CHUYÊN ĐỀ NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

A.LÍ THUYẾT:

1.Các hằng đẳng thức

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

...

2.Nhị thức Newton(Niu-tơn)

a.Định lí:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Kết quả:

$$*(a-b)^n = \left[a+(-b)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$*(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k = C_n^0 + C_n^1 . x + ... + C_n^n . x^n$$

b.Tính chất của công thức nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$:

-Số các số hạng của công thức là n+1

-Tổng số mũ của a và b trong mỗi số hạng luôn luôn bằng số mũ của nhị thức: (n-k)+k=n

-Số hạng tổng quát của nhị thức là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

(Đó là số hạng thứ k+1 trong khai triển $(a+b)^n$)

-Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu, cuối thì bằng nhau.

- $2^n = C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^0$

- $0 = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n$

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

-Tam giác pascal: 1

Khi viết các hệ số lần lượt với n = 0,1,2,... ta được bảng

n	*k*						
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	....
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	... .

Trong tam giác số này, bắt đầu từ hàng thứ hai, mỗi số ở hàng thứ n từ cột thứ hai đến cột n-1 bằng tổng hai số đứng ở hàng trên cùng cột và cột trước nó. Sơ dĩ có quan hệ này là do có công thức truy hồi

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \text{ (Với } 1 < k < n)$$

<u>3.Một sô công thức khai triển hay sử dụng:</u>

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^0$
- $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n$
- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n x^0$
- $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k x^k = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$
- $(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n x^0$

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

4.Dấu hiệu nhận biết sử dụng nhị thức newton.

a.Khi cần chứng minh đẳng thức hay bất đẳng thức mà có $\sum_{i=1}^{n} C_n^i$ với i là số tự nhiên liên tiếp.

b. Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)C_n^i$ thì ta dùng đạo hàm $(i \in \mathbb{N})$

- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} (i+k)C_n^i$ thì ta nhân 2 vế với x^k rồi lấy đạo hàm
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} a^k C_n^i$ thì ta chọn giá trị của x=a thích hợp.
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i-1} C_n^i$ thì ta lấy tích phân xác định trên $[a;b]$ thích hợp.
- Nếu bài toán cho khai triển $\left(x^a + x^b\right)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i \left(x^a\right)^{n-i} \left(x^b\right)^i = \sum_{i=1}^{n} C_n^i x^{a(n-i)+ib}$ thì hệ số của x^m là C^i_n sap cho phương trình $a(n-i)+bi=m$ có nghiệm $i \in \mathbb{N}$
- C_n^i đạt MAX khi $i = \frac{n-1}{2}$ hay $i = \frac{n+1}{2}$ với n lẽ, $i = \frac{n}{2}$ với n chẵn.

B.ỨNG DỤNG CỦA NHỊ THỨC NEWTON.

I.Các bài toán về hệ số nhị thức.

1.Bài toán tìm hệ số trong khai triển newton.

Ví dụ 1:(Đại học Thuỷ lợi cơ sở II, 2000) Khai triển và rút gọn đa thức:

$Q(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$

Ta được đa thức: $Q(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{14} x^{14}$

Xác định hệ số a_9.

Giải:

Hệ số x^9 trong các đa thức $(1+x)^9, (1+x)^{10}, ..., (1+x)^{14}$ lần lượt là: $C_9^9, C_{10}^5, ..., C_{14}^9$

Do đó:

$a_9 = C_9^9 + C_{10}^5 + ... + C_{14}^9 = 1 + 10 + \frac{1}{2}.10.11 + \frac{1}{6}.10.11.12 + \frac{1}{24}.10.11.12.13 + \frac{1}{20}.10.11.12.13.14$

=11+55+220+715+2002=3003

Ví dụ 2:(ĐHBKHN-2000) Giải bất phương trình: $\frac{1}{2} A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x} C_x^3 + 10$

Giải:

Điều kiện: x là số nguyên dương và $x \ge 3$

Ta có: dất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{(2x-1)2x}{2}-(x-1)x\le\frac{6(x-2)(x-1)}{3!x}+10$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x-1)-x(x-2)\le(x-2)(x-1)+10$$

$$\Leftrightarrow 3x\le 12\Leftrightarrow x\le 4$$

Vì x là nghiệm nguyên dương và $x\ge 3$ nên $x\in\{3;4\}$

Ví dụ 3: (ĐH KA 2004) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $\left[1+x^2(1-x)^8\right]$

Giải:

Cách 1: Ta có: $f(x)=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{2k}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^ix^i\right]^k$.

