SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Xin nhắc lại một số tính chất của lũy thừa đã biết :

Tính chất 1. *Cho n là số nguyên dương.*

1) *Với a, b là số thực ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n-1} > b^{2n-1}.$$

2) *Với a, b là số thực không âm ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}.$$

3) *Với a, b là số thực không dương ta có:*

$$a > b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}.$$

4) *Cho a là số thực dương, b là số thực ta có:*

- $-a < b < a \Leftrightarrow b^{2n} < a^{2n}.$
- $a < -b$ *hoặc* $b > a \Leftrightarrow b^{2n} > a^{2n}.$

Tính chất 2. *Với n là số nguyên dương và a, b là số thực ta có:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + .. + C_n^k a^{n-k} b^k + .. + C_n^n b^n$$

(công thức nhị thức Newton).

Sau đây là một số thí dụ có vận dụng các tính chất này.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\left(x^2 + \sqrt[3]{2}x - 1\right)^9 + \left(x^4 + 2x^3 - 2\right)^5 = 9 \ \ (1).$$

Lời giải. Ta có:

$$VT(1) = \left((x-1)(x+1) + \sqrt[3]{2}(x-1) + \sqrt[3]{2}\right)^9 + \left(x^4 + 2x^3 - 3 + 1\right)^5$$

$$= \left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 + \left[(x-1)\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 3\right) + 1\right]^5$$

$$= \left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 + \left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5.$$

• Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) > 0$ thì

$$(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) > 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 > \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8;$$

$$\left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5 > 1^5 = 1.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) > 9.$

• Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) < 0$ thì

$$(x-1)\left[(x+1)^3 + 2\right] < 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) + \sqrt[3]{2}\right]^9 < \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 8;$$

$$\left[(x-1)\left((x+1)^3 + 2\right) + 1\right]^5 < 1^5 = 1.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) < 9.$

• Với $(x-1)\left(x+1+\sqrt[3]{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 - \sqrt[3]{2} \end{array}\right.$.

Khi này $\mathrm{VT}(1) = 9.$ Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x = 1; x = -1 - \sqrt[3]{2}.$

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} + 2\right)^{33} + \left(x^2 + x - \frac{1}{x} + 2\right)^{33} = 3^{33} - 1 \ \ (1).$$

Lời giải. ĐK: $x \neq 0$. Khi đó:

$$\mathrm{VT}(1) = \left[1 + x + \frac{1}{x} + (1+x)^2\right]^{33} + \left[1 - x - \frac{1}{x} + (1+x)^2\right]^{33}.$$

Do $(1+x)^2 \geq 0$ nên $1 + x + \frac{1}{x} + (1+x)^2 \geq 1 + x + \frac{1}{x}.$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left[1+x+\frac{1}{x}+(1+x)^2\right]^{33} \ge \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (2).$$

Tương tự, do $1-x-\frac{1}{x}+(1+x)^2 \ge 1-x-\frac{1}{x}$ nên

$$\left[1-x-\frac{1}{x}+(1+x)^2\right]^{33} \ge \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\mathrm{VT}(1) \ge \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} + \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} \quad (4).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \ge 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}} = 2.$$

Theo tính chất 1 với n là số nguyên dương có:

$$\left(\left|x+\frac{1}{x}\right|\right)^{2n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n} \ge 2^{2n}.$$

Đặt $t = x+\frac{1}{x}$ ta có $t^{2n} \ge 2^{2n}$ (5). Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(1+t)^{33} = C_{33}^0 + C_{33}^1 t + C_{33}^2 t^2 + \dots + C_{33}^{33} t^{33};$$

$$(1-t)^{33} = C_{33}^0 - C_{33}^1 t + C_{33}^2 t^2 - \dots - C_{33}^{33} t^{33}.$$

Suy ra: $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{33} + \left(1-x-\frac{1}{x}\right)^{33} = (1+t)^{33} + (1-t)^{33}$

$$= 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \quad (6).$$

Từ (5) suy ra:

$$2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \ge 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 2^2 + .. + C_{33}^{32} 2^{32}\right).$$

Thay $t=2$ vào (6) ta được:

$$3^{33} - 1 = 2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 2^2 + .. + C_{33}^{32} 2^{32}\right).$$

Do đó: $2\left(C_{33}^0 + C_{33}^2 t^2 + .. + C_{33}^{32} t^{32}\right) \ge 3^{33} - 1$ (7).

Từ (4),(6) và (7) suy ra $\mathrm{VT}(1) \ge \mathrm{VP}(1)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (1+x)^2 = 0 \\ \left(\left|x+\frac{1}{x}\right|\right)^{2n} = 2^{2n} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x=-1$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*:

$$(2x^2 + x - 7)^{21} + (x^2 - x - 3)^{21} = x^2 + 3^{21} - 5 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có:

$$\mathrm{VT}(1) = \left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} + \left[(x^2-4)+1-x\right]^{21}.$$

Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(1+x)^{21} = C_{21}^0 + C_{21}^1 x + C_{21}^2 x^2 + \dots + C_{21}^{21} x^{21}.$$

Tương tự:

$$(1-x)^{21} = C_{21}^0 - C_{21}^1 x + C_{21}^2 x^2 - \dots - C_{21}^{21} x^{21}.$$

Suy ra: $P(x) = (1+x)^{21} + (1-x)^{21}$

$$= 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 x^2 + .. + C_{21}^{20} x^{20}\right) \ (*).$$

Thay $x=2$ vào (*) ta được:

$$3^{21} - 1 = 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right).$$

• Với $x^2 > 4$ theo tính chất 1 ta có:

$$\left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} > (1+x)^{21};$$

$$\left[(x^2-4)+1-x\right]^{21} > (1-x)^{21}.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) > P(x)$ (2). Do $x^2 > 2^2$ nên theo tính chất 1 thì với mọi số nguyên dương n có $x^{2n} > 2^{2n}$. Suy ra:

$$P(x) > 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right) + 2C_{21}^2 x^2 - 2C_{21}^2 2^2$$

$$= 3^{21} - 1 + 420(x^2-4) > 3^{21} - 1 + (x^2-4) = \mathrm{VP}(1) \ (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra $\mathrm{VT}(1) > \mathrm{VP}(1)$.

• Với $x^2 < 4$ theo tính chất 1 ta có:

$$\left[2(x^2-4)+1+x\right]^{21} < (1+x)^{21};$$

$$\left[(x^2-4)+1-x\right]^{21} < (1-x)^{21}.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(1) < P(x)$ (4). Do $0 \le x^2 < 2^2$ nên theo tính chất 1 thì với mọi số nguyên dương n có $x^{2n} < 2^{2n}$. Suy ra:

$$P(x) < 2\left(C_{21}^0 + C_{21}^2 2^2 + .. + C_{21}^{20} 2^{20}\right) + 2C_{21}^2 x^2 - 2C_{21}^2 2^2$$

$$= 3^{21} - 1 + 420(x^2-4) < 3^{21} - 1 + (x^2-4) = \mathrm{VP}(1) \ (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra $\mathrm{VT}(1) < \mathrm{VP}(1)$.

• Với $x = \pm 2$ thì $\mathrm{VT}(1) = \mathrm{VP}(1)$. Vậy PT(1) có đúng 2 nghiệm $x = \pm 2$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình* :

$$\left(\sqrt{4-x^2} - 1\right)^{44} + (3-x)^{44} = \left(\frac{x}{2}\right)^{44} + 5^{44} \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Suy ra: $x+2\ge 0$ và $x+3>0$. Ta có

$\sqrt{4-x^2}\ge 0\ge -(x+2)\Rightarrow \sqrt{4-x^2}-1\ge -(x+3)$.

Lại có:

$$\sqrt{4-x^2}-1\le \sqrt{4}-1=1\le 1+x+2=x+3.$$

Như vậy $-(x+3)\le \sqrt{4-x^2}-1\le x+3$. Theo tính chất 1 có: $\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^{44}\le (3+x)^{44}$. Suy ra $VT(1)\le (3+x)^{44}+(3-x)^{44}$ (2). Áp dụng công thức nhị thức Newton có:

$$(3+x)^{44}=3^{44}C_{44}^0+3^{43}C_{44}^1x+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}.$$

$$(3-x)^{44}=3^{44}C_{44}^0-3^{43}C_{44}^1x+3^{42}C_{44}^2x^2-...+C_{44}^{44}x^{44}.$$

