CHỦ ĐỀ 7.	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

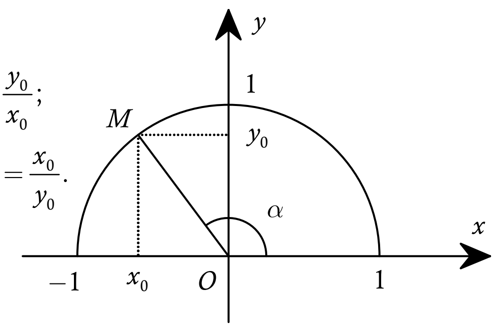
❍ Bài 01

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α $\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M\left(x_0; y_0\right)$. Khi đó ta có định nghĩa:

- sin của góc α là y_0, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$;
- cosin của góc α là x_0, kí hiệu $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}\left(x_0 \ne 0\right)$, kí hiệu $\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}\left(y_0 \ne 0\right)$, kí hiệu $\cot\alpha = \frac{x_0}{y_0}$.



2. Tính chất

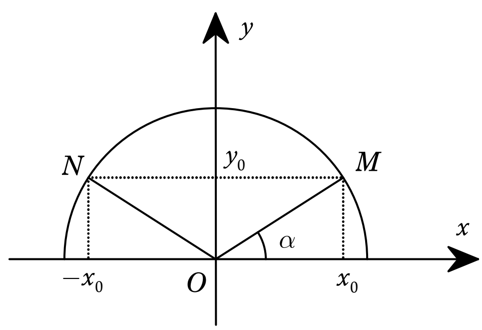
Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^0 - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

$\sin\alpha = \sin\left(180^0 - \alpha\right)$

$\cos\alpha = -\cos\left(180^0 - \alpha\right)$

$\tan\alpha = -\tan\left(180^0 - \alpha\right)$

$\cot\alpha = -\cot\left(180^0 - \alpha\right)$.



3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị lượng giác	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	0
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\Vert$

Trong bảng kí hiệu "$\|$" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Chú ý. Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.
Chẳng hạn

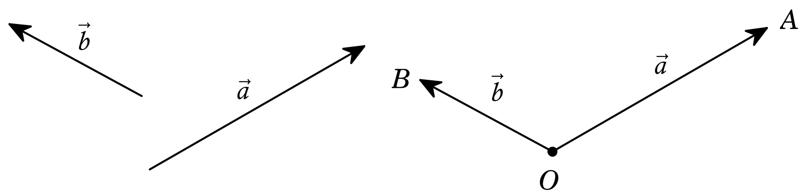
$$\sin 120^0 = \sin\left(180^0 - 60^0\right) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^0 = \cos\left(180^0 - 45^0\right) = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Góc giữa hai vectơ

a) Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vecto $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Giá trị $\cos 45^0 + \sin 45^0$ bằng bao nhiêu?

A. $1.$ **B.** $\sqrt{2}.$ **C.** $\sqrt{3}.$ **D.** $0.$

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\begin{cases} \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \longrightarrow \cos 45^0 + \sin 45^0 = \sqrt{2}.$ **Chọn B.**

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^0+\cot 30^0$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** 2.

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\begin{cases}\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \cot 30^0=\sqrt{3}\end{cases}\longrightarrow \tan 30^0+\cot 30^0=\frac{4}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?

A. $\sin 150^O=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos 150^O=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\tan 150^O=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cot 150^O=\sqrt{3}$.

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\tan 150^O=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Chọn C.**

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $P=\cos 30^\circ\cos 60^\circ-\sin 30^\circ\sin 60^\circ$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=1$. **D.** $P=0$.

Lời giải. Vì 30^0 và 60^0 là hai góc phụ nhau nên $\begin{cases}\sin 30^0=\cos 60^0\\ \sin 60^0=\cos 30^0\end{cases}$

$\longrightarrow P=\cos 30^\circ\cos 60^\circ-\sin 30^\circ\sin 60^\circ=\cos 30^\circ\cos 60^\circ-\cos 60^\circ\cos 30^\circ=0$. **Chọn D.**

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $P=\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ$.

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=\sqrt{3}$. **D.** $P=-\sqrt{3}$.

Lời giải. Vì 30^0 và 60^0 là hai góc phụ nhau nên $\begin{cases}\sin 30^0=\cos 60^0\\ \sin 60^0=\cos 30^0\end{cases}$

$\longrightarrow P=\sin 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ=\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ=1$. **Chọn A.**

Câu 6. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin 45^O+\cos 45^O=\sqrt{2}$. **B.** $\sin 30^O+\cos 60^O=1$.

C. $\sin 60^O+\cos 150^O=0$. **D.** $\sin 120^O+\cos 30^O=0$.

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\begin{cases}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin 120^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\longrightarrow \cos 30^0+\sin 120^0=\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

A. $\sin 0^O+\cos 0^O=0$. **B.** $\sin 90^O+\cos 90^O=1$.

C. $\sin 180^O+\cos 180^O=-1$. **D.** $\sin 60^O+\cos 60^O=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\begin{cases}\cos 0^0=1\\ \sin 0^0=0\end{cases}\longrightarrow \cos 0^0+\sin 0^0=1$. **Chọn A.**

Câu 8. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. $\cos 45^{\mathrm{O}} = \sin 45^{\mathrm{O}}$. **B.** $\cos 45^{\mathrm{O}} = \sin 135^{\mathrm{O}}$.

C. $\cos 30^{\mathrm{O}} = \sin 120^{\mathrm{O}}$. **D.** $\sin 60^{\mathrm{O}} = \cos 120^{\mathrm{O}}$.

Lời giải. Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\begin{cases} \cos 120^0 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 9. Tam giác ABC vuông ở A có góc $\widehat{B} = 30^0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos C = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\sin B = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\widehat{C} = 60^0$.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được $\cos B = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 10. Tam giác đều ABC có đường cao AH. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \widehat{BAH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos \widehat{BAH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin \widehat{AHC} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\widehat{BAH} = 30^0 \longrightarrow \begin{cases} \sin \widehat{BAH} = \dfrac{1}{2} \\ \cos \widehat{BAH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Do đó A sai; B sai.

Ta có $\widehat{ABC} = 60^0 \longrightarrow \sin \widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó C đúng. **Chọn C.**

Vấn đề 2. HAI GÓC BÙ NHAU – HAI GÓC PHỤ NHAU

Câu 11. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. **B.** $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. **D.** $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Lời giải. Hai góc bù nhau α và $(180^\circ - \alpha)$ thì cho có giá trị của sin bằng nhau.

Chọn C.

Câu 12. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

A. $\sin \alpha = \sin \beta$. **B.** $\cos \alpha = -\cos \beta$. **C.** $\tan \alpha = -\tan \beta$. **D.** $\cot \alpha = \cot \beta$.

Lời giải. Hai góc bù nhau α và β thì cho có giá trị của sin bằng nhau, các giá trị còn lại thì đối nhau. Do đó D sai. **Chọn D.**

Câu 13. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 150^\circ \cos 165^\circ$.

A. $P = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = \dfrac{1}{2}$. **D.** $P = 1$.

Lời giải. Hai góc 30^0 và 150^0 bù nhau nên $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$;

Hai góc 15° và 165° bù nhau nên $\cos 15^\circ = -\cos 165^\circ$.

Do đó $P=\sin 30^\circ\cos 15^\circ+\sin 150^\circ\cos 165^\circ=\sin 150^\circ.\left(-\cos 165^\circ\right)+\sin 150^\circ\cos 165^\circ=0$.

Chọn B.

Câu 14. Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Hai góc α và β bù nhau nên $\sin\alpha=\sin\beta$; $\cos\alpha=-\cos\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=-1$. **Chọn C.**

Câu 15. Cho tam giác ABC. Tính $P=\sin A.\cos\left(B+C\right)+\cos A.\sin\left(B+C\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Giả sử $\widehat{A}=\alpha;\widehat{B}+\widehat{C}=\beta$. Biểu thức trở thành $P=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

Trong tam giác ABC, có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=180^\circ$.

Do hai góc α và β bù nhau nên $\sin\alpha=\sin\beta$; $\cos\alpha=-\cos\beta$.

Do đó, $P=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=0$. **Chọn A.**

Câu 16. Cho tam giác ABC. Tính $P=\cos A.\cos\left(B+C\right)-\sin A.\sin\left(B+C\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Giả sử $\widehat{A}=\alpha;\widehat{B}+\widehat{C}=\beta$. Biểu thức trở thành $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

Trong tam giác ABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=180^\circ$.

Do hai góc α và β bù nhau nên $\sin\alpha=\sin\beta$; $\cos\alpha=-\cos\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=-1$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là sai?

A. $\sin\alpha=-\cos\beta$. **B.** $\cos\alpha=\sin\beta$. **C.** $\tan\alpha=\cot\beta$. **D.** $\cot\alpha=\tan\beta$.

Lời giải. Hai góc nhọn α và β phụ nhau thì $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta;\tan\alpha=\cot\beta;$ $\cot\alpha=\tan\beta$. **Chọn A.**

Câu 18. Tính giá trị biểu thức $S=\sin^2 15^\circ+\cos^2 20^\circ+\sin^2 75^\circ+\cos^2 110^\circ$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Lời giải. Hai góc 15° và 75° phụ nhau nên $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ$.

Hai góc 20° và 110° hơn kém nhau 90° nên $\cos 110^\circ=-\sin 20^\circ$.

Do đó, $S=\sin^2 15^\circ+\cos^2 20^\circ+\sin^2 75^\circ+\cos^2 110^\circ$

$=\sin^2 15^\circ+\cos^2 20+\cos^2 15^\circ+\left(-\sin 20^\circ\right)^2=\left(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ\right)+\left(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ\right)=2$.

