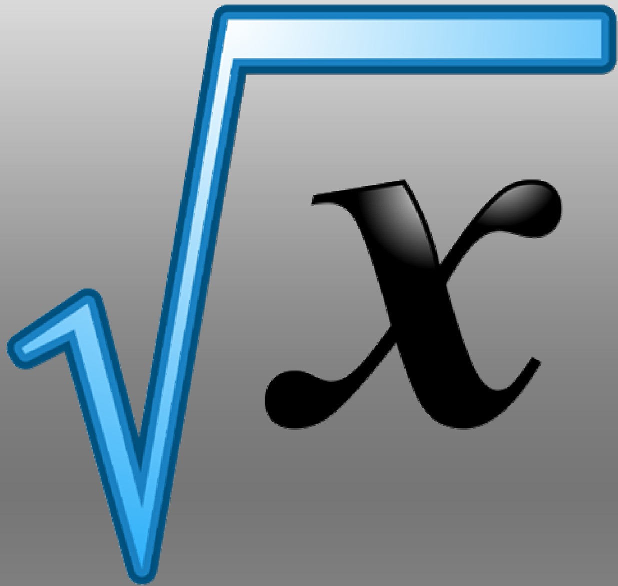
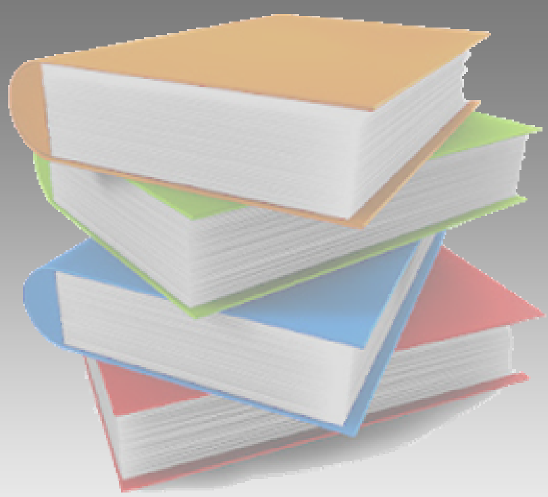
Phương trình chứa căn thức





PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

2) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \, (\text{hoặc } B \ge 0) \\ A = B \end{cases}$

3) $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = [g(x)]^{2n} \end{cases} (n \in Z^+)$

4) $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow g(x) = [f(x)]^{2n+1} \, (n \in Z^+)$

5) $[f(x)]^{2n} = [g(x)]^{2n} \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

6) $[f(x)]^{2n+1} = [g(x)]^{2n+1} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

B. CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chuyên đề 1:
Lũy thừa hai vế và dùng các công thức cơ bản

1. Nhận dạng: Khi phương trình có dạng:

a. $\sqrt{A} = B$

b. $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

c. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = k$ (k là hằng số)

d. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$ (A, B, C là các hàm chứa x)

e. Khi bình phương hai vế thì bậc cao triệt tiêu.

f. Khi bình phương hai vế thì căn thức triệt tiêu.

2. Các bước giải

- Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- Bước 2: Đặt điều kiện để hai vế không âm rồi lũy thừa hai vế.
- Bước 3: Đưa về phương trình cơ bản; giải chọn nghiệm thỏa mãn điều kiện.

3. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = x - 4$
2. $\sqrt{2 - x^2 + 3x} = \sqrt{5x^2 - 1}$

Giải

1. $\sqrt{2x^2-4x+5}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ 2x^2-4x+5=(x-4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ x^2+4x-11=0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. $\sqrt{2-x^2+3x}=\sqrt{5x^2-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-1\ge 0 \\ 2-x^2+3x=5x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=1 \vee x=-\dfrac{1}{2}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $x^2+\sqrt{x+1}=1$

2) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2+4}$

Giải

1. $x^2+\sqrt{x+1}=1$

Điều kiện: $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1-x^2$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x^2-x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ ;x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=1 \vee x=-1 \vee x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2+4}$

Điều kiện: $x\ge -2$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}=5$

$\Leftrightarrow 3x+13+2\sqrt{(x+9)(2x+4)}=25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+9)(2x+4)}=12-3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 4 \\ x^2-160x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=160 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{16-x}+\sqrt{x+9}=7$

2. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Giải

1. Điều kiện: $-9 \le x \le 16$

Phương trình $\Leftrightarrow 25+2\sqrt{(16-x)(x+9)}=49$

$\Leftrightarrow x^2-7x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=7$

2. Điều kiện: $x>0$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4x=x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{1}{3}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x+\sqrt{x-11}}+\sqrt{x-\sqrt{x-11}}=4$

2. $\sqrt{77-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$

Giải

1. $\sqrt{x+\sqrt{x-11}}+\sqrt{x-\sqrt{x-11}}=4$

Điều kiện: $x \ge 11$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-11}}=4-\sqrt{x-\sqrt{x-11}}$

$\Rightarrow x+\sqrt{x-11}=16-\sqrt{x-11}-8\sqrt{x-\sqrt{x-11}}+x$

$\Rightarrow \sqrt{x-11}-8=-4\sqrt{x-\sqrt{x-11}}$

$\Rightarrow x-11+64-16\sqrt{x-11}=16\left(x-\sqrt{x-11}\right)$

$\Rightarrow x=\dfrac{53}{15}$ (loại vì $x \ge 11$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. $\sqrt{77-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$

Điều kiện: $3-2x-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$

Phương trình $\Leftrightarrow 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x+5} = -4-2x \Rightarrow x^2(x+5) = (4+2x)^2$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-16) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 4\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Kiểm tra lại:

Với $x = -1$ thì phương trình được thỏa mãn.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$ 2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

Giải

1. $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

Điều kiện: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Phương trình: $\Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)} = 16$

$\Leftrightarrow (2-x^2)(x^2+8) = 9 \Leftrightarrow -x^4 - 6x^2 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -7\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 1$

2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

Điều kiện: $\dfrac{2}{3} < x$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+2+\sqrt{3x-2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x+2+\sqrt{3x-2} = 0 \text{ vô nghiệm } \forall x \ge \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$

2. $x + \sqrt{x^2+16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

Giải

1. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ x-2\sqrt{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ (x-2)^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\dfrac{x+3}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\dfrac{x+3}{2}$ (*)

+ Nếu $\sqrt{x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$ thì (*) trở thành:

$2\sqrt{x-1}=\dfrac{x+3}{2}\Leftrightarrow 4(x-1)=\left(\dfrac{x+3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0\Leftrightarrow x=5$ (nhận)

$\Rightarrow$ nghiệm của phương trình là: $x=5$.

+ Nếu $1\le x\le 2$ thì (*) trở thành: $\dfrac{x+3}{2}=2\Leftrightarrow x=1$

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x=1\vee x=5$.

2. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}+x^2+16=40$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}=24-x^2$

$\Rightarrow x^2\left(x^2+16\right)=\left(24-x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 64x^2=576\Leftrightarrow x=\pm 3$

Kiểm tra lại:

+ Với $x=3$ phương trình thỏa mãn.

+ Với $x=-3$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=3$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$

2. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{x+1}$

Giải

1. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$

$$\Leftrightarrow x + 34 - x + 3 + 3\sqrt[3]{x+34}.\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{x+34} + \sqrt[3]{x-3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+34}.\sqrt[3]{x-3} = 12 \Leftrightarrow (x+34)(x-3) = 12^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -61 \end{cases}$$

Thử lại:

+ Nếu $x = 30$ phương trình thỏa mãn.

+ Nếu $x = -61$ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 30 \vee x = -61$.

2. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}\right)^3 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 3x - 1 + 3\sqrt[3]{x-1}.\sqrt[3]{3x-1}\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}\right) = x + 1$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x-1}.\sqrt[3]{3x-1}.\sqrt[3]{x+1} = 3(1-x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+1) = (1-x)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(3x-1)(x+1) + (x-1)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (3x-1)(x+1) + (x-1)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 4x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Kiểm lại:

+ Với $x = 1$ thì phương trình thỏa mãn.

+ Với $x = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Tóm lại: nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$

2. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$

Giải

1. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right)^3 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 + \sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right) = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 + 3\sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{3x+1}.\sqrt[3]{x-1} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1}.\sqrt[3]{3x+1}.\sqrt[3]{x-1} = -(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(3x+1) = -(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x-1)(3x+1)+(x+1)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Kiểm tra lại:

+ Với x = 0 phương trình vô nghiệm.

+ Với x = -1 phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm phương trình là: x = -1.

2. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{10x}$

$$\Leftrightarrow 2x-1+2x+1+3\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{2x+1}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{2x+1}\right)=10x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{2x+1}.\sqrt[3]{10x}=2x \Rightarrow (2x-1)(2x+1).10x=8x^3$$

$$\Rightarrow x\left[5(2x-1)(2x+1)-4x^2\right]=0$$

$$\Rightarrow x(16x^2-5)=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$$

Thử lại:

+ Thay ba x trên vào nghiệm của phương trình thì ta nhận được: $x=0; x=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0; x=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Bài 9: Giải phương trình sau: $x^3+8=7\sqrt{8x+1}$ với $x\in\mathbb{R}$

Giải

Điều kiện: $x\ge 0$

$$x^3+8=7\sqrt{8x+1} \Leftrightarrow (x^3+8)^2=49(8x+1) \Leftrightarrow x^6+16x^3-392x+15=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^5+3x^4+9x^3+43x^2+129x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x^5+3x^4+9x^3+43x^2+129x+5=0\ (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm $\forall x\ge 0$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x = 3.

Bài 10: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x^2-1}=m+x$

Giải

$$\sqrt{x^2-1}=m+x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -m \\ x^2-1=(m+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -m \\ 2mx=-1-m^2\ \ (1) \end{cases}$$

+ Nếu $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 - m^2}{2m}$

Điều kiện: $x \geq -m \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$

– Nếu $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

– Nếu $\left[\begin{array}{l} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{-1 - m^2}{2m}$.

Kết luận:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} -1 \leq m < 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{-1 - m^2}{2m}$.

Bài 11: Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{a + x} = a - \sqrt{a - x}$ (1)

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ a + x \geq 0 \\ a - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ -a \leq x \leq a \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = a$

$\Leftrightarrow a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \qquad \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - 2a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a \geq 0 \\ 4\left(a^2 - x^2\right) = \left(a^2 - 2a\right)^2 = a^4 + 4a^2 - 4a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a \geq 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{4}\left(-a^4 + 4a^3\right) \end{cases}$ +

Nếu $a = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $a \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a^3\left(4 - a\right) \geq 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^3 - a^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq a \leq 4 \\ x = \pm\dfrac{a}{2}\sqrt{4a - a^2} \end{cases}$

Vậy:

+ Nếu $a = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geq 2 \\ a > 4 \end{array}\right. \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $2 \le a \le 4$ thì (1) có nghiệm $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}$

Bài 12: Giải và biện luận phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2}$$

Giải

$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m\sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1)\sqrt[3]{x^2 - a^2}$ (1)

+ Nếu a = 0 thì (2) nghiệm đúng $\forall x \in R$. Khi $a \ne 0$ thì:

- Nếu $x = \pm a$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

- Nếu $x \ne \pm a$ thì (1) tương đương với:

$$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} + m\sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}} = m + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - 1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} - m\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+a}{x-a} = 1 \text{ (phương trình vô nghiệm)} \\ \frac{x+a}{x-a} = m^3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x + a = m^3(x - a) \Leftrightarrow (1 - m^3)x = -am^3 - a \quad (*)$$

- Nếu m = 1 thì phương trình (*) vô nghiệm.

- Nếu $m \ne 1$ thì phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$

Vậy:

+ Nếu a = 0 thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in R$.

+ Nếu a = 1 và $a \ne 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $m \ne 1$ và $a \ne 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{am^3 + a}{m^3 - 1}$.

Bài 13: Giải và biện luận phương trình: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a$

Giải

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = a \Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = a$$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2 = a.$ Vì $\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{4}\left(\text{Do} \sqrt{x+\frac{1}{4}} \ge 0\right)$

Do đó:

+ Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \ge \frac{1}{4}$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} = \sqrt{a}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}} = \sqrt{a}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+\frac{1}{4} = a+\frac{1}{4}-\sqrt{a} \Leftrightarrow x = a-\sqrt{a}$$

Tóm lại: + Nếu $a < \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \ge \frac{1}{4}$ thì (1) có nghiệm $x = a-\sqrt{a}$

Bài 14: Giải và biện luận phương trình: $2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x} = \sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

Giải

$$2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x} = \sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}} \qquad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} a+x \ge 0 \\ a-x \ge 0 \\ x(a+x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \le x \le a & (2) \\ x(a+x) \ge 0 & (3) \end{cases}$

Từ điều kiện (2) $\Rightarrow a \ge 0$

a. Nếu $a = 0$ thì (1) trở thành: $2\sqrt{x}-\sqrt{-x} = \sqrt{-x+\sqrt{x^2}}$
phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Nếu $a > 0$ thì từ (3) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -a \\ x \ge 0 \end{array}\right.$

- Nếu $x = -a$ thì (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$ nhưng vì $a > 0$ nên $x \ne -a$.
- Khi $\begin{cases} x \ge 0 \\ a > 0 \end{cases}$ thì $2\sqrt{a+x} > \sqrt{a-x}$ nên phương trình (2) tương đương với

$$\left(2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)^2 = a-x+\sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+x)+(a-x)-4\sqrt{a^2-x^2} = a-x+\sqrt{x(a+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+x}\left(4\sqrt{a+x}-4\sqrt{a-x}-\sqrt{x}\right) = 0\left(\text{do} \begin{cases} a > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{nên } a+x > a-x\right)$$

$$\Leftrightarrow 16(x+a+a-x)-32\sqrt{a^2-x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 32\sqrt{a^2-x^2} = -x+32a$$

$\Leftrightarrow 32^2\left(a^2 - x^2\right) = x^2 + 32^2a^2 - 64a.x$

(vì $a > 0$ nên $32a - x > a - x > 0$)

$\Leftrightarrow 32^2.x^2 + x^2 - 64ax = 0 \Leftrightarrow x\left(1025x - 64a\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{64a}{1025}$

Vậy : + Nếu $a < 0$ thì (2) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (2) có nghiệm $x = 0 \vee x = \dfrac{64a}{1025}$

**** Cách biện luận khác:***

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \geq 0 \\ 4\left(a+x\right) + \left(a-x\right) - 4\sqrt{\left(a+x\right)\left(a-x\right)} = a - x + \sqrt{x\left(a+x\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(a+x\right) \geq a - x \geq 0 \\ 4\left(a+x\right) - 4\sqrt{\left(a+x\right)\left(a-x\right)} - \sqrt{x\left(a+x\right)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \sqrt{x+a}\left[4\sqrt{x+a} - 4\sqrt{a-x} - \sqrt{x}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,6a \leq x \leq a \\ \left[\begin{array}{l} x = -a \\ 4\sqrt{x+a} - -4\sqrt{a-x} = \sqrt{x} \ (*) \end{array}\right. \end{cases}$$

+ Nếu $x = -a$ là nghiệm của (1) thì nó phải thỏa mãn:

$$-0,6a \leq -a \leq a \Leftrightarrow a = 0$$

+Phươngtrình(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+x} \geq \sqrt{a-x} \\ 16\left(a+x\right) + 16\left(a-x\right) - 32\sqrt{\left(a+x\right)\left(a-x\right)} = x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + x \geq a - x \geq 0 \\ 32\sqrt{a^2 - x^2} = 32a - x \end{cases} \qquad (4)$$

+ Nếu $a < 0$ thì (4) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $0 \leq a$ thì hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 32^2\left(a^2 - x^2\right) = 32^2a^2 - 64ax + x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 1025x^2 - 64ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{64a}{1025}$$

+ Nếu $a < 0$ thì (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq 0$ thì (1) có nghiệm $x = 0 \vee x = \dfrac{64a}{1025}$

Bài 15: Cho phương trình: $\sqrt{x^2 - 8x + m} = x - 1$ (1)

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - 8x + m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ f(x) = x^2 - 6x + m - 1 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $1 \le x_1 \le x_2 \Leftrightarrow 6 \le m < 10$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $6 \le m < 10$.

Bài 16: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2 - 4mx + 3m} = x - m$ (1)

Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm.

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ 2x^2 - 4mx + 3m = (x-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ f(x) = x^2 - 2mx + 3m - m^2 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Để (1) có đúng một nghiệm thì (2) có đúng một nghiệm $x \ge m$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:

Phương trình (2) có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 < m < x_2$

$$\Leftrightarrow f(m) < 0 \Leftrightarrow 3m - 2m^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}.$$

Trường hợp 2:

Phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 > m$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_0 = m > m \end{cases}$ (vô lý)

Trường hợp 3:

Phương trình (2) có một nghiệm $x_1 = m$. Kiểm tra nghiệm x_2: (2) có một nghiệm $x_1 = m \Leftrightarrow 3m - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

- Với $m = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = 0$ (nhận) $\Rightarrow m = 0$ thỏa đề bài.
- Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{(nhận)}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ thỏa đề bài.}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $0 \le m \le \frac{3}{2}$

Chuyên đề 2: Đưa về tích

1. Các cách đưa về tích

Cách 1: Đặt nhân tử chung khi phương trình có sẵn một biểu thức $(x - x_0)$

Cách 2: Dùng lượng liên hiệp.

2. Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sqrt{x^2}$ (1)
2. $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2(x + 1)$ (2)

Giải

1. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

- Nếu $x = 0$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x \geq 2$ (a) thì:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{x.x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 4x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 4(x^2 - x - 2) = (2x+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{8}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

2. Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

- Nếu $x = -1$ thì (2) luôn đúng.
- Nếu $x \geq 1$ (a) thì:

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(2x+6)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2\sqrt{(x+1)(x+1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 3x + 5 + 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} = 4(x+1)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 4x - 6} = x - 1$

$\Leftrightarrow 4(2x^2 + 4x - 6) = x^2 - 2x + 1$ (vì $x \geq 1$ nên $x - 1 \geq 0$)

$\Leftrightarrow 7x^2 + 18x - 25 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{25}{7} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = \pm 1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

1. $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-1}=2\sqrt{x^2-x}$ (1)

2. $\sqrt{2x^2-6x+4}-\sqrt{x^2-1}=2(x-1)$ (2)

Giải

1. Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x-2\ge 0\\ x^2-1\ge 0\\ x^2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Cách 1:

- Nếu $x=1$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x>1$ thì:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(+2)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}=2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{x}\quad(3)$$

Vì $x>1$ nên $\begin{cases}\sqrt{x+2}>\sqrt{x}\\ \sqrt{x+1}>\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}>2\sqrt{x}$

$\Rightarrow(3)$ vô nghiệm.

- Nếu $x\le -2$ thì:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)(+2)}+\sqrt{(x-1)(x+1)}=2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(1-x)(-x-2)}+\sqrt{(1-x)(-x-1)}=2\sqrt{(1-x)(-x)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{-x-2}+\sqrt{-x-1}=2\sqrt{-x}\quad(4)$$

Vì $x\le 2$ nên $\begin{cases}\sqrt{-x-2}<\sqrt{-x}\\ \sqrt{-x-1}<\sqrt{-x}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{-x-2}+\sqrt{-x-1}<2\sqrt{-x}$

$\Rightarrow(4)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Cách 2:

Bình phương hai vế. Điều kiện $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right.$

$$(1)\Leftrightarrow x^2+x-2+x^2-1+2\sqrt{(x^2+x-2)(x^2-1)}=4(x^2-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x-3+2\sqrt{(x-1)^2(x+2)(x+1)}=4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow 2|x-1|\sqrt{(x+2)(x+1)}=2x^2-5x+3=(x-1)(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(2x+3)\ge 0\\ 4(x-1)^2(x+2)(x+1)=(x-1)^2(2x+3)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -\dfrac{3}{2}\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ 4\left(x^2+3x+2\right)-(2x+3)^2=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1$

2. Điều kiện $\begin{cases}2x^2-6x+4\ge 0\\ x^2-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2\\ x\le -1\end{array}\right.$

- Nếu $x=1$ thì (2) nghiệm đúng.
- Nếu $x\ge 2$ thì:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)}-\sqrt{(x-1)(x+1)}=2\sqrt{(x-1)(x-1)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4}-\sqrt{x+1}=2\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-4}=\sqrt{4x-4}+\sqrt{x+1}$

Phương trình này vô nghiệm vì $\sqrt{4x-4}+\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-4}\,\forall x\ge 2$

- Nếu $x\le -1$ thì:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2x-4)}-\sqrt{(x-1)(x+1)}=2(x+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4-2x)}-\sqrt{(1-x)(-1-x)}=-2(1-x)=-2\sqrt{(1-x)(1-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-2x}-\sqrt{-1-x}=-2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-2x}+2\sqrt{1-x}=\sqrt{-1-x}$ (3)

- Với $\forall x\le -1$ thì $1-x>-1-x\Rightarrow 2\sqrt{1-x}>\sqrt{-1-x}$

$\Rightarrow \sqrt{4-2x}+2\sqrt{1-x}>\sqrt{-1-x}\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $x=1$.

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}=\dfrac{4x-1}{3}$

Giải

Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 2$ (a)

Cách 1:

Nhân hai vế của (1) cho $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}$ ta được:

$$\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}\right)=\frac{1}{3}(4x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x-1=\frac{1}{3}(4x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}\text{(nhận)} \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2}=3-x$$

$$\Leftrightarrow 2+5x-3x^2=x^2-6x+9 \text{ vì (a) nên } 3-x>0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-11x+7=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=\frac{1}{4}; x=1; x=\frac{7}{4}$

Cách 2:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3x+1}\geq 0 \\ v=\sqrt{2-x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=3x+1 \\ v^2=2-x \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=4x-1$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow u-v=\frac{1}{3}\left(u^2-v^2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=3 \end{array}\right.$

- Với $u=v \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$
- Với $u+v=3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}=3$

$$\Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{(3x+1)(2-x)}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(2-x)}=3-x \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{7}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là : $x=\frac{1}{4}; x=1; x=\frac{7}{4}$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4-x \quad (1)$

2. $\dfrac{2x}{\sqrt{3x+1}-1}=x+1 \quad (2)$

Giải

Các nhận xét quan trọng:

1. Nhân lượng liên hiệp khi phương trình có dạng:

Dạng 1: $\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{cx+d}=kx+h$

Dạng 2: $\dfrac{ax+b}{\sqrt{cx+d}\pm\alpha}=kx+h$

Dạng 3: $\dfrac{ax^2+b}{\sqrt{cx^2+d}\pm\alpha}=kx+h$

2. Khi nhân với một biểu thức luôn khác 0 thì ta nhân tự nhiên mà không xét thêm điều kiện gì.
3. Nếu biểu thức đó không biết dấu thì ta phải xét trường hợp biểu thức đó bằng 0 có nghiệm thỏa mãn phương trình hay không? Khi biểu thức đó khác 0 thì ta nhân vào hai vế hay vào tử số và mẫu số.
4. Đối với dạng 1 thì ta nên dùng cách 2 để lời giải đơn giản hơn.
5. Đối với dạng 2, dạng 3 ngoài cách giải trên còn có thể đặt t bằng biểu thức căn.

1. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+3}>0\\ v=\sqrt{2x-1}\ge 0\end{cases}$; điều kiện: $\frac{1}{2}\le x<4$ (a)

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2=x+3\\ v^2=2x-1\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=4-x$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow u+v=u^2-v^2$

$$\Leftrightarrow u+v=(u+v)(u-v)\Leftrightarrow u-v=1$$

$$\Leftrightarrow u=1+v\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=1+\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3=2x+2\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=3-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(2x-1)=(3-x)^2\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-14x+13=0\\ x\le 3\end{cases}\quad x=1 \text{ thỏa (a).}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$.

Chú ý:

Nếu ta nhân lượng liên hiệp vào hai vế thì phải để ý:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}>0\forall x>\frac{1}{2}$$

2. Điều kiện : $-\frac{1}{3}\le x\ne 0$

(2) $\Leftrightarrow\dfrac{2x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{3x}=x+1$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3x+1}+1\right)=3x+3\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1}=3x+1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{1}{3}\\ 4(3x+1)=(3x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = -\frac{1}{8}$

Chú ý: Bài này ta có thể đặt $t = \sqrt{3x+1}$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1.\ x - 4 = \frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2} \quad (1)$$

$$2.\ 2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right) = x \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $x \geq 4$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x - 4 = \frac{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{\left[\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\right]^2}$

$$\Leftrightarrow x - 4 = \left(\sqrt{1+x}-1\right)^2 = 2 + x - 2\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là: $x = 8$

2. Điều kiện: $x \geq -1$

Nhân hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+x}+1$ ta được:

$$2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right) = x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x} = x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{1+x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là: $x = 0$

Chuyên đề 3: Đặt ẩn phụ toàn phần

1. Các dạng phương trình chuẩn

Dạng 1: $\sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha\sqrt{(a+bx)(c-bx)} = d$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t.
- Bước 4: Bình phương t; tính tích $\sqrt{(a+bx)(c-bx)}$ theo t.
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t.

Dạng 2: $\sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm \alpha(a+bx)\sqrt{\dfrac{c-bx}{a+bx}} = d$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đưa biểu thức a + bx vào trong căn được dạng 1.

Dạng 3: $\sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx} \pm 2\sqrt{Ax^2+Bx+D} = Kx+h$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{a+bx} \pm \sqrt{c-bx}$
- Bước 3: Tìm điều kiện của t.
- Bước 4: Bình phương t; tính các hàm còn lại theo t.
- Bước 5: Đưa về phương trình bậc hai theo t.

Dạng 4: $ax \pm \sqrt{b-a^2x^2} \pm \alpha x\sqrt{b-a^2x^2} + c = 0$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt ẩn phụ $t = ax \pm \sqrt{b-a^2x^2}$
- Giải như các bước trên ở dạng 3.

Dạng 5: $x + \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Qui đồng bỏ mẫu, đưa về dạng 4.

Dạng 6: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = b$

Cách giải:

- Qui đồng và bỏ mẫu đưa về dạng 4.

Dạng 7: $(ax+b)(cx+d) \pm \alpha\sqrt{Ax^2+Bx+D} = K$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2: Đặt $t = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$

Dạng 8: $\sqrt{a+bx} + \sqrt{c-bx} = \sqrt{Ax^2+Bx+D}$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt điều kiện.
- Bước 2:Bình phương hai vế được dạng 7.

2. **Phương trình chứa một biểu thức liên hiệp:** $f(x).g(x) = 1$

Cách giải: Đặt $t = f(x)$ thì $g(x) = \frac{1}{t}$

3. **Phương trình chứa một biểu thức f(x) giống nhau**

Cách giải: Đặt $t = f(x)$

4. **Bài tập**

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} + \sqrt{(2+x)(6-x)} = 8$ (1)

2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - (1+x)\sqrt{\frac{8-x}{1+x}} = 3$ (2)

Giải

1. Điều kiện: $-2 \le x \le 6$

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = \frac{t^2-8}{2}$$

(1) trở thành: $t + \frac{t^2-8}{2} = 8 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -6 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{6-x} = 4 \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{(2+x)(6-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2+x)(6-x)} = 4 \Leftrightarrow (2+x)(6-x) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 2.

2. Điều kiện: $-1 < x \le 8$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} - \sqrt{(1+x)(8-x)} = 3$ (3)

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(1+x)(8-x)} \Rightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = \frac{t^2-9}{2}$$

Phương trình (3) trở thành:

$$t - \frac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(8-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 8 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 8.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1.\ x+\sqrt{2-x^2}+x\sqrt{2-x^2}=3 \quad (1)$$

$$2.\ \sqrt{x}+\sqrt{4-x}=\sqrt{5+4x-x^2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ (a)

Đặt $t=x+\sqrt{2-x^2}\Rightarrow t^2=2+2x\sqrt{2-x^2}$

$$\Rightarrow x\sqrt{2-x^2}=\frac{t^2-2}{2}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t+\frac{t^2-2}{2}=3\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-4\end{array}\right.$$

- với $t=2\Leftrightarrow x+\sqrt{2-x^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=2-x$

$$\Leftrightarrow 2-x^2=(2-x)^2\ (\text{do (a) nên } 2-x>0)$$

$$x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$$

- với $t=-4\quad\Leftrightarrow x+\sqrt{2-x^2}=-4\quad\Leftrightarrow\sqrt{2-x^2}=-x-4$.

Phương trình này có nghiệm $\forall x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ vì $-x-4<0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=1$.

2. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge0\\4-x\ge0\\5+4x-x^2\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le4\\-1\le x\le5\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le4$ (a)

$$(2)\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4x-x^2}=5+4x-x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x-x^2-2\sqrt{4x-x^2}+1=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{4x-x^2}=1\Leftrightarrow 4x-x^2=1\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}\ (\text{nhận})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=2\pm\sqrt{3}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1.\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{2-x}+2\sqrt{2+5x-3x^2}=9-2x \quad (1)$$

$$2.\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{2} \quad (2)$$

Giải

1. Điều kiện: $-\frac{1}{3}\le x\le 2$ (a)

Đặt $t = \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} > 0$

$\Rightarrow t^2 = 2x + 2\sqrt{(3x+1)(2-x)} + 3$

$\Rightarrow 2x + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = t^2 - 3$

Khi đó: (1) trở thành: $t + t^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -4\,(\text{loại}) \end{array}\right.$

- với $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{2+5x-3x^2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2+5x-3x^2} = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow 2 + 5x - 3x^2 = (3-x)^2 \text{ (vì (a) nên } 3 - x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \end{array}\right. (\text{nhận})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $x = 1 \vee x = \frac{7}{4}$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{2}x\sqrt{1-x^2} = 0$ (3)

Đặt: $t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{1-x^2} = t^2 - 1$

(3) trở thành: $t - \sqrt{2}\left(t^2 - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

- với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2} - x \Leftrightarrow 1 - x^2 = \left(\sqrt{2} - x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{nhận})$$

- với $t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - x^2 = \frac{1}{2} + x^2 + \sqrt{2}x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ thỏa mãn (a)}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$1.\ 2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48$$

$$2.\ \sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$$

Giải

1. $2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48$

Điều kiện: $x \ge 5$

Đặt: $t=\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\ (t>0) \Rightarrow t^2=2x-5+2\sqrt{x^2-5x}$

Phương trình (1) trở thành: $t^2+2t-48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-8 \text{ (loại)} \\ t=6 \end{array}\right.$

\+ với $t=6 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6$

$\Leftrightarrow 2x-5+2\sqrt{x^2-5x}=36 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-5x}=41-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x \le \dfrac{41}{2} \\ x=\dfrac{41^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x=\left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\left(\dfrac{41}{12}\right)^2$

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$

Điều kiện: $x \ge 4$

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x-4=\frac{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{\left[\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\right]^2}$$

$$\Leftrightarrow x-4=\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2=2+x-2\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}=3 \Leftrightarrow x=8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=8$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$1.\ \sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$$

$$2.\ 1+\frac{3}{2}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$$

Giải

1. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$ (1)

Điều kiện: $0 \le x \le \dfrac{35}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} + 2x = 35$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+7}; t > 0$

$$t^2 = 2x + 7 + 2\sqrt{x^2+7x} \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2+7x} = t^2 - 7$$

Phương trình (1) trở thành:

$$t + t^2 - 7 = 35 \Leftrightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -7 \text{ (loại)} \\ t = 6 \end{array}\right.$$

Với $t = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{29}{2} \\ 4\left(x^2 + 7x\right) = 4x^2 - 116x + 29^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{29}{2} \\ x = \dfrac{29^2}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{29}{12}\right)^2$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \left(\dfrac{29}{12}\right)^2$

2. $1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (1)

Điều kiện: $0 \le x \le 1$

Đặt: $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; t > 0$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2} \Rightarrow \sqrt{x-x^2} = \dfrac{t^2-1}{2}$$

Phương trình (1) trở thành: $1 + \dfrac{3}{4}\left(t^2 - 1\right) = t \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

+ Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

+ Với $t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x - x^2} = -\dfrac{8}{18}$ phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = 1$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$ (1)
2. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$ (2)

Giải

1. Đặt: $t = x^2 - 3x + 3 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4} \Rightarrow t \ge \dfrac{3}{4}$

Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{t}+\sqrt{t+3}=3$

$\Leftrightarrow 2t+3+2\sqrt{t^2+3t}=9 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3t}=3-t$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t\ge 0 \\ t^2+3t=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$

+ Với $t=1 \Rightarrow x^2-3x+3=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=1 \vee x=2$.

2. Đặt $t=x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge\frac{7}{4} \Rightarrow t\ge\frac{7}{4}$

(2) trở thành: $\sqrt{t+5}+\sqrt{t}=\sqrt{3t+13}$

$\Leftrightarrow 2t+5+2\sqrt{t(t+5)}=3t+13$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{t(t+5)}=t+8 \Leftrightarrow 4t(t+5)=(t+8)^2$

$\Leftrightarrow 3t^2+4t-64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{16}{3} \text{ (loại)} \\ t=4 \end{array}\right.$

- Khi $t=4$ $x^2+x+2=4 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1. $1-\sqrt{x+\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+1}$
2. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=x$

Giải

1. $1-\sqrt{x+\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+1}$ (1)

Điều kiện: $x\ge -1$

Đặt: $t=\sqrt{x+1}\ge 0 \Rightarrow t^2=x+1$

Khi đó: (1) trở thành: $1-\sqrt{t^2+t}=t$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+t}=1-t \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 1 \\ t^2+t=(t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 1 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

+ Với $t=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x=-\frac{8}{9}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{8}{9}$.

2. Điều kiện: $x \ge 4$. Đặt: $t = \sqrt{x-4} \ge 0 \Rightarrow t^2 = x - 4 \Rightarrow x = t^2 + 4$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+4+4t} = t^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t+2)^2} = t^2 + 4 \Leftrightarrow |t-2| + t + 2 = t^2 + 4 \quad (2)$$

+ Nếu $t - 2 \ge 0 \Leftrightarrow t \ge 2$ thì $(2) \Leftrightarrow 2t = t^2 + 4$

Phương trình này vô nghiệm.

+ Nếu $0 \le t \le 2$ thì $(2) \Leftrightarrow t^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow t = 0$

Với $t = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 4$.

Bài 8: Giải các phương trình sau:

1. $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$

2. $x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x$

Giải

1. $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0 \ (1)$$

Đặt: $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}; t > 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{(loại)} \\ t = 4 \end{array}\right. \text{ với } t = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -2 \vee x = \frac{7}{2}$

2. $x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x \qquad (1)$

Điều kiện: $9x^2 + x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{-1-\sqrt{73}}{18} \\ x \ge \frac{-1+\sqrt{73}}{18} \end{array}\right. \ (*)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \dfrac{9x^2+x-2}{9}-5\sqrt{9x^2+x-2}-\dfrac{91}{36}=0$ (2)

Đặt: $t=\sqrt{9x^2+x-2}; t\ge 0 \Rightarrow t^2=9x^2+x-2$

Phương trình (2) trở thành:

$$\frac{t^2}{9}-5t-\frac{91}{36}=0 \Leftrightarrow 4t^2-180t-91=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2}\text{(loại)} \\ t=\frac{91}{2} \end{array}\right.$$

+ Với $t=\dfrac{91}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+x-2}=\dfrac{91}{2}$

$\Leftrightarrow 9x^2+x-2=\dfrac{91^2}{4} \Leftrightarrow 36x^2+4x-8289=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{298408}}{36}$ thỏa mãn (*)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{298408}}{36}$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2-\dfrac{x^2}{4}$

2. $\sqrt{(1+x)(2-x)}=1+2x-2x^2$

Giải

1. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=2-\dfrac{x^2}{4}$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le 1$

Đặt $t=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}; t\ge 0$

$\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2=t^2-\dfrac{1}{4}t^4$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow t=2-\dfrac{1}{4}\left(t^2-\dfrac{t^4}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow t=2-\frac{t^2}{4}+\frac{t^4}{16} \Leftrightarrow (t-2)(t^3+2t^2-16)=0 \Leftrightarrow t=2$$

Với $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow x=0$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0$.

2. $\sqrt{(1+x)(2-x)}=1+2x-2x^2$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le 2$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2+x-x^2}=(2+x-x^2)2-3$ (2)

Đặt: $t = \sqrt{2 + x - x^2}; t \geq 0 \Rightarrow t^2 = 2 + x - x^2$

Phương trình (2) trở thành: $t = 2t^2 - 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (\text{loại}) \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + x - x^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{1}{2}$.

Bài 10: Giải các phương trình sau:

1. $\left(x + 3\sqrt{x} + 2\right)\left(x + 9\sqrt{x} + 18\right) = 168x$

2. $\left(x + 3\sqrt{x} + 2\right)\left(x + 9\sqrt{x} + 18\right) = 120x$

Giải

1. $\left(x + 3\sqrt{x} + 2\right)\left(x + 9\sqrt{x} + 18\right) = 168x$ (1)

Điều kiện: $x \geq 0$. Phương trình (1)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} + 6\right) = 168x$

$\Leftrightarrow \left(x + 5\sqrt{x} + 6\right)\left(x + 7\sqrt{x} + 6\right) = 168x$

$\Leftrightarrow \left(x + 6\sqrt{x} - \sqrt{x} + 6\right)\left(x + 6\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6\right) = 168x$

$\Leftrightarrow \left(x + 6\sqrt{x} + 6\right)^2 = 169x = \left(13\sqrt{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 6\sqrt{x} + 6 = 13\sqrt{x} \\ x + 6\sqrt{x} + 6 = -13\sqrt{x} \end{array}\right.$ (phương trình này vô nghiệm vì $x \geq 0$)

$\Leftrightarrow x - 7\sqrt{x + 6} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 36 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = 36$.

2. $\left(x + 3\sqrt{x} + 2\right)\left(x + 9\sqrt{x} + 18\right) = 120x$ (1)

Điều kiện: $x \geq 0$

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} + 6\right) = 120x$

$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} + 6\right)\right]\left[\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)\right] = 120x$

$\Leftrightarrow \left(x + 7\sqrt{x} + 6\right)\left(x + 5\sqrt{x} + 6\right) = 120x$ (2)

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên:

$$(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+7\right)\left(\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+5\right)=120$$

Đặt: $t=\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}};t\ge 2\sqrt{6}$

Phương trình trên trở thành:

$$(t+7)(t+5)=120\Leftrightarrow t^2+12t-85=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-17\ (\text{loại})\\ t=5\end{array}\right.$$

\+ Với $t=5\Leftrightarrow t=\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}=5\Leftrightarrow x-5\sqrt{x}+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=9\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=4\vee x=9$

Bài 11: Giải các phương trình sau:

$$1.\ x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$$

$$2.\ 2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$$

Giải

1. $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$ (1)

Điều kiện: $x\ge-\frac{3}{2}$

Đặt: $t=\sqrt{2x+3};t\ge0\Rightarrow t^2=2x+3\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(t^2-3\right)$

Phương trình (1) trở thành:

$$\frac{1}{4}\left(t^2-3\right)^2+2\left(t^2-3\right)+5=2t$$

$$\Leftrightarrow t^4+2t^2-8t+5=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^3+t^2+3t+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t^3+t^2+3t+5=0\ \text{phương trình này vô nghiệm}\ \forall t\ge0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}=1\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-1$.

2. $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$ (1)

Điều kiện: $-1\le x\le1$

Từ (1) suy ra: $\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2\left(1-x^2\right)-4x^2+8x^3\sqrt{1-x^2}-4x\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow x\left(1+8x^2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1-x^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 8x^2\sqrt{1-x^2}-4\sqrt{1-x^2}+1=0\ (1)\end{array}\right.$$

Đặt: $t = \sqrt{1-x^2}; t \ge 0$; suy ra $x^2 = 1 - t^2$

Phương trình (2) trở thành: $8\left(1-t^2\right)t - 4t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{2}\right)\left(8t^2-4t-2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\frac{1}{2} = 0 \text{ vô nghiệm vì } t \ge 0 \\ 4t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ (vì } t \ge 0) \end{array}\right.$$

+ Với $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

Thử lại các nghiệm của phương trình ta được nghiệm thích hợp là:

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Bài 12: Giải các phương trình:

1. $\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}} = 2$
2. $2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0$

Giải

1. $\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}} = 2$. Đặt kiện: $x \ge \frac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \ge 0 \\ b = \sqrt{3x^2+4x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2x-1 \\ b^2 = 3x^2+4x+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 3x^2 + 6x = 3\left(x^2+2x\right) \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{a^2+b^2}{3}$$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}} = -a + b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - a \ge 0 \\ \frac{a^2+b^2}{3} = (b-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge a \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \ (1) \end{cases}$$

+ Với $b \ge a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+1} \ge \sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 \ge 0 \forall x \in R$$

Phương trình (1): $a^2 - 3ba + b^2 = 0$

$$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$$

+ Với $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{3x^2+4x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(7-3\sqrt{5}\right)x^2 + 4\left(6-3\sqrt{5}\right)x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$$

Phương trình này có nghiệm kép: $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

+ Với $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3x^2+4x+1}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(7+3\sqrt{5}\right)x^2 + 4\left(6+3\sqrt{5}\right)x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

2. $2\sqrt[3]{(1+x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = 0$ (1)

Vì $x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình nên (1) tương đương với:

$$2\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}} + 3 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = 0 \quad (2)$$

Đặt: $t = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{t}$

Khi đó: (2) trở thành: $2t + 3 + \dfrac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

+ Với $t = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} = -1$

$\Leftrightarrow 1 + x = x - 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $t = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 8(x+1) = x - 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{7}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\dfrac{9}{7}$

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^5 + \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^5 = 123$$

Giải

Vì $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1$ nên

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}-x$ thì $\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{t}$

Do đó phương trình đã cho tương đương: $t^5+\frac{1}{t^5}=123 \Leftrightarrow t^{10}-123t^5+1=0$

Đặt: $y=t^5$ thì $y^2-123y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{123\pm 55\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^5=\frac{123-55\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^5 \\ t^5=\frac{123+55\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

+ Với $t=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x^2+1=x^2+\left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}$$ +Với

$t=\frac{\sqrt{5}+3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x+\frac{\sqrt{5}+3}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài 14: Giải phương trình sau:

$$\frac{2002x^4+x^4\sqrt{x^2+2002}+x^2}{2001}=2002$$

Giải

Thay 2002 bởi a: $a>0$

Ta giải phương trình: $\frac{ax^4+x^4\sqrt{x^2+a}+x^2}{a-1}=a$

$\Leftrightarrow ax^4 + x^4\sqrt{x^2+a} + x^2 = a^2 - a$

$\Leftrightarrow x^4\left(a+\sqrt{x^2+a}\right)+\left(\sqrt{x^2+a}\right)^2 - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^4\left(a+\sqrt{x^2+a}\right)+\left(\sqrt{x^2+a}-a\right)\left(\sqrt{x^2+a}+a\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+a}+a\right)\left(x^4+\sqrt{x^2+a}-a\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + \sqrt{x^2+a} - a = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+a}\right)^2 + x^2 + \sqrt{x^2+a} = a$

$\Leftrightarrow \left(x^2-\sqrt{x^2+a}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+a}\right) + x^2 + \sqrt{x^2+a} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+\sqrt{x^2+a}\right)\left(x^2-\sqrt{x^2+a}+1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x^2+a} + 1 = 0$ (2)

Đặt: $t = \sqrt{x^2+a} > 1$ suy ra $t^2 = x^2 + a$

Thì: (2) $\Leftrightarrow t^2 - t + 1 - a = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1-\sqrt{4a-3}}{2} < 1 \text{(loại)} \\ t = \dfrac{1+\sqrt{4a-3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a-3}-1\right)$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{4a-3}-1\right)}$$

Với a = 2002 ta được nghiệm của phương trình cho là: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{8005}-1\right)}$

Bài 15: Giải phương trình sau: $\sqrt{\dfrac{6}{2-x}} + \sqrt{\dfrac{10}{3-x}} = 4$

Giải

Điều kiện: $x < 2$

Đặt: $t = \sqrt{\dfrac{6}{2-x}} > 0 \Rightarrow t^2 = \dfrac{6}{2-x} \Rightarrow 3 - x = \dfrac{6}{t^2} + 1 = \dfrac{6+t^2}{t^2}$

Do đó: (1) trở thành:

$$t + t\sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{6+t^2}} = \frac{4-t}{t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 4 \\ 10t^2 = \left(6+t^2\right)(4-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ \begin{cases} 0 < t < 4 \\ t^3 - 6t^2 - 48 = 0 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right.$$

Xét phương trình (2):

Đặt: $f(t) = t^3 - 6t^2 - 48$ với $0 < t < 4$

$$f'(t) = 3t^2 - 12t \quad ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		4
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	-48	$\searrow$	-80

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) = 0$ luôn vô nghiệm $\forall t \in (0,4)$

$\Rightarrow$ phương trình chỉ có nghiệm $t = 2 \Leftrightarrow \dfrac{6}{2-x} = 2 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = -1$.

Bài 16: Giải phương trình sau: $1 + x - 2x^2 = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{2x + 1}$

Giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

Nếu $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$ thì (1) thỏa mãn.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{(2x-1)(2x+1)} - \sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+2x) = \sqrt{2x+1}\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)$

Đặt: $t = \sqrt{2x+1}$; điều kiện: $t \ge \sqrt{2}\left(\text{vì } x \ge \dfrac{1}{2}\right)$

Ta được: $(1-x)t^2 = t\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{1-x}\left(\text{vì } t \ge \sqrt{2}\right)(x \ne 0)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = -\dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \dfrac{\left(\sqrt{2x-1} - 1\right)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1} + 1\right)} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \dfrac{-2}{\sqrt{2x-1} + 1}$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải âm, vế trái dương.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$

Chuyên đề 3: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Bài 1: Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$

Giải

$x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1$

Khi đó (1) trở thành: $t^2 - (x+3)t + 3x = 0$

$$\Delta = (x+3)^2 - 12x = (x-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = x \end{array}\right.$$

+ Với $t = x \Rightarrow x^2 + 1 = x^2$ phương trình này vô nghiệm.

+ Với $t = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy nghiệm của phương trình này là: $x = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$

Giải

$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$ (1)

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1}; t \geq 1$

$(1) \Leftrightarrow (4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x - 1$

$\Rightarrow (4x-1) = 2t^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2t^2 + (1-4x)t + 2x - 1 = 0$

Ta có: $\Delta = (1-4x)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (loại) ; $t = 2x - 1$

+ Với $t = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{4}{3}$

Bài 3: Giải phương trình sau: $(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} + (x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = 2$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Đặt: $t=\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}=\dfrac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(3-x)t+(x-1)\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow (3-x)t^2-2t+x-1=0$$

Ta có: $\Delta'=(x-2)^2 \Rightarrow t=1\,;t=\dfrac{x-1}{3-x}$

+ Với $t=1 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$

+ Với $t=\dfrac{x-1}{3-x} \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{x-1}=\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^2 \Leftrightarrow x=2$

Tóm lại: Phương trình đã cho có nghiệm: $x=2$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $2(1-x)\sqrt{2x^2+2x-1}=x^2-x+1$ (1)

Giải

Đặt: $t=\sqrt{2x^2+2x-1}\ge 0 \Rightarrow 2x^2+2x-1=t^2$

$\Rightarrow 2x^2=t^2+1-2x$

(1) trở thành: $4(1-x)t=t^2+1-2x-2x+2$

$\Leftrightarrow t^2-4(1-x)t-4x+3=0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta'=4(1-x)^2+4x-3=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$

$\Rightarrow$ (2) có hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=3-4x \end{array}\right.$

- Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1}=1 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1=1$

  $\Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

- Với $t=3-4x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x-1}=3-4x$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x\ge 0 \\ 2x^2+2x-1=(3-4x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{13-\sqrt{29}}{14}$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{13-\sqrt{29}}{14} \end{array}\right.$

Chuyên đề 4: Đặt hai ẩn đưa về phương trình tích hoặc tổng các đại lượng không âm

Bài 1: Giải phương trình: $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$

Giải

$$2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8} \qquad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3+8\ge 0 \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} \qquad (2)$$

Đặt: $\begin{cases} a=x+2 \\ b=x^2-2x+4 \end{cases} \Rightarrow b-a=x^2-3x+2$

Do đó (2) trở thành: $2(b-a)=3\sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\ge a \\ 4(b-a)^2=9ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge a \ (*) \\ 4a^2+4b^2-17ab=0 \ \ (3) \end{cases}$$

Phương trình (3)

$$\Leftrightarrow 4a^2-17a+4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{b}{4} \\ a=4b \end{array}\right.$$

Kết hợp với (*) ta được: $a=\dfrac{b}{4}\Leftrightarrow 4a=b$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)=x^2-2x+4 \Leftrightarrow x^2-6x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{13} \\ x=3+\sqrt{13} \end{array}\right. (\text{nhận})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=3\pm\sqrt{13}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$

Giải

$$\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2(x-3)^2+2x-2} \qquad (1)$$

Điều kiện: $x\ge 1$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{x-1}\ge 0 \\ b=x-3\ge -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x-1 \\ b^2=(x-3)^2 \end{cases}$

Phương trình (1) trở thành:

$$a+b=\sqrt{2b^2+2a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ (a+b)^2 = 2(a^2+b^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ (a-b)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\ge 0 \\ a=b \end{cases}$$

Khi $a=b \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3 \Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=5$

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

Giải

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1} \qquad (1)$$

Điều kiện: $x\ge 1$

Đặt: $a=\sqrt{x-1}\ge 0; b=\sqrt{x^3+x^2+x+1}>0$

$$\Rightarrow a.b=\sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}=\sqrt{x^4-1}$$

Phương trình (1) trở thành: $a+b=1+ab$

$$\Leftrightarrow a(1-b)-(1-b)=0 \Leftrightarrow (1-b)(a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$$

+ Với $a=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x=2$

+Với $b=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+x+1}=1 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=2$.

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải

Điều kiện: $x\ge \dfrac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt{2x-1}\ge 0 \\ b=\sqrt{3x^2+4x+1}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2x-1 \\ b^2=3x^2+4x+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2+b^2=3x^2+6x=3(x^2+2x)$$

$$\Rightarrow x^2+2x=\frac{a^2+b^2}{3}$$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{3}}=-a+b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-a\ge 0 \\ \dfrac{a^2+b^2}{3}=(b-a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge a \\ a^2+b^2-3ab=0 \ (1) \end{cases}$$

Với $b \ge a \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+1} \ge \sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x+2 \ge 0 \quad \forall x \in R$

Phương trình (1): $a^2 - 3ba + b^2 = 0$

$\Delta = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2 \Rightarrow a = \dfrac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$

- Với $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.b$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{3x^2+4x+1}$

$\Leftrightarrow 3\left(7-3\sqrt{5}\right)x^2 + 4\left(6-3\sqrt{5}\right)x + 9 - 3\sqrt{5} = 0$

Phương trình này có nghiệm kép: $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

- Với $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}b$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3x^2+4x+1}$

$\Leftrightarrow 2x-1 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\left(3x^2+4x+1\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(7+3\sqrt{5}\right)x^2 + 4\left(6+3\sqrt{5}\right)x + 9 + 3\sqrt{5} = 0$

Phương trình này có nghiệm kép: $x_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 5x^2+14x+9 \ge 0 \\ x^2-x-20 \ge 0 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 5$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+14x+9} = \sqrt{x^2-x-20} + 5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(5x+9)} = \sqrt{(x+4)(x-5)} + 5\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)(5x+9) = (x+4)(x-5) + 25(x+1) + 10\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x-5\right) + 3(x+4) = 5\sqrt{\left(x^2-4x-5\right)(x+4)}$ (2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \\ b = \sqrt{x + 4} \end{cases}$ thì (2) trở thành:

$+\ 2a^2 + 3b^2 = 5ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ba + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = \dfrac{3b}{2}$

\+ Với $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x + 4}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}\ ; x = \frac{5 - \sqrt{61}}{2} \text{ (loại)}$$

\+ Với $a = \dfrac{3}{2}b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x + 4}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow x = 8\ ;\ x = -\frac{7}{4} \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2} \vee x = 8$.

Bài 6: Giải phương trình sau : $5\sqrt{1 + x^3} = 2\left(x^2 + 2\right)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq 1$

$(1) \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)\left(x^2 - x + 1\right)} = 2\left(x^2 + 2\right) (2)$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x + 1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x + 1 \\ b^2 = x^2 - x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow 5ab = 2\left(a^2 + b^2\right)$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{2}\ ; a = 2b$$

\+ Với $a = \dfrac{b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \text{ thỏa } (*)$$

\+ Với $a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$

phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$.

Bài 7: Giải phương trình sau: $10\sqrt{x^3 + 8} = 3\left(x^2 - x + 6\right)$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \geq -2$

$(1) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} = 3(x^2-x+6)$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2-2x+4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x+2 \\ b^2 = x^2-2x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 - x + 6$

Phương trình (1) trở thành:

$$10ab = 3(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{3} \vee a = 3b$$

+ Với $a = \dfrac{b}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-2x+4} \Leftrightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$

+ Với $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3\sqrt{x^2-2x+4}$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 19x + 34 = 0$ (phương trình này vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$

Bài 8: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \qquad (1)$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = -\sqrt[3]{x^2-x-8} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 7x+1 \\ b^3 = -(x^2-x-8) \\ c^3 = x^2-8x-1 \end{cases}$

(1) trở thành: $a+b+c = 2 \Rightarrow (a+b+c)^3 = 8 \qquad (2)$

Lại có: $a^3 + b^3 + c^3 = 8 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b)$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 6abc + 3c^2a + 3c^2b$

$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow a = -b\,; b = -c\,; c = -a$

+ Nếu $a = -b \Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \Leftrightarrow 7x+1 = x^2-x-8$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 9 \end{array}\right.$

+ Nếu $b = -c \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \Leftrightarrow x = 1$

+ Nếu $c = -a \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-8x-1} = -\sqrt[3]{7x+1}$

$$\Leftrightarrow x^2-8x-1=-7x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

Thay các giá trị $x\in\{-1,0,1,9\}$ vào phương trình đều thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\{-1,0,1,9\}$.

Bài 9: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=3+\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}\qquad(1)$$

Giải

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{2-x}\\b=\sqrt[3]{7+x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3=2-x\\b^3=7+x\end{cases}\Rightarrow a^3+b^3=9$

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-ab=3\\a^3+b^3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-ab=3\\(a+b)(a^2+b^2-ab)=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-ab=3\\a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\(a+b)^2-3ab=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ab=2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ a, b là nghiệm của phương trình: $X^2-3X+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=1\\X=2\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

+ Với $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=2\\\sqrt[3]{7+x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\x=-6\end{cases}\Leftrightarrow x=-6$

+ Với $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1\\\sqrt[3]{7+x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-6$; $x=1$.

Bài 10: Giải phương trình sau:

$$\sqrt[3]{x^2-7x+8}+\sqrt[3]{x^2-6x+7}-\sqrt[3]{2x^2-13x-12}=3\qquad(1)$$

Giải

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt[3]{x^2-7x+8}\\b=\sqrt[3]{x^2-6x+7}\\c=\sqrt[3]{2x^2-13x-12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3=x^2-7x+8\\b^3=x^2-6x+7\\c^3=2x^2-13x-12\end{cases}$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=27\qquad(2)$

Phương trình (1) trở thành:

$$a+b+c=3 \Leftrightarrow (a+b+c)^3=27 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow (a+b+c)=a^3+b^3+c^3$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

+ Với $a=-b$ thì $\sqrt[3]{x^2-7x+8}=-\sqrt[3]{x^2-6x+7}$

$$\Leftrightarrow 2x^2-13x+15=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \vee x=5$$

+ Với $b=-c$ thì $\sqrt[3]{x^2-6x+7}=\sqrt[3]{2x^2-13x-12}$

$$\Leftrightarrow x^2-7x-19=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm5\sqrt{5}}{2}$$

+ Với $c=-a$ thì $\sqrt[3]{2x^2-13x-12}=\sqrt[3]{x^2-7x+8}$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-20=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{29}$$

Thay các nghiệm trên vào (1) ta thấy đều thỏa mãn.

Vậynghiệmcủaphươngtrìnhlà:

$$x=\frac{3}{2};x=5;x=\frac{7\pm5\sqrt{5}}{2};\ x=3\pm\sqrt{29}$$

Chuyên đề 5: Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình

1. Cách giải

Dạng 1: Phương trình có dạng: $x^4+b=a\sqrt[n]{ax\pm b}\,(n\in Z^+;n\ge2)$

- Đặt: $t=\sqrt[n]{ax\pm b}$
- Đưa về hệ đối xứng.

Dạng 2: $\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[m]{b+f(x)}=c;\quad m,n\in Z^+;\begin{cases} m\ge2 \\ n\ge2 \end{cases}$

- Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[n]{a-f(x)} \\ v=\sqrt[m]{b+f(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^n=a-f(x) \\ v^m=b+f(x) \end{cases} \Rightarrow u^n+v^m=a+b$
- Kết hợp với phương trình đã cho ta được hệ: $\begin{cases} u+v=c \\ u^n+v^m=a+b \end{cases}$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau: $x^2+\sqrt{x+5}=5 \qquad (1)$

Giải

Điều kiện: $x\ge-5$

Đặt: $t = \sqrt{x+5}; t \ge 0 \Rightarrow t^2 = x+5$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} x^2 + t = 5 & (2) \\ t^2 - x = 5 & (3) \end{cases}$

Lấy (2) – (3) ta được:

$$x^2 - t^2 + t + x = 0 \Leftrightarrow (t+x)(1+x-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t + x = 0 \\ t - x = 1 \end{array}\right.$$

+ Với $t + x = 0 \Rightarrow t = -x$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Vì $t \ge 0$ nên $-x \ge 0 \Rightarrow x \le 0$ nên nghiệm x_2 bị loại.

+ Với $t = x + 1$ thế vào (2) ta được:

$$x^2 + x + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \mp \sqrt{17}}{2}$$

Vì $t \ge 0 \Rightarrow x \ge -1$ nên nghiệm x_3 bị loại.

Tóm lại: Nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Giải

Đặt: $t = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow t^3 = 2x - 1$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t & (2) \\ t^3 + 1 = 2x & (3) \end{cases}$$

Lấy (2) – (3) ta được $x^3 - t^3 = 2(t - x)$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) + 2(x-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x^2 + xt + t^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \quad (4)$$

- Phương trình (4) có $\Delta_1 = t^2 - 4(t^2 + 2) = -8 - 3t^2 < 0$;

  do đó (4) vô nghiệm.

- Với $x = t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1 \vee x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bài 3: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1$

Giải

Điều kiện: $x \le \frac{1}{2}$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x} \\ b=\sqrt{\frac{1}{2}-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3=\frac{1}{2}+x \\ b^2=\frac{1}{2}-x \end{cases} \Rightarrow a^3+b^2=1$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^3+b^2=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^2=1 \\ b=1-a \end{cases} \Rightarrow a^3+(1-a)^2=1$$

$$\Leftrightarrow a^3+a^2-2a=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=0; a=1; a=-2$$

+ Với $a=0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

+ Với $a=1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

+ Với $a=-2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\pm\frac{1}{2}; x=-\frac{17}{2}$.

Bài 4: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{18+x^2}=5$

Giải

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x^2-1} \\ b=\sqrt[3]{18+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3=x^2-1 \\ b^3=18+x^2 \end{cases} \Rightarrow b^3-a^3=19$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a+b=5 \\ b^3-a^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ b^3-(5-b)^3=19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b^3-15b^2+75b-144=0 \Leftrightarrow (b-3)(2b^2-9b+48)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ 2b^2-9b+48=0 \text{ (phương trình này vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

+ Với $b=3 \Rightarrow \sqrt[3]{18+x^2}=3 \Rightarrow x=\pm 3$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=\pm 3$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}=\sqrt{2}$

Giải

Điều kiện: $2 \le x \le 6$

Đặt: $\begin{cases} a=\sqrt[4]{x-2}\ge 0 \\ b=\sqrt[4]{6-x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4=x-2 \\ b^4=6-x \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4=4$

Phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^4+b^4=4 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=4 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b^2-8ab=0 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \vee ab=4 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases}$$

$+$ Với $\begin{cases} ab=0 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$

$+$ Với $\begin{cases} ab=4 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$ a, b là nghiệm của phương trình:

$x^2-\sqrt{2}x+4=0$ (phương trình này vô nghiệm)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=2 \vee x=6$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1. $x+\sqrt{2-x^2}+x\sqrt{2-x^2}=3$
2. $\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$

Giải

1. Điều kiện: $-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}$

Đặt: $\begin{cases} a=x; |a|\le\sqrt{2} \\ b=\sqrt{2-x^2}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=x^2 \\ b^2=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=2$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b+ab=3 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+ab=3 \\ (a+b)^2-2ab=2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3-ab \\ \left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=3-ab \\ ab=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=3-ab \\ ab=7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=7 \end{cases} \text{vô nghiệm} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ a, b là nghiệm của phương trình: $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$

Suy ra $a = b = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{1-x^2} \ge 0 \\ b = \sqrt[3]{1-x^2} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1-x^2 \\ b^3 = 1-x^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^3$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^2 = b^3 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^3 \\ a = 3 - 2b \end{cases} \Rightarrow b^3 - (3-2b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 4b^2 + 12b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2 - 3b + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1 \text{ vì } b^2 - 3b + 9 = 0 \text{(vô nghiệm)}$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài 7: Giải phương trình sau: $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$ (1)

Giải

Điều kiện: $-313 \le x \le 313$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[4]{313+x} \ge 0 \\ b = \sqrt[4]{313-x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 313+x \\ b^4 = 313-x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 626$

Phương trình (1) trở thành hệ:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + b^4 = 626 \\ b = 6 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^4 + (6-a)^4 = 626 \Leftrightarrow a^4 + (a-6)^4 = 626 \quad (2)$$

Đặt: $t = a - 3 \ge -3$ thì (2) trở thành:

$$(t+3)^4 + (t-3)^4 = 626 \Leftrightarrow 2t^4 + 108t^2 - 464 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = -58 < 0 \text{(loại)} \\ t^2 = 4 \end{array}\right.$$

$+$ Với $t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5 \Rightarrow b = 1 \\ a = 1 \Rightarrow b = 5 \end{array}\right.$

- Với $\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 5 \\ \sqrt[4]{313-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 312$

- Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{313+x} = 1 \\ \sqrt[4]{313-x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -312$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm 312$.

Bài 8: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4}$

Giải

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt[3]{\sin^2 x}; 0 \le a \le 1 \\ b = \sqrt[3]{\cos^2 x}; 0 \le b \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \sin^2 x \\ b^3 = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = 1$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 1 \\ a + b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] = 1 \\ a + b = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt[3]{4} \\ ab = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \sqrt[3]{4}X + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0$

$$\Leftrightarrow X = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2} (m \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2} (m \in Z)$.

Bài 9: Giải phương trình sau: $9 + \sqrt{9 + \sqrt{x}} = x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

Đặt: $a = 9 + \sqrt{x} \Rightarrow a > 9$

Phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 9 + \sqrt{a} = x \quad (1) \\ 9 + \sqrt{x} = a \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} = x - a$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{x} + \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{a} + \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{x}$ thế vào (1) ta được:

$$9 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(38 + 2\sqrt{37}\right)$ hay $x = \dfrac{1}{2}\left(19 + \sqrt{37}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{1}{2}\left(19 + \sqrt{37}\right)$

Bài 10: Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}2x^2-1\ge 0\\ x^2-3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x\ge\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$ $\quad(*)$

Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{2x^2-1}\ge 0\\ b=\sqrt{x^2-3x-2}\ge 0\\ c=\sqrt{2x^2+2x+3}>0\\ d=\sqrt{x^2-x+2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=2x^2-1\\ b^2=x^2-3x-2\\ c^2=2x^2+2x+3\\ d^2=x^2-x+2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x^2+3x+1\\ c^2-d^2=x^2+3x+1\end{cases}\Rightarrow a^2-b^2=c^2-d^2$

Phương trình đã cho trở thành:

$\begin{cases}a+b=c+d\\ a^2-b^2=c^2-d^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=c+d\\ (a+b)(a-b)=(c-d)(c+d)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=c+d\\ a-b=c-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=c^2\\ b^2=d^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-1=2x^2+2x+3\\ x^2-3x-2=x^2-x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$

Nghiệm $x=-2$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-2$.

Bài 11: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$ $\quad(1)$

Giải

Đặt: $3y=\sqrt[3]{81x-8}+2\Rightarrow\sqrt[3]{81x-8}=3y-2$

$\Rightarrow 81x-8=(3y-2)^3=27y^3-2.27y^2+36y-8$

$\Rightarrow 3x=y^3-2y^2+\dfrac{4}{3}y$

Từ đó (1) chuyển về hệ: $\begin{cases}3y=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x & (2)\\ 3x=y^3-2y^2+\dfrac{4}{3}y & (3)\end{cases}$

Lấy (2) – (3) ta được:

$$3(y-x)=x^3-y^3+2(y^2-x^2)+\frac{4}{3}(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3}=0 \quad (4) \end{array}\right.$$

Phương trình (4) $\Leftrightarrow x^2+(y-2)x+y^2-2y+\frac{13}{3}=0$

$$\Delta_y=(y-2)^2-4\left(y^2-2y+\frac{13}{3}\right)=-3y^2+4y-\frac{40}{3}$$

Lại có: $\Delta' = 4-40=-36<0$

$\Rightarrow \Delta_y<0 \quad \forall y \Rightarrow$ phương trình (4) vô nghiệm.

\+ Với $x=y$ thế vào (2) ta được:

$$x^3-2x^2+\frac{4}{3}x=3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1\mp\sqrt{\frac{8}{3}} \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0; x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}$.

Bài 12: Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6$

Giải

$$\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-9}+3=(x-3)^3+9$$

Đặt: $a=\sqrt[3]{x-9}+3 \Rightarrow x-9=(a-3)^3 \Leftrightarrow (a-3)^3+9=x$

Phương trình đã cho trở thành hệ: $\begin{cases} x=(a-3)^3+9 \\ a=(x-3)^3+9 \end{cases}$ (1)

$$\Rightarrow x-a=(a-3)^3-(x-3)^3$$

$$\Leftrightarrow x-a=(a-x)\left[(a-3)^2+(x-a)^2+(a-3)(x-a)\right]$$

$$\Leftrightarrow (a-x)\left[(a-3)^2+(x-a)^2+(a-3)(x-a)+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=x \\ (a-3)^2+(x-a)^2+(a-3)(x-a)+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Đặt: $\begin{cases} u=a-3 \\ v=x-3 \end{cases}$ thì (2) $\Leftrightarrow u^2+vu+v^2+1=0$

$$\Delta = v^2 - 4\left(v^2+1\right) = -3v^2 - 4 < 0$$

$\Rightarrow$ phương trình này vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

+ Với a = x thế vào (1) ta được:

$$(x-3)^3 - x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 8x + 18 = 0 \text{(phương trình này vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 1$.

Bài 13: Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{\sqrt{3x+10}} + \frac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Giải

Điều kiện: $x > -2$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{3x+10} > 0 \\ b = \sqrt{x+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3x+10 \\ 3b^2 = 3x+6 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 3b^2 = 4$

Phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{1}{a} + \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ \frac{6}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b^2 = 4 \\ a = 6 + b \end{cases} \Rightarrow (6+b)^2 - 3b^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - 12b - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 8 \\ b = -2 \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $b = 8 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} = 14 \\ \sqrt{x+2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 62$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 62$.

Bài 14: Giải phương trình sau: $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} = x^2 + \frac{25}{12}$

Giải

Điều kiện: $12 - \frac{12}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12 - \frac{12}{x^2} \\ b^2 = x^2 - \frac{12}{x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 12 + x^2$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a + b = x^2 + \frac{25}{12} \Leftrightarrow a + b = x^2 + 12 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a + b = a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $|x| \ge 1 \Rightarrow x^2 + \frac{12}{x^2} > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{12}{x^2}} > 1$

$\Rightarrow b > 1$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 15: Giải phương trình sau: $\dfrac{\sqrt[3]{10 - x} + \sqrt[3]{8 - x}}{\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{8 - x}} = 9 - x$ (1)

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{10 - x} \\ b = \sqrt[3]{8 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 10 - x \Rightarrow a^3 + b^3 = 18 - 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a^3 + b^3\right) = 9 - x \\ b^3 = 8 - x \end{cases}$$

Và $a^3 - b^3 = 2$

Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ \dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{1}{2}\left(a^3 + b^3\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ 2(a + b) = (a - b)(a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \vee \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a - b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 2 \end{cases} \quad (II)$$

- Hệ (I) $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{10 - x} = 1 \\ \sqrt[3]{8 - x} = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ \sqrt[3]{8 - x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

- Hệ (II): $\begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ (a - b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ a^2 - ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 2 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 2 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^3 = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10 \vee x = 8$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x \in \{8; 9; 10\}$

Bài 16: Giải phương trình sau: $\left(8\cos^3 x + 1\right)^3 = 162\cos x - 27$ (1)

Giải

Đặt: $a = 2\cos x; -2 \le a \le 2$

Phương trình (1) trở thành: $\left(a^3 + 1\right)^3 = 81a - 27$

Lại đặt: $a^3 + 1 = 3b$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} 27b^3 = 81a - 27 \\ 3b = a^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 = 3a - 1 \\ a^3 = 3b - 1 \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow b^3 - a^3 = 3(a - b) \Leftrightarrow (b - a)\left(a^2 + ab + b^2 + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a^2 + ab + b^2 + 3 = 0 \ (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (3) có: $\Delta = b^2 - 4\left(b^2 + 3\right) = -3b^2 - 12 < 0$

nên (3) vô nghiệm.

+ Với $a = b$ thế vào (2) ta được: $a^3 - 3a + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = -1 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in Z)$.

Bài 17: Giải phương trình sau: $4x^2 + \sqrt{2x + 1} + 5 = 12x$

Giải

Điều kiện: $x > 0$

Đặt: $\sqrt{2x + 1} = ay + b \Rightarrow 2x + 1 = (ay + b)^2 = a^2y^2 + 2aby + b^2$

- Tìm a, b để hệ sau có dạng đối xứng loại 2.

$$\begin{cases} 4x^2 + ay + b + 5 = 12x \\ 2x + 1 = a^2y^2 + 2aby + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + ay + b + 5 = 0 \\ a^2y^2 + 2aby + b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên là hệ đối xứng loại (2)

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = -\frac{2ab}{12} = -\frac{2}{a} = \frac{b^2 - 1}{b + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Như vậy ta được: $\sqrt{2x + 1} = -2y + 3$

Điều kiện: $-2y+3>1 \Rightarrow y<1$

Ta có hệ: $\begin{cases}4x^2-12x-2y+8=0\\4y^2+12y-2x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-6x-y+4=0\,(1)\\2y^2-6y-x+4=0\end{cases}$

$\Rightarrow 2\left(x^2-y^2\right)-6\left(x-y\right)+x-y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[2(x+y)-5\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\x+y=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

+ Với $x=y$ thế vào (1) ta được:

$2x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{4}\\x=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}\text{(loại)}\end{array}\right.$ (vì $y=x<1$)

+ Với $x+y=\dfrac{5}{2} \Rightarrow y=\dfrac{5}{2}-x$ ta được: $2x^2-6x-\dfrac{5}{2}+x+4=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-5x+\dfrac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{4}\text{(loại do } y<1)\\x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{4}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}\\x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{4}\end{array}\right.$

Bài 16: Giải phương trình sau:

$$x^3+\left(3-a^2\right)a=3\sqrt[3]{3x+\left(x^2-3\right)a} \qquad (1)$$

Giải

Đặt: $t=\sqrt[3]{3x+\left(x^2-3\right)a} \Rightarrow t^3=3x+\left(x^2-3\right)a$

Phương trình (1) trở thành: $\begin{cases}x^3+\left(3-a^2\right)a=3t\\t^3=3x+\left(a^2-3\right)a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-3t=\left(a^2-3\right)a\ (2)\\t^3-3x=\left(a^2-3\right)a\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=t\\x^2+tx+t^2+3=0\,(*)\end{array}\right.$

Phương trình (*) có $\Delta=t^2-4\left(t^2+3\right)=-3t^2-12<0$ nên (*) luôn vô nghiệm.

+ Với $x=t$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - 3x = \left(a^2 - 3\right)a \Leftrightarrow x^3 - 3x - a^3 + 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)\left(x^2 + ax + a^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

Phương trình (3) có: $\Delta = a^2 - 4\left(a^2 - 3\right) = 12 - 3a^2$

1. Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 12 - 3a^2 < 0 \Leftrightarrow |a| > 2$ thì (3) vô nghiệm nên (1) có nghiệm duy nhất $x = a$.

2. Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ thì (3) có nghiệm kép: $x_0 = -\dfrac{a}{2} = \pm 1$ nên (1) có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = 2 \vee x = -1 \text{ nếu } a = 2 \\ x = -2 \vee x = 1 \text{ nếu } a = -2 \end{array}\right.$

3. Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$ thì:

   a. Nếu (3) có nghiệm $x = a$.

   Từ (3) $\Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

   + Nếu $a = 1$ thì (3) trở thành: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

   + Nếu $a = -1$ thì (3) trở thành: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

   b. Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (3) có hai nghiệm phân biệt khác a.

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$$

Tóm lại:

+ Nếu $|a| > 2$ thì (1) có nghiệm $x = a$

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -1 \end{array}\right.$ thì (1) có nghiệm $x = 2 \vee x = -1$

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 1 \end{array}\right.$ thì (1) có nghiệm $x = -2 \vee x = 1$

+ Nếu $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$ thì (1) có ba nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = \dfrac{-a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{2} \end{array}\right.$$

1. Các đặc trưng

a. Khi ẩn $x \in [-a, a]$ với $a > 0$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = a\sin t\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a\cos t(0 \le t \le \pi) \end{array}\right.$

b. Khi ẩn $0 \le x \le a$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = a\sin^2 t\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \\ x = a\cos^2 t\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$

c. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ với $t \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ hoặc đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

d. Khi phương trình chứa $\sqrt{x^2 + a^2}$ thì đặt $x = a\tan t\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

2. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}} \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt: $x = \cos t; 0 \le t \le \pi \Rightarrow \sin t \ge 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}}\left[\sqrt{(1+\cos t)^3} - \sqrt{(1-\cos t)^3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\sin t}\sqrt{2}\left(\cos^3\frac{t}{2} - \sin^3\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right) = \frac{2+\sin t}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2+\sin t)\left(\sqrt{6}\cos t - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \qquad (1) \text{ với } 0 < a < 1$$

Giải

Với $0 < a < 1$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = 1 + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x$

Chia hai vế của phương trình trên cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ ta được:

$$1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x \qquad (2)$$

Vì $0 < a < 1$ nên đặt: $a = tg\frac{\varphi}{2}$ thì $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó (2) trở thành: $1 = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x \qquad (3)$

+ Nếu $x < 2$ thì: $\begin{cases}(\sin\varphi)^x > \sin^2\varphi \\ (\cos\varphi)^x > \cos^2\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x > \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ nên (3) vô nghiệm.

+ Nếu $x > 2$ thì $\begin{cases}(\sin\varphi)^x < \sin^2\varphi \\ (\cos\varphi)^x < \cos^2\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x < 1 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình (3) chỉ có thể có nghiệm $x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 3: Giải phương trình sau:

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)} \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$

Phương trình (1) trở thành:

$$\cos^3 t + \sqrt{(1-\cos^2 t)^3} = \cos t\sqrt{2(1-\cos^2 t)} \qquad (2)$$

$\Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\cos t.\sin t$

$\Leftrightarrow (\cos t + \sin t)(1 - \cos t.\sin t) = \sqrt{2}\cos t.\sin t \qquad (3)$

Đặt: $y = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $0 \le t \le \pi$ thì $y \in \left[-1, \sqrt{2}\right]$

Phương trình (2) trở thành:

$$y\left(1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right) - \sqrt{2}\,\frac{y^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow y\left(3 - y^2\right) - \sqrt{2}\left(y^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \sqrt{2}y^2 - 3y - \sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{2}\right)y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2} \\ y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} - 1\,(\text{loại}) \\ y = -\sqrt{2} + 1 \end{array}\right.$$

+ Với $y = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + m2\pi \quad \Rightarrow x = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

+ Với $y = -\sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + 1$

$$\Leftrightarrow \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\left(\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 - \sqrt{2} \\ 1 - x^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\left(1 - \sqrt{2}\right)x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 - \sqrt{2} \\ 2x^2 - 2\left(1 - \sqrt{2}\right)x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

Bài 4: Giải phương trình sau: $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Giải

Điều kiện: $-1 < x < 1$

Đặt: $x = \cos t; t \in (0, \pi) \Rightarrow \sin t > 0$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - \cos t}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \cos t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{\sin t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)}{1+\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)-\sin t}.\sin t=1 \qquad (1)$$

Lại đặt: $y=\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Với $0<t<\pi$ thì $y\in(-1,1)\Rightarrow y^2=1-\sin t\Rightarrow \sin t=1-y^2$

Khi đó (1) trở thành: $\dfrac{\left(2+\sqrt{2}y\right)\left(1-y^2\right)}{1+\sqrt{2}y-\left(1-y^2\right)}=1$

$$\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{2}y\right)\left(1-y^2\right)-y^2-\sqrt{2}y=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}y^3+3y^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}y^2+4y+2\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}y^2+4y+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(y+\sqrt{2}\right)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

\+ Với $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+m2\pi \\ \frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2m\pi \end{array}\right. \quad (m\in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}+4m\pi \\ t=-\frac{7\pi}{6}+m4\pi \end{array}\right.$$

\+ Với $t\in(0,\pi)\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Giải phương trình sau: $\sqrt{1+\sqrt{1-4x^2}} = x\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1-4x^2}}}\right)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 1-4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \dfrac{1}{2}$

Đặt $x = \dfrac{1}{2}\cos t,\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$2\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}} = \cos t\left(1+\sqrt{1+2\sqrt{1-\cos^2 t}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+\sin t} = \cos t\left(1+\sqrt{1+2\sin t}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right) = \left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{1+2\sin t}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1+\sqrt{1+2\sin t}\right) \qquad (2)$$

$$\left(\text{vì } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2} > 0\right)$$

Đặt $y = \cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2} \Rightarrow \sin t = 1 - y^2$

Với $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y \in [0,1]$

Khi đó (2) trở thành:

$$2 = y\left[1+\sqrt{1+2\left(1-y^2\right)}\right] \Leftrightarrow 2 - y = y\sqrt{3-2y^2}$$

$$\Leftrightarrow (2-y)^2 = y^2\left(3-2y^2\right) \Leftrightarrow 2y^4 - 2y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\left(y^3+y^2-2\right) = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2\left(y^2+2y+2\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1$$

+ Với $y = 1 \Rightarrow \cos\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2} = 1 \Leftrightarrow t = 0 \left(\text{vì } 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Chuyên đề 7: Dùng phương pháp đối lập

1. Cách giải

Để giải phương trình $f(x) = g(x)$ thì ta chứng minh

a. $f(x) \le g(x)$ b. $f(x) \ge g(x)$

c. $f(x) \le A \le g(x)$ d. $f(x) \ge A \ge g(x)$

e. Chứng minh $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một điểm duy nhất.

– Sau đó xét dấu "=" xảy ra.

2. Công cụ sử dụng

a. Dùng khảo sát hàm số

b. Dùng bất đẳng thức Côsi; Bunhiakopxky

c. Dùng tính chất của bất đẳng thức

d. Đưa về dạng $f(u) = f(v)$

3. Bài tập

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8}$

Giải

$$\sqrt{x^2+15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2+8} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x^2+8} = 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}} = 3x - 2 \text{ ĐK: } 3x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

Đặt $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^2+15} + \sqrt{x^2+8}}$;

Dễ thấy $f(x)$ là hàm giảm trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

$g(x) = 3x - 2$ là hàm tăng trên $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Nên đồ thị hàm $f(x)$ và $g(x)$ chỉ có thể cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Lại có: $f(1) = g(1) = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5} = 11$

Giải

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$.

Đặt: $f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} + \sqrt{5x+5}; x \ge -\dfrac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{5}{2\sqrt{5x+5}} > 0 \ \forall x > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm tăng trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lại có: $f(4) = 11$ nên $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x - 2} = 3x - x^2 - 2 \quad (1)$

Giải

Điều kiện: $x \geq 2$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} + x^2 - 2x = \sqrt{x - 2} + x - 2$

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 - 2x \geq 0 \\ v = x - 2 \geq 0 \end{cases}$ ta được: $\sqrt{u} + u = \sqrt{v} + v$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + t$; $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} + 1 > 0 \ \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $[0; +\infty)$

Do đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 - 2x = x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại) do } x \geq 2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$.

Bài 4: Giải phương trình: $2x^4 + 8 = 4\sqrt{4 + x^2} + 4\sqrt{x^4 - 4}$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta được:

$$2x^4 + 8 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + 2 + 2 + 2 + 2 \geq$$

$$8\sqrt[8]{\frac{x^4}{2}.\frac{x^4}{2}.\frac{x^4}{2}.\frac{x^4}{2}.2.2.2.2} = 8x^2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{4 - x^4} \leq \sqrt{32\left(4 + x^4 + x^4 - 4\right)} = \sqrt{64x^4} = 8x^2$$

Do đó dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x^4 + 8 = 8x^2 \\ 4\sqrt{4 + x^4} + 4\sqrt{x^4 - 4} = 8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 2\right)^2 = 0 \\ \sqrt{4 + x^4} + \sqrt{x^4 - 4} = 2x^2 \end{cases}$$ hệ này vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = x^4 - 8x^2 + 28 \quad (1)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 8 + x^3 \geq 0 \\ 64 - x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$

Ta có: $x^4 - 8x^2 + 28 = \left(x^2 - 4\right)^2 + 12 \geq 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta được:

$$1.\sqrt{8 + x^3} + 1.\sqrt{64 - x^3} \leq \sqrt{(1+1)\left(8 + x^3 + 64 - x^3\right)} = 12$$

Do đó: $\begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 \geq 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} \leq 12 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Dấu "=" trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 + 28 = 12 \\ \sqrt{8 + x^3} + \sqrt{64 - x^3} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{8 + x^3} = \sqrt{64 - x^3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ x = \sqrt[3]{28} \end{cases} \Rightarrow$ hệ này vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} + x + \dfrac{1}{x} = 4$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxki ta có:

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} \leq \sqrt{(1+1+1+1)\left(2 - x^2 + 2 - \frac{1}{x^2} + x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + x + \frac{1}{x} \leq 4$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 7: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt{x} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}\le\sqrt{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}\le\sqrt{2\sqrt{2(x+1-x)}}=2\sqrt{2}=\sqrt[4]{8}\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le 2\end{cases}$$

$\Rightarrow\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{1-x}\\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài 8: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}\le\sqrt{(x+1)(x+2+2x-1)}$

$\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}\le\sqrt{3x^2+4x+1}$

$\Rightarrow$ Dấu bất đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}\quad\Leftrightarrow\ x(2x-1)=x+2$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (\text{loại})\\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 9: Giải phương trình:

$$12-3x=\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}\sqrt{3-x}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}3-x\ge 0\\ 4-x\ge 0\\ 5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\le 3$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{3-x}.\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{3-x}\le$$

$$\le\sqrt{(3-x+4-x+5-x)(3-x+4-x+5-x)}\le 12-3x$$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} = 4-x \\ \sqrt{3-x}\sqrt{4-x} = 5-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(5-x) = (4-x)^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15-8x+x^2 = 16-8x+x^2 \\ (4-x)(3-x) = (5-x)^2 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \frac{x^2}{4} + 2$

Giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \le \sqrt{2(1+x+1-x)} = 2$$

Mặt khác: $\frac{x^2}{4} + 2 \ge 2$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 0$.

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} = \sqrt{\frac{99}{2}}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 17-x^8 \ge 0 \\ 2x^8-1 \ge 0 \end{cases}$ (*)

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$\sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{34-2x^8} + \sqrt{2x^8-1} \le$$

$$\le \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(34-2x^8+2x^8-1\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17-x^8} + \sqrt{2x^8-1} \le \sqrt{\frac{99}{2}}$$

$\Rightarrow$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{34-2x^8} = \sqrt{2x^8-1}$

$\Leftrightarrow 2\left(34-2x^8\right) = 2x^8-1 \Leftrightarrow x^8 = \frac{99}{2}$ thỏa (*)

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt[8]{\frac{69}{6}} = \pm\sqrt[8]{\frac{23}{2}}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \pm\sqrt[3]{\frac{23}{2}}$

Bài 12: Giải phương trình: $x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} = 2\sqrt{3\left(x^2+1\right)}$

Giải

Điều kiện: $0 \le x \le 12$

Theo bất đẳng thức Bunhiakopxky ta được:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{12-x} \le \sqrt{\left(x^2+1\right)(x+12-x)} = \sqrt{12\left(x^2+1\right)} = 2\sqrt{3\left(x^2+1\right)}$$

$\Rightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{12-x}}$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{12-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2(12-x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x(12-x) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 12x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0 \vee x = \frac{6 \pm \sqrt{35}}{2}$

Bài 13: Giải phương trình: $\left(x + 8\sqrt{x} + 4\right)\left(x - \sqrt{x} + 4\right) = 36x$ (1)

Giải

Điều kiện: $x \ge 0$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x + 8\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} = 36$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right)\left(x + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) = 36$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \ge 4 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8 \ge 12$

Lại có: $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 \ge 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 8\right)\left(\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) \ge 36$

Do đó dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 4$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 4$.

Bài 14: Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11) \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ z \geq 2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{x} + y - 4\sqrt{y-1} + z - 6\sqrt{z-2} + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{z-2} - 3\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 2 = 0 \\ \sqrt{z-2} - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 11 \end{cases}$

Chuyên đề 8: Phương pháp khảo sát hàm số

1. Định lý

Phương trình f(x) = g(m) (m là tham số) có nghiệm $x \in D$

$\Leftrightarrow$ hàm g(m) thuộc miền giá trị của hàm số f(x).

2. Cách giải

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình xác định

Bước 2: Đặt ẩn phụ t (nếu phương trình phức tạp)

Bước 3: Tìm miền xác định của t

Bước 4: Đưa phương trình về dạng f(t) = g(m)

Bước 5: Khảo sát và lập bảng biến thiên hàm f(t)

Bước 6: Dựa vào định lý trên để tìm m.

3. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{4x - x^2} = m \qquad (1)$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$

Đặt $\quad t = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = \dfrac{t^2 - 4}{2}$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{4-x}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên

x	0		2		4
t'		+	0	−	
t	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ $2 \le t \le 2\sqrt{2}$

Khi đó (1) trở thành: $t - \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\right) = m$ (2)

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm $t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\right)$

$$f'(t) = 1 - t < 0 \quad \forall t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$$

Bảng biến thiên

t	2		$2\sqrt{2}$
f(t)		−	
f(t)	2	↘	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \le m \le 2$$

Bài 2: Cho phương trình:

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - (2-x)\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = m \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m \qquad (2)$

Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{(2+x)(2-x)} = \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\right)$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2+x} \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	−2		0		2
t'		+	0	−	
t	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow 2 \le t \le 2\sqrt{2}$

Khi đó (2) trở thành: $t - \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\right) = m$

- Ứng với một giá trị $t \in \left(2; 2\sqrt{2}\right)$ thì phương trình $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Xét hàm số: $f(t) = t - \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\right)$

$$f'(t) = 1 - t < 0, \ \forall t \in \left[2; 2\sqrt{2}\right]$$

Bảng biến thiên

t	2		$2\sqrt{2}$
f'(t)		−	
f(t)	2	↘	$2\sqrt{2} - 2$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \le m \le 2$$

Bài 3: Cho phương trình:

$$2\left(x + \sqrt{2 - x^2}\right) - x\sqrt{2 - x^2} - 3m + 2 = 0 \qquad (1)$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

Đặt $t = x + \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow x\sqrt{2 - x^2} = \frac{1}{2}\left(t^2 - 2\right)$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = x \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
t'		+	0	−	
t	$-\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le 2$

(1) trở thành: $2t - \frac{1}{2}\left(t^2 - 2\right) + 2 = 3m \quad \Leftrightarrow \quad 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3 = 3m \qquad (2)$

- Biện luận số nghiệm tương quan giữa t và x (dựa vào bảng biến thiên)

+ Ứng với một giá trị $t \in \left[\sqrt{2};2\right)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2-x^2}$ có đúng hai nghiệm x phân biệt.

+ Ứng với một giá trị $t \in \left[-\sqrt{2};2\right) \vee t = 2$ thì phương trình $t = x + \sqrt{2-x^2}$ có đúng một nghiệm x.

Xét hàm số: $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2 + 3$; $f'(t) = 2 - t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên

t	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$			$+$		
$f(t)$	$2-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên và cách biện luận số nghiệm ở trên, ta suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có đúng một nghiệm $t \in \left[\sqrt{2};2\right)$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2} \le 3m < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{2}\right) \le m < \frac{5}{3}$

Bài 4: Cho phương trình: $(x+1)(x-3) + \sqrt{8+2x-x^2} = 2m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 4$

Đặt $t = \sqrt{8+2x-x^2} = \sqrt{9-(1-x)^2} \le 3 \Rightarrow 0 \le t \le 3$

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + \sqrt{8+2x-x^2} = 2m$

$\Leftrightarrow 8 - t^2 - 3 + t = 2m \Leftrightarrow -t^2 + t + 5 = 2m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \in [-2;4]$ thì (2) có nghiệm $t \in [0;3]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 5$

$f'(t) = -2t + 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		3
t'		$+$	0	$-$	
t	5	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow -1 \le 2m \le \frac{21}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{11}{8}$$

Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{4 - x} = \sqrt{5m + 4x - x^2}$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

(1) $\Leftrightarrow \quad 4 + 2\sqrt{4x - x^2} = 5m + 4x - x^2$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{4x - x^2} - \left(4x - x^2\right) + 5 = 5m$ (2)

Đặt $t = \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (2 - x)^2} \le 2 \Rightarrow 0 \le t \le 2$

(2) trở thành: $2t - t^2 + 5 = 5m$ (3)

Để (1) có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì (3) có nghiệm $t \in [0; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = 2t - t^2 + 5$; $f'(t) = 2 - 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

t	0		1		2
f '(t)		+	0	−	
f(t)	5	↗	6	↘	5

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 5 \le 5m \le 6 \Leftrightarrow 1 \le m \le \frac{6}{5}$$

Bài 6: Cho phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x + x^2}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $0 \le x \le 2$

Đặt $t = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (1 - x)^2} \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1$

(1) trở thành: $\sqrt{1 + t} + \sqrt{1 - t} = m$ (2)

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{1 + t} + \sqrt{1 - t}$;

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1 - t} - \sqrt{1 + t}}{2\sqrt{1 - t^2}} \; ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Bảng biến thiên

t	0		1
f(t)		−	
f(t)	2	↘	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le m \le 2$$

Bài 7: Cho phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x} = m(3x+5)$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\frac{3}{2} \le x \le 2$

- Nếu $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ thì (1) vô nghiệm
- Khi $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \ne 0$; nhân vế vế của (1) cho $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$ ta được:

$$\left(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}\right) = m(3x-5)\left(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}\right) \Leftrightarrow$$

$$3x-5 = m(3x-5)\left(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = m\left(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} \ (2) \quad (m \ne 0)$$

Để (1) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$ thì (2) có nghiệm $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$ và $x = \ne \frac{5}{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in \left(\frac{3}{2};2\right)$$

Bảng biến thiên

t	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		2
f(x)		+		+	
f(x)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	1

Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{1}{m} \le 1 \\ \frac{1}{m} \ne \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le m \le \sqrt{2} \\ m \ne \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình: $2\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = m$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x \ge 1$

Ta thấy: $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=1$

Đặt $t=2\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} \ge 1$ thì $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{t^2}$

(1) trở thành: $\frac{2}{t}+t^2=m$ (2)

Để (1) có nghiệm $x \ge 1$ thì (2) có nghiệm $t \ge 1$

Xét hàm $f(t)=\frac{2}{t}+t^2$

$$f'(t)=-\frac{2}{t^2}+2t=2.\frac{t^3-1}{t^2};f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$$

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
f'(t)		+	
f(t)	3	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$\Leftrightarrow m \ge 3.$

Bài 9: Cho phương trình:

$$m\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}+1\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}+3 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4}=t^2-2$

$$t'=x.\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}; \quad t'=0 \Leftrightarrow x=0$$

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
t'		+	0	−	
t	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$

(1) trở thành: $m(t+1)=t^2+t+1 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t+1}{t+1}$

Để (1) có nghiệm $x \in [-1;1]$ thì (2) có nghiệm $t \in \left[\sqrt{2};2\right]$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t+1}$; $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0\ \forall t \in \left[\sqrt{2}; 2\right]$

Bảng biến thiên

t	$\sqrt{2}$		2
$f(t)$		$+$	
$f(t)$	$2\sqrt{2}-1$	↗	$\frac{7}{3}$

Theo bảng biến thiên ⟹ yêu cầu bài toán được thỏa mãn

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \le m \le \frac{7}{3}$$

Bài 10: Cho phương trình: $16\sqrt{x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = mx$ (1)

1. Giải phương trình khi m = 10.
2. Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $x > 1$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 16\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x-1}} = m$ (2)

Đặt $t = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; $t' = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	
t	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Từ biến thiên suy ra: $0 < t \le \frac{1}{2}$

Phương trình (2) trở thành: $16t + \frac{1}{t} = m$ (3)

1. Với m = 10

(3) $\Leftrightarrow 16t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow 16t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8} \vee t = \frac{1}{2}$

+ Với $t = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} = x$

$\Leftrightarrow 64(x-1) = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 64x + 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 32 - \sqrt{960} \\ x = 31 + \sqrt{960} \end{array}\right.$ (nhận)

+ Với $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l} x = 32 \pm \sqrt{960} \\ x = 2 \end{array}\right.$.

2. Định m để phương trình có nghiệm:

Để (1) có nghiệm x > 1 thì (3) có nghiệm $t \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

Xét hàm số: $f(t) = 16t + \dfrac{1}{t}$ với $0 < t \le \dfrac{1}{2}$

$$f'(t) = \frac{16t^2 - 1}{t^2} \quad ; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
f'(t)		−	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị m thỏa đề bài là: $m \ge 8$.

Bài 11: Cho phương trình: $m\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + x} = m$ (1)

1. Giải phương trình khi m = 2.
2. Định m để (1) có hai nghiệm và mọi nghiệm của nó để thỏa mãn bất phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2 \le 0$.

Giải

Điều kiện: $x \ge 0$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \ge 0 \\ b = \sqrt{x+1} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x \\ b^2 = x+1 \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = 1$ và $ab = \sqrt{x^2 + x}$

Khi đó (1) trở thành:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ ma + b - ab = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ m(a-1) - (a-1)b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ (a-1)(m-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \end{cases} & \text{(II)} \end{array}\right.$$

1. Khi m = 2

Giải hệ (I): $\begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Giải hệ (II): $\begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

2. Phương trình (1) luôn có nghiệm x = 1.

Để có hai nghiệm thì hệ (II) có thêm một nghiệm nữa.

Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 1 \\ b = m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = m^2 - 1 \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$ (*)

+ Với x = 1 thỏa bất phương trình (2)

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$

Kết hợp (*) $\Rightarrow 1 \leq m \leq 2$ (a)

+ Với $x = m^2 - 1$ thỏa (2)

$\Leftrightarrow (m - 1)(m^2 - m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Kết hợp với (*) $\Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ (b)

Từ (a); (b) $\Rightarrow$ các giá trị của m cần tìm là: $1 \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

Chuyên đề 9: Phương pháp đồ thị

1. Cách giải

- Đưa bài toán về sự tương giao của đường thẳng và đường tròn; elip; hypebol; parabol.
- Vẽ đồ thị; dựa vào đồ thị để kết luận.

2. Bài tập

Bài 1. Định m để phương trình có nghiệm:

$$\sqrt{2x - x^2} = m - x \quad (1)$$

Giải

Đặt: $y = \sqrt{2x - x^2}$; $y \geq 0$

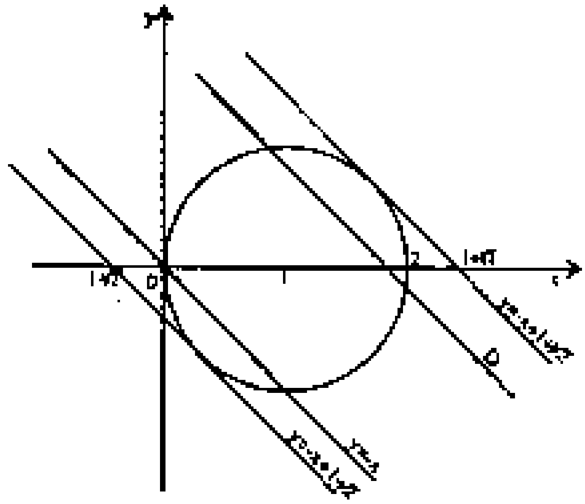
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

Khi đó (1) trở thành: $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 & (C) \\ y = m - x & (D) \end{cases}$ (*)

(C) là đường tròn tâm $I(1,0)$, bán kính $R = 1$

(D) là đường thẳng song song với đường thẳng y = -x

Đồ thị:



Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \le m \le 1+\sqrt{2}$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $1-\sqrt{2} \le m \le 1+\sqrt{2}$

Bài 2: Cho phương trình: $mx - \sqrt{x-3} = m+1$ (I)
định m để phương trình có nghiệm.

Giải

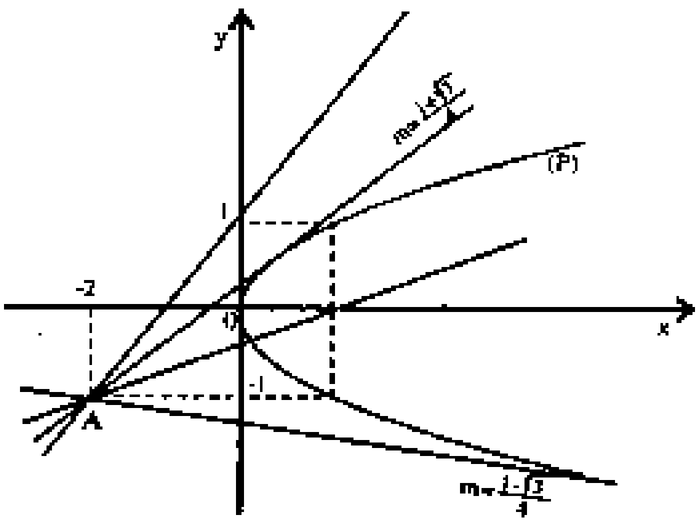
Đặt $y = \sqrt{x-3}$, $y \ge 0$ $\Rightarrow y^2 = x-3$

Phương trình (1) tương đương với hệ: $\begin{cases} y^2 = x-3 \\ mx - y = m+1 \end{cases}$

Lại đặt X = x – 3, ta được $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = X \quad (P) \\ mX - y + 2m - 1 = 0 \quad (D) \end{cases}$

Họ đường thẳng D qua điểm cố định $A(-2,-1)$

Hai tiếp tuyến kẻ từ A tới (P) có hệ số góc lần lượt là: $m_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$



Dựa vào đồ thị suy ra:

Hệ trên có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \le m \le \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{\dfrac{x+1}{2}} - \sqrt{3-x} = m \quad (1)$

Định m để phương trình có nghiệm.

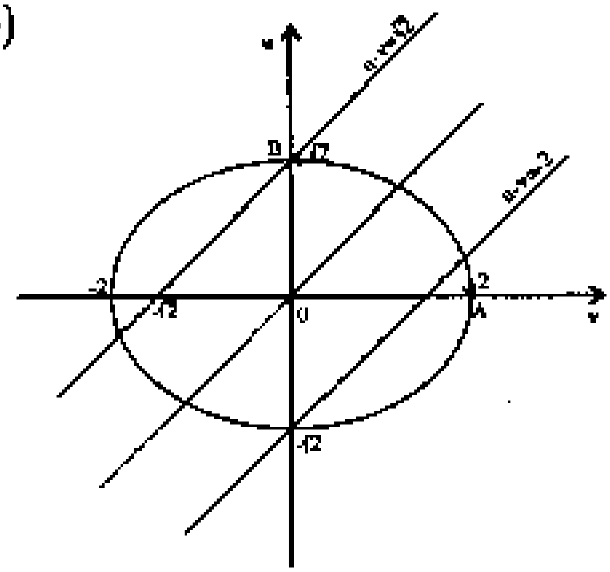
Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}},\ u \ge 0 \\ v = \sqrt{3-x},\ v \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2 = x+1 \\ v^2 = 3-x \end{cases}$

$\Rightarrow 2u^2 + v^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{v^2}{4} = 1$

Phương trình (1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} u - v = m \quad (D) \\ \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{v^2}{4} = 1 \\ u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{cases}$$



Đường thẳng D qua điểm $(0,\sqrt{2}) \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$

và D qua điểm $(2,0) \Leftrightarrow m = -2$

Đường thẳng $u - v = \sqrt{2}$ cắt Ov tại điểm $(-\sqrt{2},0)$

Dựa vào đồ thị, suy ra hệ trên có nghiệm .

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} \le m \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le m \le \sqrt{2}$

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\quad \Leftrightarrow -2 \le m \le \sqrt{2}$

Bài 4: Cho phương trình: $mx - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Đặt: $y - 1 = \sqrt{4x - x^2 - 3}$, $y \ge 1$

$\Rightarrow \quad (y-1)^2 = 4x - x^2 - 3 \iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 & (C) \\ y = mx & (D) \end{cases}$$

Đường thẳng D tiếp xúc với (C)

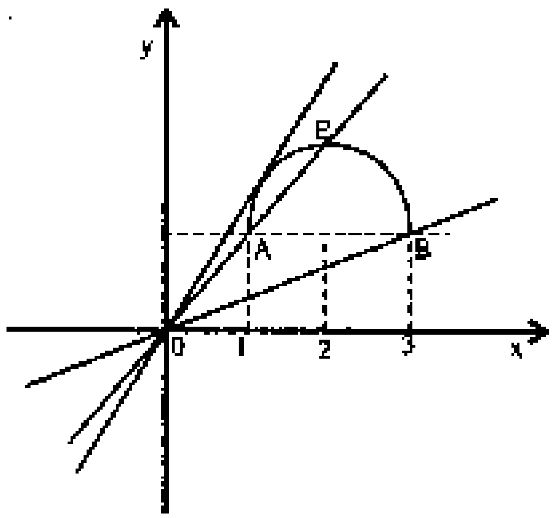
$\iff d(I, D) = R$ với $I(2,1)$; $R = 1$

$\iff \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \qquad \iff (2m-1)^2 = m^2 + 1$

$\iff 3m^2 - 4m = 0 \qquad \iff \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Đường thẳng D qua $A(1,1) \iff m = 1$

và D qua $B(3,1) \iff m = \dfrac{1}{3}$



Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\iff$ đường thẳng D tiếp xúc với (C) hoặc D cắt cung EB.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$m = \dfrac{4}{3}$ hoặc $\dfrac{1}{3} \le m \le 1$

Vậy các giá trị của m cần tìm là:

$m = \dfrac{4}{3}$ hoặc $\dfrac{1}{3} \le m \le 1$

Bài 5: Cho phương trình: $\sqrt{2x - m} + \sqrt{x+1} = 3$ (1)

Định m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{2x - m} \\ v = \sqrt{x+1} \end{cases}$

Điều kiện:

$$\begin{cases} u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 2x - m \\ 2v^2 = 2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad u^2 - 2v^2 = -m - 2$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} u, v \ge 0 \\ u + v = 3 \\ u^2 - 2v^2 = -m - 2 \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \ ; \quad u, v > 0 \\ \dfrac{v^2}{\frac{m+2}{2}} - \dfrac{u^2}{m+2} = 1 \quad (H) \quad (m \ne -2) \end{cases}$$

(H) là một hyperbol có đỉnh trục lớn: $A\left(\sqrt{\dfrac{m+2}{2}}, 0\right)$ $(m > -2)$

Hệ (2) có nghiệm nếu (H) cắt đoạn BD

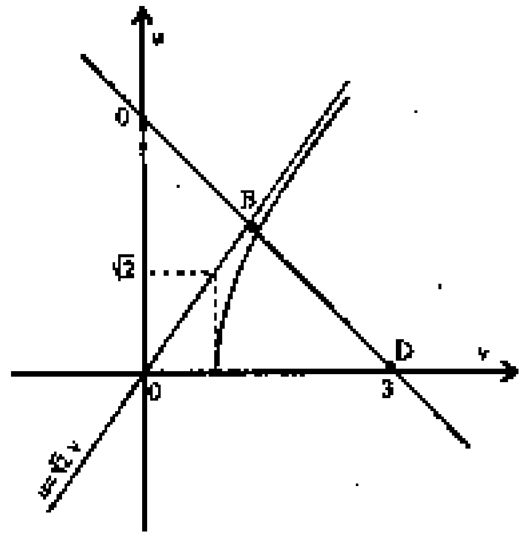
Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m+2}{2}} \le 3 \quad \Leftrightarrow -2 \le m \le 16$

Khi m = - 2 thì:

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} * v \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3(\sqrt{2} - 1) > 0 \\ u = 6 - 3\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + 2} = 6 - 3\sqrt{2} \\ \sqrt{x + 1} = 3(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 26 - 18\sqrt{2} > 0$



Tóm lại các giá trị của m cần tìm là:

$-2 \le m \le 16$

+ *Nhận xét:*

- *Cách 1*: sử dụng sự tương giao giữa đường thẳng và parabol.
- *Cách 2*: sử dụng sự tương giao giữa đường tròn và đường thẳng.

Bài 6: Cho phương trình: $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = 0$ (1)

Định m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

+ Nếu $a = 0$ thì $x = 3 \Rightarrow$ (1) chỉ có đúng 1 nghiệm nên $a = 0$ không thỏa đề.

+ Nếu $a \ne 0$:

Nhân hai vế của (1) cho a ta được:

$$a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a = 0 \ (2)$$

Đặt $t = ax$ thì (2) trở thành:

$$t^4 + 6at^2 - t + 9a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow 9a^2 + 3(2t^2 + 1)a + t^4 - t = 0 \quad (3)$$

Xem (3) là phương trình bậc hai theo ẩn số là a

(3) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = 9(2t^2 + 1)^2 - 36(t^4 - t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 36t^2 + 36t + 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9(2t + 1)^2 \geq 0 \quad \forall t \in R$$

Khi đó hai nghiệm của (3) là:

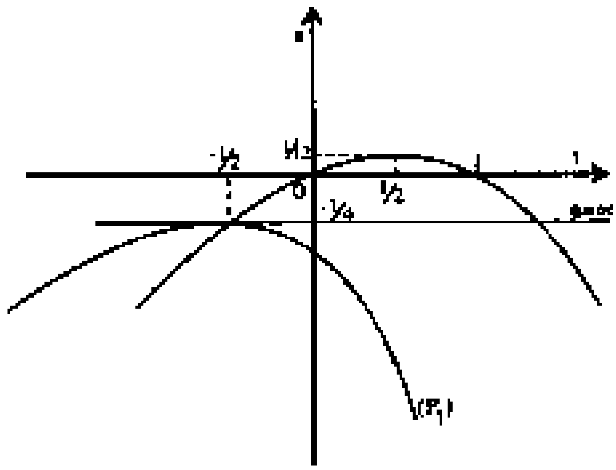
$$a = \frac{-t^2 - t - 1}{3} \quad \vee \quad a = \frac{t - t^2}{3}$$

Xét hệ trục tọa độ (tOa):

vẽ hai parabol:

$$(P_1): a = \frac{-1}{3}(t^2 + t + 1) \quad ;$$

$$(P_2): a = \frac{1}{3}(t - t^2)$$



lên cùng một hệ trục tọa độ.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $a = \alpha$ cắt hai parabol (P_1) và (P_2) tại hai điểm phân biệt.

Dựa vào đồ thị, suy ra $\Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq a < \frac{1}{12}$

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$ (1)

Định a để phương trình có đúng hai nghiệm khác nhau.

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\begin{cases} x \geq a \\ x^2 + 2x + 2 + a = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ x^2 + 6x + 2 - 3a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a \\ a = -x^2 - 2x - 2 \end{cases} \text{(I)} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x < a \\ a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2) \end{cases} \text{(II)}$$

Xét hệ trục tọa độ (xOa):

Vẽ các parabol:

(P_1): $a = -x^2 - 2x - 2$; (P_2): $a = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 2)$ và đường thẳng:

$x = a$.

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi:

- Hệ (I) có đúng một nghiệm và hệ (II) có đúng một nghiệm.

Điều đó có nghĩa là: Hệ (I) tồn tại một điểm M(x,a) với x >a và hệ (II) tồn tại một điểm N(x,a) với x <a

Dựa vào đồ thị suy ra, các giá trị của a cần tìm là: $-2 < a < -1$

Bài 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (2-3a)x + 2a^2 - 2a < 0 \\ ax = 1 \end{cases} \quad (I)$$. Định a để hệ có nghiệm.

Giải

Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-2a+2) < 0 \\ ax = 1 \end{cases}$

Xét hệ trục tọa độ (xoa). Vẽ các đường thẳng:

$d_1 : x - a = 0$; $d_2 : x - 2a + 2 = 0$

và hyperbol (H): ax = 1 lên cùng một hệ trục tọa độ

Các điểm (a,x) thỏa mãn hệ (I) nằm trên cung MN và cung PQ

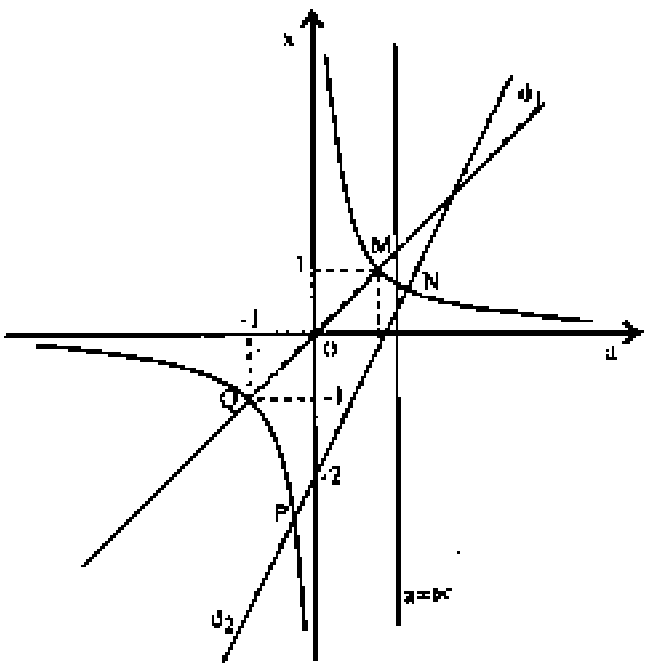
- Đường thẳng d_1 cắt (H) tại Q có: $a_1 = -1$ và tại M có: $a_2 = 1$
- Đường thẳng d_2 cắt (H) tại N có: $a_3 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

  và tại P có: $a_4 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng a = α cắt cung MN và cung PQ

Dựa vào đồ thị, suy ra điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$1 < a < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $-1 < a < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$



Chuyên đề 10: Phương pháp tam thức bậc hai

1. Cách giải

- *Bước 1:* Đặt điều kiện xác định của phương trình
- *Bước 2:* Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai.
- *Bước 3:* Biện luận tương quan số nghiệm giữa t và x trong phương trình đặc ẩn phụ. Dùng công thức so sánh nghiệm.

2. Bài tập

Bài 1: Cho phương trình: $m^2 + 2(m+1)\sqrt{x} = x + 5 + 4m \quad (1)$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $x \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \ge 0$

(1) trở thành: $m^2 + 2(m+1)t = t^2 + 5 + 4m$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2(m+1)t - m^2 + 4m + 5 = 0 \quad (2)$$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (5 + 4m - m^2) > 0 \\ 5 + 4m - m^2 \ge 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m - 4 > 0 \\ 5 + 4m - m^2 \ge 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ -1 \le m \le 5 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 5$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2 < m \le 5$.

Bài 2: Cho phương trình:

$$2\sqrt{2x - x^2} - 2m\left(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}\right) + 2m^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $0 \le x \le 2$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x} \Rightarrow 2\sqrt{2x - x^2} = t^2 - 2$

$$t' = \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{2x-x^2}} \; ; \; t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t	0		1		2
f'(t)		+	0	−	
f(t)	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \le t \le 2$

Phương trình (1) trở thành:

$$f(t) = t^2 - 2mt + 2m^2 - 6 = 0 \qquad (2)$$

- Ứng với một giá trị $t \in \left[\sqrt{2};2\right)$ thì phương trình $t = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ có hai nghiệm x phân biệt.

Do đó, để (1) có bốn nghiện phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn: $\sqrt{2} < t_1 < t_2 < 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f\left(\sqrt{2}\right) > 0 \\ f(2) > 0 \\ \sqrt{2} < \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m^2 > 0 \\ 2m^2 - 2\sqrt{2}m - 4 > 0 \\ 2m^2 - 4m - 2 > 0 \\ \sqrt{2} < m < 2 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm}$$

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Cho phương trình:

$$2x\sqrt{4-x^2} - 2(m-2)\left(x + \sqrt{4-x^2}\right) + m^2 = 0 \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 2x\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4$

$$t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	−2		$\sqrt{2}$		2
t'		+	0	−	
t	−2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow -2 \le t \le 2\sqrt{2}$

(1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m-2)t + m^2 - 4 = 0$ (2)

- Biện luận số nghiệm giữa t và x

+ Ứng với một giá trị $t = 2\sqrt{2}$ hoặc $t \in [-2;2)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4-x^2}$ có đúng một nghiệm x.

+ Ứng một giá trị $t \in \left[2;2\sqrt{2}\right)$ thì phương trình $t = x + \sqrt{4-x^2}$ có đúng hai nghiệm phân biệt x.

Xét các trường hợp sau:

TH1: (2) có hai nghiệm $t_1; t_2 \in (-2;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-2) > 0 \\ f(2) > 0 \\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 2 < m < 2$$

TH2: (2) có đúng một nghiệm $t \in \left(2;2\sqrt{2}\right)$

THa: (2) có nghiệm kép $\in \left(2;2\sqrt{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t_0 = m - 2 \in \left(2;2\sqrt{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m - 2 \in \left(2;2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

THb: (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 2 < t_1 < 2\sqrt{2} < t_2 \\ t_1 < -2 < 2 < t_2 < 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(2) > 0 \\ f\left(2\sqrt{2}\right) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-2) < 0 \\ f\left(2\sqrt{2}\right) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

TH3: nếu (2) có một nghiệm $t_1 = -2$

$\Rightarrow \quad m^2 + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -2 - 2\sqrt{3} \;\vee\; m = 2\sqrt{3} - 2$

- Với $m = -2 - 2\sqrt{3}$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 + 2\left(4 + 2\sqrt{3}\right)t + 12 + 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = -6 - 4\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

- Với $m = 2\sqrt{3} - 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2\left(2\sqrt{3} - 4\right)t + 12 - 8\sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 4\sqrt{3} - 6 \in (-2; 2) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ giá trị $m = 2\sqrt{3} - 2$ thỏa mãn đề bài.

TH4: Nếu (2) có một nghiệm $t_1 = 2$.

$\Rightarrow m^2 - 4m + 8 = 0$ vô nghiệm.

TH5: Nếu (2) có một nghiệm $t = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow m^2 - 4\sqrt{2}m + 4 + 8\sqrt{2} = 0$ vô nghiệm

Vậy các giá trị của m cần tìm là: $2\sqrt{3} - 2 \le m < 2$

Chuyên đề 11: Phương pháp vectơ

1. Các bất đẳng thức vectơ

a. $\vec{a}.\vec{b} \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

Nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ cùng chiều với $\vec{b}$

b. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$

Nếu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \text{ hay } \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{array}\right.$

2. Cách giải

Bước 1: Từ phương trình: biến đổi để các biểu thức có dạng $\sqrt{a^2 + b^2}$

Bước 2: Chọn các vectơ

Bước 3: Sử dụng các bất đẳng thức thức trên

- Sau đó xét dấu "=" xảy ra.

3. Bài tập

Bài 1 . Giải các phương trình sau:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

Giải

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\vec{b}\left(-x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(-1,\sqrt{3}\right) \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=2$$

Ta có:

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq 2$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{-x-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 0$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2-4x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{9x^2-12x+13}$

Giải

$$\sqrt{4x^2-4x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{9x^2-12x+13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+4}=\sqrt{(3x-2)^2+9}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(2x-1,1) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{(2x-1)^2+1}$$

$$\vec{b}(x-1,2) \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{(x-1)^2+4}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(3x-2,3) \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(3x-2)^2+9}$$

Ta có bất đẳng thức:

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+4}\geq\sqrt{(3x-2)^2+9}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow 4x-2=x-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{3}$

Bài 3: Giải phương trình: $\left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| = \sqrt{5}$

Giải

$$\left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{(x-3)^2 + 1}\right| = \sqrt{5}$$

Xét các vectơ sau:

$$\vec{a}(x-1, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(x-1)^2 + 4}$$

$$\vec{b}(x-3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(3-x)^2 + 1}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \le |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| \le \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x - 1 = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x = 5$

Bài 4: Giải phương trình: $\left|\sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x}\right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$

Giải

$$\left|\sqrt{x^3 + x} + (1-x)\sqrt{1-x}\right| = \sqrt{2x^2 - 2x + 2} \qquad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^3 + x \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+1) \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}\left(\sqrt{x}, \sqrt{1-x}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x + 1 - x} = 1$$

$$\vec{b}\left(\sqrt{x^2+1}, 1-x\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 1 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{x^2+1} + (1-x)\sqrt{1-x} \le \sqrt{2x^2-2x+2}$$

$\Rightarrow$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

+ Hoặc có một trong hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$:

Dễ thấy chỉ có thể $\vec{a}$ là vectơ $\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

+ Hoặc hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = x^2+1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0$$

Phương trình này vô nghiệm.

Do vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5: Giải phương trình: $\sin x\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x\sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{3}$

Giải

$$\sin x\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x\sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{3}$$

Xét các vectơ:

$$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$$

$$\vec{b}\left(\sqrt{1+\cos^2 x}, \sqrt{1+\sin^2 x}\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x\sqrt{1+\sin^2 x} \le \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng chiều.

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{\cos x} \Rightarrow \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow (1+\cos^2 x)\cos^2 x = \sin^2 x(1+\sin^2 x)$$

Với: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nên:

$$(1+\cos^2 x)\cos^2 x = 1 - \cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^4 x = 2 - 3\cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \qquad (m \in Z)$$

Thử trực tiếp họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$ vào phương trình

ta nhận nghiệm cuối cùng là: $x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$

với: $\begin{cases} m \in Z \text{ và } m \neq \{-2,-1,1,2\} \\ m \text{ chẵn}: \ m = 4n \end{cases}$

$\Rightarrow$ nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad (n \in Z)$

Tóm lại nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \ (n \in Z)$

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$

Giải

$\sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 4} + \sqrt{(2x+3)^2 + 1} + \sqrt{(5-3x)^2 + 25} = 10$

Xét các vectơ sau:

$\vec{a}(x-2, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$

$\vec{b}(2x+3, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}$

$\vec{c}(5-3x, 5) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{9x^2 - 30x + 50}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (6, 8) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 10$

Theo bất đẳng thức: $\quad |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{4x^2 + 12x + 10} + \sqrt{9x^2 - 30x + 50} \ge 10$

Suy ra: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng chiều

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{2x+3}{1} = \frac{5-3x}{5}$ (hệ này vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7: Giải phương trình: $\sin x\sqrt{1-\cos x} + \cos x\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2} \qquad (1)$

Giải

Xét các vectơ sau:

$\vec{a}(\sin x, \cos x) \Rightarrow |\vec{a}| = 1$

$\vec{b}\left(\sqrt{1-\cos x}, \sqrt{1+\cos x}\right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2}$

$\vec{a}.\vec{b} = \sin x\sqrt{1-\cos x} + \cos x\sqrt{1+\cos x}$

Theo bất đẳng thức:

$$\vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \sin x\sqrt{1-\cos x} + \cos x\sqrt{1+\cos x} \le \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều:

$$\Leftrightarrow \vec{a} = m\vec{b} \text{ với } m > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\sqrt{1+\cos x} - \cos x\sqrt{1-\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\sqrt{1+\cos x} = \cos x\sqrt{1-\cos x} \qquad (1)$$

Vì chu kỳ của hàm sin, cos là 2π nên ta xét trên một chu kỳ:

+ Nếu $\frac{\pi}{2} \le x < 2\pi$ thì $\sin x.\cos x \le 0$ nên suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x \ge 0$ và $\cos x \ge 0$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x(1+\cos x) = \cos^2 x(1-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos^2 x)(1+\cos x) = \cos^2 x(1-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi \quad (k \in Z)$

Bài 8. Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = m$$

Giải

Phương trình (1) tương đương với:

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \frac{3}{4}} = m$$

Trong một hệ trục tọa độ phẳng nào đó, xét các điểm sau:

$$A(-x,0) \quad ; \quad B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB}\left(x+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overrightarrow{AC}\left(x-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\overrightarrow{BC}(-1,0) \quad ; \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = 1$$

Với mọi điểm A(–x, 0) thì ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên
$|AB - AC| < BC$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| < 1 \quad \Rightarrow |m| < 1$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là $|m| < 1$