Vậy ta có hệ số của x^8 là: $(-1)^iC_8^kC_k^i$ thoã $\begin{cases}0\le i\le k\le 8\\2k+i=8\\i,k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}i=0\\k=4\end{cases}\\\begin{cases}i=2\\k=3\end{cases}\end{array}\right.$

Hệ số trong khai triển của x^8 là: $(-1)^0C_8^4C_4^0+(-1)^2C_8^3C_3^2$=238

Cách 2: Ta có:

$$f(x)=C_8^0+...+C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3+C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4+...+C_8^8\left[x^2(1-x)\right]^8$$

Nhận thấy: x^8 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ 4: $C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3$
- Số hạng thứ 5: $C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4$

Với hệ số tương đương với: $A_8=C_8^3C_3^2+C_8^4C_4^0$=238

Ví dụ 4:(ĐH HCQG, 2000)

a) Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{12}$

b) Cho biết tổng tất cả các hệ sô của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a $(a\in\mathbb{N}^*)$ của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.(ĐHSPHN, khối D,2000)

Giải:

a) Số hạng thứ (k+1) trong khai triển là:

$$a_k=C_{12}^kx^{12-x}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{12}^kx^{12-2k}\quad(0\le k\le 12)$$

Ta chọn $12-2k=8\Leftrightarrow k=2$

Vậy số hạng thứ 3 trong khai triển chứa x^8 và có hệ số là: $C_{12}^2=66$

b) Ta có: $(1+x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{2n}=C_n^k+C_n^1x^2+...+C_n^kx^{12-2k}$

Với x=1 thì: $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=1024\Leftrightarrow 2^n=2^{10}\Leftrightarrow n=10$

Do đó hệ số a (của x^{12}) là: $C_{10}^{6} = 210$

Ví dụ 5:(HVKTQS, 2000) Khai triển đa thức:
$P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + ... + a_{12}x^{12}$
Tìm $\max(a_0, a_1, a_2, ..., a_{12})$

Giải:

Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k > a_{k-1}$

Từ đây ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{12-k+1} \\ \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2, ..., a_{12}) = a_8 = C_{12}^{8} 2^{18} = 126720$

<u>2.Bài toán tìm sô hạng trong khai triển newton.</u>

Ví dụ 6: Tìm số hạng thứ 21 trong khai triển: $(2-3x)^{25}$

Giải:

Số hạng thứ 21 trong khai triển là: $C_{25}^{20} 2^5 (-3x)^{20} = C_{25}^{20} 2^5 3^{20} x^{20}$

Ví dụ 7:

a. Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau $(x^3 + xy)^{21}$

b. Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau $\left(x\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$

Giải:

a. Khai triển $(x^3 + xy)^{20}$ có 21+1=22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số thứ 11 và 12.
   - Số hạng thứ 11 là: $C_{21}^{10} (x^3)^{11} (xy)^{10} = C_{21}^{10} x^{43} y^{10}$
   - Số hạng thứ 12 là: $C_{21}^{11} (x^3)^{10} (xy)^{11} = C_{21}^{10} x^{41} y^{11}$

b. Khai triển $\left(x\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$ có 20+1=21 số hạng. Nên số hạng đứng giữa 2 số là số hạng thứ $\left[\dfrac{21}{2}\right] + 1 = 16 : C_{20}^{10} \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{10} \left((xy)^{-\frac{2}{3}}\right)^{10} = C_{20}^{10} x^{\frac{65}{6}} y^{-\frac{20}{3}}$

(Với [x] là ký hiệu phần nguyên của x nghĩa là sô nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Ví dụ 8: (ĐH Khối D-2004) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.

$f\left(x\right)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$

Giải:

Số hạng tổng quát trong khai triển: $T_{k+1}=C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=C_7^k x^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}\left(k\in\mathbb{N},k\le 7\right)$

Ứng với số hạng không chứa x ta có: $\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k=0\Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển $f\left(x\right)$ là: $C_7^4=35$

Ví dụ 9: (ĐH SPHN-2001) Cho khai triển nhị thức:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Giải:

Ta có: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\left(1+2x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{n}C_{10}^k\left(2x\right)^k\Rightarrow a_k=\frac{1}{3^{10}}C_{10}^k2^k$

Ta có a_k đạt được max

$$\Rightarrow\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\C_{10}^k2^k\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2^k10!}{k!\left(10-k\right)!}\ge\frac{2^k10!}{\left(k+1\right)!\left(9-k\right)!}\\\frac{2^k10!}{k!\left(10-k\right)!}\ge\frac{2^k10!}{\left(k-1\right)!\left(11-k\right)!}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1}\\\frac{2}{k}\ge\frac{2}{11-k}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}$$

$\Rightarrow k=7\left(k\in\mathbb{N},k\in\left[0,10\right]\right)$

Vậy max $a_k=a_7=\frac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$

Bài tập áp dụng

Bài 1: (ĐH TK-2002) Gọi $a_1, a_2,\ldots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$\left(x+1\right)\left(x+2\right)=x^{11}+a_1x^{10}+...+a_{11}$