Chọn C.

Câu 19. Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải. Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0$. **Chọn A.**

Vấn đề 3. SO SÁNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 21. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin\alpha<0.$ **B.** $\cos\alpha>0.$ **C.** $\tan\alpha<0.$ **D.** $\cot\alpha>0.$

Lời giải. Chọn C.

Câu 22. Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha<\beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos\alpha<\cos\beta.$ **B.** $\sin\alpha<\sin\beta.$ **C.** $\cot\alpha>\cot\beta.$ **D.** $\tan\alpha+\tan\beta>0.$

Lời giải. Chọn A.

Câu 23. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\cos 75^\circ>\cos 50^\circ.$ **B.** $\sin 80^\circ>\sin 50^\circ.$

C. $\tan 45^\circ<\tan 60^\circ.$ **D.** $\cos 30^\circ=\sin 60^\circ.$

Lời giải. Chọn A. Trong khoảng từ 0° đến 90°, khi giá trị của góc tăng thì giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 24. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ<\sin 100^\circ.$ **B.** $\cos 95^\circ>\cos 100^\circ.$

C. $\tan 85^\circ<\tan 125^\circ.$ **D.** $\cos 145^\circ>\cos 125^\circ.$

Lời giải. Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Chọn B.

Câu 25. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ<\sin 150^\circ.$ **B.** $\sin 90^\circ 15'<\sin 90^\circ 30'.$

C. $\cos 90^\circ 30'>\cos 100^\circ.$ **D.** $\cos 150^\circ>\cos 120^\circ.$

Lời giải. Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Chọn C.

Vấn đề 4. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Câu 26. Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$?

A. $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}.$ **B.** $\cos^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{3}.$

C. $\cos^2\dfrac{\alpha}{4}+\sin^2\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{1}{4}$. **D.** $5\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{5}+\sin^2\dfrac{\alpha}{5}\right)=5$.

Lời giải. Từ biểu thức $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ta suy ra $\cos^2\dfrac{\alpha}{5}+\sin^2\dfrac{\alpha}{5}=1$.

Do đó ta có $5\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{5}+\sin^2\dfrac{\alpha}{5}\right)=5$. **Chọn D.**

Câu 27. Cho biết $\sin\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{3}{5}$. Giá trị của $P=3\sin^2\dfrac{\alpha}{3}+5\cos^2\dfrac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu ?

A. $P=\dfrac{105}{25}$. **B.** $P=\dfrac{107}{25}$. **C.** $P=\dfrac{109}{25}$. **D.** $P=\dfrac{111}{25}$.

Lời giải. Ta có biểu thức $\sin^2\dfrac{\alpha}{3}+\cos^2\dfrac{\alpha}{3}=1\Leftrightarrow\cos^2\dfrac{\alpha}{3}=1-\sin^2\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{16}{25}$.

Do đó ta có $P=3\sin^2\dfrac{\alpha}{3}+5\cos^2\dfrac{\alpha}{3}=3.\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+5.\dfrac{16}{25}=\dfrac{107}{25}$. **Chọn B.**

Câu 28. Cho biết $\tan\alpha=-3$. Giá trị của $P=\dfrac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}$ bằng bao nhiêu ?

A. $P=\dfrac{4}{3}$. **B.** $P=\dfrac{5}{3}$. **C.** $P=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $P=-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}=\dfrac{6\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-7}{6+7\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{6\tan\alpha-7}{6+7\tan\alpha}=\dfrac{5}{3}$. **Chọn B.**

Câu 29. Cho biết $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Giá trị của $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}$ bằng bao nhiêu ?

A. $P=-\dfrac{19}{13}$. **B.** $P=\dfrac{19}{13}$. **C.** $P=\dfrac{25}{13}$. **D.** $P=-\dfrac{25}{13}$.

Lời giải. Ta có biểu thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}$.

Ta có $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+3.\dfrac{5}{9}}{2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}}=\dfrac{19}{13}$.

Chọn B.

Câu 30. Cho biết $\cot\alpha=5$. Giá trị của $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1$ bằng bao nhiêu ?

A. $P=\dfrac{10}{26}$. **B.** $P=\dfrac{100}{26}$. **C.** $P=\dfrac{50}{26}$. **D.** $P=\dfrac{101}{26}$.

Lời giải. Ta có $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1=\sin^2\alpha\left(2\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+5\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(2\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1+\cot^2\alpha\right)=\dfrac{3\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1}{\cot^2\alpha+1}=\dfrac{101}{26}$. **Chọn D.**

Câu 31. Cho biết $3\cos\alpha-\sin\alpha=1$, $0^0<\alpha<90^0$. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải. Ta có $3\cos\alpha-\sin\alpha=1\Leftrightarrow3\cos\alpha=\sin\alpha+1\rightarrow9\cos^2\alpha=(\sin\alpha+1)^2$

$\Leftrightarrow9\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1\Leftrightarrow9\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = -1\\ \sin\alpha = \dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

- $\sin\alpha = -1$: không thỏa mãn vì $0^0 < \alpha < 90^0$.
- $\sin\alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$. **Chọn A.**

Câu 32. Cho biết $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2$, $0^0 < \alpha < 90^0$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

A. $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Ta có $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\alpha = 2 - 2\cos\alpha \to 2\sin^2\alpha = (2 - 2\cos\alpha)^2$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 6\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 1\\ \cos\alpha = \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

- $\cos\alpha = 1$: không thỏa mãn vì $0^0 < \alpha < 90^0$.
- $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 33. Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Tính giá trị của $\sin\alpha\cos\alpha$.

A. $\sin\alpha\cos\alpha = a^2$. **B.** $\sin\alpha\cos\alpha = 2a$.

C. $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{a^2 - 1}{2}$. **D.** $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{a^2 - 11}{2}$.

Lời giải. Ta có $\sin\alpha + \cos\alpha = a \to (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{a^2 - 1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 34. Cho biết $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu ?

A. $P = \dfrac{5}{4}$. **B.** $P = \dfrac{7}{4}$. **C.** $P = \dfrac{9}{4}$. **D.** $P = \dfrac{11}{4}$.

Lời giải. Ta có $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{3} \to (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{4}{9}$.

Ta có $P = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha} = \sqrt{(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha} = \sqrt{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\dfrac{9}{4}\right)^2 - 2} = \dfrac{7}{4}$. **Chọn B.**

Câu 35. Cho biết $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu ?

A. $P = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $P = \dfrac{\sqrt{17}}{5}$. **C.** $P = \dfrac{\sqrt{19}}{5}$. **D.** $P = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải. Ta có $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \to (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{5}.$

Ta có $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=\sqrt{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{1-2\left(\sin\alpha\cos\alpha\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}.$ **Chọn B.**

Vấn đề 5. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Câu 36. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120^{O}?

A. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)$ **B.** $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

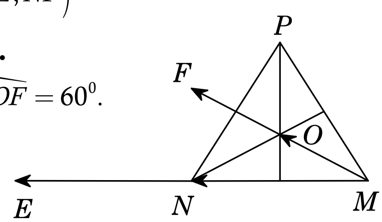
Lời giải. • Vẽ $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)=\left(\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NP}\right)$

$=\widehat{PNE}=180^0-\widehat{MNP}=180^0-60^0=120^0.$ **Chọn A.**

• Vẽ $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{MO}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ON}\right)=\widehat{NOF}=60^0.$

• Vì $MN\perp OP\longrightarrow\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)=90^0.$

• Ta có $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=\widehat{NMP}=60^0.$



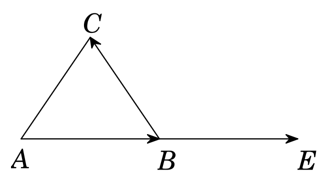
Câu 37. Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right).$

A. $P=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $P=\dfrac{3}{2}.$ **C.** $P=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $P=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải. Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180-\widehat{CBA}=120^0$

$\longrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 120^0=-\dfrac{1}{2}.$

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{1}{2}.$



Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right).$

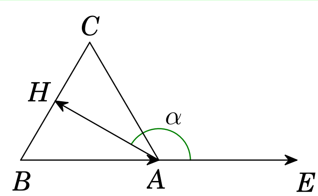
A. $30^0.$ **B.** $60^0.$ **C.** $120^0.$ **D.** $150^0.$

Lời giải. Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{HAE}=\alpha$ (hình vẽ)

$=180^0-\widehat{BAH}=180^0-30^0=150^0.$

Chọn D.



Câu 39. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B}=50^0$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^0.$ **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^0.$

C. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^0.$ **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=40^0.$

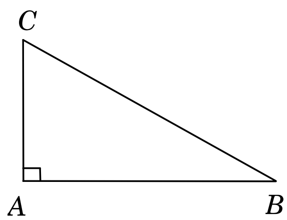
Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình) **Chọn D.** Vì $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}=180^0-40^0=140^0.$

Câu 40. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{1}{2}.$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải. Xác định được $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}.$



Ta có $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow\widehat{ACB}=60^0$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}=120^0$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos120^0=-\dfrac{1}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 41. Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right).$

A. $180^\circ.$ **B.** $360^\circ.$ **C.** $270^\circ.$ **D.** $120^\circ.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^0-\widehat{ABC}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^0-\widehat{BCA}\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180^0-\widehat{CAB}\end{cases}$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=540^0-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CAB}\right)=540^0-180^0=360^0.$

Chọn B.