Suy ra: $(3+x)^{44}+(3-x)^{44}$

$$=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right)(3).$$

Thay $x=2$ vào (3) ta được:

$$5^{44}+1=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right).$$

Do $0\le x^2\le 4=2^2$ nên theo tính chất 1 với mọi số nguyên dương n có $x^{2n}\le 2^{2n}$. Suy ra:

$$2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2x^2+..+C_{44}^{44}x^{44}\right)$$

$$\le 2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2 2^2+..+C_{44}^{42}2^{42}\right)+2C_{44}^{44}x^{44}$$

$$=2\left(3^{44}C_{44}^0+3^{42}C_{44}^2 2^2+..+C_{44}^{44}2^{44}\right)+2C_{44}^{44}x^{44}-2C_{44}^{44}2^{44}$$

$$=2x^{44}+5^{44}-2^{45}+1=2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)+5^{44}+1 \quad (4).$$

Vì $0\le x^2\le 4$ nên $0\le \left(\frac{x}{2}\right)^2\le 1$. Suy ra:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{44}\le 1^{22}\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\le 0$$

$$\Rightarrow 2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)\le \left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1 \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$2^{45}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{44}-1\right)+5^{44}+1\le \left(\frac{x}{2}\right)^{44}+5^{44} \quad (6).$$

Từ (2), (3), (4), (6) suy ra $VT(1)\le VP(1)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-2$. Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=-2$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}(2x-3y)^{12}+(3x-2y)^{12}=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right)\\ \dfrac{33-\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5}{1+\left(4x^2-3xy+y^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6}=1\end{cases}.$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất của hệ PT tương đương với

$$\left((2x-3y)^2\right)^6+\left((3x-2y)^2\right)^6=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6$$

$$+\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6=5^6\left(x^{12}+y^{12}\right) \quad (*).$$

• Xét $4x^2-12xy+4y^2>0$ ta có:

$$4x^2-12xy+4y^2+5y^2>5y^2\ge 0;$$

$$5x^2+4x^2-12xy+4y^2>5x^2\ge 0.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6>\left(5y^2\right)^6=5^6y^{12} \quad (1)$$

$$\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6>\left(5x^2\right)^6=5^6x^{12} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT(*)>VP(*)$.

• Xét $4x^2-12xy+4y^2<0$ ta có:

$$0\le 4x^2-12xy+4y^2+5y^2<5y^2;$$

$$0\le 5x^2+4x^2-12xy+4y^2<5x^2.$$

Theo tính chất 1 ta có:

$$\left(4x^2-12xy+4y^2+5y^2\right)^6<\left(5y^2\right)^6=5^6y^{12} \quad (3)$$

$$\left(5x^2+4x^2-12xy+4y^2\right)^6<\left(5x^2\right)^6=5^6x^{12} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $VT(*)<VP(*)$.

• Xét $4x^2-12xy+4y^2=0$ thấy thỏa mãn PT(*).

Ta có: $4x^2-12xy+4y^2=0$

$$\Leftrightarrow y^2-3xy+x^2=0\Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}x.$$

Thay $y^2 - 3xy + x^2 = 0$ vào PT thứ hai của hệ PT

đã cho ta được: $\dfrac{33-\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5}{1+\left(3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6}=1$

$\Leftrightarrow\left(x^2-1+2x\sqrt{x^2+1}\right)^5+\left(3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}\right)^6=32$ (*).

$$\mathrm{VT}(*)=\left(\left(x^2+1\right)+2x\sqrt{x^2+1}-2\right)^5$$
$$+\left(x^2+1+3x\sqrt{x^2+1}+2x^2+2\right)^6$$
$$=\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5$$
$$+\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6.$$

Ta có: $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x,$ suy ra
$$\sqrt{x^2+1}+x>0.$$

Mặt khác:
$$3x^2+3+3x\sqrt{x^2+1}=3\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>0.$$

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x>0$ thì
$$\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2>-2$$
và $\quad\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2>2.$

Theo tính chất 1 ta có:
$$\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5>(-2)^5;$$
$$\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6>2^6.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(*)>32=\mathrm{VP}(*)$.

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x<0$ thì
$$\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2<-2$$
và $0<\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2<2.$

Theo tính chất 1 ta có:
$$\left[\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)-2\right]^5<(-2)^5;$$
$$\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)+2\right]^6<2^6.$$

Suy ra $\mathrm{VT}(*)<32=\mathrm{VP}(*)$.

• Xét $\sqrt{x^2+1}+2x=0$ thấy thỏa mãn (*). Ta có:
$$\sqrt{x^2+1}+2x=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\x^2+1=4x^2\end{cases}$$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\x^2=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Với $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ suy ra:

$y=\dfrac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}$. Vậy hệ PT có 2 nghiệm $(x;y)$ là

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{6}\right)$.

Một số tính chất khác xin được trình bày ở số tiếp theo.

BÀI TẬP

Giải phương trình :

1. $\left(3+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{21}=\left(2+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{19}+2^{21}-1.$

2. $\left(2+x+\sqrt{1-x^2}\right)^{12}=1+220\left(1+x+\sqrt{1-x^2}\right)^9.$

3. $\left(1+\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)^{44}+\left(1-\sqrt{x}-\sqrt{4-x}\right)^{44}=2^{88}+2^{44}.$

4. $\dfrac{\left(3x^4-1\right)^7+\left(3x^4+1\right)^7}{x^6+21x^4+35x^2+7}=2x.$

5. $\left(x^2-x-2\right)^5+\left(2x^2+x-5\right)^5=152.$

6. $\left(3x^2+x-5\right)^7+\left(2x^2-x-3\right)^7=478.$

7. $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^8+\left(x^2+1+x\sqrt{x^2+1}\right)^8=337.$

8. $\left(\dfrac{(x+1)^3}{x^2+1}\right)^9+\left(x^3-1\right)^9+(3x-1)^9=3^9.$

9. $\left(3x^2+x-5\right)^7+\left(2x^2-x-3\right)^7=14x^6+366.$

10. $\left(3x^2+x-2\right)^{23}+\left(2x^2-x-1\right)^{23}=x^{20}+2^{23}-1.$

11. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{24x^2+18x+9}-x-1\right)^5+\left(\sqrt[3]{12x^2+2}-3x\right)^5}{5x^4+10x^2+1}=2.$

12. $\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^{44}+(3-x)^{44}=\dfrac{x^2}{4}+5^{44}.$

13. $\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^{22}+(2-x)^{22}=x^{22}+3^{22}.$

14. $\left(x^5-4x^3+12\right)^3+(x+2)^3=\dfrac{756}{x^9}.$

(Kỳ sau đăng tiếp)

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

(Tiếp theo kỳ trước)

Tính chất 3. *Với n là số nguyên dương và a, b là các số thực ta có:* $a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Chứng minh. • Ta có: $(a-b)^2\ge 0,$ suy ra:

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow 2a^2+2b^2\ge (a+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\quad (1).$$

Vậy BĐT đúng với $n=1$.

• Xét $n\ge 2$. Ta có: $f(x)=x^n+\left(a^2+b^2-x\right)^n$;

$f'(x)=nx^{n-1}-n\left(a^2+b^2-x\right)^{n-1}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^{n-1}=\left(a^2+b^2-x\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow x=a^2+b^2-x\Leftrightarrow x=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Do $a^2+b^2\ge 0$ nên $a^2+b^2-x\ge -x$. Từ đó xét n chẵn hay lẻ ta đều có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$\frac{a^2+b^2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n$	↗ $+\infty$

Suy ra: $x^n+\left(a^2+b^2-x\right)^n\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n$ (2).

Áp dụng (2) với $x=a^2$ ta được:

$$a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n\quad (3).$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$a^{2n}+b^{2n}\ge 2\left(\frac{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\right)^n=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{a^2+b^2}{2}\\ a^2+b^2=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$

Tính chất 4. *Với n là số nguyên dương và a,b là số thực ta có:*

1) $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$.

2) $(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$.

Chứng minh.

1) • Khi $b=0$ thì $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}$. Xét $b\ne 0$ ta có:

$$(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1=0\ (1).$$

Đặt $\frac{a}{b}=x$ thì (1) trở thành $f(x)=0$ với

$$f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-1.$$

Ta có: $f'(x)=2n(x+1)^{2n-1}-2nx^{2n-1}$.

Do $x+1>x$ nên $(x+1)^{2n-1}>x^{2n-1}$. Suy ra $f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$. Với $x=0$ thì $\frac{a}{b}=0\Rightarrow a=0$.

Vậy $(a+b)^{2n}=a^{2n}+b^{2n}\Rightarrow a=0$ hoặc $b=0$.

•Dễ thấy $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì $(a+b)^{2n} = a^{2n} + b^{2n}$.

2) • Khi $b=0$ thì $(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

Xét $b \neq 0$ ta có:

$$(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}+1\right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1} - 1 = 0 \ \ (2).$$

Đặt $\frac{a}{b} = x$ thì (2) trở thành $f(x) = 0$ với $f(x) = (x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1$. Ta có:

$f'(x) = (2n+1)(x+1)^{2n} - (2n+1)x^{2n}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^{2n} = x^{2n} \Leftrightarrow x+1 = \pm x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra hàm số $f(x)$ có 2 khoảng đơn điệu nên $x = 0; x = -1$ là tất cả các nghiệm của $f(x) = 0$.

Với $x = 0$ hoặc $x = -1$ suy ra $a = 0$ hoặc $a + b = 0$. Vậy $(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1}$. Suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a + b = 0$.

• Dễ thấy $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a + b = 0$ thì $(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

Sau đây là một số thí dụ có vận dụng các tính chất này.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\left(\sqrt{12+x^2} + \sqrt{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt{2-x} + x + 4\right)^8 = 2^{17} \ \ (1).$$

Lời giải. ĐK: $-2 \le x \le 2$. Áp dụng tính chất 3 ta có: $\text{VT}(1) \ge 2\left(\frac{\sqrt{12+x^2} + \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + x + 4}{2}\right)^8$ (2).

Mặt khác $\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \ge 4$, suy ra: $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \ge 2$ (3).

Ta có $\sqrt{12+x^2} \ge 2 - x$ (4). Thật vậy, do $-2 \le x \le 2$ nên $x + 2 \ge 0$ và $2 - x \ge 0$.

$\text{VT}(4) = \sqrt{(2-x)^2 + 4(2+x)} \ge \sqrt{(2-x)^2} = 2 - x.$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\frac{\sqrt{12+x^2} + \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + x + 4}{2} \ge \frac{2 - x + 2 + x + 4}{2} = 4.$$

Theo tính chất 1 có:

$$\left(\frac{\sqrt{12+x^2} + \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} + x + 4}{2}\right)^8 \ge 4^8 = 2^{16} \ (5).$$

Từ (2) và (5) suy ra $\text{VT}(1) \ge \text{VP}(1)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$. Vậy PT đã cho có đúng 1 nghiệm $x = -2$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \dfrac{\left(4x^2 + 4y + 1\right)^{14} + \left(4y^2 + 4x + 1\right)^{14}}{(x+y+1)^{28}} = 2 & (1) \\ \left(x^2 + \dfrac{4}{x} - 4\right)^{22} + \left(y^2 - y - 4\right)^{22} = 2^{23} & (2) \end{cases}.$$

Lời giải.

ĐK: $\begin{cases} x + y + 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$. PT(1) tương đương với

$\left(4x^2 + 4y + 1\right)^{14} + \left(4y^2 + 4x + 1\right)^{14} = 2(x+y+1)^{28}$ (3).

Áp dụng tính chất 3 ta có:

$$\text{VT}(3) \ge 2\left(\frac{4x^2 + 4y + 1 + 4y^2 + 4x + 1}{2}\right)^{14}$$

$$= 2\left(2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1\right)^{14} \ \ (4).$$

Mặt khác $(x-y)^2 \ge 0$, suy ra $2x^2 + 2y^2 \ge (x+y)^2$.

Do đó: $2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1 \ge (x+y)^2 + 2x + 2y + 1$

$$= (x+y+1)^2.$$

Theo tính chất 1 suy ra:

$$\left(2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1\right)^{14} \ge \left((x+y+1)^2\right)^{14}$$

$$= (x+y+1)^{28} \ \ (5).$$

Từ (4),(5) suy ra $\text{VT}(3) \ge \text{VP}(3)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Thay $x = y$ vào (2) được:

$$\left(x^2+\frac{4}{x}-4\right)^{22}+\left(x^2-x-4\right)^{22}=2^{23}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{4}{x}-4\right)^{22}+\left(-x^2+x+4\right)^{22}=2^{23}\quad(6).$$

Áp dụng tính chất 3 ta có:

$$\mathrm{VT}(6)\geq 2\left(\frac{x^2+\frac{4}{x}-4-x^2+x+4}{2}\right)^{22}=2\left(\frac{\frac{4}{x}+x}{2}\right)^{22}\quad(7).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\left|x+\frac{4}{x}\right|=|x|+\frac{4}{|x|}\geq 2\sqrt{|x|.\frac{1}{|x|}}=4\Rightarrow\frac{\left|x+\frac{4}{x}\right|}{2}\geq 2.$$

Theo tính chất 1 suy ra:

$$\left(\frac{\left|x+\frac{4}{x}\right|}{2}\right)^{22}=\left(\frac{x+\frac{4}{x}}{2}\right)^{22}\geq 2^{22}\quad(8).$$

Từ (7) và (8) suy ra:

$$\mathrm{VT}(6)\geq 2.2^{22}=2^{23}=\mathrm{VP}(6).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow|x|=\frac{4}{|x|}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2.$

Suy ra PT(6) có 2 nghiệm $x=\pm 2.$ Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(2;2)$ và $(-2;-2)$.

Thí dụ 3. *Cho phương trình*

$$\left(x^3-3x-m\right)^7+\left(-x^3+6x^2+m\right)^7=\left(6x^2-3x\right)^7\ (1).$$

Tìm tập hợp S gồm tất cả các số thực m để phương trình (1) có đúng 8 nghiệm phân biệt. Biết $S=(p;q)\setminus\{r\}$ hãy tính $P=(p-q)r$.

Lời giải. Đặt $a=x^3-3x-m,\ b=-x^3+6x^2+m.$

Suy ra $6x^2-3x=a+b$. Phương trình (1) trở thành $a^7+b^7=(a+b)^7$. (2)

Theo tính chất 4 thì

(2) $\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $a+b=0$. Do vậy

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x-m=0\\-x^3+6x^2+m=0\\6x^2-3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3-3x=m & (3)\\x^3-6x^2=m & (4)\\x=0 & \\x=\frac{1}{2} & \end{array}\right..$$

•Giả sử (3) và (4) có nghiệm chung, ta có:

$$\begin{cases}x^3-3x=m\\x^3-6x^2=m\end{cases}\quad(*)$$

Suy ra: $x^3-3x=x^3-6x^2\Leftrightarrow 6x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Thay $x=0$ vào (*) ta được $m=0.$

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $m=-\frac{11}{8}.$

•Xét $y=x^3-3x.$ Ta có: $y'=3x^2-3;$ $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra PT(3) có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow m\in(-2;2)\setminus\left\{-\frac{11}{8};0\right\}.$

•Xét $y=x^3-6x^2,$ ta có:

$$y'=3x^2-12x;\ y'=0\Leftrightarrow x=0;x=4.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-32	↗	$+\infty$

Từ BBT suy ra PT(4) có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow m\in(-32;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}.$

PT(1) có đúng 8 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(3) và PT(4) đều có 3 nghiệm phân biệt khác 0 và $\frac{1}{2}$,đồng thời PT(3) và PT(4) không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m\in(-2;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}.$

Vậy $S=(-2;0)\setminus\left\{-\frac{11}{8}\right\}$ và $P=\frac{11}{4}$.

Thí dụ 4. *Cho phương trình*

$$\left(x^2-3x+m\right)^8+\left(x^2-(2m+1)x+m^2\right)^8=\left((2m-2)x+m-m^2\right)^8 \quad (1).$$

Tìm m để PT(1) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. PT(1) tương đương với

$$\left(x^2-3x+m\right)^8+\left(-x^2+(2m+1)x-m^2\right)^8=\left((2m-2)x+m-m^2\right)^8 \quad (2).$$

Đặt $a=x^2-3x+m$; $b=-x^2+(2m+1)x-m^2$.

Suy ra $(2m-2)x+m-m^2=a+b$. Phương trình (2) trở thành: $a^8+b^8=(a+b)^8$ (3).

Theo tính chất 4 thì (3) $\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=0$.

Do vậy $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-3x+m=0 & (4)\\ -x^2+(2m+1)x-m^2=0 & (5)\end{array}\right.$.

•Giả sử (4) và (5) có nghiệm chung ta có

$$\begin{cases}x^2-3x+m=0\\ -x^2+(2m+1)x-m^2=0\end{cases} \quad \textbf{(*)}.$$

Cộng theo vế hai PT của (*) ta được:

$(2m-2)x+m-m^2=0$

$\Leftrightarrow(m-1)(2x-m)=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $x=\dfrac{m}{2}$.

Với $x=\dfrac{m}{2}$ thay vào (*) ta được: $\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{1}{2}m=0$

$\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=2$. Thử lại với $m=1$, $m=0, m=2$ thì (4) và (5) có nghiệm chung.

•PT(4) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9-4m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}$.

•PT(5) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4m+1>0$ $\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{4}$.

Vậy PT(1) có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT(4) và PT(5) đều có 2 nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung $\Leftrightarrow m\in\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)\backslash\{0;1;2\}$.

BÀI TẬP

1. Giải phương trình:

a) $$\frac{\left(4x^2+5x+1\right)^{10}+\left(4x^2+3x+\dfrac{4}{4x^2+1}\right)^{10}}{2^{11}(x+1)^{20}}=1.$$

b) $$(x+2)^6=\frac{128\left[2x^6-(3x+2)^6\right]}{(x-1)^6+(x+3)^6}.$$

c) $$\frac{\left(8x^4+8x^2-2\right)^{10}+\left(5+2x\sqrt{1-x^2}\right)^{10}}{\left(2x^2+1\right)^{20}}=2.$$

d) $$\left(x+\sqrt{2+x}\right)^8+\left(\sqrt{12+x^2}+\sqrt{2-x}-2x\right)^8=2^9.$$

2. Giải hệ phương trình:

a) $$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^{80}+y^{80}=\dfrac{1}{2^{15}}\left(x^8+y^8\right)^8\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}\left(x^3+y^3+1-\sqrt{2}\right)^5+\left(x+y+1+\sqrt{2}\right)^5=82\\ \sqrt{5+4x-y^2}-x.\sqrt[3]{\dfrac{x^2+y^2+2}{3}}=2\end{cases}.$$

c) $$\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x+y+2}{x^2-x+1}\right)^5+\left(x^3+y^3+1\right)^5=33\\ \left(\dfrac{2y}{x^2+1}\right)^{28}+\left(\dfrac{xy+1}{y^2+1}\right)^{28}=\dfrac{1}{2^{13}}\end{cases}.$$

d) $$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}=\dfrac{17}{2}\\ \dfrac{\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)^8+\left(2x^2+2y^2+2x\sqrt{y^2+1}+1\right)^4}{17\left(x^2+y^2\right)^4}=1\end{cases}.$$

3. Tìm m để phương trình

$$\left(x^2+mx+2\right)^8+\left(2x^2+4x+2m\right)^8=\left(x^2-(m-4)x+2m-2\right)^8$$

có đúng 4 nghiệm phân biệt.

4. Tìm m để phương trình

$$\left(x^2-4x+m\right)^8+\left(x^2-(3m+1)x+m^2\right)^8=\left((3m-3)x+m-m^2\right)^8$$

có số nghiệm nhiều nhất.

5. Tìm m để phương trình

$$\left(x^3-3x-m\right)^7+\left(x^2+3x+m\right)^7=\left(x^3+x^2\right)^7$$

có đúng 7 nghiệm phân biệt.

6. Cho phương trình

$$\left(x^3-3x+m\right)^7-\left(3x-5\right)^7=\left(x^3-6x+m+5\right)^7.$$

a) Giải phương trình với $m=0$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 7 nghiệm phân biệt.

7. Cho phương trình

$$\left(x^4-3x^2-m\right)^7+\left(-x^3+3x^2+m\right)^7=\left(x^4-x^3\right)^7.$$

a) Giải phương trình với $m=-\frac{5}{8}$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 9 nghiệm phân biệt.

8. Cho phương trình

$$\left(x^3+2x^2-m\right)^9-\left(x^3-3x-m\right)^9=\left(2x^2+3x\right)^9.$$

a) Giải phương trình với $m=1$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 8 nghiệm phân biệt.