Hãy tìm hệ số a_5

Bài 2: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $x\left(1-2x\right)^5+x^2\left(1+3x\right)^{10}$ (Khối D-2007)

Bài 3: Tìm hệ số của $x^5y^3z^6t^6$ trong khai triển đa thức $\left(x+y+z+t\right)^{20}$ (Đề 4 "TH&TT" - 2003)

Bài 4: (TT ĐH- chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An) Xác định hệ số của x^{11} trong khai triển đa thức: $\left(x^2+2\right)^n\left(3x^3+1\right)^n$ biết:

$$C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+...+\left(-1\right)^k3^kC_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^0=1024$$

Bài 5: (LAISAC) Khai triển $P(x)=\left(x^3+\frac{1}{2x^2}\right)^n$ ta được

$P(x)=a_0x^{3n}+a_1x^{3n-5}+a_2x^{3n-10}+...$ Biết rằng ba hệ số đầu a_0, a_1, a_2 lập thành cấp số cộng. Tính số hạng thứ x^4

II. Áp dụng nhị thứ Newton để chứng minh hệ thức và tính tổng tổ hợp.

1. Thuần nhị thức Newton

Dấu hiệu nhận biết: Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k}b^k$ thì ta sẽ dùng trực tiếp nhị thức Newton: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$. Việc còn lại chỉ là khéo léo chọn a,b.

Ví dụ 10: Tính tổng $3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-...+C_{16}^{16}$

Giải:

Dễ dàng thấy tổng trên có dạng như dấu hiệu nêu trên. Ta sẽ chọn a=3, b=-1. Khi đó tổng trên sẽ bằng $(3-1)^{16}=2^{16}$

Ví dụ 11: (ĐH Hàng Hải-2000) Chứng minh rằng:

$C_{2n}^0+3^2C_{2n}^2+3^4C_{2n}^4+...+3^{2n}C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$

Giải:

$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\ (1)$

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\ (2)$

Lấy (1) + (2) ta được:

$$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=2\left[C_{2n}^0+C_{2n}^2x^2+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}\right]$$

$$(4)^{2n}+(-2)^{2n}=2\left[C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{4n}+2^{2n}}{2}=C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$$

Chọn x=3 suy ra: $\Leftrightarrow \frac{2^{2n}\left(2^{2n}+1\right)}{2}=C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$$\Leftrightarrow 2^{2n-1}(2^{2n}+1)=C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$$

$\Rightarrow$ ĐPCM

2.Sử dụng đạo hàm cấp 1,2.

a.Đạo hàm cấp 1.

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1,2,3,…,n hay n,…,3,2,1 tức là số hạng đó có dạng kC_n^k hoặc $kC_n^k a^{n-k}b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 để tính. Cụ thể:

$(a+x)^n=C_n^0a^n+2C_n^1a^{n-1}x+...+nC_n^nax^n$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$n(a+x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} + ... + nC_n^n a x^{n-1} (1)$

Đến đây thay x,a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm.

Ví dụ 12:(ĐH BKHN-1999) Tính tổng $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1} nC_n^n$

Giải:

Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP(1). Việc còn lại chỉ cần chọn a=1,x=-1 ta tính được tổng băng 0.

Cách khác: Sử dụng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta tính được tổng bằng:

$nC_{n-1}^0 - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + ... + (-1)^{n-1} nC_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$

Ví dụ 13:Tính tổng: $2008C_{2007}^0 + 2007C_{2007}^1 + ... + C_{2007}^{2007}$

Giải:

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008,2007,…,1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$(x+1)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2007} + C_{2007}^1 x^{2006} + ... + C_{2007}^{2007}$

Bây giờ nếu đạo lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^0 x^{2006}$ trong khi đó đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm với x vào đẳng thức trên rồi mới dùng đạo hàm:

$x(x+1)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2008} + C_{2007}^1 x^{2007} + ... + C_{2007}^{2007} x$

$\Leftrightarrow (x+1)^{2006}(2008x+1) = 2008C_{2007}^0 x^{2007} + 2007C_{2007}^1 x^{2006} + ... + C_{2007}^{2007}$

Thay x=1 vào ta tìm được tổng là 2009.2^{2006}

<u>b.Đạo hàm cấp 2.</u>

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng 1.2,2.3,…,(n-1)n hay (n-1)n,…,3.2,2.1 hay $1^2,2^2,…,n^2$ (không kể dấu) tức có dạng $k(k-1)C_n^k a^{n-k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1)C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức

$(a+bx)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1} bx + ... + C_n^n b^n x^n$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$bn(a+bx)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} b + 2C_n^2 a^{n-2} b^2 x ... + nC_n^n b^n x^{n-1}$

Đạo hàm lần nữa:

$b^2 n(n-1)(a+bx^{n-2}) = 2.1C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + n(n-1)C_n^n b^n x^{n-1} (2)$

Đến đây ta gần như giải quyết xong ví dụ toán chỉ việc thay a,b,x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Ví dụ14: (ĐH AN-CS Khối A 1998) Cho $f(x) = (1+x)^n, (2 \le n \le \mathbb{Z})$

a.Tính $f''(1)$

b.Chứng minh rằng:
$2.1C_n^2+3.2C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=n(n-1)2^{n-2}$

Giải:

a. $f''(x)=n(1+x)^{n-1}\Rightarrow f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\Rightarrow f''(1)=n(1+x)^{n-2}$

b. Ta có

$$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k=C_n^0+C_n^1x+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k$$

$$f'(x)=C_n^1+\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$$

$$f''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$$

$$\Rightarrow f''(1)=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)C_n^k=2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(p+1)C_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{2n-1}\ (\text{ĐPCM})$$

Từ câu b thay (n-1)=(n+1) thì ta có một bài toán khác:

b'. Chứng minh rằng: $2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(n+1)pC_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

Với bài toán này ta giải như sau:

Xét nhị thức: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+...+C_n^nx^n$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $x\neq 0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được: $2n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=2C_n^1x+3.2C_n^2x+...+(n+1)nC_n^nx^{n-1}$

Cho x=2 ta được ĐPCM

Bài tập áp dụng

Bài 1:(CĐSP Bến Tre Khối A-2002) Chứng minh rằng: $C_{20}^1+C_{20}^1+...+C_{20}^{19}=2^{19}$

Bài 2:(CĐ Khối T-M-2004)Chứng minh rằng : $C_{2004}^0+2^2C_{2004}^1+...+2^{2004}C_{2004}^{2004}=\dfrac{3^{2004}+1}{2}$

Bài 3:(ĐHKTQD-2000) Chứng minh:
$(2+x)^n=1.2^{n-1}.C_n^1+2.2^{n-2}.C_n^2+3.2^{n-2}.C_n^2+...+nC_n^n=n.3^{n-1}\ (\forall 1\le n\in\mathbb{Z})$

Bài 4: Rút gọn tổng: $1^2C_{2009}^1 2^{2008}+2^2C_{2009}^2 2^{2007}+...+2009^2C_{2009}^{2009}$

III.Một số phương pháp khác:

Ví dụ 15: (ĐHQG TP.HCM 1997) Cho $\begin{cases}0\le m\in k\le n\\ k,m,n\in Z\end{cases}$

Chứng minh: $C_n^k.C_m^0+C_n^{k-1}C_m^1+...+C_n^{k-m}C_m^m=C_{n+m}^k$

Giải:

Ta có: $\begin{cases}(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + ... + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n \\ (1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + ... + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n}\end{cases}$

Suy ra hệ số x^k trong $(1+x)^n.(1+x)^m$ là $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + ... + C_m^m C_n^{k-m}$

Và hệ số x^k trong khai $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Đồng nhất thức: $(1+x)^n.(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$

Ta được: $C_n^k.C_m^0 + C_n^{k-1}C_m^1 + ... + C_n^{k-m}C_m^m = C_{n+m}^k \Rightarrow$ ĐPCM

Ví dụ16: (Đề2-TH&TT-2008) $S_2 = \left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + ... + n\left(C_n^n\right)^2$ với n là số tự nhiên lẽ

Giải:

Ta có:

$$S = \left(\left(C_n^1\right)^2 + (n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + ... + \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(C_n^{\frac{n-1}{2}}\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(C_n^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)^2 + n\left(C_n^n\right)^2$$

$$n\left(\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + n$$

$$= n\left(\left(C_n^{n+1}\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + n$$

$$\Rightarrow 2S_n = n\left[\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2\right] + n$$

Mặt khác ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n} \Rightarrow$ hệ số của x^n là: C_{2n}^n (*)

Trong khi đó: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$

Nên hệ số của x^n là $\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow C_{2n}^n - 1 = n\left[\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2\right]$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} C_{2n}^n \Rightarrow$ ĐPCM

Bài tập áp dụng

Bài 1: Chứng minh rằng:

a) $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-1} + ... + nC_n^n = n.4^{n-1}$ (ĐH Luật-2001)

b) $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$ (Đề 1-TH&TT-2008)

Bài 2: Tính các tổng sau:

a) $C_{30}^1 + 3.2^2 C_{30}^3 + 5.2^4 C_{30}^5 + ... + 29.2^{28} C_{30}^{29}$

b) $C_n^0 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$

Bài 3: Đặt $T_k = (-1)^{k+1} 3^k C_{6n}^{2k+1}$. Chứng minh $\sum_{k=1}^{3n} T_k = 0$

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG