$. ĐS: $\min P = \frac{28}{3}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 49.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{72}{\sqrt{x+y+z+1}} + (x+y)(y+z)(z+x)$. ĐS: $\min P = 44$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 50.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3}{y(z+2)} + \frac{y^3}{z(x+2)} + \frac{z^3}{x(y+2)} - \frac{1}{2\sqrt{x+y+z+3}}$. ĐS: $\min P = \frac{12 - \sqrt{6}}{12}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 51.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{z^2} + \frac{z^3}{x^2} + \frac{54}{xy + yz + zx + 6} + 9\ln(x+y+z)$. ĐS: $\min P = 9 + 9\ln 3$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 52.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(y+1)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x+y+z+1} + \sqrt{2xy} + \sqrt{2yz}$. ĐS: $\max P = \frac{21}{5}$ khi $x = z = 1; y = 2$.
- VD 53.** Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^2y}{z^3} + \frac{y^2z}{x^3} + \frac{z^2x}{y^3} + \frac{13xyz}{3(xy^2 + yz^2 + zx^2)}$. ĐS: $\min P = \frac{40}{9}$ khi $x = y = z$.
- VD 54.** Cho $a, b, c > 0$ thỏa điều kiện: $3(a^4 + b^4 + c^4) - 7(a^2 + b^2 + c^2) + 12 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$. ĐS: $\min P = 1$ khi $a = b = c$.
- VD 55.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $3(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}} + x + y + z$. ĐS: $\min P = 26$ khi $x = 1; y = 2; z = 3$.

VD 56. (HSG Hà Nội 2014) Cho $a \geq 0, b \geq 0, 0 \leq c \leq 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN và GTNN của biểu

$$\text{thức: } P = 2ab + 3bc + 3ca + \frac{6}{a+b+c}. \quad \text{ĐS: } \begin{cases} \min P = 2\sqrt{3} \text{ khi } a = \sqrt{3}, b = c = 0 \\ \max P = 10 \text{ khi } a = b = c = 1. \end{cases}$$

VD 57. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{24}{13x + 12\sqrt{xy} + 16\sqrt{yz}} - \frac{3}{\sqrt{x+y+z}}. \quad \text{ĐS: } \min P = -\frac{3}{2} \text{ khi } x = 4y = 16z = \frac{16}{21}.$$

VD 58. (HSG Nghệ An 2013) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}. \quad \text{ĐS: } \min P = -\frac{3}{2} \text{ khi } a = 4b = 16c = \frac{16}{21}.$$

VD 59. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2x+y+\sqrt{8yz}} - \frac{8}{\sqrt{2y^2+2(x+z)^2+3}}. \quad \text{ĐS: } \min P = -\frac{3}{2} \text{ khi } y = \frac{1}{2}; x = z = \frac{1}{4}.$$

VD 60. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt[3]{xyz}) + 8x + 3y}{1 + (x+y+z)^2}. \quad \text{ĐS: } \max P = \frac{14}{3} \text{ khi } x = 4y = 16z = \frac{16}{21}.$$

VD 61. Cho các số thực dương x, y, z thỏa: $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ và $y; z \geq 1$, sao cho $xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức: } P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{22}{15} \text{ khi } x = \frac{1}{4}; y = z = 2.$$

VD 62. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x \geq y \geq z$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{xy + yz + zx}{4} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(y+1)^2} + \frac{3}{(z+1)^2}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{9}{4} \text{ khi } x = y = z = 1.$$

VD 63. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} + xyz. \quad \text{ĐS: } \min P = 3 \text{ khi } x = y = z = 0.$$

II. Ba biến mà có hai biến đối xứng

VD 64. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{1}{\sqrt{a^2+ab}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ab}} + \frac{2\sqrt{3}}{1+c}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ khi } x = y = \frac{\sqrt{3}}{2}; z = \frac{1}{2}.$$

VD 65. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{4z^3}{3(z+x)^3}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{3}{2} \text{ khi } x = y = z.$$

VD 66. (A – 2011) Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 4]$ thỏa điều kiện: $x \geq y; x \geq z$. Tìm giá trị

$$\text{nhỏ nhất của biểu thức: } P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{34}{33} \text{ khi } x = 4y = 2z = 4.$$

VD 67. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x \geq z$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}}. \quad \text{ĐS: } \max P = \sqrt{5} \text{ khi } x = 2y = 4z.$$

VD 68. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $x > y > z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y}{x-y} + \frac{z}{y-z} + \frac{x^2}{8z(\sqrt{xz}-z)}. \quad \text{ĐS: } \min P = 4 \text{ khi } x = 2y = 4z.$$

- VD 69.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xy \geq 1$ và $z \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{z^3+2}{3(xy+1)}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 70.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{3z}{\sqrt{1+z^2}}$. ĐS: $\max P = \sqrt{10}$ khi $\begin{cases} x = y = \sqrt{10} - 3 \\ z = 3 \end{cases}$.
- VD 71.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $3x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{18}{3x+y+2z-1} + \sqrt{\frac{2-3x}{3x-1} \cdot \left(\frac{1}{y} - 1\right)}$. ĐS: $\min P = 15$ khi $x = \frac{5}{12}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{2}$.
- VD 72.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{\sqrt{xyz}}{z+xy}$. ĐS: $\max P = \frac{4+3\sqrt{3}}{4}$ khi $\begin{cases} x = y = 2\sqrt{3} - 3 \\ z = 7 - 4\sqrt{3} \end{cases}$.
- VD 73.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2c^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. ĐS: $\min P = \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{13}}{13}$ khi $a = b = 2c$.
- VD 74. (A – 2013)** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$. ĐS: $\min P = 1 - \sqrt{2}$ khi $a = b = c$.
- VD 75.** Cho các số thực không âm thỏa mãn điều kiện: $x + y + z > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$. ĐS: $\min P = \frac{16}{81}$ khi $x + y = 8z > 0$.
- VD 76.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện: $x > y$ và $(x+z)(y+z) = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{6}{(y+z)^2} + \frac{12}{(z+x)^2}$. ĐS: $\min P = 20$ khi $\begin{cases} x+z = \sqrt{2} \\ y+z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.
- VD 77. (B – 2014)** Cho các số thực a, b, c không âm thỏa điều kiện: $(a+b)c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $(a;b;c) = (0;m;m > 0)$.
- VD 78.** Cho a, b, c không âm thỏa điều kiện: $ab + bc + ca > 0; a \leq b \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2\sqrt{\frac{b}{c+a}} + 3\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{a}{b+c}$. ĐS: $\min P = 4$ khi $\begin{cases} x = 0; y = z > 0 \\ y = 0; x = z > 0 \end{cases}$.
- VD 79.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}} + \sqrt{\frac{y^3}{y^3+(z+x)^3}} + \frac{2z^3+1}{27}$. ĐS: $\min P = \frac{7}{9}$ khi $x = y = z = 1$.
- VD 80. (A – 2014)** Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz}{9}$. ĐS: $\min P = \frac{5}{9}$ khi $x = y = 1, z = 0$.
- VD 81.** Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} + \frac{1}{xyz+3}$. ĐS: $\max P = 1$ khi $x = 0; y = z = 1$.

VD 82. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{1}{a^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} - \frac{b+c}{9a}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{4}{9} \text{ khi } a = b = c = 1.$$

VD 83. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y = z + 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{x+y+z^2}{9} + \sqrt[3]{\frac{9x^2}{(y+z)^2 + 5yz}} + \sqrt[3]{\frac{9y^2}{(z+x)^2 + 5zx}}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{7}{3} \text{ khi } x = y = z = 1.$$

VD 84. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x^2}{(y+z)^2 + 5yz} + \frac{y^2}{(z+x)^2 + 5zx} - \frac{3(x+y)^2}{4}. \quad \text{ĐS: } \min P = -\frac{1}{9} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

VD 85. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{(x+y)^2}{4z^2} - 2\sqrt{\frac{2x+2y}{z}}. \quad \text{ĐS: } \min P = -\frac{3}{2} \text{ khi } x = y = z.$$

VD 86. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $a + b \leq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = (a^4 + b^4 + c^4) \left(\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{4b^4} + \frac{1}{c^4} \right). \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{81}{8} \text{ khi } 2a = 2b = c.$$

VD 87. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4x^3 + 3y^3 + 2z^3 - 3y^2z}{(x+y+z)^3}$.

$$\text{ĐS: } \min P = \frac{4}{25} \text{ khi } 2x = y = z.$$

VD 88. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [1; 2]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(xy+yz+zx)}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{1}{6} \text{ khi } x = y = 1, z = 2.$$

VD 89. Cho các số thực x, y, z phân biệt và thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức: } P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}. \quad \text{ĐS: } \min P = \frac{9}{4} \text{ khi } x = 0; y = 1; z = 2.$$

VD 90. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $x = y + z + xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(z+z\sqrt{xy})^2}{(x+y)(z^2+1)} + \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}. \quad \text{ĐS: } \min P = \sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} x = \sqrt{2} + 1 \\ y = \sqrt{2} - 1, z = 1 \end{cases}.$$

VD 91. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}. \quad \text{ĐS: } \max P = \frac{2}{9} \text{ khi } x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = \sqrt{2}; z = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

VD 92. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+x} + \frac{4z^2}{2+\sqrt{2x^2+2y^2}}. \quad \text{ĐS: } \min P = 20\sqrt{2} - 28 \text{ khi } \begin{cases} x = y = \sqrt{2} - 1 \\ z = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

VD 93. Cho ba số thực x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{32x^2y^2z^2} - \frac{27}{(2x^2+2y^2+z+1)^3}$.

$$\text{ĐS: } \min P = -\frac{1}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}; z = 1.$$

VD 94. Cho các số thực dương x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 5(x+y+z) - 2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = 48 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{y+z}} + \sqrt{\frac{3}{x+10}} \right) + x + y + z. \quad \text{ĐS: } \min P = 58 \text{ khi } x = 2, y = 3, z = 5.$$

III. Phương pháp đồ thị

1. Bài toán có giả thiết tổng các biến là hằng số với $P = f(a) + f(b) + f(c)$

VD 95. Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1}$. ĐS: $\max P = \frac{9}{10}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

VD 96. Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

VD 97. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa điều kiện: $a + b + c + d = 4$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{3a^2 + 5} + \frac{b}{3b^2 + 5} + \frac{c}{3c^2 + 5} + \frac{d}{3d^2 + 5} \leq \frac{1}{2}$. ĐS: $\max P = \frac{1}{2}$ khi $a = b = c = d = 1$.

VD 98. (France MO) Cho các số không âm a, b, c, d thỏa điều kiện: $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng: $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$.

VD 99. (China MO) Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + 9}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 5$.

VD 100. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4 + \sqrt{x}}{4 - x} + \frac{4 + \sqrt{y}}{4 - y} + \frac{4 + \sqrt{z}}{4 - z}$. ĐS: $\min P = 5$ khi $x = y = z = 1$.

VD 101. Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $a + b + c + d = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1 + \sqrt{a}}{1 - a} + \frac{1 + \sqrt{b}}{1 - b} + \frac{1 + \sqrt{c}}{1 - c} + \frac{1 + \sqrt{d}}{1 - d}$. ĐS: $\min P = 8$ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

VD 102. Cho các số không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của: $P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}$. ĐS: $\begin{cases} \min P = 3 \text{ khi } x = y = z = 1 \\ \max P = 2 + \sqrt{7} \text{ khi } x = 3; y = z = 0 \end{cases}$.

VD 103. (USA MO) Cho các số thực dương a, b, c thay đổi. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + c + a)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8.$$

VD 104. (Crux Mathematicorum – Canada) Cho các số thực dương a, b, c thay đổi. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

2. Bài toán có giả thiết tổng bình phương các biến bằng hằng số với $P = f(a) + f(b) + f(c)$

VD 105. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z)$. ĐS: $\min P = 2\sqrt{3}$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VD 106. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(x + y + z) + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. ĐS: $\min P = 15$ khi $x = y = z = 1$.

VD 107. Cho các số thực dương x, y, z thỏa: $x, y, z \geq \frac{4}{3}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y^2 + 1}{y} + \frac{z^2 + 1}{z}$. ĐS: $\max P = \frac{15}{2}$ khi $x = y = z = 2$.

VD 108. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$. ĐS: $\min P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VD 109. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{x^2+z^2} + \frac{z}{x^2+y^2}$. ĐS: $\min P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

VD 110. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+xz} + \frac{z}{1+xy}$. ĐS: $\min P = 1$ khi $(x; y; z) = (0; 0; 1)$.

VD 111. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{(y+z)^2} + \frac{y}{(z+x)^2} + \frac{z}{(x+y)^2}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 112. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}$. ĐS: $\min P = \frac{3\sqrt{3}+9}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VD 113. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{4x}{x^2-2x+5} + \frac{4y}{y^2-2y+5} + \frac{4z}{z^2-2z+5}$. ĐS: $\min P = 3$ khi $x = y = z = 1$.

VD 114. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{x^5-2x^3+x}{y^2+z^2} + \frac{y^5-2y^3+y}{z^2+x^2} + \frac{z^5-2z^3+z}{x^2+y^2}$. ĐS: $\max P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VD 115. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2+xy}{5-z^2} + \frac{y^2+yz}{5-x^2} + \frac{z^2+zx}{5-y^2}$. ĐS: $\max P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

VD 116. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $8^x + 8^y + 8^z = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4^x}{3-4^x} + \frac{4^y}{3-4^y} + \frac{4^z}{3-4^z}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 0$.

VD 117. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^4 + y^4 + z^4 = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{4-xy} + \frac{1}{4-yz} + \frac{1}{4-zx}$. ĐS: $\max P = 1$ khi $x = y = z = 1$.

VD 118. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$1 \leq \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \leq \frac{30-\sqrt{3}}{13}$$

3. Bài toán có giả thiết tích các biến là hằng số hoặc P có dạng $P = f(a).f(b).f(c)$

VD 119. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{\sqrt{1+x}} + \frac{y}{\sqrt{1+y}} + \frac{z}{\sqrt{1+z}}$. ĐS: $\min P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 120. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = \frac{3}{2}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$. ĐS: $\min P = \frac{125}{64}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

VD 121. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$. ĐS: $\min P = \frac{100}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

VD 122. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $4(x + y + z) = 9$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của: $P = (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(z + \sqrt{z^2 + 1})$. ĐS: $\max P = 8$ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

VD 123. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $4(x + y + z) - 9 = 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của: $P = (x + \sqrt{x^2 + 1})^y \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1})^z \cdot (z + \sqrt{z^2 + 1})^x$. ĐS: $\max P = 4\sqrt[4]{2}$ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

VD 124. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{1 + bc} + \frac{b^2}{1 + ac} + \frac{c^2}{1 + ab}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 125. Cho các số thực dương a, b, c . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a + 3b} + \frac{b^3 - c^3}{b + 3c} + \frac{c^3 - a^3}{c + 3a}. \quad \text{ĐS: } \min P = 0 \text{ khi } a = b = c.$$

VD 126. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh: $\frac{a^4}{a + 4b} + \frac{b^4}{b + 4c} + \frac{c^4}{c + 4a} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{5}$.

IV. Đánh giá dồn về một biến $f(a)$ hoặc $f(b)$ hoặc $f(c)$, rồi xét hàm

VD 127. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4xyz - 9x + 2015$. ĐS: $\min P = 2008$ khi $x = 1; y = z = 0$.

VD 128. Cho các số không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. ĐS: $\min P = \frac{9}{2}$ khi $z = 0; x = y = \frac{3}{2}$.

VD 129. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x \leq y \leq z$ và $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = xy^2 + 4yz^2 + zx^2 - xyz - y^2 + 3y$. ĐS: $\max P = 11\sqrt{2} - 2$ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = z = \sqrt{2} \end{cases}$.

VD 130. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa điều kiện: $4x + 3y + 4z = 22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{1}{3x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$. ĐS: $\min P = \frac{25}{3}$ khi $x = 1, y = 2, z = 3$.

VD 131. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2(2x + 1)^2} + \frac{1}{3 + 9y} + \frac{1}{6 + 36z}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{8}$ khi $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{6}$.

VD 132. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [1; 4]$ và $x + y + 2z = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + 5z^3$. ĐS: $\max P = 137$ khi $x = y = 1, z = 3$.

VD 133. (B - 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^5 + y^5 + z^5$. ĐS: $\max P = \frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi $z = \frac{\sqrt{6}}{3}, x = y = \frac{-1}{\sqrt{6}}$.

VD 134. (HSG Vĩnh Phúc 2013) Cho các số thực x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}$. ĐS: $\max P = 3\sqrt{10}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 135. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa điều kiện: $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + 2y} + \sqrt{1 + 2z} = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2x^3 + y^3 + z^3$. ĐS: $\max P = 64$ khi $\begin{cases} x = y = 0, z = 4 \\ x = z = 0, y = 4 \end{cases}$.

V. Xét hàm lần lượt từng biến và xét hàm đại diện cho ba biến

VD 136. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [1; 3]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{36x}{yz} + \frac{2y}{xz} + \frac{z}{xy}$. ĐS: $\min P = 7$ khi $x = 1; y = z = 3$.

VD 137. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{1}{x-xy+4} + \frac{1}{y-yz+4} + \frac{1}{z-zx+4}$. ĐS: $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x = y = z = 1$.

VD 138. (A – 2011) Cho các số thực $x, y, z \in [1; 4]$ thỏa điều kiện: $x \geq y; x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$. ĐS: $\min P = \frac{34}{33}$ khi $x = 4; y = 1; z = 2$.

VD 139. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + 2y - z \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$. ĐS: $\min P = \frac{6}{7}$ khi $z = 2x = 4y$.

VD 140. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức: $P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1}$. ĐS: $\max P = \frac{10}{3}$ khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \sqrt{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

VD 141. Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \left| \frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right|$.

ĐS: $\max P = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ khi $x = 1, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{2}$.

VD 142. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức: $P = \frac{|2-ab|}{(a+b)c} + \frac{|2-bc|}{(b+c)a} + \frac{|2-ca|}{(c+a)b}$. ĐS: $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 37. Cho ba số thực không âm thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = xy + yz + zx + \frac{5}{x+y+z}$.

BT 38. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = xy + yz + zx + \frac{4}{xy + yz + zx + 2}$.

BT 39. Cho $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện: $2(x^2 + y^2 + z^2) = xy + yz + zx + 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{x+y+z+3}$.

BT 40. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa điều kiện: $3(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của: $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x+y+z} + xy + yz + zx$.

BT 41. Cho các số thực $x, y, z \in [0; 2]$ thỏa: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} - xy - yz - zx$.

BT 42. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$.

BT 43. Cho các số thực dương x, y, z . Hãy Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} - \frac{(x + y + z + 3)^2}{3(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

BT 44. Cho các số thực x, y, z thỏa điều kiện: $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (xy + yz + zx) \cdot \left[1 + \sqrt{4 - (x^2 + 2y^2 + 5z^2)} \right].$$

BT 45. Cho các số thực dương x, y, z thỏa $x + y + z = 4$ và $xyz = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^4 + y^4 + z^4$.

BT 46. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $(x + y + z)^2 + x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{3xyz(x + y + z)}$.

BT 47. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$.

BT 48. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x(x + y + z) = 3yz$, ta có: $(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3$.

BT 49. Cho các số thực dương x, y, z phân biệt thỏa: $xy + yz = 2z^2$ và $2x \leq z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-z} + \frac{z}{z-x}$.

BT 50. Cho các số thực $x, y, z \in (0;1)$ thỏa điều kiện: $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$.

BT 51. Cho các số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{324}{x + y + z} + (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

BT 52. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $y^2 \geq xz$ và $z^2 \geq xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{2014z}{z+x}$.

BT 53. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{x + 6\sqrt{xy} + 4\sqrt{yz}} - \frac{1}{\sqrt{x + y + z}}.$$

BT 54. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{\sqrt{xyz}}{6xy\sqrt{z} + 7\sqrt{xyz^3} + 8zx\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x + y + z}}{9(x + y + z)}.$$

BT 55. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1+x^2}{1+y^2} + \frac{1+y^2}{1+z^2} + \frac{1+z^2}{1+x^2}$.

BT 56. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x, y, z \in (0;1)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + 3}{y^2 + 2} + \frac{y^3 + 3}{z^2 + 2} + \frac{z^3 + 3}{x^2 + 2}$.

BT 57. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x \geq y \geq z$ và $3xy + 5yz + 7zx \leq 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{32}{(x-y)^4} + \frac{1}{(y-z)^4} + \frac{1}{(z-x)^4}$.

BT 58. Cho các số không âm x, y, z phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = (x^2 + y^2 + z^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \right].$$

- BT 59.** Cho các số dương x, y, z thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2yz - 2zx = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{z^2}{(x+y-z)^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.
- BT 60.** Cho các số thực phân biệt x, y, z thỏa điều kiện: $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$.
- BT 61.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{y} - 1} + \frac{18}{x + y + 2z}$.
- BT 62.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \sqrt{\frac{x^3}{x^3 + (y+z)^2}} + \sqrt{\frac{y^3}{y^3 + (z+x)^3}} + \frac{1 + 2z^3}{27}$.
- BT 63.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{x + yz} + \frac{y}{y + zx} + \frac{\sqrt{xyz}}{z + xy}$.
- BT 64.** Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa điều kiện: $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \leq 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt[3]{4^x} + \sqrt[3]{4^y} + \sqrt[3]{4^z} - \frac{(x + y + z)^4}{108}$.
- BT 65.** Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{2(x + y + z)} - y^2 - z^2$.
- BT 66.** Cho các số thực $x, y, z \in [0; 4]$ thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}}$.
- BT 67.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa: $x + y + z = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2)$.
- BT 68.** Cho các số thực dương $x, y, z \in [1; +\infty)$ thỏa điều kiện: $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2)$.
- BT 69.** Cho các số thực x, y, z . Chứng minh: $6(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 27xyz + 10\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$.
- BT 70.** Cho $x, y, z \in [0; 1]$ thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = x^2 + y^2 + z^2$.
- BT 71.** Cho các số thực x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = (x + 2)(y + 2)(z + 2)$.
- BT 72.** Cho các số thực $x, y, z \in [1; 3]$ thỏa: $x + y + 2z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = x^3 + y^3 + 5z^3$.
- BT 73.** Cho $x, y, z > 0$ thay đổi thỏa: $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.
- BT 74.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 4xyz$.
- BT 75.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa đồng thời các điều kiện: $x + y + z = 4$ và $xy + yz + zx = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$.
- BT 76.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa: $(x + y + z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x + y + z)^4}$.

BT 77. Cho các số thực x, y, z không đồng thời bằng 0 và thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

BT 78. Cho x, y, z thỏa: $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 y^2 z^2$.

BT 79. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^3}$.

BT 80. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện: $y + z = x(y^2 + z^2)$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}$.

BT 81. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2(y - z) + y^2(z - y) + z^2(1 - z)$.

BT 82. Cho các số không âm x, y, z thỏa điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x(y - z)^3 + y(z - x)^3 + z(x - y)^3$.

BT 83. Cho $x, y, z > 0$ thỏa: $21xy + 2yz + 8zx \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$.

BT 84. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa: $x + y + z = 1$ và không có hai số nào bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x + y + 3)(z + 1) + \frac{1}{(x + y)(y + z)} + \frac{1}{(x + y)(x + z)}$.

BT 85. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + (x + y)z + 4z^2 = 4$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x(y + z)^2}{x + z} + \frac{y(x + z)^2}{y + z} - \frac{1}{z}$.

BT 86. Cho các số thực: $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x + y + z)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

BT 87. Cho $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $P = z^2(1 - z) + (x^2 - y^2)(y - z)$.

BT 88. Cho các số thực dương $x \leq y \leq z$. Chứng minh rằng: $\frac{2x}{y + z} + \frac{2y}{z + x} + \frac{2z}{x + y} \leq 3 + \frac{(z - x)^2}{x(x + z)}$.

BT 89. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y^2 + z^2$.

BT 90. Cho $x, y, z > 0$ thỏa: $x + y + z \leq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{8}{\sqrt{3z + 2x}}$.

BT 91. Cho $x, y, z > 0$ thỏa: $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{y^2 + 1} + \frac{3}{z^2 + 1}$.

BT 92. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y + z} + \sqrt{\frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y}}$.

BT 93. Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{2z}{x + y + z}$.

BT 94. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz$.

BT 95. Cho $a, b, c \geq 0$ mãn: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = ab + 3ac + 5ac$.

BT 96. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \leq 2(x + y + z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + 2z + \frac{40}{\sqrt{y + z + 1}} + \frac{40}{\sqrt{x + 3}}$.

BT 97. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy}{1 + z^2} + \frac{yz}{1 + x^2} - \frac{x^3 y^3 + y^3 z^3}{24x^3 z^3}$.