Câu 42. Cho tam giác ABC với $\widehat{A}=60^\circ$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right).$

A. $120^\circ.$ **B.** $360^\circ.$ **C.** $270^\circ.$ **D.** $240^\circ.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^0-\widehat{ABC}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^0-\widehat{BCA}\end{cases}$

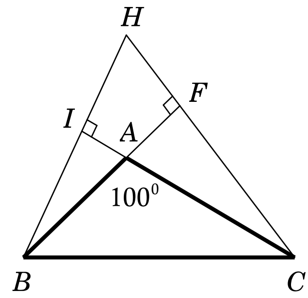
$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=360^0-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}\right)$

$=360^0-\left(180^0-\widehat{BAC}\right)=360^0-180^0+60^0=240^0.$ **Chọn D.**

Câu 43. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right).$

A. $360^\circ.$ **B.** $180^\circ.$ **C.** $80^\circ.$ **D.** $160^\circ.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{BHA} \\ \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=\widehat{BHC} \\ \left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{CHA} \end{cases}$



$\longrightarrow \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{BHA}+\widehat{BHC}+\widehat{CHA}$

$=2\widehat{BHC}=2\left(180^0-100^0\right)=160^0$

(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp. **Chọn D.**

Câu 44. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

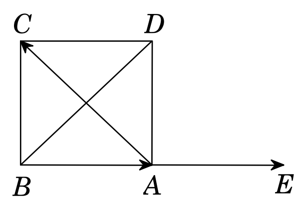
A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=0$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-1$.

Lời giải. Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$

$=\cos\widehat{CAE}=\cos 135^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn B.

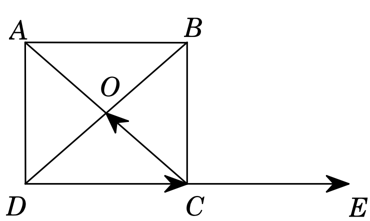
Câu 45. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45^0. **B.** 405^0. **C.** 315^0. **D.** 225^0.

Lời giải. • Ta có $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^0$.

• Ta có $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)=180^0$.

• Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$, khi đó $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\widehat{OCE}=135^0$.



Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=0^0+180^0+135^0=315^0$. **Chọn C.**

❍ Bài 02

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$.

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$. Ta có

$$\boxed{\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2.}$$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2\geq 0$, $\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$.

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.}$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1;b_2\right)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\boxed{a_1b_1+a_2b_2=0.}$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.}$$

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a}=(a_1;a_2)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\boxed{\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải. Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^0 \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **Chọn A.**

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=90^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Lời giải. Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b})=180^0$. **Chọn A.**

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^0$. **B.** $\alpha=45^0$. **C.** $\alpha=60^0$. **D.** $\alpha=120^0$.

Lời giải. Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a},\vec{b})=120^0$.

Chọn D.

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=180^0$. **C.** $\alpha=60^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Lời giải. Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\longrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2}{5}\vec{a}^2-\frac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0$

$\xrightarrow{\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1}\vec{a}\vec{b}=-1.$

Suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=-1\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$. **Chọn B.**

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

B. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

D. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải. Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$. **Chọn C.**

- A đúng, vì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

- B đúng, vì $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải. Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos60^0=\frac{a^2}{2}$. **Chọn D.**

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải. Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos120^0=-\frac{a^2}{2}$. **Chọn C.**

Câu 8. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$. **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$. **C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$.

Lời giải. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **A đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **B đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=GA.GB.\cos\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{6}\longrightarrow$ **C sai. Chọn C.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=30^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=AB.AG.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\cos 30^0=\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right)=150^0$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải. Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài tại đỉnh C nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{2}$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos 135^0=-a^2$. **Chọn A.**

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c,\ AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA.BC.\cos\widehat{B}=c.\sqrt{b^2+c^2}.\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2$.

Chọn B.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=AB^2=c^2$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho ba điểm $A,\ B,\ C$ thỏa $AB=2\text{cm},\ BC=3\text{cm},\ CA=5\text{cm}$. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$. **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$.

Lời giải. Ta có $AB+BC=CA\Rightarrow$ ba điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng và B nằm giữa $A,\ C$.

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=3.5.\cos 0^0=15$. **Chọn B.**

Cách khác. Ta có $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2=CB^2-2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}+CA^2$

$\longrightarrow \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(3^2+5^2-2^2\right)=15.$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}.$

A. $P=b^2-c^2.$ **B.** $P=\frac{c^2+b^2}{2}.$ **C.** $P=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}.$ **D.** $P=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}.$

Lời giải. Ta có $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=AC^2-AB^2=b^2-c^2.$ **Chọn A.**

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$ Gọi M là trung điểm cạnh $BC.$ Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{b^2-c^2}{2}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2}{2}.$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}.$

Lời giải. Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\frac{b^2-c^2}{2}.$ **Chọn A.**

Câu 15. Cho ba điểm $O,\ A,\ B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại $O.$

C. tam giác OAB vuông tại $O.$ **D.** tam giác OAB vuông cân tại $O.$

Lời giải. Ta có $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow OB^2-OA^2=0\Leftrightarrow OB=OA.$ **Chọn B.**

Câu 16. Cho $M,\ N,\ P,\ Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

Lời giải. Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2.$

Lời giải. Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2.$

Chọn A.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$.

A. $P=-1$. **B.** $P=3a^2$. **C.** $P=-3a^2$. **D.** $P=2a^2$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}$.

Ta có $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2$

$=-CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)-AC^2=-a\sqrt{2}.a.\cos 45^0-\left(a\sqrt{2}\right)^2=-3a^2$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $P=2\sqrt{2}a$. **B.** $P=2a^2$. **C.** $P=a^2$. **D.** $P=-2a^2$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} BD=a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD} \end{cases}.$

Khi đó $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+0$

$=-2.BA.BD\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-2.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-2a^2$. **Chọn D.**

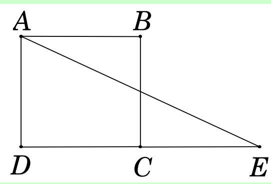
Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Lời giải. Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2$. **Chọn A.**



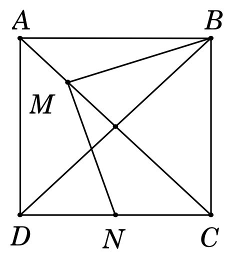
Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

Lời giải. Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

- $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$



Suy ra $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{16}\left(9\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{16}\left(0+3a^2-3a^2-0\right)=0$. **Chọn B.**

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$.

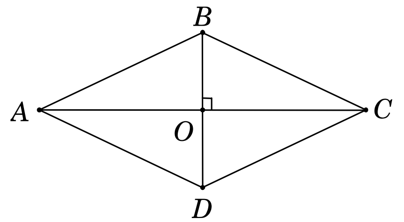
Lời giải. Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$. **Chọn D.**

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32$.

Lời giải. Gọi $O=AC\cap BD$. Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32$. **Chọn D.**

Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=8\text{cm}$, $AD=12\text{cm}$, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54cm^2. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

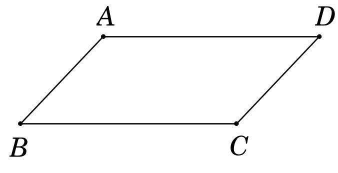
A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\sqrt{7}}{16}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải. Ta có $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABC}=54\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=27\,\text{cm}^2$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{ABC}$.

$\Rightarrow\sin\widehat{ABC}=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB.AD}=\frac{2.27}{8.12}=\frac{9}{16}\longrightarrow\cos\widehat{ABC}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ (vì $\widehat{ABC}$ nhọn).



Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

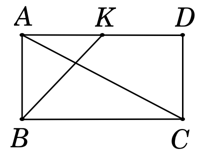
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=-\cos\widehat{ABC}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **Chọn D.**

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải. Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$



$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 0$. **Chọn A.**

Vấn đề 2. QUỸ TÍCH

Câu 26. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải. Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI. **Chọn D.**

Câu 27. Tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG. **Chọn D.**

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC. **Chọn B.**

Câu 29*. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải. Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow CN\perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB. **Chọn B.**

Câu 30*. Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$.

Theo giả thiết, ta có $MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=-16 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{AB^2}{4}-16=\dfrac{8^2}{4}-16=0 \longrightarrow M\equiv I$.

Chọn A.

Vấn đề 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

Cho tam giác ABC với ba đỉnh có tọa độ xác định $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ thì

- Trung điểm I của đoạn $AB \longrightarrow I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm $G \longrightarrow G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.
- Trực tâm $H \longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp $E \longrightarrow EA=EB=EC \Leftrightarrow \begin{cases}AE^2=BE^2\\ AE^2=CE^2\end{cases}$.
- Chân đường cao K hạ từ đỉnh $A \longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BK}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}$.
- Chân đường phân giác trong góc A là điểm $D \longrightarrow \overrightarrow{DB}=-\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$.
- Chu vi: $P=AB+BC+CA$.
- Diện tích: $S=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1-\cos^2 A}$.
- Góc A: $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
- Tam giác ABC vuông cân tại $A \longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ AB=AC\end{cases}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40$. **Chọn A.**

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$.

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$.

Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4$. **Chọn C.**

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30$. **Chọn A.**

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$.

A. $\vec{c}=(-1;-3)$. **B.** $\vec{c}=(-1;3)$. **C.** $\vec{c}=(1;-3)$. **D.** $\vec{c}=(1;3)$.

Lời giải. Gọi $\vec{c}=(x;y)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3)$. **Chọn B.**

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$. Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=18$. **C.** $P=20$. **D.** $P=28$.

Lời giải. Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$.

Suy ra $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1.6+2.6=18$. **Chọn B.**

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn A.**

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{O}$. **B.** $\alpha=60^{O}$. **C.** $\alpha=45^{O}$. **D.** $\alpha=30^{O}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^{0}$. **Chọn C.**

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha=45^{O}$. **B.** $\alpha=60^{O}$. **C.** $\alpha=90^{O}$. **D.** $\alpha=135^{O}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\dfrac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{x},\vec{y}\right)=135^{0}$. **Chọn D.**

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^{O}$. **B.** $\alpha=45^{O}$. **C.** $\alpha=60^{O}$. **D.** $\alpha=135^{O}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{2.3+5(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^{0}$. **Chọn D.**

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{a}=(9;3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

A. $\vec{v_1}=(1;-3)$. **B.** $\vec{v_2}=(2;-6)$. **C.** $\vec{v_3}=(1;3)$. **D.** $\vec{v_4}=(-1;3)$.

Lời giải. Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a}.\vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vectơ đó không vuông góc với $\vec{a}$. **Chọn C.**

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15^{O}. **B.** 60^{O}. **C.** 120^{O}. **D.** 135^{O}.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow \widehat{B}=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^{O}$.

Chọn D.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau. **B.** Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$. **D.** Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;4)$, $\overrightarrow{AD}=(5;-5)$, $\overrightarrow{CB}=(-2;4)$, $\overrightarrow{CD}=(-5;5)$.

Suy ra $\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{8.5+4.(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{(-2).(-5)+4.(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$

$\longrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=0\Rightarrow \widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0$. **Chọn D.**

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k=20$. **B.** $k=-20$. **C.** $k=-40$. **D.** $k=40$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}k+(-5)(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$. **Chọn C.**

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k=\dfrac{37}{4}$. **B.** $k=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **C.** $k=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $k=\dfrac{5}{8}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+25}=\dfrac{1}{2}\sqrt{101}$ và $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{k^2+16}$.

Do đó để $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\dfrac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\dfrac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$. **B.** $3k=2m$. **C.** $2k+3m=0$. **D.** $3k+2m=0$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0$. **Chọn C.**

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;3)$ và $\vec{b}=(4;1)$. Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

A. $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. **B.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. **C.** $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$. **D.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$.

Lời giải. Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases}-2x+3y=4\\4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{6}{7}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{u}=(4;1)$, $\vec{v}=(1;4)$ và $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ với $m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải. Ta có $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}=(4+m;1+4m)$.

Trục hoành có vectơ đơn vị là $\vec{i}=(1;0)$.

Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 4+m=0\Leftrightarrow m=-4$. **Chọn B.**

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$. Tìm m để vectơ $\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với vectơ $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45^0.

A. $m=4$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{1}{4}$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}=(4m+1;m+4)\\\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{(4m+1)+(m+4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m+1)^2+(m+4)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{5(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2+16m+17}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5(m+1)=\sqrt{17m^2+16m+17}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\geq 0\\25m^2+50m+25=17m^2+16m+17\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{4}.$$

Chọn C.

Vấn đề 4. CÔNG THỨC TÍNH ĐỘ DÀI

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1;-2)$ và $N(-3;4)$.

A. $MN=4$. **B.** $MN=6$. **C.** $MN=3\sqrt{6}$. **D.** $MN=2\sqrt{13}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;6)$ suy ra $MN=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$. **Chọn D.**

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P=4+2\sqrt{2}$. **B.** $P=4+4\sqrt{2}$. **C.** $P=8+8\sqrt{2}$. **D.** $P=2+2\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;-2) \\ \overrightarrow{BC}=(2;2) \\ \overrightarrow{CA}=(-4;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2} \\ BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2} \\ CA=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4 \end{cases}$

Vậy chu vi P của tam giác ABC là $P=AB+BC+CA=4+4\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 53. Trong hệ tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho vectơ $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải. Ta có $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j} \longrightarrow \vec{a}=\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$. **Chọn B.**

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

Lời giải. Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **Chọn C.**

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;2)$, $B(-2;-4)$, $C(0;1)$ và $D\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

C. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-6)$ và $\overrightarrow{CD}=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-3).(-1)+(-6).\frac{1}{2}=0$.

Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{CD}$. **Chọn C.**

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$.

B. Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow DA=5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}.$

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1(-7)+7.1=0$ nên $AB\perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông. **Chọn C.**

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(3;1)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;1) \\ \overrightarrow{DC}=(3;3) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $DC \parallel AB$ và $DC=3AB.\quad (1)$

Mặt khác $\begin{cases} AD=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10} \\ BC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \end{cases} \longrightarrow AD=BC.\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân. **Chọn C.**

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(-1;1),\ B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B.

D. Tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2),\ \overrightarrow{BC}=(0;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-2).$

Suy ra $\begin{cases} AB=AC=2\sqrt{2} \\ AB^2+AC^2=BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại $A.$ **Chọn D.**

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(10;5),\ B(3;2)$ và $C(6;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại A.

C. Tam giác ABC vuông cân tại B.

D. Tam giác ABC có góc A tù.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-7;-3),\ \overrightarrow{BC}=(3;-7)$ và $\overrightarrow{AC}=(-4;-10).$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-7).3+(-3).(-7)=0$ và $AB=BC.$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại $B.$ **Chọn C.**

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(-2;-1),\ B(1;-1)$ và $C(-2;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại A.

C. Tam giác ABC vuông tại B.

D. Tam giác ABC vuông cân tại C.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0),\ \overrightarrow{BC}=(-3;3)$ và $\overrightarrow{AC}=(0;3).$

Do đó $\begin{cases} AB=AC=3 \\ BC=3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại $A.$

Chọn B.

Vấn đề 5. TÌM ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;0)$, $C(6;0)$. **C.** $C(0;0)$. **D.** $C(-1;0)$.

Lời giải. Ta có $C\in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{CA}=(-2-c;4)\\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow(-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=6\to C(6;0)\\ c=0\to C(0;0)\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải. Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-4).(-1)+(-1)(c-2)=0\Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$. **Chọn A.**

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(-4;0)$. **D.** $M(-5;0)$.

Lời giải.

Ta có $M\in Ox$ nên $M(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-4-x;0)\\ \overrightarrow{MB}=(-5-x;0)\\ \overrightarrow{MC}=(3-x;0)\end{cases}\longrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6-3x;0)$.

Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $-6-3x=0\Leftrightarrow x=-2\longrightarrow M(-2;0)$. **Chọn A.**

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $P(0;4)$. **B.** $P(0;-4)$. **C.** $P(-4;0)$. **D.** $P(4;0)$.

Lời giải. Ta có $P\in Ox$ nên $P(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MP}=(x+2;-2)\\ \overrightarrow{MN}=(3;-1)\end{cases}$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{-2}{-1}\Leftrightarrow x=4\longrightarrow P(4;0)$. **Chọn D.**

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(1;0)$, $M(-3;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M(1;0)$, $M(3;0)$.

Lời giải. Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1-m;4)$.

Theo giả thiết: $MN = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-m)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (1+m)^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \longrightarrow M(1;0) \\ m = -3 \longrightarrow M(-3;0) \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B.

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$. **B.** $C\left(\frac{5}{3};0\right)$. **C.** $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$. **D.** $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải. Ta có $C \in Ox$ nên $C(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x-1;-3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-4;-2) \end{cases}$.

Do $CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-3)^2 = (x-4)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \longrightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right)$.

Chọn B.

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoàng sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$?

A. $M(0;1)$. **B.** $M(6;0)$. **C.** $M(1;6)$. **D.** $M(0;6)$.

Lời giải. Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-2;-2) \\ \overrightarrow{BM} = (m-5;2) \end{cases}$.

Vì $\widehat{AMB} = 90^0$ suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ nên $(m-2)(m-5) + (-2).2 = 0$.

$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 6 \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;0) \\ M(6;0) \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải. Ta có $M \in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1;-1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3;2-m) \end{cases}$.

Khi đó $MA^2 + MB^2 = \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 1^2 + (-1-m)^2 + 3^2 + (2-m)^2 = 2m^2 - 2m + 15$.

$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\left\{MA^2 + MB^2\right\}_{\min} = \frac{29}{2}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **Chọn C.**

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tìm tọa độ điểm D.

A. $D(2;-3)$. **B.** $D(2;3)$. **C.** $D(-2;-3)$. **D.** $D(-2;3)$.

Lời giải. Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=(x+2;y)$ và $\overrightarrow{BC}=(4;-3)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \longrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \longrightarrow D(2;-3)$.

Chọn A.

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(5;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

A. $G\left(2;\frac{10}{3}\right)$. **B.** $G\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right)$. **C.** $G(2;5)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Lời giải. Tọa độ trọng tâm $G(x_G;y_G)$ là $\begin{cases} x_G=\dfrac{1-2+5}{3}=\dfrac{4}{3} \\ y_G=\dfrac{3+4+3}{3}=\dfrac{10}{3} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $I\left(1;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1;-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải. Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AI}=(x+4;y-1) \\ \overrightarrow{BI}=(x-2;y-4) \\ \overrightarrow{CI}=(x-2;y+2) \end{cases}$.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IB^2=IC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2=(x-2)^2+9 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{4} \\ y=1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b) \;\&\; \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \;\&\; \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3).(-1)+b.6=0 \\ (a-3).5+b.6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7$.

Chọn C.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải. Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3)\\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15)\\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7)\end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ A',\ C \text{ thang hang}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 & (1)\\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} & (2)\end{cases}$.

- $(1)\Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y=13.$
- $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15}\Leftrightarrow 3x-y=-1.$

Giải hệ $\begin{cases}x+3y=13\\ 3x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\longrightarrow A'(1;4)$. **Chọn C.**

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $A'\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Lời giải. Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-2)\\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)\end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên $\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ C,\ A' \text{ thang hang}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2).6+(y-4).(-2)=0\\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=4\\ -2x-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

A. $D(5;-8)$. **B.** $D(8;5)$. **C.** $D(-5;8)$. **D.** $D(-8;5)$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\longrightarrow\widehat{ABC}=90^0$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$.

Suy ra I là trung điểm của $AC\longrightarrow I(4;-1)$.

Gọi $D(x;y)$, do I cũng là trung điểm của $BD\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}=4\\ \dfrac{y+6}{2}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-8\end{cases}\Rightarrow D(5;-8)$.

Chọn A.

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B.

A. $C(4;0)$. **B.** $C(-2;2)$. **C.** $C(4;0)$, $C(-2;2)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải. Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(1;3)\\ \overrightarrow{BC}=(x-1;y-1)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\\ BA=BC\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1.(x-1)+3.(y-1)=0\\ 1^2+3^2=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3y\\ 10y^2-20y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=4\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=2\\ x=-2\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm D, biết D có tung độ âm.

A. $D(0;-1)$. **B.** $D(2;-3)$. **C.** $D(2;-3)$, $D(0;1)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Lời giải. Gọi $C \;=(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;1)\\ \overrightarrow{BC}=(x-3;y)\end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2(3-x)\\ 5(x-3)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2(3-x)\\ (x-3)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Với $C_1(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2;-3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2;2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0;1)$: không thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(-2;-1)$ và $D(0;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $ABCD$ là hình vuông. **B.** $ABCD$ là hình chữ nhật.

C. $ABCD$ là hình thoi. **D.** $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;1)\\ \overrightarrow{BC}=(-1;-4)\\ \overrightarrow{DC}=(-2;1)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-2\neq 0\end{cases} \longrightarrow ABCD$ là hình hình hành.

Chọn D.

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác OAB với $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.

A. $E=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $E=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

C. $E=\left(-2+3\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$. **D.** $E=\left(-2+3\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB}=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. $(*)$

Gọi $E(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EA}=(1-x;3-y)\\ \overrightarrow{EB}=(4-x;2-y)\end{cases}$.

Từ $(*)$, suy ra $\begin{cases} 1-x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(4-x) \\ 3-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+3\sqrt{2} \\ y=4-\sqrt{2} \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0)$, $D(2;9)$. **C.** $D(0;7)$, $D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải. Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x;y)$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ (với $k \neq -1$)

$\Leftrightarrow (x-0;y-7)=(-2k;2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2k \\ y=2k+7 \end{cases}$. $\quad (1)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=(x-2;y) \Rightarrow AD=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\ \overrightarrow{BC}=(0;5) \Rightarrow BC=5 \end{cases} \longrightarrow AD=BC \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=25. \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có $(-2k-2)^2+(2k+7)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1(\text{loại}) \\ k=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \longrightarrow D(7;0)$.

• Trường hợp 2: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \neq BC \end{cases}$. Làm tương tự ta được $D=(2;9)$.

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(2;9)$. **Chọn B.**

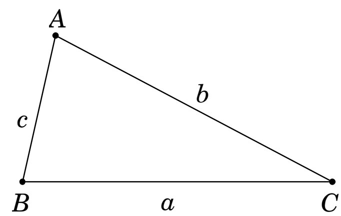
❍ Bài 03

CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

1. Định lí côsin

Cho tam giác ABC có $BC=a,\ AC=b$ và $AB=c$. Ta có

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A;$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C.$$



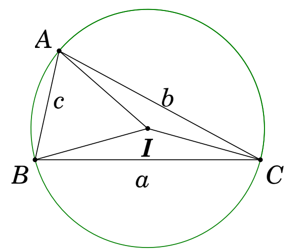
Hệ quả

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin

Cho tam giác ABC có $BC=a,\ AC=b$, $AB=c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

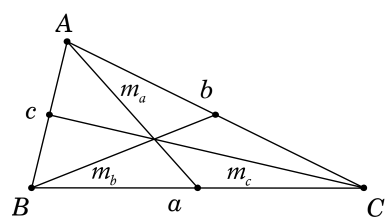
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



3. Độ dài đường trung tuyến

Cho tam giác ABC có $m_a,\ m_b,\ m_c$ lần lượt là các trung tuyến kẻ từ $A,\ B,\ C$. Ta có

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4};$$
$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4};$$
$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$



4. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có

- $h_a,\ h_b,\ h_c$ là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh $BC,\ CA,\ AB$;
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác;
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác;
- $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác;
- S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\frac{abc}{4R}$$
$$=pr$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. GIẢI TAM GIÁC

Câu 1. Tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$. Số đo góc $\widehat{A}$ bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải. Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{A}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2.5.8}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó, $\widehat{A}=60^\circ$. **Chọn C.**

Câu 2. Tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $\widehat{A}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=1.$ **B.** $BC=2.$ **C.** $BC=\sqrt{2}.$ **D.** $BC=\sqrt{3}.$

Lời giải. Theo định lí hàm cosin, ta có

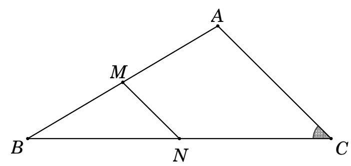
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}=2^2+1^2-2.2.1.\cos 60^\circ=3\Rightarrow BC=\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Câu 3. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB=9$ và $\widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh cạnh BC.

A. $BC=3+3\sqrt{6}.$ **B.** $BC=3\sqrt{6}-3.$ **C.** $BC=3\sqrt{7}.$ **D.** $BC=\dfrac{3+3\sqrt{33}}{2}.$

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.



$\longrightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC.

$\longrightarrow MN=\dfrac{1}{2}AC$. Mà $MN=3$, suy ra $AC=6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2=AC^2+BC^2-2.AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow 9^2=6^2+BC^2-2.6.BC.\cos 60^\circ$

$\Rightarrow BC=3+3\sqrt{6}$

Chọn A.

Câu 4. Tam giác ABC có $AB=\sqrt{2}, AC=\sqrt{3}$ và $\widehat{C}=45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=\sqrt{5}.$ **B.** $BC=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $BC=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $BC=\sqrt{6}.$

Lời giải. Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2=AC^2+BC^2-2.AC.BC.\cos\widehat{C}\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+BC^2-2.\sqrt{3}.BC.\cos 45^\circ$

$\Rightarrow BC=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 5. Tam giác ABC có $\widehat{B}=60^\circ, \widehat{C}=45^\circ$ và $AB=5$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}.$ **B.** $AC=5\sqrt{3}.$ **C.** $AC=5\sqrt{2}.$ **D.** $AC=10.$

Lời giải. Theo định lí hàm sin, ta có $\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}\Leftrightarrow\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}\Rightarrow AC=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

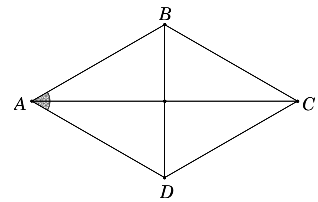
Chọn A.

Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng $1\,cm$ và có $\widehat{BAD}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC=\sqrt{3}.$ **B.** $AC=\sqrt{2}.$ **C.** $AC=2\sqrt{3}.$ **D.** $AC=2.$

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 120°$.



Theo định lí hàm cosin, ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120° = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$

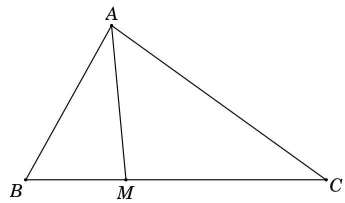
Chọn A.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM.

A. $AM = 4\sqrt{2}.$ **B.** $AM = 3.$ **C.** $AM = 2\sqrt{3}.$ **D.** $AM = 3\sqrt{2}.$

Lời giải.

Theo định lí hàm cosin, ta có



$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{4^2 + 6^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6} = \frac{1}{2}.$$

Do $MC = 2MB \longrightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2.AB.BM.\cos\widehat{B}$

$= 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{1}{2} = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$

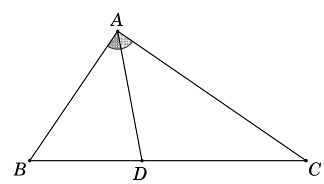
Chọn C.

Câu 8. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, BC = \sqrt{3}, CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?

A. $45°.$ **B.** $60°.$ **C.** $75°.$ **D.** $90°.$

Lời giải.

Theo định lí hàm cosin, ta có



$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120° \Rightarrow \widehat{BAD} = 60°$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45°$$

Trong ΔABD có $\widehat{BAD} = 60°, \widehat{ABD} = 45° \Rightarrow \widehat{ADB} = 75°$.

Chọn C.

Câu 9. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao $AH = 32\,cm$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $38\,cm.$ **B.** $40\,cm.$ **C.** $42\,cm.$ **D.** $45\,cm.$

Lời giải. Do tam giác ABC vuông tại A, có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB : AC$ là $3:4$ nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB$.

Trong ΔABC có AH là đường cao

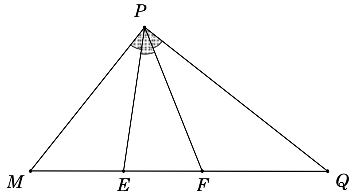
$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}AB^2\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{32^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB = 40$. **Chọn B.**

Câu 10. Tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

A. $ME = EF = FQ.$ **B.** $ME^2 = q^2 + x^2 - xq.$

C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq.$ **D.** $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm.$

Lời giải.



Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \dfrac{\widehat{MPQ}}{3} = 30° \Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60°$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$ME^2 = AM^2 + AE^2 - 2.AM.AE.\cos\widehat{MAE} = q^2 + x^2 - 2qx.\cos 30° = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3}$

$MF^2 = AM^2 + AF^2 - 2AM.AF.\cos\widehat{MAF} = q^2 + y^2 - 2qy.\cos 60° = q^2 + y^2 - qy$

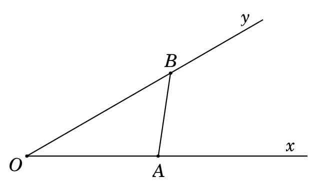
$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2$

Chọn C.

Câu 11. Cho góc $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

A. $\dfrac{3}{2}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{2}.$ **D.** $2.$

Lời giải.



Theo định lí hàm sin, ta có

$\dfrac{OB}{\sin\widehat{OAB}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}}.\sin\widehat{OAB}$

$= \dfrac{1}{\sin 30°}.\sin\widehat{OAB} = 2\sin\widehat{OAB}$

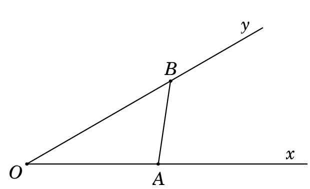
Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90°$. Khi đó $OB = 2$.

Chọn D.

Câu 12. Cho góc $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Khi OB có độ dài lớn nhất thì độ dài của đoạn OA bằng:

A. $\dfrac{3}{2}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{2}.$ **D.** $2.$

Lời giải.



Theo định lí hàm sin, ta có

$\dfrac{OB}{\sin\widehat{OAB}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}}.\sin\widehat{OAB}$

$= \dfrac{1}{\sin 30°}.\sin\widehat{OAB} = 2\sin\widehat{OAB}$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90°$. Khi đó $OB = 2$.

Tam giác OAB vuông tại $A \Rightarrow OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. **Chọn B**

Câu 13. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a,b,c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải. Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$.

Mà $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)\Leftrightarrow b^3-a^2b=a^2c-c^3\Leftrightarrow -a^2\left(b+c\right)+\left(b^3+c^3\right)=0$

$\Leftrightarrow (b+c)\left(b^2+c^2-a^2-bc\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2-bc=0$ (do $b>0, c>0$)

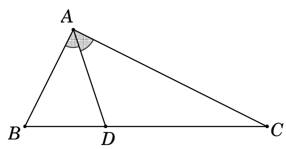
$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc$

Khi đó, $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=60°$. **Chọn C.**

Câu 14. Tam giác ABC vuông tại A, có $AB=c, AC=b$. Gọi ℓ_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính ℓ_a theo b và c.

A. $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. **B.** $\ell_a=\dfrac{2(b+c)}{bc}$. **C.** $\ell_a=\dfrac{2bc}{b+c}$. **D.** $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}(b+c)}{bc}$.

Lời giải.



Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{b^2+c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}\Rightarrow BD=\dfrac{AB}{AC}.DC=\dfrac{c}{b}.DC=\dfrac{c}{b+c}.\text{BC}=\dfrac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$BD^2=AB^2+AD^2-2.AB.AD.\cos\widehat{ABD}\Leftrightarrow\dfrac{c^2\left(b^2+c^2\right)}{\left(b+c\right)^2}=c^2+AD^2-2c.AD.\cos 45°$

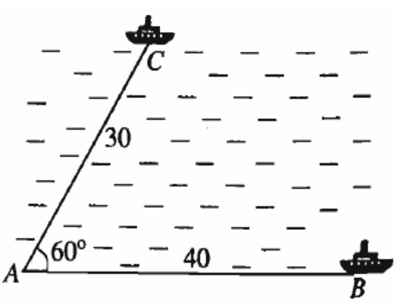
$\Rightarrow AD^2-c\sqrt{2}.AD+\left(c^2-\dfrac{c^2\left(b^2+c^2\right)}{\left(b+c\right)^2}\right)=0\Leftrightarrow AD^2-c\sqrt{2}.AD+\dfrac{2bc^3}{\left(b+c\right)^2}=0$.

$\Rightarrow AD=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$ hay $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. **Chọn A.**

Câu 15. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

A. 61 hải lí. **B.** 36 hải lí.

C. 21 hải lí. **D.** 18 hải lí.



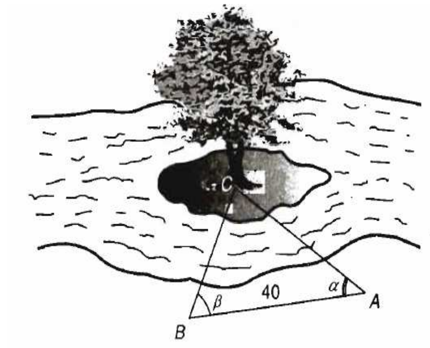
Lời giải. Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB=40,\ AC=30$ và $\widehat{A}=60^0$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=30^2+40^2-2.30.40.\cos 60^0=900+1600-1200=1300$. Vậy $BC=\sqrt{1300}\approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí. **Chọn B.**

Câu 16. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^0$ và $\widehat{CBA} = 70^0$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



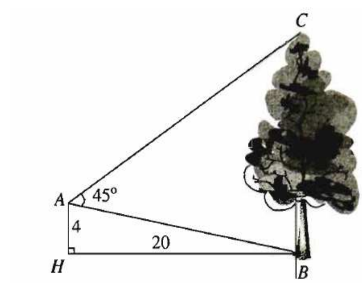
A. 53m.　　　　**B.** 30m.

C. $41,5\text{m}$.　　　　**D.** 41m.

Lời giải. Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$

Vì $\sin C = \sin(\alpha + \beta)$ nên $AC = \dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{40.\sin 70^0}{\sin 115^0} \approx 41,47$ m. **Chọn C.**

Câu 17. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^0$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. $17,5\text{m}$.　　　　**B.** 17m.

C. $16,5\text{m}$.　　　　**D.** 16m.

Lời giải. Trong tam giác AHB, ta có $\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^0 19'$.

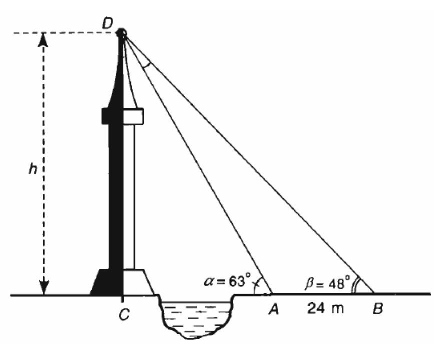
Suy ra $\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{ABH} = 78^0 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = 56^0 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta được

$\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \dfrac{CB}{\sin\widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \dfrac{AB.\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} \approx 17\text{m}$. **Chọn B.**

Câu 18. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^0$, $\widehat{CBD} = 48^0$. Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?



A. 18m.　　　　**B.** $18,5\text{m}$.

C. 60m.　　　　**D.** $60,5\text{m}$.

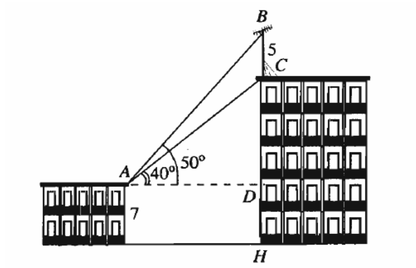
Lời giải. Áp dụng định lí Sin vào tam giác ABD, ta có $\dfrac{AD}{\sin\beta} = \dfrac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^0 - 48^0 = 15^0$.

Do đó $AD = \dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{24.\sin 48^0}{\sin 15^0} \approx 68,91$ m.

Trong tam giác vuông ACD, có $h = CD = AD.\sin\alpha \approx 61,4$ m. **Chọn D.**

Câu 19. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 12m. **B.** 19m.

C. 24m. **D.** 29m.

Lời giải. Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC}=10^0$ và

$$\widehat{ABD}=180^0-\left(\widehat{BAD}+\widehat{ADB}\right)=180^0-\left(50^0+90^0\right)=40^0.$$

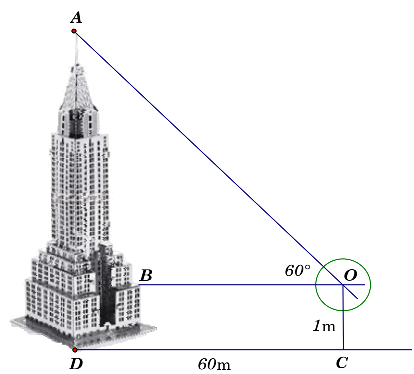
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}\longrightarrow AC=\frac{BC.\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{5.\sin 40^0}{\sin 10^0}\approx 18,5\text{ m}.$$

Trong tam giác vuông ADC, ta có $\sin\widehat{CAD}=\dfrac{CD}{AC}\longrightarrow CD=AC.\sin\widehat{CAD}=11.9$ m.

Vậy $CH=CD+DH=11,9+7=18,9$ m. **Chọn B.**

Câu 20. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD=60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC=1\text{m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhình thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB}=60^0$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:



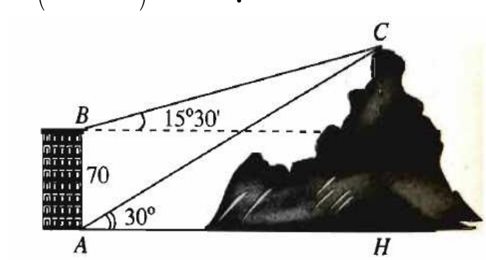
A. 40m. **B.** 114m.

C. 105m. **D.** 110m.

Lời giải. Tam giác OAB vuông tại B, có $\tan\widehat{AOB}=\dfrac{AB}{OB}\Rightarrow AB=\tan 60^0.OB=60\sqrt{3}\,\text{m}$.

Vậy chiếu cao của ngọn tháp là $h=AB+OC=\left(60\sqrt{3}+1\right)\text{m}$. **Chọn C.**

Câu 21. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^0 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 135m. **B.** 234m.

C. 165m. **D.** 195m.

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB}=60^0$, $\widehat{ABC}=105^0 30'$ và $c=70$.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Leftrightarrow \widehat{C}=180^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=180^0-165^0 30'=14^0 30'.$

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^0 30'}=\dfrac{70}{\sin 14^0 30'}$

Do đó $AC = b = \dfrac{70.\sin 105^0 30'}{\sin 14^0 30'} \approx 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30^0 nên $CH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{269,4}{2} = 134,7$ m.

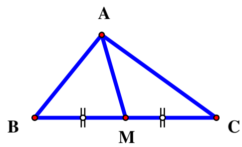
Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m. **Chọn A.**

Vấn đề 2. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Câu 22. Tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

A. 4cm . **B.** $\sqrt{3}\text{cm}$. **C.** 7cm . **D.** 5cm .

Lời giải.



Áp dụng công thức đường trung tuyến $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ ta được:

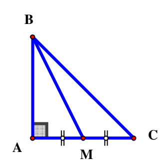
$m_a^2 = \dfrac{AC^2 + AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{8^2 + 6^2}{2} - \dfrac{10^2}{4} = 25$

$\Rightarrow m_a = 5.$ **Chọn D.**

Câu 23. Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

A. $BM = 1,5a.$ **B.** $BM = a\sqrt{2}.$ **C.** $BM = a\sqrt{3}.$ **D.** $BM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải.



M là trung điểm của $AC \Rightarrow AM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}.$

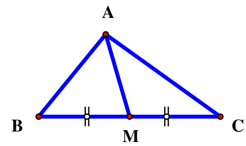
Tam giác ΔBAM vuông tại A

$\Rightarrow BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 24. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

A. $AM = \dfrac{15}{2}$ cm. **B.** $AM = 10$ cm. **C.** $AM = 9$ cm. **D.** $AM = \dfrac{13}{2}$ cm.

Lời giải.



Áp dụng hệ thức đường trung tuyến $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ ta được:

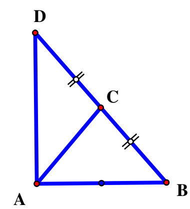
$m_a^2 = \dfrac{AC^2+AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{12^2+9^2}{2} - \dfrac{15^2}{4} = \dfrac{225}{4}$.

$\Rightarrow m_a = \dfrac{15}{2}$. **Chọn A.**

Câu 25. Tam giác ABC cân tại C, có $AB = 9\text{cm}$ và $AC = \dfrac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Tính độ dài cạnh AD.

A. $AD = 6$ cm. **B.** $AD = 9$ cm. **C.** $AD = 12$ cm. **D.** $AD = 12\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.



Ta có: D là điểm đối xứng của B qua $C \Rightarrow C$ là trung điểm của BD.

$\Rightarrow$ AC là trung tuyến của tam giác ΔDAB.

$BD = 2BC = 2AC = 15$.

Theo hệ thức trung tuyến ta có:

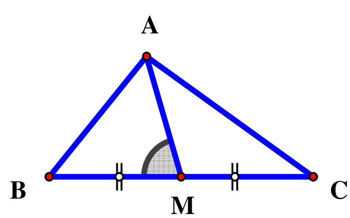
$AC^2 = \dfrac{AB^2+AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} \Rightarrow AD^2 = 2AC^2 + \dfrac{BD^2}{2} - AB^2$

$\Rightarrow AD^2 = 2.\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + \dfrac{15^2}{2} - 9^2 = 144 \Rightarrow AD = 12$. **Chọn C.**

Câu 26. Tam giác ABC có $AB = 3, BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = \sqrt{13}$. **B.** $AC = \sqrt{7}$. **C.** $AC = 13$. **D.** $AC = 7$.

Lời giải.



Ta có: M là trung điểm của $BC \Rightarrow BM = \dfrac{BC}{2} = 4$.

Trong tam giác ABM ta có: $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM.BM}$

$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM.BM.\cos\widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0.$

$\Leftrightarrow AM^2 - \dfrac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM = \sqrt{13} > 3\ \ (t/m) \\ AM = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} < 3\ \ (loai) \end{array}\right.$

$\Rightarrow AM = \sqrt{13}.$

Ta có: $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù.

$\Rightarrow \cos\widehat{AMC} = -\cos\widehat{AMB} = -\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

Trong tam giác ΔAMC ta có:

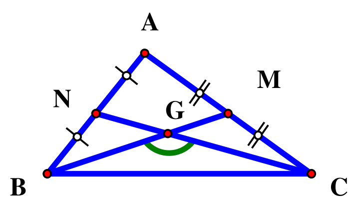
$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM.CM.\cos\widehat{AMC}$

$= 13 + 16 - 2.\sqrt{13}.4.\left(-\dfrac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49 \Rightarrow AC = 7.$ **Chọn D.**

Câu 27*. Tam giác ABC có trọng tâm G. Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^0$. Tính độ dài cạnh AB.

A. $AB = \sqrt{11}$. **B.** $AB = \sqrt{13}$. **C.** $AB = 2\sqrt{11}$. **D.** $AB = 2\sqrt{13}$.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BGN} = 120^0.$

G là trọng tâm của tam giác ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} BG = \dfrac{2}{3}BM = 4. \\ GN = \dfrac{1}{3}CN = 3. \end{cases}$

Trong tam giác ΔBGN ta có:

$BN^2 = GN^2 + BG^2 - 2GN.BG.\cos\widehat{BGN}$

$\Rightarrow BN^2 = 9 + 16 - 2.3.4.\dfrac{1}{2} = 13 \Rightarrow BN = \sqrt{13}.$

N là trung điểm của $AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}.$ **Chọn D.**

Câu 28.** Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là $9;\ 12;\ 15$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 24. **B.** $24\sqrt{2}$. **C.** 72. **D.** $72\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 81 \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} = 144 \\ m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 292 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{73} \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 10 \end{cases}$

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{208+100-292}{2.4\sqrt{13}.10} = \dfrac{1}{5\sqrt{13}}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{18\sqrt{13}}{65}$. **Chọn C.**

Diện tích tam giác $\Delta ABC: S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.4\sqrt{13}.10.\frac{18\sqrt{13}}{65}=72$

Câu 29*. Cho tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Nếu giữa $a,\ b,\ c$ có liên hệ $b^2+c^2=2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $3a\sqrt{3}$.

Lời giải. Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác: $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

Mà: $b^2+c^2=2a^2\Rightarrow m_a^2=\frac{2a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow m_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 30*. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ BC=b,\ BD=m$ và $AC=n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

A. $m^2+n^2=3\left(a^2+b^2\right)$. **B.** $m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

C. $2\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$. **D.** $3\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$.

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{m}{2}$.

BO là trung tuyến của tam giác ΔABC

$\Rightarrow BO^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{m^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{n^2}{4}\Leftrightarrow m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$. **Chọn B.**

Câu 31.** Tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Các cạnh $a,\ b,\ c$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2+b^2=5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN là góc nào?

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC.

Ta có: $AM^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow AG^2=\frac{4}{9}AM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}$

$BN^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$

$\Rightarrow GN^2=\frac{1}{9}BN^2=\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}$

Trong tam giác ΔAGN ta có:

$$\cos\widehat{AGN}=\frac{AG^2+GN^2-AN^2}{2.AG.GN}=\frac{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}+\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}-\frac{b^2}{4}}{2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}$$

$$=\frac{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}+\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}-\frac{b^2}{4}}{2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}$$

$$=\frac{10c^2-2\left(a^2+b^2\right)}{36.2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}=0 \Rightarrow \widehat{AGN}=90^0.$$ **Chọn D.**

Câu 32.** Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a, m_b, m_c thỏa mãn $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4} \\ m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4} \\ m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4} \end{cases}$ Mà: $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10b^2+10c^2-5a^2=2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2$$

$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2 \Rightarrow$ tam giác ΔABC vuông. **Chọn C.**

Câu 33.** Tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến, G trọng tâm. Xét các khẳng định sau:

(I). $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. (II). $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Trong các khẳng định đã cho có

A. (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai cùng sai. **D.** Cả hai cùng đúng.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4} \\ m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4} \\ m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=\frac{4}{9}.\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. **Chọn D.**

Vấn đề 3. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

Câu 34. Tam giác ABC có $BC=10$ và $\widehat{A}=30^O$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\frac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $R=10\sqrt{3}$.

Lời giải. Áp dụng định lí Sin, ta có $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R \Rightarrow R=\frac{BC}{2.\sin\widehat{A}}=\frac{10}{2.\sin 30^0}=10.$

Chọn B.

Câu 35. Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6$ và $\widehat{A}=60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=3$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải. Áp dụng định lí Cosin, ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$$=3^2+6^2-2.3.6.\cos60^0=27\Leftrightarrow BC^2=27\Leftrightarrow BC^2+AB^2=AC^2.$$

Suy ra tam giác ABC vuông tại $B,$ do đó bán kính $R=\dfrac{AC}{2}=3.$ **Chọn A.**

Câu 36. Tam giác ABC có $BC=21\text{cm},\ CA=17\text{cm},\ AB=10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=\dfrac{85}{2}\text{cm}$. **B.** $R=\dfrac{7}{4}\text{cm}$. **C.** $R=\dfrac{85}{8}\text{cm}$. **D.** $R=\dfrac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải. Đặt $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=24.$ Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}=\sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)}=84\ cm^2.$$

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{21.17.10}{4.84}=\dfrac{85}{8}\ cm.$

Chọn C.

Câu 37. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng:

A. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải. Xét tam giác ABC đều cạnh $a,$ gọi M là trung điểm của $BC.$

Ta có $AM\perp BC$ suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AM.BC=\dfrac{1}{2}.\sqrt{AB^2-BM^2}.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy bán kính cần tính là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{a^3}{4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Chọn C.

Câu 38. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH=\dfrac{12}{5}\text{cm}$ và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=2{,}5\text{cm}$. **B.** $R=1{,}5\text{cm}$. **C.** $R=2\text{cm}$. **D.** $R=3{,}5\text{cm}$.

Lời giải. Tam giác ABC vuông tại $A,$ có đường cao $AH\Rightarrow AB.AC=AH^2\quad(*).$

Mặt khác $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow AB=\dfrac{3}{4}AC$ thế vào $(*),$ ta được $\dfrac{3}{4}AC^2=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2\Leftrightarrow AC=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}.$

Suy ra $AB=\dfrac{3}{4}.\dfrac{8\sqrt{3}}{5}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{3}.$

Vậy bán kính cần tìm là $R=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{3}\ cm.$

Câu 39. Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3},\ BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABD.$

A. $R=\dfrac{9}{6}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=3\sqrt{3}$. **D.** $R=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải. Vì D là trung điểm của $BC\Rightarrow AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=27\Rightarrow AD=3\sqrt{3}.$

Tam giác ABD có $AB = BD = DA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3} = 3.$ **Chọn B.**

Câu 40.** Tam giác nhọn ABC có $AC = b,\ BC = a$, BB' là đường cao kẻ từ B và $\widehat{CBB'} = \alpha$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a, b và α là:

A. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. **B.** $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

C. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\cos\alpha}$. **D.** $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2\cos\alpha}$.

Lời giải. Xét tam giác $BB'C$ vuông tại B', có $\sin\widehat{CBB'} = \frac{B'C}{BC} \Rightarrow B'C = a.\sin\alpha.$

Mà $AB' + B'C = AC \Leftrightarrow AB' = b - a.\sin\alpha$ và $BB'^2 = a^2.\cos^2\alpha.$

Tam giác ABB' vuông tại B', có $AB = \sqrt{BB'^2 + AB'^2} = \sqrt{(b - a.\sin\alpha)^2 + a^2.\cos^2\alpha}$

$$= \sqrt{b^2 - 2ab.\sin\alpha + a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\alpha}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp cần tính là $\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\sin\alpha}}{2\cos\alpha}.$

Vấn đề 4. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Câu 41. Tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 6,\ \widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S_{\Delta ABC} = 9$. **D.** $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải. Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 42. Tam giác ABC có $AC = 4,\ \widehat{BAC} = 30^\circ,\ \widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC} = 8$. **B.** $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$. **C.** $S_{\Delta ABC} = 4$. **D.** $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta có $\widehat{ABC} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC} = 4.$ **Chọn C.**

Câu 43. Tam giác ABC có $a = 21,\ b = 17,\ c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC} = 16$. **B.** $S_{\Delta ABC} = 48$. **C.** $S_{\Delta ABC} = 24$. **D.** $S_{\Delta ABC} = 84$.

Lời giải. Ta có $p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-2)(24-17)(24-10)} = 84$. **Chọn D.**

Câu 44. Tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 6,\ \widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a = 3\sqrt{3}$. **B.** $h_a = \sqrt{3}$. **C.** $h_a = 3$. **D.** $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BC.h_a\longrightarrow h_a=\frac{2S}{BC}=3$. **Chọn C.**

Câu 45. Tam giác ABC có $AC=4,\ \widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài đường cao h uất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h=2\sqrt{3}$. **B.** $h=4\sqrt{3}$. **C.** $h=2$. **D.** $h=4$.

Lời giải. Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A.

Tam giác vuông AHC, có $\sin\widehat{ACH}=\frac{AH}{AC}\longrightarrow AH=AC.\sin\widehat{ACH}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Chọn A.

Câu 46. Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC. Tính BB'.

A. $BB'=8$. **B.** $BB'=\frac{84}{5}$. **C.** $BB'=\frac{168}{17}$. **D.** $BB'=\frac{84}{17}$.

Lời giải. Ta cĩ $p=\frac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-2)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại cĩ $S=\frac{1}{2}b.BB'\longleftrightarrow 84=\frac{1}{2}.17.BB'\longrightarrow BB'=\frac{168}{17}$. **Chọn C.**

Câu 47. Tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ ằng:

A. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin A=\frac{3}{8}$. **C.** $\sin A=\frac{4}{5}$. **D.** $\sin A=\frac{8}{9}$.

Lời giải. Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}\Leftrightarrow 64=\frac{1}{2}.8.18.\sin A\Leftrightarrow \sin A=\frac{8}{9}$. **Chọn D.**

Câu 48. Hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45^0$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải. Diện tích tam giác ABD là $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45^0=\frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABD}=2.\frac{a^2}{2}=a^2$. **Chọn C.**

Câu 49*. Tam giác ABC vuông tại A có $AB=AC=30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC bằng:

A. 50 cm^2. **B.** $50\sqrt{2}\text{ cm}^2$. **C.** 75 cm^2. **D.** $15\sqrt{105}\text{ cm}^2$.

Lời giải. Vì F là trung điểm của $AC\Rightarrow FC=\frac{1}{2}AC=15\ cm.$

Đường thẳng BF cắt CE tại G suy ra G là trọng tâm tam giác $ABC.$

Khi đó $\frac{d(B;(AC))}{d(G;(AC))}=\frac{BF}{GF}=3\Rightarrow d(G;(AC))=\frac{1}{3}d(B;(AC))=\frac{AB}{3}=10\ cm.$

Vậy diện tích tam giác GFC là $S_{\Delta GFC}=\frac{1}{2}.d(G;(AC)).FC=\frac{1}{2}.10.15=75\ cm^2$. **Chọn C.**

Câu 50*. Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2 **B.** $13\sqrt{2}\text{ cm}^2$ **C.** $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$ **D.** 15 cm^2.

Lời giải. Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng $a.$

Theo định lí Sin, ta có $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sin 60^0}=2.4\Leftrightarrow a=8.\sin 60^0=4\sqrt{3}.$

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}.\left(4\sqrt{3}\right)^2.\sin 60^0=12\sqrt{3}\ cm^2.$

Chọn C.

Câu 51*. Tam giác ABC có $BC=2\sqrt{3},\ AC=2AB$ và độ dài đường cao $AH=2$. Tính độ dài cạnh AB.

A. $AB=2$.

B. $AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $AB=2$ hoặc $AB=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

D. $AB=2$ hoặc $AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Ta có $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}+3AB}{2}$.

Suy ra $S=\sqrt{\left(\dfrac{3AB+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{3AB-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}-AB}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}+AB}{2}\right)}$.

Lại có $S=\dfrac{1}{2}BC.AH=2\sqrt{3}.$

Từ đó ta có $2\sqrt{3}=\left(\dfrac{3AB+2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{3AB-2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}-AB}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}+AB}{2}\right)$

$\longleftrightarrow 12=\dfrac{\left(9AB^2-12\right)\left(12-AB^2\right)}{16}\longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}AB=2\\ AB=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 52*. Tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $6S$.

Lời giải. Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S=\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin\widehat{ACB}=6.\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=6S.$ **Chọn D.**

Câu 53*. Tam giác ABC có $BC=a$ và $CA=b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 150^0. **D.** 120^0.

Lời giải. Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Vì a,b không đổi và $\sin\widehat{ACB}\le 1,\ \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC}\le\dfrac{ab}{2}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{ACB}=1\Leftrightarrow\widehat{ACB}=90^0.$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{ab}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 54*. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến $BM,\ CN$ vuông góc với nhau và có $BC=3$, góc $\widehat{BAC}=30^0$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=3\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$. **C.** $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Vì $BM\perp CN\longrightarrow 5a^2=b^2+c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 5a^2 - 2bc\cos A \longrightarrow bc = \dfrac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a^2}{\cos A}.\sin A = a^2\tan A = 3\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Vấn đề 5. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Câu 55. Tam giác ABC có $AB = 5,\ AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$. **B.** $r = 2$. **C.** $r = \sqrt{3}$. **D.** $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải. Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 49 \longrightarrow BC = 7.$$

Diện tích $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{1}{2}.5.8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 56. Tam giác ABC có $a = 21,\ b = 17,\ c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$. **B.** $r = 7$. **C.** $r = \dfrac{7}{2}$. **D.** $r = 8$.

Lời giải. Ta có $p = \dfrac{21 + 17 + 10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{24(24-2)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{24} = \dfrac{7}{2}$. **Chọn C.**

Câu 57. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a.

A. $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $r = \dfrac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải. Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $S = pr \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **Chọn C.**

Câu 58. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm. **B.** $r = \sqrt{2}$ cm. **C.** $r = 2$ cm. **D.** $r = 3$ cm.

Lời giải. Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = 24$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = 2$ cm. **Chọn C.**

Câu 59. Tam giác ABC vuông cân tại A, có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=\frac{a}{2}$. **B.** $r=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $r=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $r=\frac{a}{3}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$.

Suy ra $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. **Chọn C.**

Câu 60. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Giả sử $AC=AB=a\longrightarrow BC=a\sqrt{2}$. Suy ra $R=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p=\frac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r}=1+\sqrt{2}$. **Chọn A.**