MỤC LỤC

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Mục lục của chương

Chuyên đề 1

HÀM SỐ BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1) Hàm số bậc hai

Định nghĩa 1.
Hàm số bậc hai được cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

2) Đồ thị của hàm số bậc hai

Định nghĩa 2.
Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

*** Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai.**

1. Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.
2. Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$.
3. Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\dfrac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

LƯU Ý. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục tung tại điểm $(0; c)$. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Vẽ Parabol

LƯU Ý. Khi vẽ cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).

3) Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$, ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

$+$ Với $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$+$ Với $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó ta có định lí sau

4) Định lý. *Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.*

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

5) Phương trình hoành độ giao điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2). Khi đó, nếu $M(x; y)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) thì tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x).\ (*)$$

Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2). Và nếu giao điểm M có mang những đặc điểm, tính chất nào đó thì phương trình $(*)$ cũng sẽ tồn tại những đặc điểm tương ứng với các đặc tính đó. Từ đây suy ra, để giải một bài toán về tính chất giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2), ta có thể tiến hành thẹo các bước sau:

1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và C_2 (tức là phương trình $(*)$).
2. Biến đổi phương trình về dạng bậc hai đơn giản.
3. Dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán để chuyển về điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm.

6) Định lý (Định lý Vi-ét). *Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.*

1. *Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thì ta có:* $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$
2. *Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.*

③ *Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

④ *Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

⑤ *Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác x_0 khi và chỉ khi:* $\begin{cases} \Delta > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \end{cases}$.

7) Một vài công thức cần nhớ

Lưu ý. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Lưu ý. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ (lấy $x = 0$ thế vào hàm số).

Lưu ý. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị với trục hoành.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Đồ thị hàm số bậc hai và các vấn đề liên quan

Muốn vẽ parabol, ta cần là các bước sau:

① Xác định tọa độ đỉnh $S(x_0; y_0)$, với $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, y_0 được tính bằng cách thay x_0 vào hàm số và bấm máy.

② Xác định trục đối xứng $d\colon x = -\dfrac{b}{2a}$.

③ Lập bảng giá trị (5 điểm), hoặc tìm giao điểm với Ox, Oy.

④ Xác định "chiều quay" của parabol và vẽ **parabol** có đỉnh S, có trục đối xứng d và qua các điểm vừa xác định.

Ví dụ 1 ★☆☆☆☆

Vẽ đồ thị các hàm số sau và nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng

① $y = -x^2 + 5x - 4$

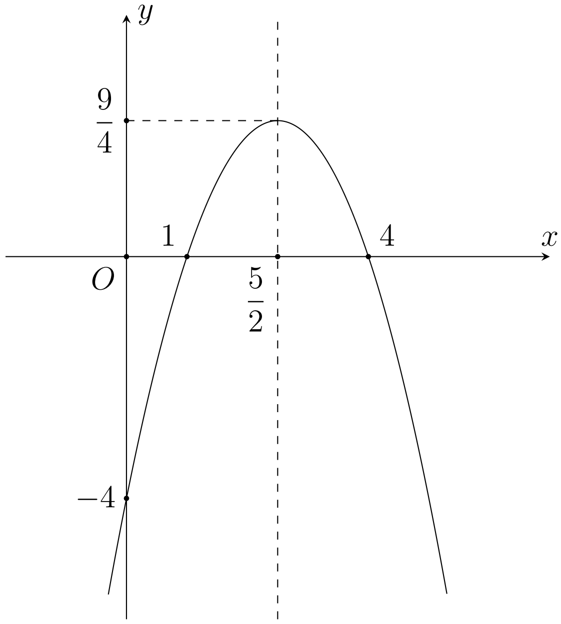
② $y = x^2 + 2x - 3$

③ $y = \begin{cases} -x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geqslant 1. \end{cases}$

Lời giải.

1. Vẽ đồ thị hàm số $y=-x^2+5x-4$

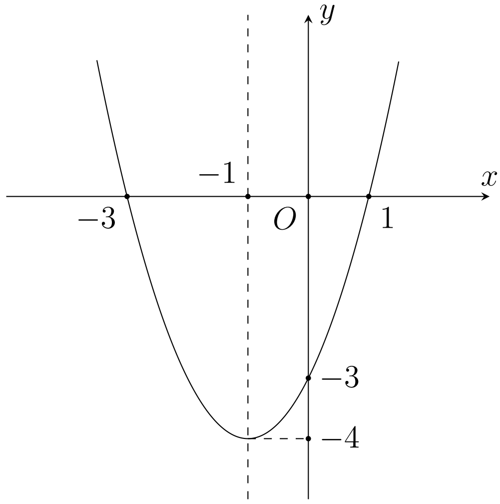
   - Tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.
   - Trục đối xứng $x=\dfrac{5}{2}$.
   - Hệ số $a=-1<0$: bề lõm quay xuống dưới.
   - Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-4)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(4;0)$.



   Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

2. Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+2x-3$.

   - Tọa độ đỉnh $I(-1;-4)$.
   - Trục đối xứng $x=-1$.
   - Hệ số $a=1>0$: bề lõm quay lên trên.
   - Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.

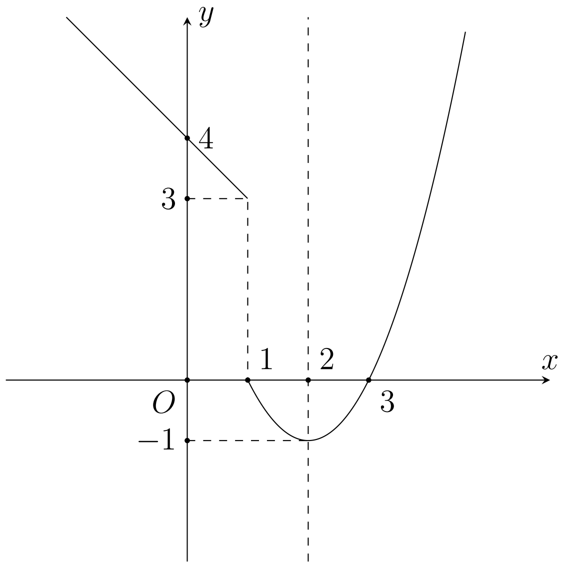


Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

3. Khi $x < 1$ thì $y = -x + 4$.
   - $x = 1 \Rightarrow y = 3$, ta được điểm $A(1; 3)$
   - $x = 0 \Rightarrow y = 4$, ta được điểm $B(0; 4)$.

   Khi $x \geqslant 1$ thì $y = x^2 + 2x - 3$.
   - Tọa độ đỉnh $I(2; -1)$.
   - Trục đối xứng $x = 2$
   - Các điểm $M(1; 0)$, $N(3; 0)$ thuộc đồ thị.

   Thực hiện vẽ đồ thị trên từng miền. Kết hợp lại, ta được hình sau:



Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

1. $y = 7x^2 - 3x + 10$.
2. $y = -2x^2 - x + 1$.

Lời giải.

1. Hàm số $y = 7x^2 - 3x + 10$ có $a = 7 > 0$ nên y đạt giá trị bé nhất tại đỉnh.
   Suy ra $y_{\min} = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{271}{8}$ và không tồn tại giá trị lớn nhất.
2. Hàm số $y = -2x^2 - x + 1$ có $a = -2 < 0$ nên y đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.
   Suy ra $y_{\max} = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{9}{8}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất (nếu có) của các hàm số sau

1. $y = x^2 - 3x$ với $0 \leqslant x \leqslant 2$.
2. $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Lời giải.

1. Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2} \in [0;2]$.

Vậy $\min y = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$; $\max y = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{0, -2\} = 0$.

2. Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x_I = -\dfrac{b}{2a} = -2 \notin [0;4]$.

Ta có $f(4) = -29$; $f(0) = 3$.

Vậy $\min y = f(4) = -29$; $\max y = f(0) = 3$.

Dạng 2 Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$

Việc xác định (P) hay đi tìm các hệ số a, b, c, ta thường quy về việc giải hệ phương trình liên quan đến ba ẩn a, b, c. Khi tìm các phương trình liên quan, ta chú ý một số nội dung sau:

- Nếu đề cho (P) qua điểm $(x_0; y_0)$ thì ta được: $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.
- Nếu đề cho tọa độ đỉnh là $(x_0; y_0)$ thì ta được
  ① Hoành độ đỉnh $-\dfrac{b}{2a} = x_0$;
  ② $(x_0; y_0) \in (P)$, suy ra $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.
  ③ (P) viết dưới dạng $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.
- Nếu đề cho hoành độ đỉnh (hoặc trục đối xứng) $x = x_0$, ta được $-\dfrac{b}{2a} = x_0$.
- Nếu đề cho tung độ đỉnh $y = y_0$, ta được $-\dfrac{\Delta}{4a} = y_0$.

Ví dụ 4 ★☆☆☆☆

Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

1. Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.
2. Có đỉnh $I(2;-2)$.
3. Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\dfrac{3}{4}$.
4. Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

1. Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = 2x^2 + x + 2$.

2. Vì (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 - 4ac = 8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 - 16a = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \end{cases}$

Do (P) là parabol nên $a \neq 0$ nên ta chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \end{cases}$

Vậy $(P)\colon y = x^2 - 4x + 2$.

3. Vì (P) đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x=-\dfrac{3}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases}9a+3b+2=-4\\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=-2\\ b=\dfrac{3}{2}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{4}{9}\\ b=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Vậy $(P)\colon y=-\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{2}{3}x+2$.

4. Vì (P) đi qua điểm $B(-1;6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\dfrac{1}{4}$ nên ta có

$$\begin{cases}a-b+2=6\\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=4\\ b^2-4ac=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4+b\\ b^2-8(4+b)=4+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4+b\\ b^2-9b-36=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=16\\ b=12\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=1\\ b=-3.\end{cases}$

- Với $\begin{cases}a=16\\ b=12\end{cases}$ ta có $(P)\colon y=16x^2+12x+2$.
- Với $a=1$, $b=-3$ ta có $(P)\colon y=x^2-3x+2$.

Vậy $(P)\colon y=16x^2+12x+2$ hoặc $(P)\colon y=x^2-3x+2$.

Ví dụ 5 ★☆☆☆☆

Xác định parabol $y=ax^2+bx+c$, biết rằng parabol đó

1. Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.
2. Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2, cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2.
3. Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3.

Lời giải.

1. Vì (P) đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$ nên suy ra $\begin{cases}a+b+c=1\\ a-b+c=-3\\ c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=0.\end{cases}$

   Vậy $(P)\colon y=-x^2+2x$.

2. Gọi A và B là hai giao điểm cuả (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Suy ra $A(-1;0)$, $B(2;0)$.

   Gọi C là giao điểm của (P) với trục Oy có tung độ bằng -2. Suy ra $C(0;-2)$.

   Theo giả thiết, (P) đi qua ba điểm A, B, C nên ta có $\begin{cases}a-b+c=0\\ 4a+2b+c=0\\ c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-2.\end{cases}$

   Vậy $(P)\colon y=x^2-x-2$.

3. Gọi E và F là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là 1 và 3. Suy ra $E(1;0)$, $F(3;0)$.

Theo giả thiết, (P) đi qua ba điểm M, E, F nên ta có

$$\begin{cases}16a+4b+c=-6\\ a+b+c=0\\ 9a+3b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-a-b\\ 15a+3b=-6\\ 8a+2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=8\\ c=-6.\end{cases}$$

Vậy $(P)\colon y=-2x^2+8x-6$.

Dạng 3 Ứng dụng của hàm số bậc hai trong thực tế

- Một số mô hình thực tế (cổng chào, cầu,...) có hình dạng parabol;
- Một số chuyển động có phương trình quỹ đạo là một hàm bậc hai.

Khi thực hiện đo đạc tính toán, ta thường dùng lý thuyết về hàm số bậc hai để giải các bài toán trên.

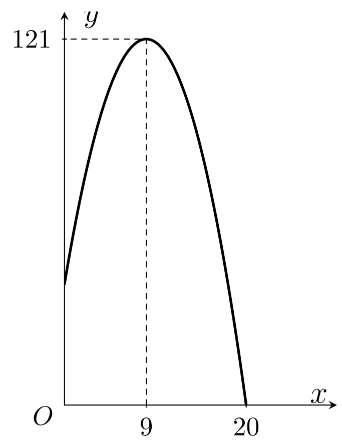
Ví dụ 6 ★☆☆☆☆

Một vật chuyển động với vận tốc $v=40+18t-t^2$ (m/s). Trong 20 giây đầu vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

ĐS: Đáp số: $v_{\max}=121$ m/s.

Lời giải.

Đồ thị của hàm vận tốc v có dạng Parabol bề lõm hướng xuống dưới. Đỉnh của Parabol là $I(9;121)$. Do đó trong đoạn $[0;20]$, vận tốc lớn nhất của vật là 121 m/s.

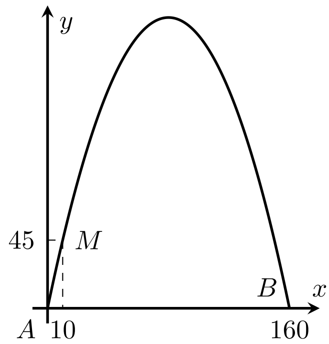


Ví dụ 7 ★☆☆☆☆

Cổng vào miền Tây (Gateway Arch) ở thành phố St. Louis, nước Mỹ, có hình dạng là một phần của parabol như hình vẽ. Khoảng cách giữa 2 chân cổng $AB=160$m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 45m so với mặt đất (tại điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng thẹo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Hãy tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng.

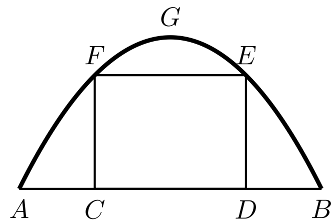
Lời giải.

Đặt hệ trục toạ độ với Axy như hình vẽ.
Xét parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$.
$M \in (P) \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 45$
$A \in (P) \Leftrightarrow c = 0$. $B \in (P) \Leftrightarrow 160^2a + 160b + c = 0$.
Giải hệ được $y = -0,03x^2 + 4,8x$.
$\Rightarrow$ Chiều cao cổng là $y(80) = 192$m.



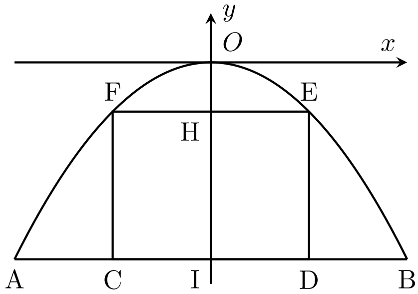
Ví dụ 8 ★☆☆☆☆

Một chiếc cổng hình Parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hai cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng Parabol là 4 m còn kích thước cửa ở giữa là 3 m $\times$ 4 m. Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B. (xem hình minh họa bên).



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với $O \equiv G$.
Gọi phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.
Do parabol đi qua gốc tọa độ O nên $c = 0$.
Do parabol có trục đối xứng $x = 0$ nên $b = 0 \Rightarrow (P)\colon y = ax^2$.
Do kích thước cửa ở giữa là 3 m $\times$ 4 m và chiều cao cổng parabol là 4 m nên $OI = 4$ m, $HI = 3$ m, $CD = 4$ m $\Rightarrow HE = 2$ m, $OH = 1$ m $\Rightarrow E(2; -1)$ và $B\left(x_B; -4\right)$ với $x_B > 0$.
Do $E \in (P)$ nên tìm được $a = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow (P)\colon y = -\dfrac{1}{4}x^2$.
Do $B \in (P)$ nên tìm được $x_B = 4$. Vậy $AB = 8$ m.



Ví dụ 9 ★☆☆☆☆

Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5 m và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao 6 m. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

ĐS: Đáp số: $h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}2$

Lời giải. Gọi $h = at^2 + bt + c$ $(a \neq 0)$.

Chọn mốc thời gian $t = 0$ tại thời điểm quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2 m, suy ra $c = 1{,}2$.
Do đó biểu thức của h có dạng $h = at^2 + bt + 1{,}2$ $(a \neq 0)$.
Tại thời điểm $t = 1$ giây nó đạt độ cao 8,5 m nên ta có $a + b = 7{,}3$.
Tại thời điểm $t = 2$ giây nó đạt độ cao 6 m nên ta có $4a + 2b = 4{,}8$.

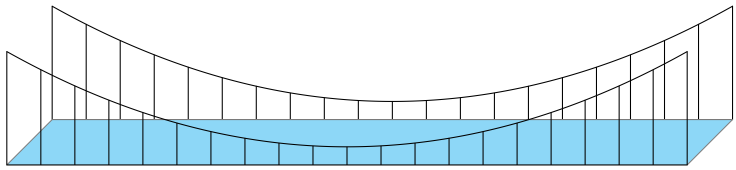
Như vậy ta có

$$\begin{cases} a+b=7{,}3 \\ 4a+2b=4{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4{,}9 \\ b=12{,}2. \end{cases}$$

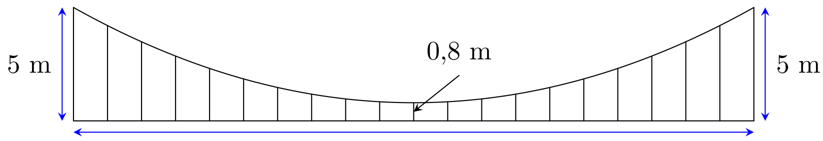
Vậy $h=-4{,}9t^2+12{,}2t+1{,}2$.

Ví dụ 10 ★☆☆☆☆

Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



Hình vẽ cầu dây văng



Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Dựa vào bản vẽ ở hình bên, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết

Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m, khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

Nhịp cầu dài 30 m.

Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

ĐS: Đáp số: 103,2 m

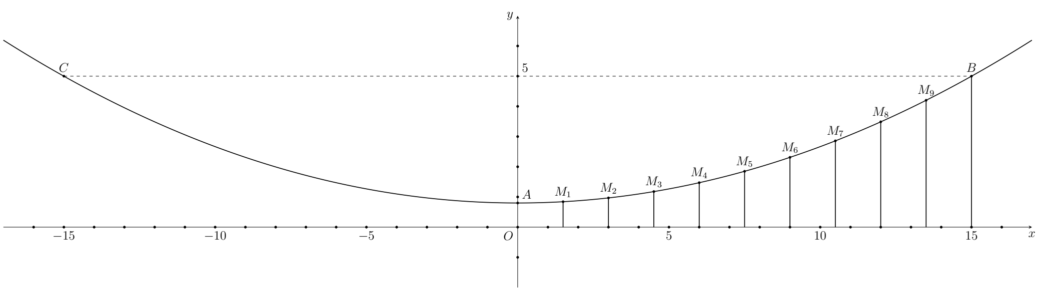
Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ sao cho đầu mút A của dây ngắn nhất thuộc trục tung và thanh ngang mặt cầu thuộc trục hoành. Gọi B là điểm đầu mút bên phải (khi nhìn thẳng vào mặt bên của thành cầu) của dây cáp dài nhất thì với các giả thiết:

- Dây dài nhất là 5 m, dây ngắn nhất là 0,8 m. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.
- Nhịp cầu dài 30 m.

Ngoài ra, từ bản vẽ ta thấy có tất cả 21 dây cáp dọc. Suy ra $A(0;0{,}8)$, $B(15;5)$.

Do parabol nhận trục tung là trục đối xứng nên hàm số có công thức $y=f(x)=ax^2+c$.

Ta tìm được $a=\dfrac{4{,}2}{225}$ và $c=0{,}8$. Như vậy $y=\dfrac{4{,}2}{225}x^2+0{,}8$.



Chiều dài mỗi dây cáp dọc về mặt lý thuyết là tung độ điểm ứng với đầu mút trên cao của dây

cáp, ví dụ dây cáp có đầu mút A có chiều dài bằng tung độ điểm A.
Do tính đối xứng, ta có thể xét chiều dài các dây cáp bên phải rồi nhân hai thay vì tính chiều dài tất cả các dây cáp. Riêng dây cáp tại A chỉ tính một lần. Và các dây cáp cách đều nhau nên chiều dài 21 dây cáp cho một mặt là

$$\begin{aligned} L &= f(0) + 2[f(1{,}5) + f(3) + f(4{,}5) + f(6) + f(7{,}5) + f(9) + f(10{,}5) + f(12) + f(13{,}5) + f(15)] \\ &= 0{,}8 + 2 \cdot (0{,}842 + 0{,}968 + 1{,}178 + 1{,}472 + 1{,}850 + 2{,}312 + 2{,}858 + 3{,}488 + 4{,}202 + 5) \\ &= 49{,}14(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

Do cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp neo cố định và cần 2 mặt thành cầu nên chiều dài cáp cần sử dụng cho hai mặt là $2 \cdot 49{,}14 \cdot 105\% = 103{,}194$ (m).
Vậy chiều dài cáp cần sử dụng là khoảng 103,2 m.

BÀI TẬP

Bài 1. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 3 feet (1 feet = 0,3048 mét) so với mặt đất với vận tốc 100 feet/giây và ở một góc 45° so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $f(x) = -0{,}0032x^2 + x + 2$ trong đó $f(x)$ là chiều cao của bóng chày (thẹo feet) và x là khoảng cách thẹo chiều ngang của quả bóng tính từ vị trí ban đầu của quả bóng được đánh lên (thẹo feet). Tính chiều cao tối đa mà bóng chày đạt được.

Hướng dẫn giải. Chiều cao tối đa h của quả bóng là tung độ đỉnh của đồ thị hàm số $f(x) = -0{,}0032x^2 + x + 2$.
Ta tính được $h = 80{,}125$.

Bài 2. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu) đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \le x \le 4)$.
Khi đó:
Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).
Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$ (chiếc).
Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		4
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	2400	$\nearrow$	2450	$\searrow$	0

Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Bài 3. Một cửa hàng sách mua sách từ nhà xuất bản với giá là 3 USD/cuốn. Cửa hàng bán sách với giá là 15 USD/cuốn, tại giá bán này mỗi ngày sẽ bán được 200 cuốn. Cửa hàng có kế hoạch giảm giá để kích thích sức mua, và họ ước tính rằng cứ mỗi 1 USD mà giảm đi trong giá bán thì mỗi tháng sẽ bán nhiều hơn 20 cuốn. Tìm giá bán mới một quyển sách để cửa hàng đạt lợi nhuận cao nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi x là giá bán mới một quyển sách.
Và $P(x)$ là hàm tổng lợi nhuận tương ứng.
Lợi nhuận=(số sách bán)(lợi nhuận/ cuốn).

$$\begin{aligned}\text{Số sách bán được} &= 200 + 20 \cdot (\text{số đô la giảm đi})\\ &= 200 + 20 \cdot (15 - x)\\ &= 500 - 20x.\end{aligned}$$

Lợi nhuận mỗi cuốn sách là: $x - 3$.
Tổng lợi nhuận là:

$$\begin{aligned}P(x) &= (\text{số sách bán được}) \cdot (\text{lợi nhuận mỗi cuốn})\\ &= (500 - 20x)(x - 3)\\ &= -20x^2 + 560x - 1500.\end{aligned}$$

Đồ thị $P(x)$ là một parabol có đỉnh $I(14; 2420)$.
Do đó lợi nhuận cao nhất là 2420 USD khi giá một cuốn sách bán ra là 14 USD.

Bài 4. Ta có bảng giá trị của hàm cầu đối với sản phẩm A thẹo đơn giá của sản phẩm A như sau

Đơn giá sản phẩm A (đơn vị: nghìn đồng)	10	20	40	70	90
Lượng cầu (nhu cầu về số sản phẩm)	338	288	200	98	50

1. Giả sử hàm cầu là một hàm số bậc hai thẹo đơn giá x, hãy viết công thức của hàm này, biết rằng $c = 392$.
2. Chứng tỏ rằng hàm số có thể viết thành dạng $y = f(x) = a(b - x)^2$.
3. Giả sử hàm cầu này lấy mọi giá trị trên đoạn $[0; 100]$, hãy tính lượng cầu khi đơn giá sản phẩm A là $30, 50, 100$.
4. Cùng giả thiết với câu c, nếu lượng cầu là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng bao nhiêu (đơn vị: nghìn đồng)?

Hướng dẫn giải.

1. Theo giả thiết, hàm cầu là một hàm số bậc hai nên công thức của hàm số có dạng: $y = f(x) = ax^2 + bx + 392$.
   Ta chọn 2 cặp giá trị từ bảng đã cho lần lượt có $x = 10, x = 20$ thì được hệ phương trình sau: $\begin{cases} a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 392 = 338\\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 392 = 288.\end{cases}$
   Giải hệ phương trình này ta được $a = \dfrac{1}{50}; b = -\dfrac{28}{5}$.
   Vậy $y = f(x) = \dfrac{1}{50}x^2 - \dfrac{28}{5}x + 392$.

2. Hàm số này còn có thể thu gọn thành dạng $y = f(x) = \dfrac{(140-x)^2}{50} = \dfrac{1}{50}(140-x)^2$.
3. Khi $x = 30$ thì lượng cầu là $y = f(30) = 242$.
Khi $x = 50$ thì lượng cầu là $y = f(50) = 162$.
Khi $x = 100$ thì lượng cầu là $y = f(100) = 32$.
4. Nếu lượng cầu là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A được tính nhờ phương trình sau $\dfrac{1}{50}x^2 - \dfrac{28}{5}x + 392 = 150$.
Giải phương trình này, ta được $x_1 \approx 53,4$ và $x_2 \approx 226,6$.
Theo giả thiết câu c), hàm số xác định trên $[0;100]$ nên chọn $x_1 \approx 53,4$.
Vậy nếu lượng cầu là 150 sản phẩm thì đơn giá sản phẩm A là khoảng 54400 (đồng).

Bài 5. Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình chuyển động của vật này là

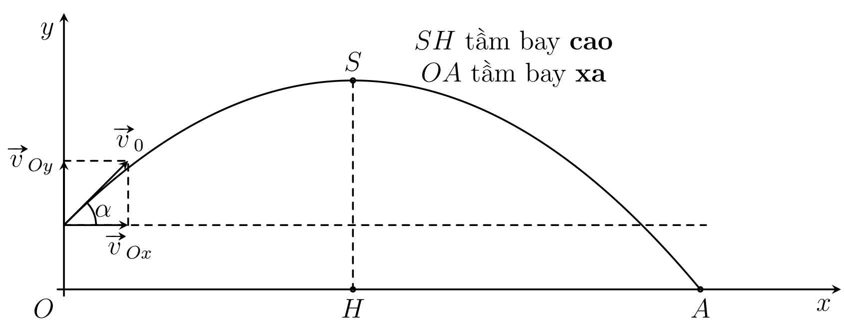
$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x + y_0.$$

Lấy giá trị $g = 10\text{m/s}^2$ cho gia tốc trọng trường.

1. Vật bị ném xiên như vậy có chuyển động theo đường xiên hay không? Tại sao?
2. Giả sử góc ném có số đo là 45°, vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, hãy viết phương trình chuyển động của vật.
3. Một vận động viên ném lao đã lập kỉ lục với độ xa 90 m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9 m và góc ném là khoảng 45°. Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném đi là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

1. Với các giá trị đã biết là góc ném, vận tốc đầu và gia tốc trọng trường g là hằng số thì phương trình chuyển động trong ném xiên là một hàm số bậc hai theo x. Do vậy đồ thị hàm số là 1 parabol. Quỹ đạo chuyển động các vật cũng là một phần trên parabol này nên nó không thể chuyển động theo đường xiên.
2. Với góc ném có số đo là 45°, vận tốc ban đầu của vật là 3m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, ta có phương trình chuyển động của vật này là
$y = \dfrac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x + y_0 = \dfrac{-10x^2}{2\cdot 3^2 \cdot \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ \cdot x + 1 = -\dfrac{10}{9}x^2 + x + 1.$
3. Theo giả thiết bài toán, ta có phương trình chuyển động của lao sau khi ném là
$y = \dfrac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x + y_0 = \dfrac{-10x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ \cdot x + 0,9 = -\dfrac{10}{v_0^2}x^2 + x + 0,9.$



Mặt khác, lao được ném đi đạt độ xa 90 m tức là $OA = 90$. Nói cách khác điểm $A(90; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Xét hàm số $f(90) = 0$ hay $-\dfrac{10}{v_0^2} \cdot 90^2 + 90 + 0,9 = 0$.

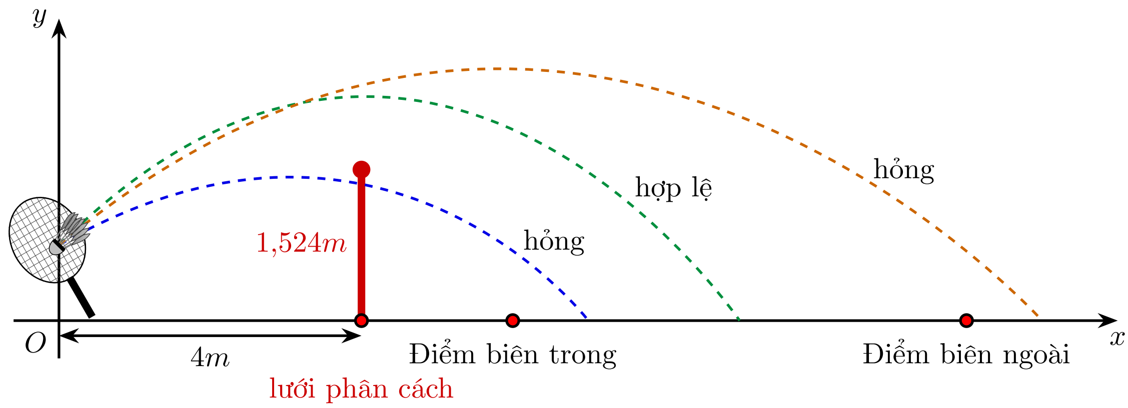
Giải theo ẩn v_0, ta được $v_0^2 = \dfrac{90000}{101}$. Suy ra $v_0 \approx 29,85$ m/s.

Bài 6. *Sử dụng công thức đã cung cấp ở* **Bài tập 10**, *hãy giải bài toán sau:*
Một người đang tập chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 30° (so với mặt đất).

1. Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7$ m so với mặt đất và vận tốc ban đầu của cầu là 8 m/s (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng).
2. Giữ giả thiết như câu a) và cho biết khoảng cách từ vị tri phát cầu đến lưới là 4 m. Lần phát cầu này có bị xem là hỏng không? Tại sao?

Thông tin bổ sung:

- Mép trên của lưới cầu lông cách mặt đất 1,524 m;
- Gia tốc trọng trường được chọn là 9,8 m/s^2.



Hình được vẽ bởi cô Lương Như Quỳnh (https://www.facebook.com/luongnhuquynh01)

Hướng dẫn giải.

1. Chọn hệ trục toạ độ như Hình 9 (vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung). Với $g = 9,8$ m/s^2, góc phát cầu $\alpha = 30°$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8$ m/s, phương trình quỹ đạo của cầu là:
$$y = -\frac{4,9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0,7 \quad (\text{với} x \geq 0).$$
Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên giải phương trình $-\frac{4,9}{48}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 0,7 = 0$ ta được $x_1 \approx -1,03$ và $x_2 \approx 6,68$.
Giá trị nghiệm dương cho ta khoảng cách từ vị tri người chơi cầu lông đến vị tri cầu rơi chạm đất là $6,68$ m.
2. Khi cầu bay tới vị tri lưới phân cách, nếu nó ở bên trên mặt lưới và điểm rơi không ra khỏi đường biên phía bên sân đối phương thì lần phát cầu mới được xem là hợp lệ.
Ta cần so sánh tung độ của điểm trên quỹ đạo (có hoành độ bằng khoảng cách từ gốc toạ độ đến chân lưới phân cách) với chiều cao mép trên của lưới để tìm câu trả lời.

Khi $x = 4$, ta có $y = -\frac{4,9}{48} \cdot 4^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 + 0,7 \approx 1,38$. Suy ra $y < 1,524$. Như vậy lần phát cầu đã bị hỏng vì điểm trên quỹ đạo của cầu thấp hơn mép trên của lưới

Câu 1. Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị (P) của mỗi hàm số bậc hai trong bảng dưới đây:

Hàm số	Tọa độ đỉnh	Phương trình trục đối xứng	Bề lõm	Tọa độ giao điểm của (P) và trục Oy	Tọa độ giao điểm của (P) và trục Ox
$y = -x^2 + 1$					
$y = x^2 - 2x + 3$					
$y = -2x^2 + 4x + 16$					
$y = x^2 + x - 2$					

Hướng dẫn giải. Ta có bảng mô tả như sau:

Hàm số	Tọa độ đỉnh	Phương trình trục đối xứng	Bề lõm	Tọa độ giao điểm của (P) và trục Oy	Tọa độ giao điểm của (P) và trục Ox
$y = -x^2 + 1$	$(0; 1)$	$x = 0$	Quay xuống	$(0; 1)$	$(-1; 0), (1; 0)$
$y = x^2 - 2x + 3$	$(1; 2)$	$x = 1$	Quay lên	$(0; 3)$	Không có
$y = -2x^2 + 4x + 16$	$(1; 18)$	$x = 1$	Quay xuống	$(0; 16)$	$(-2; 0); (4; 0)$
$y = x^2 + x - 2$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$	$x = -\frac{1}{2}$	Quay lên	$(0; -2)$	$(-2; 0), (1; 0)$

Câu 2. Hãy hoàn thành cột 2 và đánh dấu x vào ô thích hợp trong cột: 4 hoặc 5 hoặc 6:

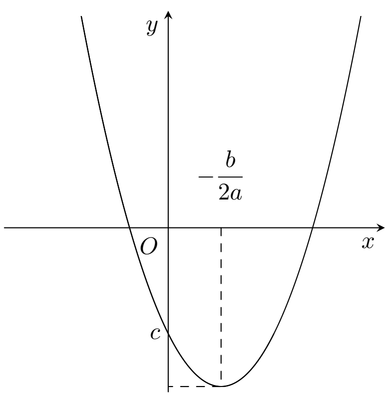
Hàm số	Bảng biến thiên	Trong khoảng	Đồng biến	Nghịch biến	Không có kết luận
$y = 2x^2 + 1$		$(-1; 0)$			
$y = -x^2 - 2x + 3$		$(-3; -2)$			
$y = x^2 - x + 3$		$(1; 2)$			
$y = -2x^2 + x - 1$		$(-1; 1)$			

Hướng dẫn giải.

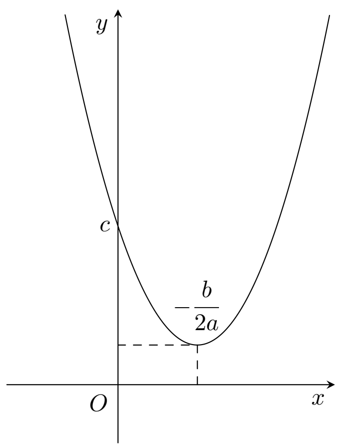
Hàm số	Bảng biến thiên	Trong khoảng	Đồng biến	Nghịch biến	Không có kết luận
$y = 2x^2 + 1$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$(-1; 0)$		x	

<table>
<tr><th>Hàm số</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Trong khoảng</th><th>Đồng biến</th><th>Nghịch biến</th><th>Không có kết luận</th></tr>
<tr><td>$y=-x^2-2x+3$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -1 & & +\infty \\ \hline & & & 4 & & \\ y & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$</td><td>$(-3;-2)$</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y=x^2-x+3$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline & +\infty & & & & +\infty \\ y & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & \frac{11}{4} & & \end{array}$</td><td>$(1;2)$</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y=-2x^2+x-1$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \frac{1}{4} & & +\infty \\ \hline & & & -\frac{7}{8} & & \\ y & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$</td><td>$(-1;1)$</td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
</table>

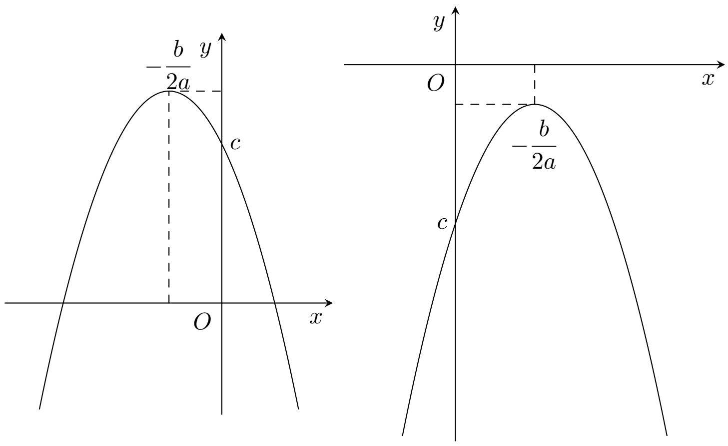
Câu 3. Trong các đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ dưới đây, hãy cho biết dấu của các hệ số a, b, c.



H1



H2



H3 H4

Hướng dẫn giải.

+ Xét hình H1:
  Ta có:
  -Phần đuôi đồ thị hướng lên trên suy ra $a > 0$.
  -Đỉnh của parabol lệch về phía bên phải Oy nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
  -Giao điểm của parobol với trục Oy nằm dưới trục hoành $\Rightarrow c < 0$.
+ Xét hình H2:
  Ta có:
  -Phần đuôi đồ thị hướng lên trên suy ra $a > 0$.
  -Đỉnh của parabol lệch về phía bên phải Oy nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.
  -Giao điểm của parobol với trục Oy nằm trên trục hoành $\Rightarrow c > 0$.
+ Xét hình H3:
  Ta có:
  -Phần đuôi đồ thị hướng xuống dưới suy ra $a < 0$.
  -Đỉnh của parabol lệch về phía bên trái Oy nên $ab > 0 \Rightarrow b < 0$.
  -Giao điểm của parobol với trục Oy nằm trên trục hoành $\Rightarrow c > 0$.
+ Xét hình H4:
  Ta có:
  -Phần đuôi đồ thị hướng xuống dưới suy ra $a < 0$.
  -Đỉnh của parabol lệch về phía bên phải Oy nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.
  -Giao điểm của parobol với trục Oy nằm dưới trục hoành $\Rightarrow c < 0$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$, (P).

1. Xác định tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và bề lõm của đồ thị (P).
2. Lập bảng biến thiên của hàm số trên. Vẽ đồ thị (P).
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số và giá trị tương ứng của x.

Hướng dẫn giải.

1. Gọi điểm $I\left(x_I; y_I\right)$ là đỉnh của đồ thị (P), khi đó ta có

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{-b}{2a} = -1 \\ y_I = \dfrac{-\Delta}{4a} = -4 \end{cases} \Rightarrow I\left(-1; -4\right).$$

Trục đối xứng của đồ thị (P) là $x = \dfrac{-b}{2a} \Leftrightarrow x = -1$.
Vì $a = 1 > 0$ nên đồ thị (P) quay bề lõm lên phía trên.

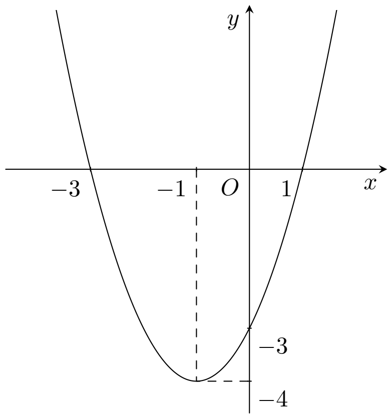
② Do $a = 1 > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng giá trị

x	-3	1
y	0	0

Đồ thị (P) có dạng sau:



③ Giá trị nhỏ nhất của đồ thị hàm số (P) là -4, đạt tại $x = -1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = a(x - m)^2$ với $a \neq 0$ có đồ thị (P). Tính a và m trong mỗi trường hợp sau:

① (P) đi qua 2điểm $A(1; 0)$ và $B(2; 2)$.

② (P) đi qua $A(1; 4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.

Hướng dẫn giải.

① Xét hàm số $y = a(x - m)^2$ có đồ thị (P).
(P) đi qua 2 điểm $A(1; 0)$ và $B(2; 2)$, ta có $a \neq 0$ và $\begin{cases} 0 = a(1 - m)^2 & (1) \\ 2 = a(2 - m)^2 & (2). \end{cases}$
Do $a \neq 0$ nên từ (1) ta có $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
Thay vào (2) ta được $2 = a(2 - 1)^2 \Leftrightarrow a = 2$.
Vậy $a = 2, m = 1$.

② Hàm số $y = a(x - m)^2 = ax^2 - 2amx + am^2$ có đồ thị (P).

(P) đi qua $A(1;4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x=-1$, ta có $\begin{cases} a\neq 0 \\ 4=a(1-m)^2 & (3) \\ \dfrac{2a\cdot m}{2a}=-1 & (4). \end{cases}$

$(4)\Leftrightarrow m=-1$ thay vào (3) ta được $4=a(1+1)^2\Leftrightarrow a=1$.
Vậy $a=1, m=-1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^2+bx+c$ có đồ thị (P). Tính b và c trong mỗi trường hợp sau:

1. (P) qua 2 điểm $A(-1;2)$ và $B(2;2)$.
2. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $x=1$.

Hướng dẫn giải.

1. Theo giả thiết, ta có
$$\begin{cases} A(-1;2)\in(P) \\ B(2;2)\in(P) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (-1)^2+b\cdot(-1)+c=2 \\ 2^2+b\cdot 2+c=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -b+c=1 \\ 2b+c=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=0. \end{cases}$$
Vậy $b=-1, c=0$.
2. Theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=1 \\ y(1)=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{-b}{2\cdot 1}=1 \\ 1^2+b\cdot 1+c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-2 \\ b+c=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-2 \\ c=0. \end{cases}$$
Vậy $b=-2$, $c=0$.

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^2-4x+c$ có đồ thị (P). Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau

1. Hàm số có GTNN bằng 1 khi $x=1$.
2. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ 5 và có GTNN bằng 1.

Hướng dẫn giải.

1. Hàm số có GTNN bằng 1 khi $x=1$ tức là đồ thị hàm số có đỉnh $I(1;1)$. Từ đó ta có
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ y(1)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -\dfrac{-4}{2a}=1 \\ a\cdot 1^2-4\cdot 1+c=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ c=3. \end{cases}$$
2. Vì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ 5 và có GTNN bằng 1 nên ta có
$$\begin{cases} y(0)=5 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a\cdot 0^2-4\cdot 0+c=5 \\ -\dfrac{(-4)^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=5 \\ a=1. \end{cases}$$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c(P)$. Tính a, b, c trong mỗi trường hợp sau:

1. Đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ và có đỉnh $S(1;-2)$.
2. Đồ thị (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ -1 và hàm số đạt GTLN bằng 0 khi $x=2$.
3. Đường thẳng $y=3$ cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ là -1 và 3, và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hướng dẫn giải.

1. Do đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ và có đỉnh $S(1;-2)$ nên ta có
$$\begin{cases} f(0)=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ f(1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 2a+b=0 \\ a+b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=0. \end{cases}$$

2. Do đồ thị (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ -1 và hàm số đạt GTLN bằng 0 khi $x=2$ nên ta có $\begin{cases} f(0)=-1 \\ a<0 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a<0 \\ 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=3 \\ c=-1. \end{cases}$

3. Do đường thẳng $y=3$ cắt (P) tại 2 điểm có hoành độ là -1 và 3, và hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 nên ta có
$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(3)=3 \\ a>0 \\ \dfrac{-\Delta}{4a}=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=3 \\ 9a+3b+c=3 \\ a>0 \\ -b^2+4ac=-4a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=3-3a \\ a>0 \\ -b^2+4ac=-4a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=3-3a \\ a>0 \\ -4a^2+4a(3-3a)=-4a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=3-3a \\ a>0 \\ 16a^2-16a=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=0. \end{cases}$$

Câu 9. Cho hàm số $y=x^2-4x+3$ có đồ thị (P)

1. Vẽ đồ thị (P).
2. Xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;1)$.

3. Xác định giá trị của x sao cho $y \leq 0$.
4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;3]$.

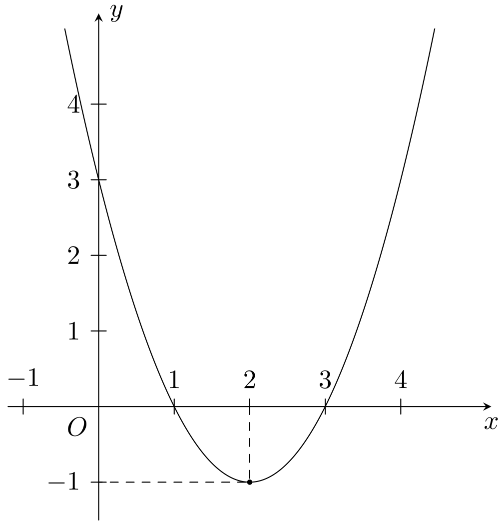
Hướng dẫn giải.

1. Tọa độ đỉnh: $I(2;-1)$.

   Cắt trục Ox: $y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

   Cắt trục Oy: $x = 0 \Rightarrow y = 3$.

   Trục đối xứng $x = 2$.



2. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

   Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

3. Dựa vào đồ thị ta có $y \leq 0$ thì $1 \leq x \leq 3$.
4. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;3]$.

x	0	2	3
y	3 ↘	-1	↗ 0

   Vậy GTLN trên $[0;3]$ là 3 khi $x = 0$, GTNN trên $[0;3]$ là -1 khi $x = 2$.

Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x + 7}$.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đặt $g(x) = x^2 - 3x + 7$ khi đó $f(x) = \dfrac{2}{g(x)}$ nên $f(x)$ lớn nhất khi $g(x)$ nhỏ nhất.

Ta có bảng biến thiên của $g(x) = x^2 - 3x + 7$ trên $\mathbb{R}$ là

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ là $\frac{19}{4}$.
Vậy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $f(x) = \frac{2}{\frac{19}{4}} = \frac{8}{19}$ khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 11. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 4x - m + 2$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 10.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$.
Ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 0]$ là $y(0)$.
Theo đề bài $y(0) = 10 \Leftrightarrow -m + 2 = 10 \Leftrightarrow m = -8$.
Vậy $m = -8$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2$, $(m > 0)$ xác định trên $[1; 3]$. Tìm m để giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[1; 3]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8$.

Hướng dẫn giải. Đặt $y = f(x) = x^2 - 2mx + m^2$, $(m > 0)$.
Ta có hoành độ đỉnh của đồ thị $x = m$, $(m > 0)$.
Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; m)$, hàm số đồng biến $(m; +\infty)$.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y		↘		↗	

Trường hợp 1: $0 < m \leq 1$, suy ra hàm số đồng biến trên $[1; 3]$
Ta có $y_2 = f(1) = 1 - 2m + m^2, y_1 = f(3) = 9 - 6m + m^2$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
& y_1 - y_2 = 8 \\
\Leftrightarrow\ & 9 - 6m + m^2 - (1 - 2m + m^2) = 8 \\
\Leftrightarrow\ & 9 - 6m + m^2 - 1 + 2m - m^2 = 8 \\
\Leftrightarrow\ & -4m + 8 = 8 \\
\Leftrightarrow\ & m = 0 \text{ (loại)}.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $1 < m \leq 3$, suy ra hàm số nghịch biến $[1; m)$ đồng biến trên $(m; 3]$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số tại m, suy ra $y_2 = f(m) = m^2 - 2m^2 + m^2 = 0$.
Ta có $f(1) = 1 - 2m + m^2, f(3) = 9 - 6m + m^2$, $f(3) - f(1) = -4m + 8$.
Xét $f(3) \geq f(1) \Leftrightarrow -4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.
suy ra $y_1 = f(3) = 9 - 6m + m^2$.
Ta có

$$\begin{aligned} & y_1 - y_2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 9 - 6m + m^2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 6m + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} m = 3 + 2\sqrt{2} & \text{(loại)} \\ m = 3 - 2\sqrt{2} & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Xét $f(3) < f(1) \Leftrightarrow m > 2$, suy ra $y_1 = f(1) = 1 - 2m + m^2$.
Ta có

$$\begin{aligned} & y_1 - y_2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2m + m^2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 2m - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} m = 1 + 2\sqrt{2} & \\ m = 1 - 2\sqrt{2} & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m = 1 + 2\sqrt{2}$.
Trường hợp 3: $m \geq 3$.
Hàm số nghịch biến biến trên $[1;3]$.
Ta có $y_1 = f(1) = 1 - 2m + m^2, y_2 = f(3) = 9 - 6m + m^2$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & y_1 - y_2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2m + m^2 - (9 - 6m + m^2) = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2m + m^2 - 9 + 6m - m^2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & 4m - 8 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & m = 4. \end{aligned}$$

Vậy $m \in \left\{4; 1 + 2\sqrt{2}\right\}$.

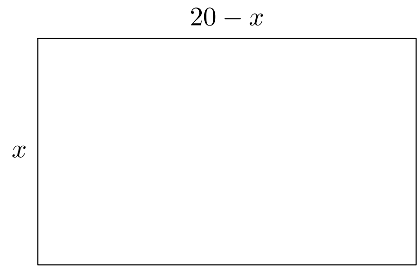
Câu 13. Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng hoa bán Tết.

1. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được thẹo chiều rộng x (mét) của nó.
2. Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Hướng dẫn giải.

1. Gọi chiều dài mảnh vườn hình chữ nhật là d (mét), $d > 0$.

Chu vi mảnh vườn bằng $40m$ nên $2(x+d)=40 \Leftrightarrow d=20-x$.

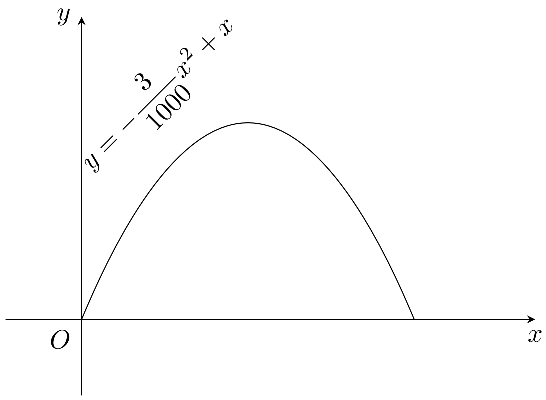


Diện tích mảnh vườn là: $S=x\cdot d=x(20-x)=-x^2+20x$.

2. Ta có: $S=-x^2+20x=-x^2+20x-100+100=-(x-10)^2+100\le 100$.
Vậy diện tích mảnh vườn lớn nhất bằng 100 m ^{2} khi chiều rộng $x=10$ m.

Câu 14. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy một parabol có phương trình $y=-\dfrac{3}{1000}x^2+x$, trong đó x (mét) là khoảng cách thẹo phương trình ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất.

1. Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.
2. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.



Hướng dẫn giải.

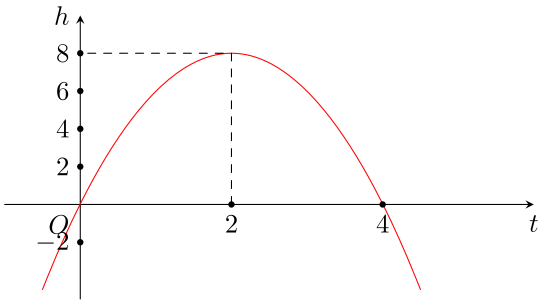
1. Có $y=-\dfrac{3}{1000}x^2+x$.
Do phương trình parabol $y=-\dfrac{3}{1000}x^2+x$ có hệ số $a=-\dfrac{3}{1000}<0$ nên parabol có bề lõm quay xuống.
Vậy độ cao cực đại của vật trong quá trình bay ($h_{\max}$) đạt được là từ đỉnh parabol tới mặt đất.
$\Rightarrow h_{\max}=|y_{\text{Đ}}|=\dfrac{250}{3}$ (m).
Vậy độ cao cực đại của vật trong quá trình bay là $\dfrac{250}{3}$ (m).

2. Gọi giao điểm của trục Ox với parabol $y=-\dfrac{3}{1000}x^2+x$ là $A\ (x_A;y_A)$.
Xét phương trình hoành độ giao điểm trục Ox với parabol $y=-\dfrac{3}{1000}x^2+x$ có

$$-\frac{3}{1000}x^2+x=0\Leftrightarrow\left(-\frac{3}{1000}x+1\right)x=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{-3}{1000}x+1=0\\ x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1000}{3}\Rightarrow y=0\Rightarrow A\left(\dfrac{1000}{3};0\right)\\ x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow O(0;0)\end{array}\right..$$

Vậy tầm xa của quỹ đạo là $|OA|=\left|\sqrt{\left(\dfrac{1000}{3}\right)^2}\right|=\dfrac{1000}{3}$ (mét).

Câu 15. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng toạ độ Oth như hình bên, trong đó t là thời gian (giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (mét) của qủa bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2giây, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m.



1. Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h thẹo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng.
2. Tìm độ cao của quả bóng khi đá lên được 3 giây.
3. Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Hướng dẫn giải.

1. Giả sử hàm số bậc hai biểu thị độ cao h thẹo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng có dạng: $h = at^2 + bt + c (a \neq 0)$;
   Từ giả thiết ta có đồ thị hàm số là một parabol đi qua điểm $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;8)$, do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} c = 0 \\ \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 8. \end{cases}$
   Giải hệ trên ta được $a = -2; b = 8; c = 0$.
   Vậy hàm số bậc hai cần tìm là $h = -2t^2 + 8t$.
2. Độ cao của quả bóng khi được đá lên 3 giây là $h(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6$ (m).
3. Do quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên $\Rightarrow h = 0$ do đó $-2t^2 + 8t = 0 (t > 0)$.
   Ta có $-2t^2 + 8t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right.$ do $t > 0 \Rightarrow t = 4$.
   Vậy sau 4 giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên.

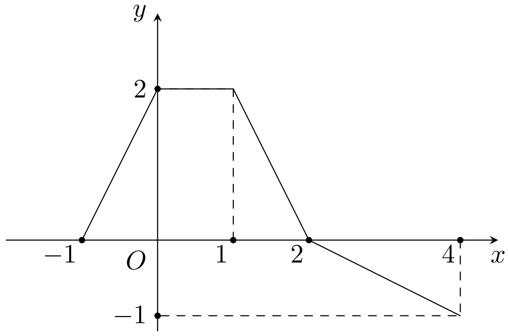
Ôn tập chương 3

Câu 1. Tính giá trị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ tại $x = 1$.

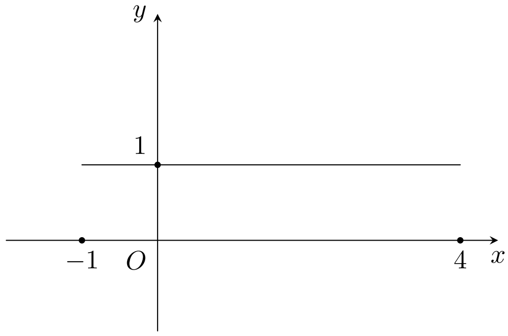
(A) $f(1) = 1$. (B) $f(1) = -1$. (C) $f(1) = 0$. (D) $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f(1) = \dfrac{1}{1-2} = -1$.

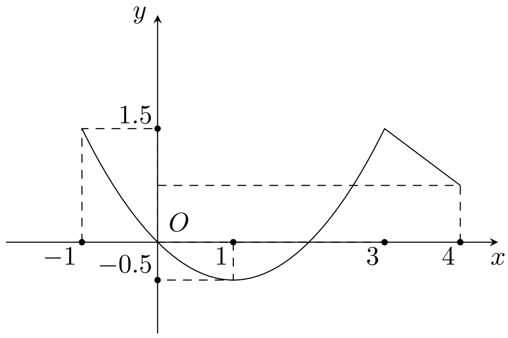
Câu 2. Đường nào trong các đáp án sau không thể là đồ thị của một hàm số y thẹo biến số x?

(A) 

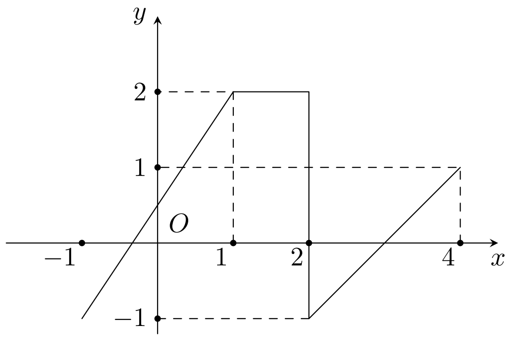
.

(B) 

.

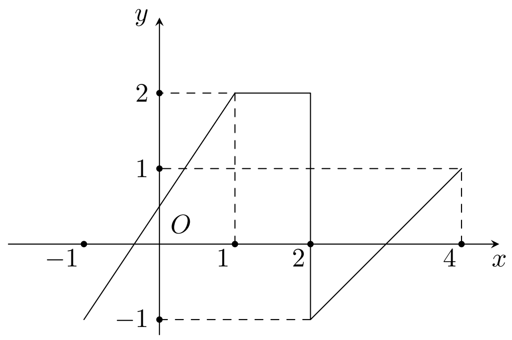
(C) 

.

(D) 

.

Hướng dẫn giải. Do với $x = 2$ ta có tương ứng với vô số các số thực $y \in [-1; 2]$ nên hình



không phải là đồ thị của một hàm số y thẹo biến số x.

Câu 3. Tìm tập xác đinh của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \dfrac{x}{x-3}$

Ⓐ $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
Ⓑ $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$.
Ⓒ $(3; +\infty)$.
Ⓓ $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Vậy TXĐ của hàm số: $\mathscr{D} = (-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}}{x^2 - 5x + 6}$ là

Ⓐ $[-1; 2]$.
Ⓑ $[-1; 3) \setminus \{2\}$.
Ⓒ $[-1; 3]$.
Ⓓ $(2; 3)$.

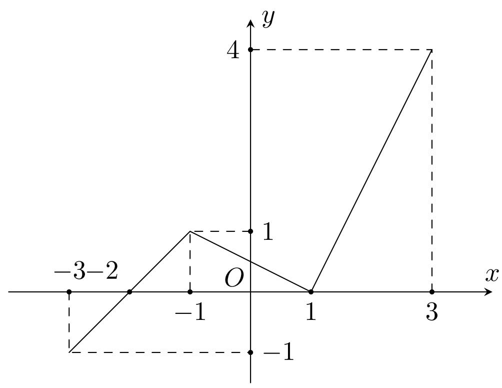
Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-1; 3) \setminus \{2\}$.

Câu 5.

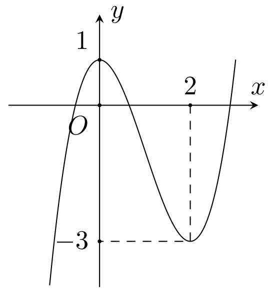
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và có đồ thi như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 4)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên $(-3; 3)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.



Hướng dẫn giải. Từ đồ thị suy ra hàm số đồng biến trên $(-3; -1); (1; 3)$ và nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



(A) Hàm số nghịch biến trên $(-3; 1)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải. Từ đồ thị suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 7. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(B) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

(A) $\dfrac{11}{8}$. (B) $\dfrac{8}{11}$. (C) $\dfrac{11}{4}$. (D) $\dfrac{4}{11}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $x^2 - 5x + 9 = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} \geq \dfrac{11}{4} \Rightarrow \dfrac{2}{x^2 - 5x + 9} \leq \dfrac{8}{11}$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
Vậy giá tri lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\dfrac{8}{11}$ khi $x = \dfrac{5}{2}$.

Câu 9. Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(1; 3)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-\infty; 2)$. (D) $(-\infty; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 10. Cho parabol (P) có phương trình $y = 3x^2 - 2x + 4$. Tìm trục đối xứng của parabol.

(A) $x = -\dfrac{2}{3}$. (B) $x = \dfrac{1}{3}$. (C) $x = -\dfrac{1}{3}$. (D) $x = \dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải. Trục đối xứng của parabol (P) là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ (P) không có giao điểm với trục hoành.
Ⓑ (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y = 1$.
Ⓒ (P) có đỉnh là $S(1;1)$.
Ⓓ (P) đi qua điểm $M(-1;9)$.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành là $2x^2 - 4x + 3 = 0$ (phương trình vô nghiệm) suy ra (P) không có giao điểm với trục hoành.

Toạ độ đỉnh của (P) là $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1;1)$.

Parabol (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$.

Câu 12. Xác định parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Ⓐ $(P)\colon y = -x^2 + x + 1$.
Ⓑ $(P)\colon y = x^2 - x + 1$.
Ⓒ $(P)\colon y = 2x^2 - 2x + 1$.
Ⓓ $(P)\colon y = x^2 + x + 0$.

Hướng dẫn giải. Parabol (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 suy ra $c = 1 \Rightarrow y = ax^2 + bx + 1$.

Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$ suy ra đồ thị có đỉnh $S\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$ và $a > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \\ a\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{b}{2} + 1 = \dfrac{3}{4} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = -1 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(\text{tm}) \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy $y = x^2 - x + 1$.

Câu 13. Cho parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó, $4a + 2b$ bằng

Ⓐ -1.
Ⓑ 0.
Ⓒ 1.
Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Vì parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ nên

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0.$$

Câu 14. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + m + 2}{x - m}$ xác định trên $(-1;2)$.

Ⓐ $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.
Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.
Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$.
Ⓓ $-1 < m < 2$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định: $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$.

Hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$ khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l}(-1;2)\subset(-\infty;m)\\(-1;2)\subset(m;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\m\leq -1.\end{array}\right.$$

Câu 15. Xác định tọa độ tất cả giao điểm của parabol $y=x^2-3x+2$ với trục hoành Ox.

Ⓐ $M(0;2)$. Ⓑ $M(1;0), N(2;0)$.
Ⓒ $M(0;1), N(0;2)$. Ⓓ $M(1;2)$.

Hướng dẫn giải. Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2-3x+2$ với trục hoành Ox là

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$$

Suy ra tọa độ giao điểm của parabol $y=x^2-3x+2$ với trục hoành Ox là $M(1;0), N(2;0)$.

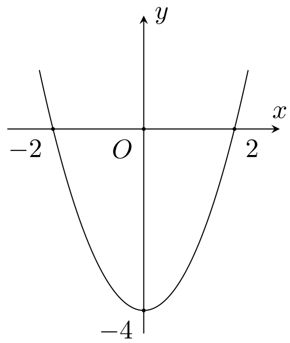
Câu 16. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$?

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$. Ⓑ $\mathscr{D}=[-3;+\infty)\setminus\{1\}$.
Ⓒ $\mathscr{D}=[-3;+\infty)$. Ⓓ $\mathscr{D}=(-3;+\infty)\setminus\{1\}$.

Hướng dẫn giải. ĐKXĐ: $\begin{cases}x+3\geq 0\\x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow$ TXĐ: $\mathscr{D}=[-3;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 17. Cho parabol $y=f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$, (P) có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị (P) cắt trục Ox tại các điểm lần lượt có hoành độ là -2, 2. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<0$ là:

Ⓐ $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Ⓑ $(-2;2)$.
Ⓒ $[-2;2]$. Ⓓ $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.



Hướng dẫn giải. Từ đồ thị (P) ta thấy những điểm $M\ (x;y)\in(P)$ nằm phía dưới trục hoành tương ứng với $y<0$ hay $f(x)<0\Leftrightarrow -2<x<2$.

Câu 18. Khẳng định nào sau đây là **sai** khi nói về sự biến thiên của hàm số.

Ⓐ Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Ⓑ Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Ⓒ Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải trên khoảng đó.
Ⓓ Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị "đi lên" từ trái sang phải trên khoảng đó..

Hướng dẫn giải. Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Câu 19. Biết rằng parabol $(P)\colon y=ax^2+bx+c$ đi qua điểm $A\,(2;3)$ và có đỉnh $I\,(1;2)$. Tính tổng bình phương các hệ số của (P).

Ⓐ 5. Ⓑ 30. Ⓒ 25. Ⓓ 14.

Hướng dẫn giải. Vì $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2;3)$ nên $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3 \quad (1)$.

(P) có đỉnh $I(1;2)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3. \end{cases}$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$.

Câu 20. Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x - m - 1}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

Ⓐ $(-\infty; -1) \cup \{0\}$. Ⓑ $(-\infty; -1)$.
Ⓒ $(-\infty; 1]$. Ⓓ $(-\infty; 1] \cup \{0\}$.

Hướng dẫn giải. Điều kiện xác định của hàm số $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x - m - 1}}$ là $x - m - 1 > 0 \Leftrightarrow x > m + 1$. Hàm số xác định trên khoảng $(0;1)$, khi đó $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$, suy ra $m \in (-\infty; -1]$.

Câu 21. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị là (P), đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

Ⓐ $I\left(\dfrac{-b}{a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$. Ⓑ $I\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{2a}\right)$.
Ⓒ $I\left(\dfrac{b}{a}; \dfrac{\Delta}{a}\right)$. Ⓓ $I\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Hướng dẫn giải. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị là (P), đỉnh của (P) được xác định

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{-b}{2a} \\ y_I = \dfrac{-\Delta}{4a}. \end{cases}$$

Câu 22. Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 5$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

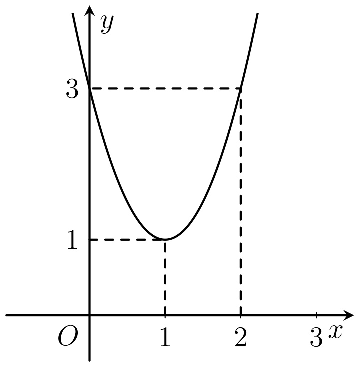
Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Toạ độ đỉnh $I(2; -9)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 23. Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình (P) đó là?



Ⓐ $y = x^2 - 2x + 3$. Ⓑ $y = 4x^2 - 8x + 3$.
Ⓒ $y = 2x^2 - 4x + 4$. Ⓓ $y = 2x^2 - 4x + 3$.

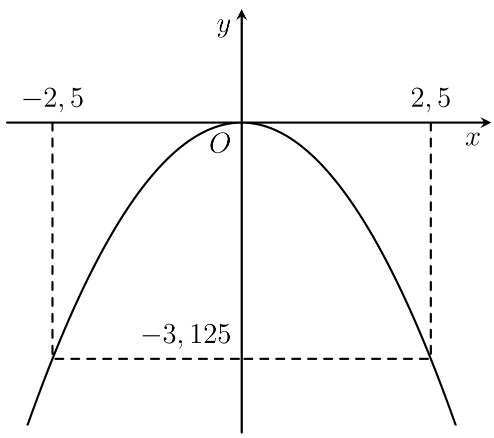
Hướng dẫn giải. (P) có đỉnh $I\,(1;1)$ ta có $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ \dfrac{-b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$ (1)

(P) đi qua $A\,(2;3)$ ta có $3 = 4a + 2b + c \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3. \end{cases}$

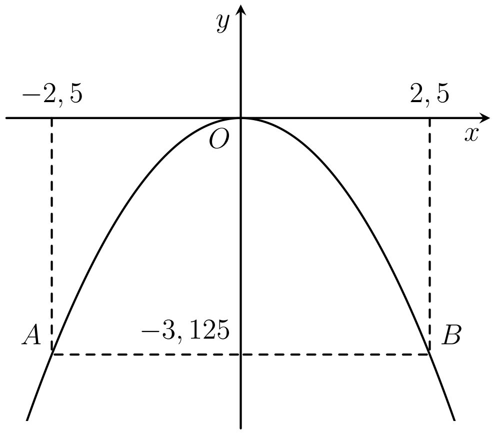
Vậy phương trình (P) là $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Câu 24. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ biết cổng có chiều rộng $d = 5$ m (như hình vẽ). Hãy tính chiều cao h của cổng.



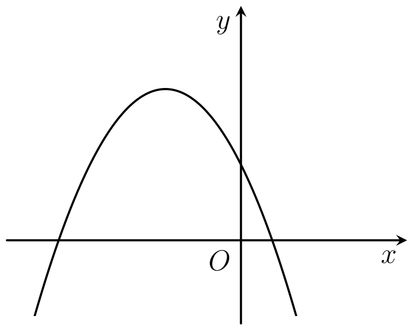
Ⓐ $h = 3{,}125$ m. Ⓑ $h = 4{,}125$ m.
Ⓒ $h = 4{,}45$ m. Ⓓ $h = 3{,}25$ m.

Hướng dẫn giải.



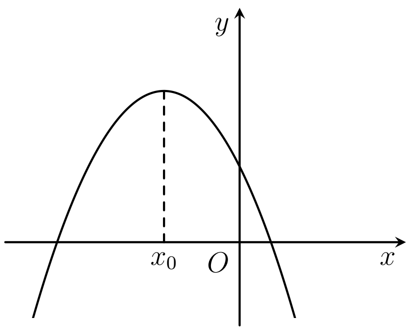
Từ giả thiết bài toán ta có $AB = 5$ suy ra $CB = 2{,}5$. Vậy điểm B có hoành độ $x_B = 2,5$.
Vì điểm B thuộc parabol $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ nên $y_B = -\dfrac{1}{2} \cdot 2{,}5^2 = -3{,}125$.
Chiều cao $h = OC = |y_B| = |-3{,}125| = 3{,}125$. Vậy $h = 3{,}125$ m.

Câu 25. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?



Ⓐ $a < 0; b < 0; c < 0$. Ⓑ $a > 0; b < 0; c > 0$.
Ⓒ $a < 0; b > 0; c > 0$. Ⓓ $a < 0; b < 0; c > 0$.

Hướng dẫn giải.



Bề lõm quay xuống suy ra hệ số $a < 0$.
Hoành độ đỉnh $x_0 = -\dfrac{b}{2a} < 0$, suy ra hệ số $b < 0$.
Giao với trục tung tại điểm có tung độ dương suy ra hệ số $c > 0$.

Câu 26. Cho parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}$ và đi qua điểm $A\,(1; 3)$. Tổng giá trị $a + 2b$ là

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Vì parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}$ và đi qua điểm $A\,(1; 3)$

nên ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3} \\ 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $a + 2b = -3 + 2 \cdot 2 = 1$.

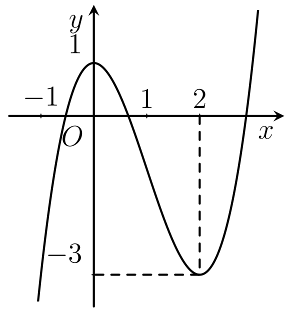
Câu 27. Parabol $(P)\colon y = -2x^2 - ax + b$ có điểm $M(1;3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

Ⓐ 5. Ⓑ 1. Ⓒ -2. Ⓓ -3.

Hướng dẫn giải. Vì (P) có điểm $M(1;3)$ với tung độ lớn nhất nên điểm M là đỉnh của (P).
Hoành độ đỉnh $x_M = \dfrac{a}{-4} = 1$ suy ra $a = -4$.
Vì $M(1;3) \in (P)\colon y = -2x^2 + 4x + b$ nên $-2 + 4 + b = 3 \Leftrightarrow b = 1$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.



Hướng dẫn giải. Phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$.
Đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 29. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá 40 đô la. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đô la thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

Ⓐ 80 USD. Ⓑ 160 USD. Ⓒ 40 USD. Ⓓ 240 USD.

Hướng dẫn giải. Số tiền lãi khi bán một đôi giày là $(x - 40)$ đô la.
Suy ra số tiền lãi của cửa hàng trong tháng là $\mathrm{T} = (x - 40)(120 - x)$ đô la.
Ta có $\mathrm{T} = (x - 40)(120 - x) = -x^2 + 160x - 4800 = 1600 - (x - 80)^2 \leq 1600$.
Vậy để thu được nhiều lãi nhất thì $x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 80$.

Câu 30. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Ⓐ 30 triệu đồng. Ⓑ 29 triệu đồng.
Ⓒ 30,5 triệu đồng. Ⓓ 29,5 triệu đồng.

Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp dự định sẽ giảm giá bán cho

mỗi chiếc xe.
Số lượng chiếc xe bán ra trong một năm được tăng thêm là $200x$ chiếc.
Giá bán của mỗi chiếc xe là $31 - x$ triệu đồng.
Số xe bán ra mỗi năm là $600 + 200x$ chiếc.
Tiền lãi thu được là

$$\begin{aligned} T &= (600 + 200x)(31 - x - 27) = (600 + 200x)(4 - x) \\ &= -200x^2 + 200x + 2400 = 2450 - 200\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 2450 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2450. \end{aligned}$$

Vậy lợi nhuận một năm lớn nhất là 2450 triệu đồng khi doanh nghiệp giảm giá $\frac{1}{2}$ triệu đồng.
Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mỗi chiếc xe là 30,5 triệu đồng.

Chuyên đề 2 DẤU TAM THỨC BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

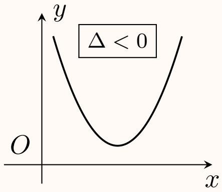
1) Dấu của tam thức bậc hai

Định nghĩa 3.
Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là những số cho trước với $a \neq 0$.

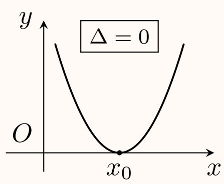
- Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai.
- $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai.

☆**Dấu của tam thức bậc hai** Ta đã biết hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có đồ thị là một parabol.

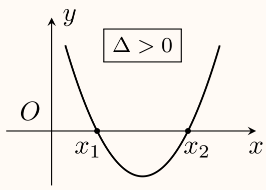
- Nếu $a > 0$, ta có các trường hợp sau:



Đồ thị luôn nằm trên Ox.

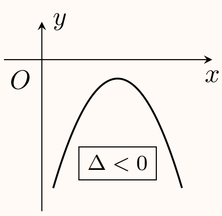


Đồ thị nằm trên Ox khi $x \neq x_0 = -\frac{b}{2a}$.

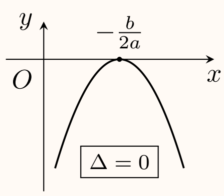


Đồ thị nằm trên Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$; nằm dưới Ox khi $x_1 < x < x_2$.

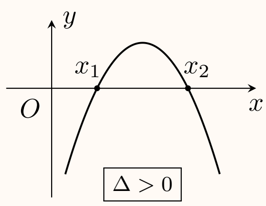
- Nếu $a < 0$:, ta có các trường hợp sau:



Đồ thị luôn nằm dưới Ox.



Đồ thị nằm dưới Ox khi $x \neq x_0 = -\frac{b}{2a}$.



Đồ thị nằm dưới Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$; nằm trên Ox khi $x_1 < x < x_2$.

Tương ứng hình ảnh đồ thị ở trên, ta có bảng tổng kết dấu của tam thức bậc hai như sau:

2) Định lý (Dấu tam thức bậc hai).

- *Nếu $a > 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

◇ *Nếu $a < 0$:*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Định lý về dấu tam thức bậc hai: *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$.*

◇ *Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.*

◇ *Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.*

◇ *Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$*

◇ *Nếu $\Delta < 0$ thì*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu a	

◇ *Nếu $\Delta = 0$ thì*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu a	0	cùng dấu a	

◇ *Nếu $\Delta > 0$ thì*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a	

3) Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa 4.
Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2+bx+c > 0$ (hoặc $(ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + b$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a \neq 0$.

◇ Số thực x_0 gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Tập hợp gồm tất cả các nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ gọi là tập nghiệm của bất phương trình này.

◇ Giải một bất phương trình bậc hai là tìm tập nghiệm của nó.

Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

① $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$ ② $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

③ $ax^2+bx+c \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$ ④ $ax^2+bx+c \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN HAY GẶP

Dạng 4 Xét dấu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, với $a \neq 0$

- Tìm nghiệm $ax^2+bx+c=0 \quad (1)$.
- Tùy thuộc vào số nghiệm của (1), ta lựa chọn bảng xét dấu phù hợp.

Lưu ý. Ghi nhớ ngắn gọn: Nếu $\Delta \leq 0$ thì cùng dấu a; Nếu $\Delta > 0$ thì "trong trái, ngoài cùng".

Ví dụ 11 ★☆☆☆☆

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $f(x)=3x^2-4x+1$; b) $f(x)=9x^2+6x+1$; c) $f(x)=2x^2-3x+10$;

d) $f(x)=-5x^2+2x+3$; e) $f(x)=-4x^2+8x-4$; f) $f(x)=-3x^2+3x-1$.

Lời giải.

1. $f(x)=3x^2-4x+1$ có 2 nghiệm $x_1=1$ và $x_2=\dfrac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

◇ $f(x)>0$ khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

◇ $f(x)<0$ khi và chỉ khi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

2. $f(x)=9x^2+6x+1$ có nghiệm kép $x=-\dfrac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$f(x)>0$ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

3. $f(x)=2x^2-3x+10$ vô nghiệm vì $\Delta=-71<0$ và $a=2>0$.
Do đó $f(x)>0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

4. $f(x)=-5x^2+2x+3$ có 2 nghiệm $x_1=1$ và $x_2=-\dfrac{3}{5}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $f(x) < 0$ khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty)$.
- $f(x) > 0$ khi và chỉ khi $x \in \left(-\dfrac{3}{5}; 1\right)$.

5. $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$ có nghiệm kép $x = 1$.
Bảng xét dấu

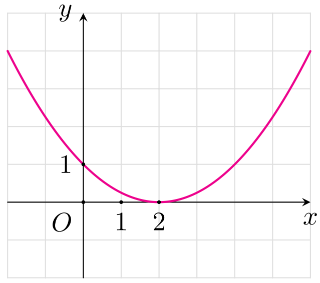
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$f(x) < 0$ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

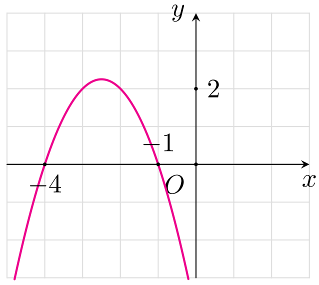
6. $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$ vô nghiệm vì $\Delta = -3 < 0$ và $a = -3 < 0$.
Do đó $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 12

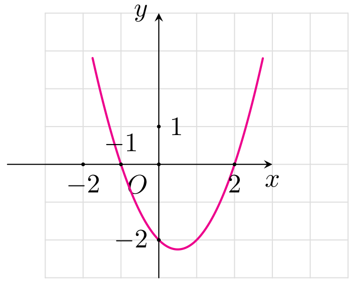
Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi hình



a)



b)



c)

Lời giải.

1. Từ đồ thị hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 2$. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2. Từ đồ thị hình b) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 = -4$ và $x_2 = -1$. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Từ đồ thị hình c) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dạng 5 Giải bất phương trình bậc hai

Ta lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai. Sau đó, chọn kết quả phù hợp với yêu cầu đề bài.

Ví dụ 13 ★☆☆☆☆

Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$

b) $6x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-9x^2 + 6x - 1 > 0$.

d) $12 - x - x^2 \geq 0$.

Lời giải.

1. Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 2$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 2\\ &x = 1. \end{aligned}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = (1; 2).$$

2. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2 + x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right].$$

3. Cho $-9x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2 + 6x - 1$		$-$	0	$-$	

Vậy $S = \emptyset$.

4. Cho $-x^2 - x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = -4\\ &x = 3. \end{aligned}\right.$

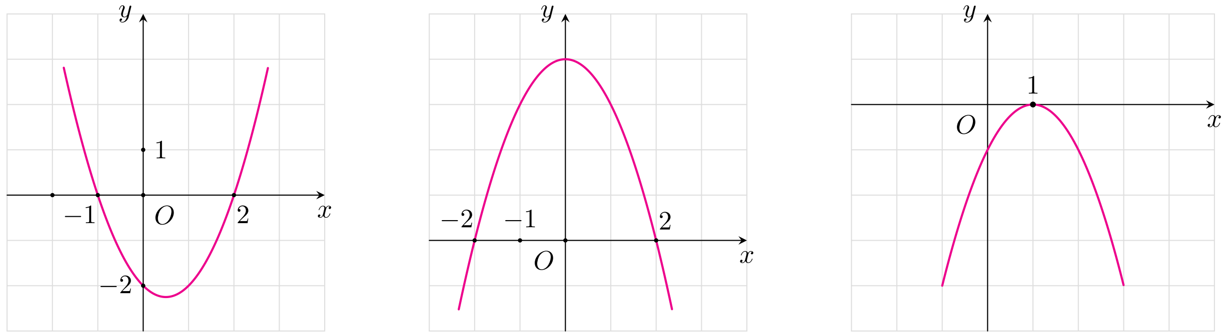
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$-x^2 - x + 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $S = [-4; 3]$.

Ví dụ 14 ★☆☆☆☆

Tìm nghiệm của bất phương trình $ax^2 + bx + c > 0$, với đồ thị $f(x) = ax^2 + bx + c$ được cho ở mỗi hình bên:



a) b) c)

Ví dụ 15 ★☆☆☆☆

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để

1. phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có nghiệm.
2. phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm.
3. phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

1. Phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có $\Delta' = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) = -m^2 - 4m - 2$.
   Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi
   $$\begin{aligned}\Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$
   Vậy với $m \in \left[-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}\right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.
2. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi
   $$\Delta < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$
   Vậy $-3 < m < 1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.
3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi
   $$\Delta = (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 6$$

Dạng 6 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 16 ★☆☆☆☆

Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5 m so với mặt đất?

Lời giải. Xét bất phương trình $-4{,}9t^2 + 20t + 1 > 5 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 20t - 4 > 0$.

Nghiệm của phương trình $-4{,}9t^2 + 20t - 4 = 0$ là $t \approx 0{,}21; t \approx 3{,}87$. Do đó, nghiệm của bất phương trình là $t \in (0{,}21; 3{,}87)$. Vậy khoảng thời điểm $t \in (0{,}21; 3{,}87)$ (s) trong quá trình bay của quả bóng thì nó sẽ ở độ cao trên 5 m so với mặt đất.

Ví dụ 17 ★☆☆☆☆

Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu $v_Q = 20$ m/s. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100m ? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

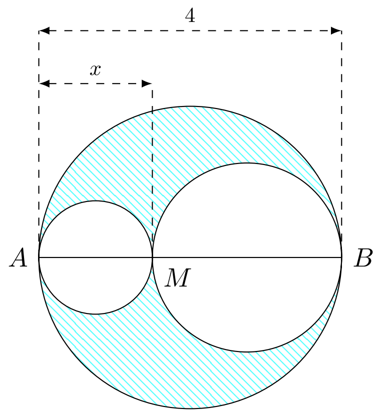
Lời giải. Độ cao của vật so với mặt đất được cho bởi công thức

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 320 + 20t - 4{,}9t^2.$$

Vật cách mặt đất không quá 100 m khi và chỉ khi $h(t) \leq 100$, tức là $-4{,}9t^2 + 20t + 320 \leq 100$ hay tương đương $4{,}9t^2 - 20t - 220 \geq 0$.
Giải bất phương trình này và chú ý đến điều kiện $t > 0$ ta được: $t \geq \frac{10+\sqrt{1178}}{4{,}9} \approx 9{,}05$ m.

Ví dụ 18 ★☆☆☆☆

Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB, đặt $AM = x$. Xét hai đường tròn đường kính AM và MB. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Lời giải. Vì điểm M nằm giữa A và B nên $MB = AB - AM = 4 - x$. Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình tròn đường kính AB, AM và MB. Ta có: $S_1 + S_2 = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \frac{x^2-4x+8}{2}\pi$.

$$S(x) = S - (S_1 + S_2) = 4\pi - \frac{x^2 - 4x + 8}{2}\pi = \frac{-x^2 + 4x}{2}\pi.$$

Do đó từ điều kiện $S(x) \leq \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ ta được bất phương trình bậc hai $3x^2 - 12x + 8 \geq 0$. Giải bất phương trình bậc hai này và kết hợp với điều kiện $0 \leq x \leq 4$, ta được

$$x \in \left[0; \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}; 4\right]$$

Ví dụ 19 ★☆☆☆☆

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Lời giải. Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

$f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \dfrac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125{,}6$ và $x_2 = \dfrac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334{,}4$ và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

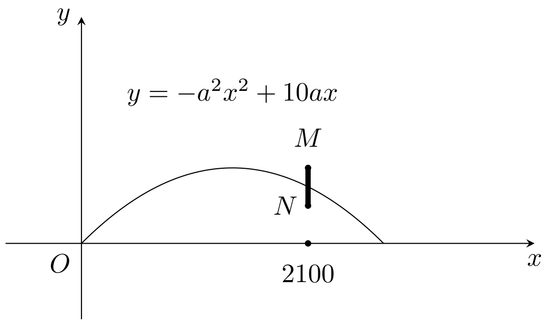
Vì x là số nguyên dương nên:

- Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

◇ Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.
Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

Ví dụ 20 ★☆☆☆☆

Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100;25)$ và $N(2100;15)$ (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ $(a > 0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



Lời giải. Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thoả mãn các bất phương trình sau

$$2100 \leq \frac{10}{a}; \quad (5)$$
$$-4410000a^2 + 21000a \leq 25; \quad (6)$$
$$-4410000a^2 + 21000a \geq 15. \quad (7)$$

◇ (5) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \dfrac{1}{210}$. Vì $a > 0$ nên $a \in \left(0; \dfrac{1}{210}\right]$.

◇ (6) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a > 0$.

◇ (7) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}$

$\Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100}; \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right]$.

Do $\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100} < \dfrac{1}{210}$ nên $\left(0; \dfrac{1}{210}\right] \cap \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100}; \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100}; \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right]$. Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$t \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right].$$

Vậy giá trị lớn nhất của a là $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}$.

Dạng 7 Bài toán có chứa tham số

Để giải dạng toán này ta phải xác định dấu của hệ số của x^2 và dấu của biệt thức Δ từ đó áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 21 ★☆☆☆☆

Tìm giá trị của tham số m để các biểu thức sau đây luôn không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$

b) $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4$.

Lời giải.

a) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Do $a = -2 < 0$ nên $f(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' = (m-2)^2 - (-2).(m-2) \leq 0$.
Ta có $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m(m-2) \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

b) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
+) Trường hợp 1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó $f(x) = -4 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
+) Trường hợp 2: $m - 1 \neq 0$, khi đó $f(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 4(m-1) \leq 0 \end{cases}$.
Từ đó suy ra $\begin{cases} m-1<0 \\ \Delta' = (m-1)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1$.
Kết hợp hai trường hợp ta suy ra giá trị m cần tìm là $-3 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 22 ★☆☆☆☆

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [1;3]$.

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải. Xét phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ (2), ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 4m = 4$.
Từ đó suy ra (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m < x_2 = m + 4$.
Từ đó suy ra (1) có tập nghiệm $[m; m+4]$.
Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;3]$ khi và chỉ khi $m \leq 1 < 3 \leq m + 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 23 ★☆☆☆☆

Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ và $2a + b + c = 0$.

a) Chứng minh rằng $f(x)$ không thể nhận giá trị âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng $f(x)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm các nghiệm đó khi biểu thức $T = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (2a+c)^2 - 4ac = 4a^2 + c^2 > 0$ vì $a \neq 0$. Do đó $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.
Từ đó suy ra $f(x)$ không thể nhận giá trị âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2a+c}{c} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.
$T = (x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + 2\dfrac{c}{a} + 8 = \left(\dfrac{c}{a} + 1\right)^2 + 7 \geq 7$.
Vậy T nhỏ nhất khi và chỉ khi $b = c = -a$, khi đó $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ nên $f(x)$ có hai

nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 24 ★☆☆☆☆

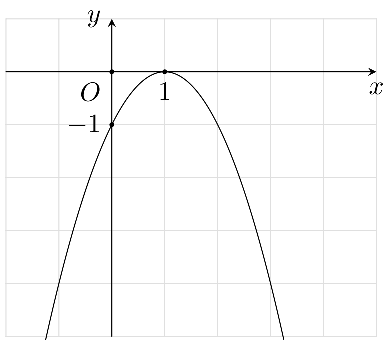
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - (2m+3)x + 6m}}{x^2 + 2x + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

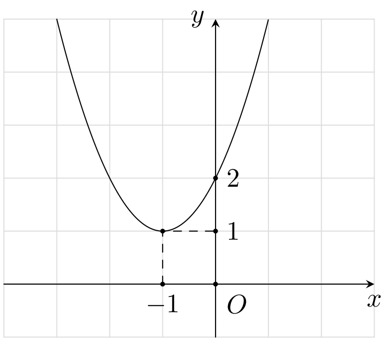
Từ đó suy ra hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - (2m+3)x + 6m \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do $\Delta = (2m+3)^2 - 4.6m = (2m-3)^2 \geq 0\ \forall m$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

BÀI TẬP

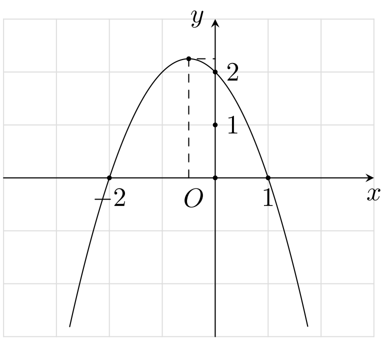
Bài 7. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi hình sau.



a)



b)



c)

Hướng dẫn giải.

1. Từ đồ thị hình a) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 1$. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

2. Từ đồ thị hình b) ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

3. Từ đồ thị hình c) ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Bảng xét dấu của tam thức là

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 < 0$

b) $6x^2 + x - 1 \leq 0$

c) $-9x^2 + 6x - 1 > 0$.

d) $12 - x - x^2 \geq 0$.

Hướng dẫn giải.

1. Đặt $f(x) = x^2 - 3x + 2$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

   Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là
   $$S = (1; 2).$$

2. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2 + x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Từ bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là
   $$S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right].$$

3. Cho $-9x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+6x-1$		$-$	0	$-$	

   Vậy $S = \emptyset$.

4. Cho $-x^2 - x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 3. \end{array}\right.$

   Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$-x^2-x+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Vậy $S = [-4; 3]$.

Bài 9. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để

1. phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có nghiệm.
2. phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm.
3. phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải.

1. Phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có $\Delta' = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) = -m^2 - 4m - 2$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned}\Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \leq m \leq -2+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy với $m \in \left[-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}\right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Vậy $-3 < m < 1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta = (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 6$$

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

1. $x^2 - mx - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $-x^2 + (2m-1)x + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải.

1. Tam thức $f(x) = x^2 - mx - m$ có hệ số $a = 1 > 0$. Do đó bất phương trình $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$$

Vậy $-4 \leq m \leq 0$ là các giá trị cần tìm.

2. Tam thức $f(x) = -x^2 + (2m-1)x + m$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi

$$(2m-1)^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 < 0, \text{vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. **Trường hợp 1.** Với $m = -2$, ta được $f(x) = 1 > 0$, luôn đúng với mọi x. Do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là các giá trị cần tìm.

4. Xét bất phương trình $(3m+1)\,x^2 - (3m+1)\,x + m + 4 \geq 0$. $\quad (*)$

Trường hợp 1. Với $3m + 1 = 0$ hay $m = -\dfrac{1}{3}$, bất phương trình $(*)$ trở thành $4 - \dfrac{1}{3} \geq 0$ (luôn đúng). Do đó $m = -\dfrac{1}{3}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $3m + 1 \neq 0$ hay $m \neq -\dfrac{1}{3}$, bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} 3m+1 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ 3m^2 + 46m + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m < -15 \\ m > -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq -\dfrac{1}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leqslant 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\Delta' = m^2 \geqslant 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$.

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.
- Nếu $m > 0$ thì $x_1 = 1 - m < x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1-m; 1+m]$.
  Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi $[1;2] \subset [1-m;1+m]$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 1 - m \\ 2 \geqslant 1 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geqslant 0 \\ m \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant 1.$
- Nếu $m < 0$ thì $x_1 = 1 - m > x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1+m; 1-m]$.
  Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2]$ khi và chỉ khi
  $$[1;2] \subset [1+m;1-m] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 1 + m \\ 2 \geqslant 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leqslant 0 \\ m \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leqslant -1.$$

Vậy $m \leqslant -1$ hoặc $m \geqslant 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 + (1-3m)x + 3m - 2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geqslant 2$.

Hướng dẫn giải. Bài toán viết lại như sau: Tìm m để bất phương trình $x^2+(1-3m)x+3m-2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(-\infty;-2]$ hoặc khoảng $[2;+\infty)$.

Ta có $x^2 + (1-3m)x + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3m - 2. \end{array}\right.$

- Nếu $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì bất phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
  Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.
  Do đó bất phương trình đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $(-\infty;-2]$ hoặc nửa khoảng $[2;+\infty)$.
  Vậy $m = 1$ thỏa mãn.
- Nếu $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là
  $$S = (-\infty; 3m-2) \cup (1;+\infty).$$
  Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $(-\infty;-2]$ hoặc nửa khoảng $[2;+\infty)$ khi và chỉ khi $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$.
  Vậy $0 < m < 1$ thỏa mãn.
- Nếu $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là
  $$S = (-\infty;1) \cup (3m-2;+\infty).$$
  Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc nửa khoảng $(-\infty;-2]$ hoặc nửa khoảng $[2;+\infty)$ khi và chỉ khi $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \dfrac{4}{3}$.
  Vậy $1 < m < \dfrac{4}{3}$ thỏa mãn.

Kết hợp ba trường hợp ta được $0 < m < \dfrac{4}{3}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

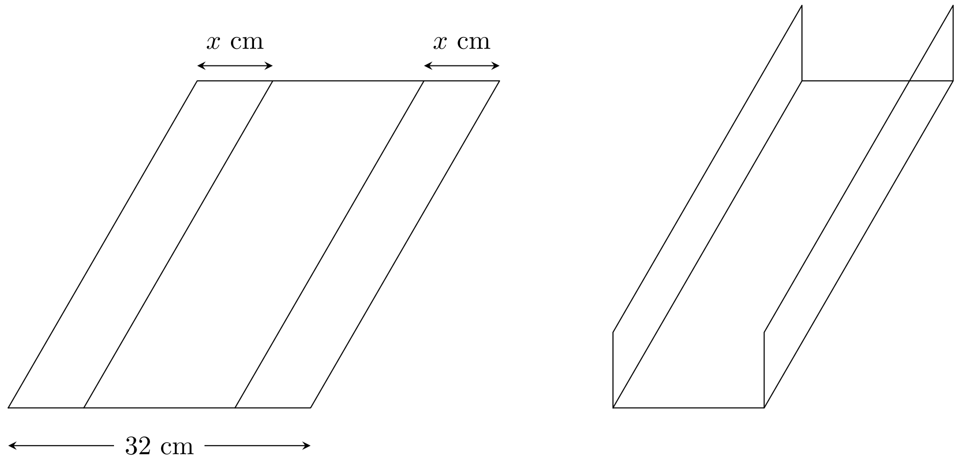
Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \leqslant -4$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\Delta = (3-m)^2 - 4(-2m+3) = m^2 + 2m - 3$.

- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ thỏa mãn.
- Nếu $m = -3$ thì bất phương trình trở thành $x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ thỏa mãn.
- Nếu $-3 < m < 1$ thì $\Delta < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0$ nên $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$ thỏa mãn.
- Nếu $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$ thì $\Delta > 0$ nên phương trình $x^2 + (3-m)x - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm là
$$x_1 = \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2} < \frac{-3 + m + \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2} = x_2.$$
Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là
$$S = \left(-\infty; \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + m + \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2}; +\infty\right).$$
Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \leqslant -4$ khi và chỉ khi
$$\begin{aligned} & (-\infty; -4] \subset \left(-\infty; \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow & -4 < \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 3} < m + 5 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 5 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 < (11 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \vee m > 1 \\ m > -5 \\ m > -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{7}{2} < m < -3 \\ m > 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Kết hợp bốn trường hợp ta được $m > -\dfrac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình bên dưới).



Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2.

Hướng dẫn giải. Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 25 thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)$ (cm^2).
Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu "+" là $(6; 10)$.
Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.
Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 (cm).

Bài 15. Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3300$; giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

Hướng dẫn giải. Để đảm bảo không bị lỗ thì $T = Q^2 + 30Q + 3300 \leq 170Q \Leftrightarrow Q^2 - 140Q + 3300 \leq 0$.
Tam thức bậc hai $Q^2 - 140Q + 3300$ có hai nghiệm $x_1 = 110, x_2 = 30$ và có hệ số $a = 1 > 0$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $Q^2 - 140Q + 3300 \leq 0$ là $(30; 110)$.
Vậy số sản phẩm được sản xuất trong khoảng $(30; 110)$ để đảm bảo không bị lỗ.

Bài 16. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:
50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

1. Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.
2. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

Hướng dẫn giải.

1. Do x là số lượng khách thứ 51 trở lên nên $x > 0$.
   Cứ thêm 1 người thì giá còn $(300000 - 5000 \cdot 1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách. Thêm

x người thì giá còn $(300000 - 5000 \cdot x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.
Doanh thu theo x là $(50 + x) \cdot (300000 - 5000 \cdot x)$ đồng.

2. Do chi phí thực sự cho chuyến đi là 15080000 đồng nên để công ty không bị lỗ thì doanh thu phải lớn hơn hoặc bằng 15080000 đồng Khi đó:
$$\begin{aligned}
&(50 + x) \cdot (300000 - 5000x) \geq 15080000\\
\Leftrightarrow\ &(50 + x) \cdot 5000 \cdot (60 - x) \geq 15080000\\
\Leftrightarrow\ &(x + 50)(60 - x) \geq 3016\\
\Leftrightarrow\ &-x^2 + 10x + 3000 \geq 3016\\
\Leftrightarrow\ &-x^2 + 10x - 16 \geq 0\\
\Leftrightarrow\ &2 \leq x \leq 8
\end{aligned}$$
Vậy số người của nhóm du khách nhiều nhất là 58 người thì công ty không bị lỗ.

Bài 17. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

1. Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.
2. Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hòa vốn?
3. Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

Hướng dẫn giải.

1. Doanh thu khi bán hết Q sản phẩm là $1200 \cdot Q$ (nghìn đồng).
Lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm là
$$1200Q - (Q^2 + 180Q + 140000) = -Q^2 + 1020Q - 140000.$$
2. Xí nghiệp hòa vốn khi và chỉ khi $-Q^2 + 1020Q - 140000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q \approx 163{,}45 \\ Q \approx 856{,}55. \end{array}\right.$
Vậy xí nghiệp sản xuất 163 sản phẩm hoặc 857 sản phẩm thì hòa vốn.
3. Để xí nghiệp không bị lỗ thì
$$-Q^2 + 1020Q - 140000 \geq 0 \Leftrightarrow 163{,}45 \leq Q \leq 856{,}55.$$
Vậy để không bị lỗ thì xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm nằm trong $[164; 856]$.

Bài 18. Một công ty đồ gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là x nghin đồng thì doanh thu R (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là $R(x) = -560x^2 + 50000x$.

1. Theo mô hình doanh thu này, thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là sẽ không có người mua)?
2. Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

Hướng dẫn giải.

1. Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là $R(x) = -560x^2 + 50000x = 0$ hay $x = 0$ hoặc $x \approx 89$. Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty sẽ không có doanh thu (đơn giá cao quá dẫn đến không có ai mua hàng).
2. Doanh thu vượt mức 1 ti đồng tức là $R(x) = -560x^2 + 50000x > 1000000$, hay $56x^2 - 5000x +$

$100000 < 0$. Giải bất phương trình ta được $30,25 < x < 59,04$. Vậy đơn giá của bình đựng nước từ khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng.

Bài 19. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+3x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Bài 20. Giải bất phương trình $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$x^2+12x+36$		$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-6\}$.

Bài 21. Giải bất phương trình $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) > 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Bài 22. Giải bất phương trình $(4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9) < 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$-8x^2+x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$2x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài 23. Giải bất phương trình $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+5x+7} \geq 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+5x+7		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$.

Bài 24. Giải bất phương trình $\dfrac{5x^2+3x-8}{x^2-7x+6} \leq 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{8}{5}$		1		6		$+\infty$
$5x^2+3x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-7x+6		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\dfrac{8}{5}; 1\right) \cup (1; 6)$.

Bài 25. Giải bất phương trình $\dfrac{x^4-17x^2+60}{x\left(x^2-8x+5\right)} > 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		$-\sqrt{5}$		0		$4-\sqrt{11}$		$\sqrt{5}$		$\sqrt{12}$		$4+\sqrt{11}$		$+\infty$
x^4-17x^2+60		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-8x+5		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\sqrt{12}; -\sqrt{5}\right) \cup \left(0; 4-\sqrt{11}\right) \cup \left(\sqrt{5}; \sqrt{12}\right) \cup \left(4+\sqrt{11}; +\infty\right)$.

Bài 26. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{x^2+5x+6} > \dfrac{1}{x^2-17x+72}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\dfrac{1}{x^2+5x+6} > \dfrac{1}{x^2-17x+72} \iff \dfrac{-22x+66}{(x^2+5x+6)(x^2-17x+72)} > 0$.
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		3		8		9		$+\infty$
$-22x+66$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
x^2+5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2-17x+72$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-2; 3) \cup (8; 9)$.

Bài 27. Giải bất phương trình $\dfrac{5x^2-7x-3}{3x^2-2x-5} > 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\dfrac{5x^2-7x-3}{3x^2-2x-5} > 1 \iff \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-2x-5} > 0$.
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x^2-2x-5$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
VT		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Bài 28. Giải bất phương trình $\dfrac{x-2}{1-x} + \dfrac{x-3}{x+1} \geq \dfrac{x^2+4x+15}{x^2-1}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\dfrac{x-2}{1-x} + \dfrac{x-3}{x+1} \geq \dfrac{x^2+4x+15}{x^2-1} \iff \dfrac{-x^2-7x-10}{x^2-1} \geq 0$.
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		$+\infty$
$-x^2-7x-10$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
x^2-1		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-5; -2) \cup (-1; 1)$.

Bài 29. Giải bất phương trình $(x^2+3x)(2x+3) - 16 \cdot \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(x^2+3x)(2x+3) - 16 \cdot \dfrac{2x+3}{x^2+3x} \iff \dfrac{(x^2+3x)^2(2x+3) - 16(2x+3)}{x^2+3x} \geq$
0

$$\Longleftrightarrow \frac{(2x+3)\left((x^2+3x)^2-16\right)}{x^2+3x} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(2x+3)(x^2+3x-4)(x^2+3x+4)}{x^2+3x} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-3		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+3x+4		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2+3x		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$.

Bài 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2-(m-2)x-8m+1\geq 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Do $a=1>0$ nên bất phương trình trên luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 31. Tìm giá trị của m để biểu thức $f(x)=x^2-(m+2)x+2m$ có giá trị không âm với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải. Do $a=1>0$ nên $f(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta=(m-2)^2\leq 0\Leftrightarrow m=2$. [Vũ Văn Trường]

Bài 32. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\sqrt{mx^2+2(m+1)x+m-1}$ có tập xác $D\neq\varnothing$.

Hướng dẫn giải. Với $m=0$ thì $f(x)=\sqrt{2x-1}$, khi đó hàm số có tập xác định $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\neq\varnothing$.

Với $m\neq 0$, hàm số có tập xác định $D\neq\varnothing\Leftrightarrow\Delta'=(m+1)^2-m^2+m\geq 0\Rightarrow m\geq-\frac{1}{3}$. Trong trường hợp này ta có $\begin{cases}m\neq 0\\ m\geq-\frac{1}{3}\end{cases}$.

Từ đó suy ra giá trị m cần tìm là $m\geq-\frac{1}{3}$.

Bài 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1\leq\frac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$$

Hướng dẫn giải. Ta có $2x^2-3x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $-1\leq\frac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x+m+2\geq 0\\ 13x^2-26x+14-m>0\end{cases}$.

Ta có $3x^2+2x+m+2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq-\frac{5}{3}$.
$13x^2-26x+14-m>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<1$.

Do đó $-\dfrac{5}{3} \leq m < 1$.

Bài 34. Chứng minh rằng hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2+5x+4 \leq 0 \\ x^2-(m+3)x+2(m+1) \leq 0 \end{cases}$ luôn có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Ta có $x^2+5x+4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$, suy ra tập nghiệm của bất phương trình $x^2+5x+4 \leq 0$ là $S=[1;4]$.
Phương trình $x^2-(m+3)x+2(m+1)=0$ có hai nghiệm $x=2, x=m+1$. Từ đó suy ra bất phương trình $x^2-(m+3)x+2(m+1) \leq 0$ có tập nghiệm $S'=\{2\}, S'=[2;m+1], S'=[m+1;2]$ tương ứng khi $m+1=2; m+1>2; m+1<2$.
Trong cả 3 trường hợp ta đều có $S \cap S' \neq \varnothing$, do đó hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 35. Xét dấu của biểu thức $f(x)=(|2x-3|-1)(|x^2-2x+4|-2x^2+9x-16)$.

Hướng dẫn giải. Do $|2x-3|+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $|2x-3|-1$ là dấu của

$$(|2x-3|-1)(|2x-3|+1)=(2x-3)^2-1=4x^2-12x+8=4(x^2-3x+2).$$

Vì $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $|x^2-2x+4|=x^2-2x+4$.
Suy ra $|x^2-2x+4|-2x^2+9x-16=x^2-2x+4-2x^2+9x-16=-x^2+7x-12$.
Dấu của $f(x)$ là dấu của biểu thức $g(x)=(x^2-3x+2)(-x^2+7x-12)$.
Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+		+		+	
$-x^2+7x-12$		−		−		−	0	+	0	−	
$g(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Vậy: $f(x)>0, \forall x \in (1;2) \cup (3;4)$; $f(x)<0, \forall x \in (-\infty;1) \cup (2;3) \cup (4;+\infty)$.

Bài 36. Giải các bất phương trình sau:

1. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}$;
2. $(x+2)^2(x-1)(x+5)+8 \geq 0$.

Hướng dẫn giải.

1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}\\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} \geq \frac{-2}{x^2-2x}\\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2x} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2x)+2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0.\end{aligned}$$

Bảng xét dấu của vế trái:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$4x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2x		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
VT		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(-1;0)\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

2. $(x+2)^2(x-1)(x+5)+8\geq 0\Leftrightarrow(x+2)^2(x^2+4x-5)+8\geq 0\Leftrightarrow(x+2)^2\left[(x+2)^2-9\right]+8\geq 0$.
Đặt $t=(x+2)^2\geq 0$, bất phương trình đã cho có dạng $t(t-9)+8\geq 0\Leftrightarrow t^2-9t+8\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leq 1\\ t\geq 8\end{array}\right.$.
Thay $t=(x+2)^2$ ta có:
$\left[\begin{array}{l}(x+2)^2\leq 1\\ (x+2)^2\geq 8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x+2\leq 1\\ -2\sqrt{2}\leq x+2\leq 2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\leq x\leq -1\\ -2-2\sqrt{2}\leq x\leq -2+2\sqrt{2}\end{array}\right.$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=\left[-2-2\sqrt{2};-2+2\sqrt{2}\right]$.

Bài 37. Xác định tham số m để hệ $\begin{cases}x^2-2mx-m^2+m-1>0\\ \dfrac{2x-1}{x+1}>\dfrac{x-3}{x}\end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Xét hệ $\begin{cases}x^2-2mx-m^2+m-1>0 & (1)\\ \dfrac{2x-1}{x+1}>\dfrac{x-3}{x} & (2)\end{cases}$.

$$(2)\Leftrightarrow\frac{(2x-1)x-(x+1)(x-3)}{x(x+1)}>0$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2+x+3}{x(x+1)}>0\Leftrightarrow x(x+1)>0 \text{vì} x^2+x+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>0.\end{array}\right.$$

Suy ra tập nghiệm của (2) là $T_2=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.
Giải (1) Ta có $\Delta'=2m^2-m+1>0,\forall m\in\mathbb{R}$.
Suy ra tam thức bậc hai $f(x)=x^2-2mx-m^2+m-1$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\quad(x_1<x_2)$ và (1) luôn có tập nghiệm $T_1=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.
Suy ra tập nghiệm của hệ $T=T_1\cap T_2\neq\varnothing$.
Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Bài 38. Tìm giá trị của tham số m để $f(x)=(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải.

- Với $m=2$ thì $f(x)=2x+4\Rightarrow f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$. Suy ra $m=2$ không phải giá trị cần tìm.

◇ Với $m \neq 2$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai. Do đó, ta có

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ \Delta' = (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ -m^2+4m-3 \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Kết luận: $m \geq 3$.

Bài 39. Chứng minh bất đẳng thức $x^2+2y^2-2xy+2x-4y+3>0$.

Hướng dẫn giải. Đặt $f(x) = x^2+2y^2-2xy+12x-4y+3 = x^2-2(y-1)x+(2y^2-4y+3)$.
Suy ra $f(x)$ là tam thức bậc hai đối với x.
Ta có $\Delta_x = (y-1)^2-(2y^2-4y+3) = -y^2+2y-2 < 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
Vậy $f(x) > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (đpcm).

Bài 40. Cho $a^3 > 36$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{3}+b^2+c^2 > ab+bc+ca$.

Hướng dẫn giải. Do $a^3 > 36$ nên $a > 0$ và $abc = 1 \Rightarrow bc = \dfrac{1}{a}$.
Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(b+c)^2 - a(b+c) - \dfrac{3}{a} + \dfrac{a^2}{3} > 0$.
Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - ax - \dfrac{3}{a} + \dfrac{a^2}{3}$.

$$\Delta = a^2 - 4\left(-\frac{3}{a}+\frac{a^2}{3}\right) = a^2+\frac{12}{a}-\frac{4a^2}{3} = \frac{3a^3-4a^3+36}{3a} = \frac{36-a^3}{3a} > 0.$$

Suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (b+c)^2 - a(b+c) - \dfrac{3}{a} + \dfrac{a^2}{3} > 0$ (đpcm).

Chuyên đề 3

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH HAY GẶP

Dạng 8 Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

- Bình phương hai vế của phương trình (làm mất căn thức), ta được
$$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f.$$
Chuyển vế, thu gọn ta được phương trình bậc hai. Giải phương trình này, tìm nghiệm.
- Thay từng nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu. Nghiệm nào thoả mãn thì nhận; nghiệm nào **không** thoả thì loại.
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 25 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x^2-28x-29}=\sqrt{x^2-5x+6}$;

b) $\sqrt{6x^2-22x+14}=\sqrt{4x^2-11x-1}$;

c) $\sqrt{-x^2+x+17}=\sqrt{x^2-12x+2}$;

d) $\sqrt{x^2-6x-4}=\sqrt{x-4}$.

e) $\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+4x+3}=0$.

f) $\sqrt{2x^2+3x-2}-\sqrt{x^2+x+6}=0$;

Lời giải.

1. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được
$$\begin{aligned}&5x^2-28x-29=x^2-5x+6\\ \Rightarrow &4x^2-23x-35=0\\ \Rightarrow &x=7 \text{hoặc} x=-\frac{5}{4}.\end{aligned}$$
Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x=7$ và $x=-\frac{5}{4}$ thoả mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là 7 và $-\frac{5}{4}$.

2. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được
$$\begin{aligned}&6x^2-22x+14=4x^2-11x-1\\ \Rightarrow &2x^2-11x+15=0\\ \Rightarrow &x=\frac{5}{2} \text{hoặc} x=3\end{aligned}$$
Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

3. Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được
$$\begin{aligned}&-x^2+x+17=x^2-12x+2\\ \Rightarrow &-2x^2+13x+15=0\\ \Rightarrow &x=-1 \text{hoặc} x=\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -1$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trinh đã cho là $x = -1$.

4. Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$. (2)
Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.
Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.
Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thoả mãn bất phương trình.
Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

5. Chuyển vế ta được $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.
Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$. (4)
Ta có (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.
Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.
Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thoả mãn bất phương trình.
Vậy phương trình(3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

6. Ta có

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 6 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = x^2 + x + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$ hoặc $x = -4$.

Dạng 9 Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Phương pháp giải:

- Bình phương hai vế của phương trình (làm mất căn thức), ta được
$$ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$$
Chuyển vế, thu gọn ta được phương trình bậc hai. Giải phương trình này, tìm nghiệm.
- Thay từng nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu. Nghiệm nào thoả mãn thì nhận; nghiệm nào **không** thoả thì loại.
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 26 ★☆☆☆☆

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$.

b) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = 3x + 5$.

c) $\sqrt{69x^2 - 52x + 4} = -6x + 4$;

d) $\sqrt{-x^2 - 4x + 22} = -2x + 5$;

e) $\sqrt{-7x^2 - 60x + 27} + 3(x - 1) = 0$;

f) $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} + 2x = 5$.

Lời giải.

5. Ta có: $\sqrt{3x^2-9x-5}+2x=5$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2-9x-5}=5-2x$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$\begin{aligned}&3x^2-9x-5=(-2x+5)^2\\ \Rightarrow &3x^2-9x-5=4x^2-20x+25\\ \Rightarrow &-x^2+11x-30=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x=5\text{hoặc}x=6.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x=5$ và $x=6$ không thoả mãn. Vậy phương trình vô nghiệm.

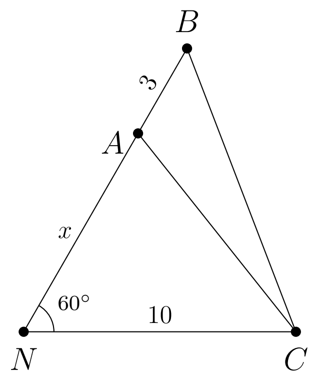
Dạng 10 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 27 ★☆☆☆☆

Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10 m. Từ nhà, An đi x mét thẹo phương tạo với NC một góc 60° đến vị trí A sau đó đi tiếp 3 m đến vị trí B như hình bên.

1. Biểu diễn khoảng cách AC và BC thẹo x.
2. Tìm x để $AC=\dfrac{8}{9}BC$.
3. Tìm x đề khoảng cách $BC=2AN$.

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải.

1. Vì x là khoảng cách AN nên $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{AN^2+NC^2-2AN\cdot NC\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{x^2+100-10x}\\ BC&=\sqrt{BN^2+NC^2-2BN\cdot NC\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{(x+3)^2+100-10(x+3)}\\ &=\sqrt{x^2-4x+79}.\end{aligned}$$

2. Ta có $AC=\dfrac{8}{9}BC$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sqrt{x^2-10x+100}=\frac{8}{9}\sqrt{x^2-4x+79}\\ &\Rightarrow 81\left(x^2-10x+100\right)=64\left(x^2-4x+79\right)\\ &\Rightarrow 17x^2-554x+3044=0\\ &\Rightarrow x\approx 25,6\text{hoặc}x\approx 7\end{aligned}$$

Vậy $x\approx 25,6$ hoặc $x\approx 7$.

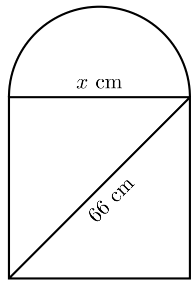
③ Ta có $BC = 2AN$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sqrt{x^2-4x+79} = 2x\\&\Rightarrow x^2-4x+79 = 4x^2\\&\Rightarrow 3x^2+4x-79 = 0\\&\Rightarrow x \approx 4,5 \text{hoặc} x \approx -5,8\end{aligned}$$

Mà vì $x \geq 0$ nên ta có $x \approx 4,5$.

Ví dụ 28 ★☆☆☆☆

Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 66 cm. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



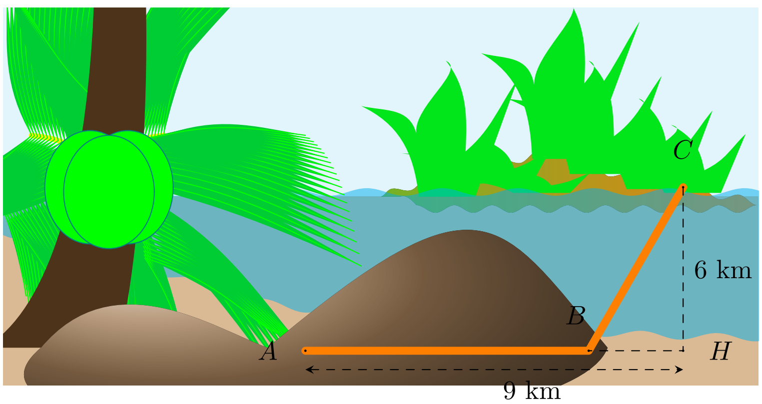
Lời giải. Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(\text{ cm})(x > 0)$. Độ dài cạnh bên của hình chữ nhật là $\sqrt{66^2-x^2}$. Diện tích nửa hình tròn là $\frac{3,14x^2}{8}$. Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{66^2-x^2}$. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{3,14x^2}{8} = 0,3x\sqrt{66^2-x^2} \Leftrightarrow 157x = 120\sqrt{66^2-x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{62726400}{39049} \Leftrightarrow x \approx \pm 40,08.$$

Vậy kích thước của hình chữ nhật khoảng $40,08$ cm $\times$ $52,44$ cm.

Ví dụ 29 ★☆☆☆☆

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm C trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Để thực hiện, công ty dự định xây dựng phần đường ống trên bờ từ A đến B và đường ống dưới nước từ B đến C (hình vẽ).



Biết giá để xây đường ống trên bờ là $50.000 USD$ mỗi km, và $130.000 USD$ mỗi km để xây dưới nước. Xác định đoạn đường từ A đến B để tổng chi phí xây dựng lắp đặt từ A đến C khoảng 1.170.000 USD.

Lời giải. Đặt $x = BH$, $x \in [0; 9]$. Khi đó

$$BC = \sqrt{x^2 + 36}; AB = 9 - x$$

Chi phí xây dựng đường ống là

$$C(x) = 130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x)$$

Để chi phí khoảng 1.170.000, ta có phương trình

$$130.000\sqrt{x^2 + 36} + 50.000(9 - x) = 1.170.000 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Suy ra $AB = 9 - x = 6,5$ km.

Dạng 11 Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác.

Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

- $af(x) + b\sqrt{f(x)} = c$. Đặt $\sqrt{f(x)} = t$.
- $a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A.B} = c$ (A,B là biểu thức của x). Đặt $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A.B} = \cdots$ (Bình phương t để đưa ra $\sqrt{A.B}$).

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện thẹo một trong những hướng sau:

- Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.
- Biến đổi liên hợp $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.
- Khi nhẩm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liện hợp tạo ra nhân tử chung.

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Ví dụ 30 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Lời giải.

$\sqrt{2x - 4} = \sqrt{x^2 - 3x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 = x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Ví dụ 31 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1$.

Lời giải.

$\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+5=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 32 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3$.

Lời giải. **Phân tích:** 2 vế không âm nên ta có thể bình phương được, bình phương sẽ mất dần số lượng căn đi.

$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=3$ (ĐK: $x \geq \dfrac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow 3x+2+2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=7-3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x-3)=(7-3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{3} \\ x^2-62x+61=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=61 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.(\text{TMĐK})$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 33 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $2x^2-2x+\sqrt{(x+1)(x-2)}=14$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{(x+1)(x-2)}=t$ $(t \geq 0) \Rightarrow x^2-x-2=t^2 \Rightarrow x^2-x=t^2+2$.

Vậy ta có phương trình:

$2(t^2+2)+t=14 \Leftrightarrow 2t^2+t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-5}{2}(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $\sqrt{(x+1)(x-2)}=2 \Leftrightarrow x^2-x-2=4 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Phương trình có 2 nghiệm $x=-2; x=3$.

Ví dụ 34 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}+\sqrt{-x^2+4x-3}=3$.

Lời giải. ĐK: $1 \le x \le 3$ Đặt $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=t$ $(\sqrt{2} \le t \le 2)$

$\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{-x^2+4x-3}=\dfrac{t^2-2}{2}$.

Khi đó ta có phương trình:

$t+\dfrac{t^2-2}{2}=3 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-4(\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow t=2.$

Khi đó ta có $\sqrt{-x^2+4x-3}=1 \Leftrightarrow -x^2+4x-3=1 \Leftrightarrow x=2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 35 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt{x+3}=4$.

Lời giải. ĐK: $x \ge -3$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7}=a; \sqrt{x+3}=b$ $(b \ge 0)$

Ta có hệ

$\begin{cases} a+b=4 \\ a^3-b^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3-(4-a)^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3-a^2+8a-20=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-2)(a^2+a+10)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$.

Vậy $\sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x=1$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Ví dụ 36 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}-\sqrt{-x^2+4x-3}=3$.

Lời giải. ĐK: $1 \le x \le 3$.

$\sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}-\sqrt{-x^2+4x-3}=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+3\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}-3=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-3\right)+\left(3\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-3\right)-\sqrt{3-x}\left(\sqrt{x-1}-3\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-3\right)\left(\sqrt{3-x}-1\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=3\\ \sqrt{3-x}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10(\text{loại})\\ x=2\end{array}\right.$.
Vậy phương trình có một nghiệm $x=2$.

Ví dụ 37 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=x^2-3x-4$.

Lời giải. Đk: $x \geq \dfrac{1}{2}$.
$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=x^2-3x-4$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3-2x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}}=(x-4)(x+1)$
$\Leftrightarrow \dfrac{4-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}}=(x-4)(x+1)$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ \dfrac{-1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}}=x+1(2)\end{array}\right.$.
Phương trình (2) vô nghiệm vì với $x \geq \dfrac{1}{2}$ thì $VT<0<VP$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$

Ví dụ 38 ★☆☆☆☆

Giải phương trình $\sqrt{x-2}+x^2-3x-1=0$.

Lời giải. **Phân tích:** Ta nhẩm được một nghiệm của phương trình là $x=3$ và nếu tại $x=3$ thì $\sqrt{x-2}$ là 1 nên nếu ta trừ nó cho 1 thì sẽ tạo được nhân tử $x-3$
. ĐK: $x \geq 2$.
$\sqrt{x-2}+x^2-3x-1=0$
$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)+x^2-3x=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+x(x-3)=0$
$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+x\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+x=0(2)\end{array}\right.$.
Phương trình (2) với điều kiện $x \geq 2$ thì phương trình (2) có $VT>0$ nên (2) vô nghiệm.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

BÀI TẬP

Bài 41. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2-3x-1}=\sqrt{2x+3}$.

b) $\sqrt{4x^2-6x-6}=\sqrt{x^2-6}$.

c) $\sqrt{x+9}=2x-3$.

d) $\sqrt{-x^2+4x-2}=2-x$.

e) $\sqrt{2-x}+2x=3$

f) $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$

Hướng dẫn giải.

1

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x^2-3x-1}=\sqrt{2x+3}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2x+3\ge 0\\ 2x^2-3x-1=2x+3\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x\ge \dfrac{-3}{2}\\ 2x^2-5x-4=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x\ge \dfrac{-3}{2}\\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{57}}{4}\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{57}}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{57}}{4};\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}\right\}$.

2

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4x^2-6x-6}=\sqrt{x^2-6}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^2-6\ge 0\\ 4x^2-6x-6=x^2-6\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x^2-6\ge 0\\ 3x^2-6x=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -\sqrt{6}\\ x\ge\sqrt{6}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\ x\in\varnothing.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

3

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+9}=2x-3\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2x-3\ge 0\\ x+9=4x^2-12x+9\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ 4x^2-13x=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x\ge \dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{13}{4}\end{array}\right.\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Vậy tập nghiệm là $S = \left\{\frac{13}{4}\right\}$.

4

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-x^2+4x-2} = 2-x\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ -x^2+4x-2 = x^2-4x+4 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2-8x+6 = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\ x = 1.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{1\}$.

5

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2-x} + 2x = 3\\
\Leftrightarrow &\sqrt{2-x} = 3-2x\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 2-x = 4x^2-12x+9 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq \dfrac{3}{2} \\ 4x^2-11x+7 = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\ x = 1.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{1\}$.

6

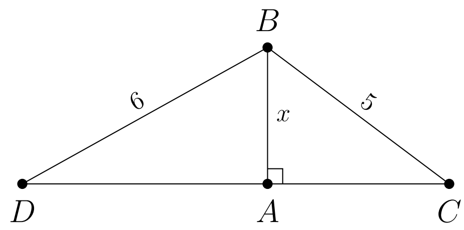
$$\begin{aligned}
&\sqrt{-x^2+7x-6} + x = 4\\
\Leftrightarrow &\sqrt{-x^2+7x-6} = 4-x\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ -x^2+7x-6 = x^2-8x+16 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq 4 \\ 2x^2-15x+22 = 0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{11}{2} \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{2\}$.

Bài 42. Cho tam giác ABC và ABD cùng vuông tại A như hình bên với $AB = x$, $BC = 5$ và $BD = 6$.

1. Biểu diễn độ dài cạnh AC và AD theo x.
2. Tìm x đề chu vi của tam giác ABC là 12.
3. Tìm x để $AD = 2AC$.



Hướng dẫn giải.

1. Vì x là khoảng cách AN nên $x \geq 0$.

$$AC = \sqrt{AN^2 + NC^2 - 2AN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 100 - 10x}$$
$$BC = \sqrt{BN^2 + NC^2 - 2BN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{(x+3)^2 + 100 - 10(x+3)}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4x + 79}.$$

2. Ta có $AC = \dfrac{8}{9}BC$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 100} = \frac{8}{9}\sqrt{x^2 - 4x + 79}$$
$$\Rightarrow 81\left(x^2 - 10x + 100\right) = 64\left(x^2 - 4x + 79\right)$$
$$\Rightarrow 17x^2 - 554x + 3044 = 0$$
$$\Rightarrow x \approx 25,6 \text{hoặc} x \approx 7.$$

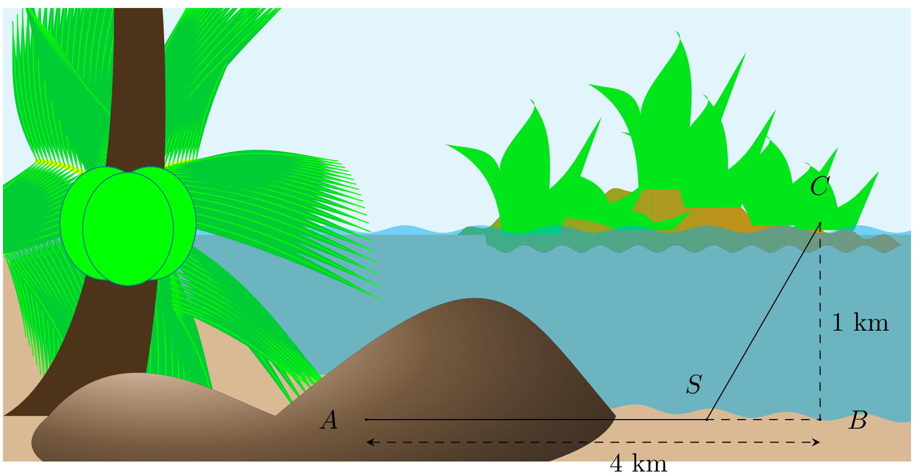
Vậy $x \approx 25,6$ hoặc $x \approx 7$.

3. Ta có $BC = 2AN$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 79} = 2x$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 79 = 4x^2$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 79 = 0$$
$$\Rightarrow x \approx 4,5 \text{hoặc} x \approx -5,8.$$

Mà vì $x \geq 0$ nên ta có $x \approx 4,5$.

Bài 43. Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như hình bên.



Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế.

Hướng dẫn giải. Đặt $BS = x$ (ki-lô-mét) với $0 < x < 4$. Suy ra $AS = 4 - x$.

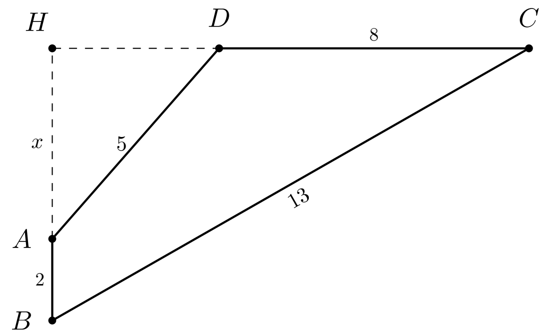
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong tam giác BCS ta có $CS = \sqrt{1 + x^2}$ (ki-lô-mét).
Tổng số tiền để lắp đặt là $5\sqrt{1 + x^2} + 3(4 - x)$ (triệu đồng).
Vì tổng chi phí lắp đặt là 16 triệu đồng, nên ta có phương trình

$$5\sqrt{1+x^2} + 3(4-x) = 16 \Leftrightarrow 5\sqrt{1+x^2} = 4 + 3x$$
$$\Leftrightarrow 25(1+x^2) = 16 + 24x + 9x^2 (x > 0)$$
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 24x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} (\text{thỏa điều kiện} 0 < x < 4).$$

Tổng quãng đường đã thiết kế là

$$\ell = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} + 4 - \frac{3}{4} = \frac{9}{2} (\text{ki-lô-mét}).$$

Bài 44. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$; $AB = 2$; $BC = 13$; $CD = 8$; $DA = 5$. Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x, từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Hướng dẫn giải. Đặt $AH = x$. Khi đó theo định lí Pythagore, ta có $DH = \sqrt{25 - x^2}$. Từ $BH^2 + CH^2 = BC^2$, biến đổi và rút gọn hệ thức này ta được phương trình

$$4\sqrt{25 - x^2} = 19 - x$$

Giải phương trình này ta được nghiệm $x = 3$. Từ đây ta tính được $S_{ABCD} = S_{HBC} - S_{HAD} = 30 - 6 = 24$ (đvdt).

Bài 45. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2x^2 + 2x - 2$.

Hướng dẫn giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} (t \geq 0)$ có phương trình:

$$t = 2t^2 - 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{-3}{2} (\text{Loại}) \end{array}\right.$$

Vậy $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = -2$.

Bài 46. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2 + 2x - 10$.

Hướng dẫn giải. Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)} = t (t \geq 0)$ thì $x^2 + x = t^2 + 2$ ta có phương trình

$$t = 2(t^2 + 2) - 10 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{-3}{2} (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Vậy $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -3$

Bài 47. Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$.

Hướng dẫn giải. ĐK: $-1 \le x \le 1$ Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t(\sqrt{2} \le t \le 2)$ thì $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{t^2-2}{2}$ khi đó ta có phương trình

$$t + 3\frac{t^2-2}{2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{-8}{3}(\text{loại}) \end{array}\right..$$

Vậy $\sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 48. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2-x-2} = 8$.

Hướng dẫn giải. ĐK: $x \ge 2$.

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = t(t \ge 0)$ thì $x + \sqrt{x^2-x-2} = \dfrac{t^2+1}{2}$ ta có

$$t + \frac{t^2+1}{2} = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -5(\text{loại}) \end{array}\right..$$

Vậy $x + \sqrt{x^2-x-2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} = 5 - x \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài 49. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Hướng dẫn giải. Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a; \sqrt{x+2} = b(b \ge 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Bài 50. Giải phương trình $-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Hướng dẫn giải. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 51. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0$

Hướng dẫn giải. ĐK: $x \ge \dfrac{1}{2}$.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2) + (\sqrt{2x-1} - 1) + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 52. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3$.

Hướng dẫn giải. ĐK: $x \ge -3$

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3} = 3(x^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3}} = 3(x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3} = 3(x^2+x+1)(2) \end{array}\right..$$

Thấy phương trình (2) vô nghiệm vì $VT \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \le VP$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 53. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x+6}$.

Hướng dẫn giải. $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x^2+3=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm $x=-1; x=3$.

Bài 54. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2}=x+1$.

Hướng dẫn giải. $\sqrt{2x^2+2}=x+1\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ 2x^2+2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 55. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4$.

Hướng dẫn giải. Đk: $x\geq -3$. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=4\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3}=6-2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ 3x^2+10x+3=(6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (tmđk)

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 56. Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2$.

Hướng dẫn giải. ĐK: $\dfrac{-3}{2}\leq x\leq 4$.

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{4-x}+2\Leftrightarrow 4\sqrt{4-x}=3x-5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{5}{3} \\ 16(4-x)=(3x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

Phương trình có 1 nghiệm $x=3$.

Bài 57. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2+2x-2}=2$.

Hướng dẫn giải. ĐK: $x^2+2x-2\geq 0$.

$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2+2x-2}=2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{x^2+2x-2}+2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4=x^2+2x-2+4+4\sqrt{x^2+2x-2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2x-2}=x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+2x-2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Phương trình có 1 nghiệm $x=1$.

Chuyên đề 4

BÀI TẬP TỔNG HỢP

I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 31. Biểu thức nào sau đây là một tam thức bậc hai?

Ⓐ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2023$.

Ⓑ $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 2023$.

Ⓒ $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{2}{x} - 3$.

Ⓓ $f(x) = x + 3\sqrt{x} - 2023$.

Hướng dẫn **B** Tam thức bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Do đó, $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 2023$ là một tam thức bậc hai.

Câu 32. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là tam thức bậc hai?

Ⓐ $f(x) = (m-1)x^2 + 2x + 5$.

Ⓑ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Ⓒ $f(x) = x + 3$.

Ⓓ $f(x) = 2x^2 + x - 5$.

Hướng dẫn **D** Tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Do đó $f(x) = 2x^2 + x - 5$ thỏa đề bài.

Câu 33. Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Với x thuộc tập nào sau đây thì tam thức $f(x)$ nhận giá trị âm?

Ⓐ $(-1;1)$.

Ⓑ $(-\infty;1)$.

Ⓒ $[-1;1]$.

Ⓓ $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Hướng dẫn **A** Dựa vào bảng xét dấu, $f(x)$ nhận giá trị âm $(f(x) < 0)$ với mọi $x \in (-1;1)$.

Câu 34. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (P), đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

Ⓐ $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Ⓑ $I\left(\dfrac{b}{a}; \dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Ⓒ $I\left(-\dfrac{b}{a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Ⓓ $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{2a}\right)$.

Hướng dẫn **A** Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 35. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

là của tam thức bậc hai nào dưới đây?

Ⓐ $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Ⓑ $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ⓒ $f(x) = -x^2 + x - 3$.

Ⓓ $f(x) = -x^2 + 4x$.

Hướng dẫn **A** Từ bảng xét dấu suy ra hệ số $a < 0$, nghiệm của biểu thức là $x = 1$ hoặc $x = 3$. Do đó $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Câu 36. Đa thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

Ⓐ $3x^3 - x^2 + 2x + 1$. Ⓑ $x^4 + 3x - 2$.
Ⓒ $x - 3$. Ⓓ $x^2 + 2$.

Hướng dẫn **D** Đa thức $x^2 + 2$ là tam thức bậc hai.

Câu 37. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

Ⓐ $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.
Ⓑ $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.
Ⓒ $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.
Ⓓ $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Hướng dẫn **B** Ta có: $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai

Câu 38. Hàm số nào sau đây không phải là hàm bậc hai?

Ⓐ $f(x) = 3 + 9x - 2x^2$. Ⓑ $f(x) = 2.5x^2 - 2x$.
Ⓒ $f(x) = 2022x + 2023$. Ⓓ $f(x) = x^2 + 1$.

Hướng dẫn **C** Hàm số $f(x) = 2022x + 2023$ là hàm số bậc nhất.

Câu 39. Cho bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.
Ⓑ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}$.
Ⓒ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 3]$.
Ⓓ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$.

Hướng dẫn **D** Dựa vào bảng biến thiên, mệnh đề sai là $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$.

Câu 40. Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

Ⓐ $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$. Ⓑ $f(x) = -5$.
Ⓒ $f(x) = x - 4$. Ⓓ $f(x) = -x^2 + 3x - 5$.

Hướng dẫn **D** Tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.
Do đó $f(x) = -x^2 + 3x - 5$ là một tam thức bậc hai.

Câu 41. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào là một tam thức bậc hai?

Ⓐ $f(x) = x^2 + 3$. Ⓑ $f(x) = 0x^2 + 2x$.
Ⓒ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Ⓓ $f(x) = 2x + 1$.

Hướng dẫn **A** Trong các biểu thức trên $f(x) = x^2 + 3$ là một tam thức bậc hai.

Câu 42. Tìm khẳng định đúng trong cac khẳng định sau.

Ⓐ $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.
Ⓑ $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.
Ⓒ $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.
Ⓓ $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.

Hướng dẫn **A** $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Câu 43. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc hai một ẩn

Ⓐ $2x + 1 > 0$.
Ⓑ $x^2 + 3x + 6 > 0$.
Ⓒ $2x + 3y < 0$.
Ⓓ $3x^2 + 4y^2 < 0$.

Hướng dẫn **B** Bất phương trình $x^2 + 3x + 6 > 0$ là bất phương trình bậc hai một ẩn.

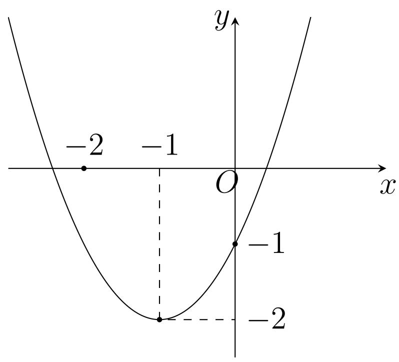
Câu 44. Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

Ⓐ $f(x) = 2x - 1$.
Ⓑ $f(x) = x^3 + 7x - 2022$.
Ⓒ $f(x) = 3x^2 + 2x - 10$.
Ⓓ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

Hướng dẫn **C** Biểu thức tam thức bậc hai là $f(x) = 3x^2 + 2x - 10$.

Câu 45. Cho hàm bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(-2; +\infty)$. Ⓒ $(-1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.



Hướng dẫn **C** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 46. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 7x + 12 < 0$ là

Ⓐ $\varnothing$.
Ⓑ $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.
Ⓒ $(3; 4)$.
Ⓓ $(0; 4)$.

Hướng dẫn **C** Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 7x + 12$ có $a = 1 > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right.$.
Theo định lý về dấu tam thức ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(3; 4)$

Câu 47. Tọa độ đỉnh của parabol $y = -3x^2 + 6x - 1$ là

Ⓐ $I(2; -1)$. Ⓑ $I(1; 2)$. Ⓒ $I(-2; -25)$. Ⓓ $I(-1; -10)$.

Hướng dẫn **B** Áp dụng lý thuyết với hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ thì đồ thị là parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow$ Tọa độ đỉnh là $I(1; 2)$.

Câu 48. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (P). Đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

Ⓐ $I\left(-\dfrac{b}{a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
Ⓑ $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
Ⓒ $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
Ⓓ $I\left(\dfrac{b}{2a}; \dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Hướng dẫn **C** $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ là đỉnh của parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + c$.

Câu 49. Bất phương trình nào dưới đây là bất phương trình bậc hai một ẩn x?

Ⓐ $1 - x \leq 0$.
Ⓑ $9 - x^2 > 0$.
Ⓒ $x(x^2 - 3x + 2) > 0$.
Ⓓ $2x^2 - 3x^3 + 1 \leq 0$.

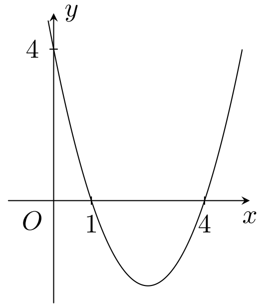
Hướng dẫn (B) Bất phương trình bậc hai một ẩn x là $9 - x^2 > 0$.

Câu 50. Đa thức nào dưới đây là một tam thức bậc hai?

(A) $g(x) = x^4 - x^2 + 3$.
(B) $f(x) = 2x - 1$.
(C) $k(x) = 2x^3 + x^2 + 1$.
(D) $h(x) = x^2 - 3x$.

Hướng dẫn (D) Đa thức $h(x) = x^2 - 3x$ là một tam thức bậc hai.

Câu 51. Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định **đúng**.



(A) $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
(B) $f(x) < 0, \forall x \in (0; 4)$.
(C) $f(x) < 0, \forall x \in (-1; 4)$.
(D) $f(x) > 0, \forall x \in (3; +\infty)$.

Hướng dẫn (A) Dựa vào đồ thị ta có $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

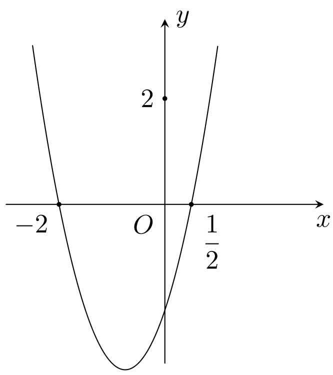
Câu 52. Bảng xét dấu sau đây là bảng xét dấu của tam thức bậc hai nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		$-$	0	$-$	

(A) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$.
(B) $g(x) = x^2 + 2x - 3$.
(C) $h(x) = -6x^2 + 12x - 6$.
(D) $k(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

Hướng dẫn (C) Dựa vào bảng biến thiên ta thấy tam thức bậc hai chỉ có một nghiệm $x = 1$ và luôn âm với mọi $x \neq 1$, do đó hệ số $a < 0$.
Ta thấy hàm số $h(x)$ thỏa mãn.

Câu 53. Cho đồ thị của hàm số bậc hai $y = f(x)$ như hình vẽ. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là



(A) $(-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
(B) $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$.
(C) vô nghiệm.
(D) $\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn (D) Dựa vào đồ thị hàm số, tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $\left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 54. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac$. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(B) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(C) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(D) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn **C** Phát biểu đúng là "Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ".

Câu 55. Tam thức bậc hai nào sau đây có bảng xét dấu như sau?

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(A) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
(B) $f(x) = -x^2 - 6x + 8$.
(C) $f(x) = x^2 + 6x - 8$.
(D) $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Hướng dẫn **A** Xét $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ có $\Delta = 36 > 0$, hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ và $a = -1 < 0$ nên ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Câu 56. Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

(A) $x \in \mathbb{R}$.
(B) $x \in (0; +\infty)$.
(C) $x \in (-\infty; 2)$.
(D) $x \in (-2; +\infty)$.

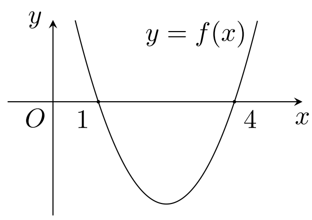
Hướng dẫn **A** Do tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta' = -9 < 0$ nên tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 57. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có $f(x) < 0$ với $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

(A) $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} a \geq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn **A** Ta có $f(x) < 0$ với $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, tìm dấu của a và Δ.



(A) $a < 0$, $\Delta = 0$.
(B) $a < 0$, $\Delta > 0$.
(C) $a > 0$, $\Delta > 0$.
(D) $a > 0$, $\Delta = 0$.

Hướng dẫn **C** Parabol trong hình vẽ có bề lõm quay lên nên hệ số $a > 0$.
Parabol cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó $\Delta > 0$.

Câu 59. Tam thức bậc hai $f(x) = 4 - x^2$ dương tại giá trị nào dưới đây?

Ⓐ $x_2 = 3$. Ⓑ $x_1 = -1$. Ⓒ $x_3 = -5$. Ⓓ $x_0 = 2$.

Hướng dẫn **B** Thay $x_1 = -1$ vào tam thức bậc hai, ta được $f(-1) = 4 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$.

Vậy tam thức bậc hai $f(x) = 4 - x^2$ dương tại giá trị $x_1 = -1$.

Câu 60. Biết tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $a > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ⓑ $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓒ $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ⓓ $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn **D** Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ nên $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 61. Biết tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như trong hình vẽ. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

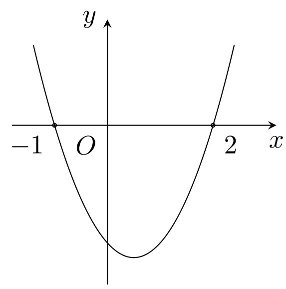
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ⓐ $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Ⓑ $[0; 2]$.
Ⓒ $(0; 2)$. Ⓓ $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Hướng dẫn **B** Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $[0; 2]$.

Câu 62. Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như trong hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?



Ⓐ $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
Ⓑ $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
Ⓒ $f(x) > 0$, $\forall x \in (-1; 2)$.
Ⓓ $f(x) > 0$, $\forall x \in [-1; 2]$.

Hướng dẫn **A** Dựa vào đồ thị, ta có $f(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 63. Tam thức bậc hai nào có bảng xét dấu như hình vẽ?

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ⓐ $f(x) = -x^2 + x + 6$. Ⓑ $f(x) = -2x^2 - 2x + 12$.
Ⓒ $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Ⓓ $f(x) = x^2 - x - 6$.

Hướng dẫn **C** Dựa vào bảng xét dấu ta có tam thức $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = -3; x_2 = 2$ và hệ số $a > 0$. Chỉ có tam thức $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ thoả mãn.

Câu 64. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2mx + 4m$. Số các giá trị nguyên của m để $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

Hướng dẫn (A)

$$x^2 - 2mx + 4m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 6 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $(a\,, b\,, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C). Biết rằng $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1\,, x_2$ thoả mãn $f(x_1) = f(x_2) + 4$. Đường thẳng qua điểm $M\,(x_2; f(x_2))$ cắt (C) tại điểm thứ hai $N\,(x_0; f(x_2))$. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua N và hai điểm cực trị của (C). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

(A) $\dfrac{19}{4}$. (B) $\dfrac{25}{6}$. (C) $\dfrac{23}{4}$. (D) $\dfrac{37}{12}$.

Hướng dẫn (D) Ta có $f(x) - g(x) = x^3 + \cdots$ có ba nghiệm $x_0\,, x_1\,, x_2$ nên $f(x) - g(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Do đó $f(x_2) - f(x_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} 3\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,dx = \frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)^3 = -4 \Leftrightarrow x_2 = x_1 + 2.$

Vì $x_1\,, x_2$ là hai nghiệm của $f'(x) = 0$ nên thẹo định lí vi-ét có $x_1 + x_2 = -\dfrac{2a}{3}$.

Đường thẳng $MN\colon y = f(x_2)$ nên phương trình $f(x) - f(x_2) = x^3 + ax^2 + bx + c - f(x_2)$ có hai nghiệm $x_0\,, x_2$ (trong đó x_2 là nghiệm kép) và cũng thẹo định lí vi-ét có

$$x_0 + x_2 + x_2 = -a \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}\,(x_1 + x_2) - 2x_2 = \frac{3x_1 - x_2}{2} = \frac{3x_1 - (x_1 + 2)}{2} = x_1 - 1.$$

Vậy $f(x) - g(x) = (x - x_1)\,(x - (x_1 + 2))\,(x - (x_1 - 1))$

Suy ra $S = \displaystyle\int_{x_1-1}^{x_1+2} |(x - x_1)\,(x - (x_1 + 2))\,(x - (x_1 - 1))|\,dx = \frac{37}{12}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

31 B	32 D	33 A	34 A	35 A	36 D	37 B	38 C	39 D	40 D
41 A	42 A	43 B	44 C	45 C	46 C	47 B	48 C	49 B	50 D
51 A	52 C	53 D	54 C	55 A	56 A	57 A	58 C	59 B	60 D
61 B	62 A	63 C	64 A	65 D					

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 58. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 9x + 4$.

Hướng dẫn giải. Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=4 \end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $f(x)>0$ khi $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (4;+\infty)$; $f(x)<0$ khi $x \in \left(\dfrac{1}{2};4\right)$.

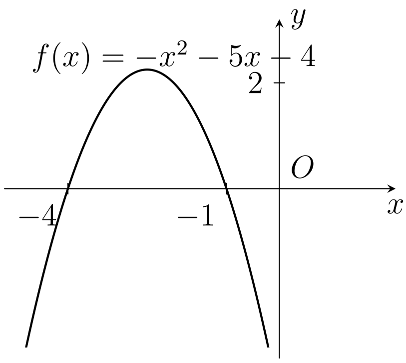
Bài 59. Giải bất phương trình $3x^2-2x-8>0$.

Hướng dẫn giải. Tam thức bậc hai $f(x)=3x^2-2x-8$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1=\dfrac{-4}{3}$; $x_2=2$.

Vì $a=3>0$ nên $f(x)$ dương trên các khoảng $\left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right)$, $(2;+\infty)$.

Vậy bất phương trình $3x^2-2x-8>0$ có tập nghiệm là $\left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right) \cup (2;+\infty)$.

Bài 60. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai sau đây, hãy lập bảng xét dấu và kết luận về dấu của tam thức bậc hai tương ứng



Hướng dẫn giải. Bảng xét dấu của tam thức bậc hai

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-4;-1)$.
$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$.

Bài 61. Xét dấu của tam thức bậc hai sau $f(x)=-6x^2+19x-15$.

Hướng dẫn giải. Xét $-6x^2+19x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$.
- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.
- $f(x) = 0$ khi $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Bài 62. Xác định m để các đa thức sau là tam thức bậc hai

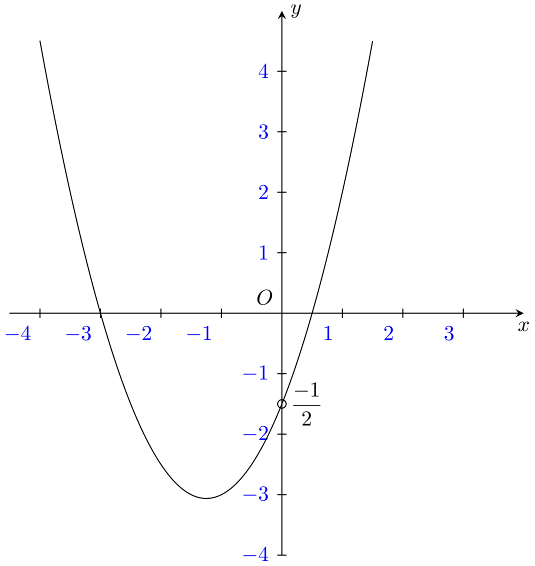
a) $f(x) = (m+1)x^2 + 2x + m$. b) $f(x) = (m-1)x^3 + 2x^2 - x + m$.

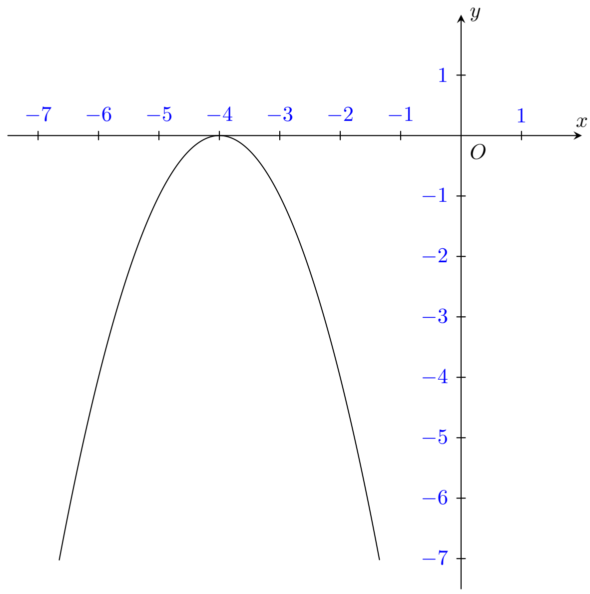
Hướng dẫn giải.

1. $f(x)$ là tam thức bậc hai $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
2. $f(x)$ là tam thức bậc hai $\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Bài 63. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai tương ứng, hãy xác định tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai sau đây

a) $x^2 + 2{,}5x - 1{,}5 \geq 0$. b) $-x^2 - 8x - 16 < 0$.





Hướng dẫn giải.

1. Dựa vào đồ thị, ta có tập nghiệm $(-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
2. Dựa vào đồ thị, ta có tập nghiệm là $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Bài 64. Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên thẹo phương thẳng đứng được mô ta bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ được tính bằng mét và thời gian t được tính bằng giây. Hỏi quả bóng ở độ cao trên 5 m so với mặt đất trong khoảng thời gian bao lâu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Hướng dẫn giải. Ta có $h(t) > 5 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 20t + 1 > 5 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 20t - 4 > 0 \Leftrightarrow 0{,}21 < t < 3{,}87$.
Vậy thời gian quả bóng ở độ cao trên 5 m so với mặt đất trong khoảng 3,66 giây.

Bài 65. Giải bất phương trình bậc hai sau bằng cách lập bảng xét dấu:

$$3x^2 - 9x - 30 \leq 4x(x-5).$$

Hướng dẫn giải. Ta có

$$3x^2 - 9x - 30 \leq 4x(x-5) \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 30 \leq 0.$$

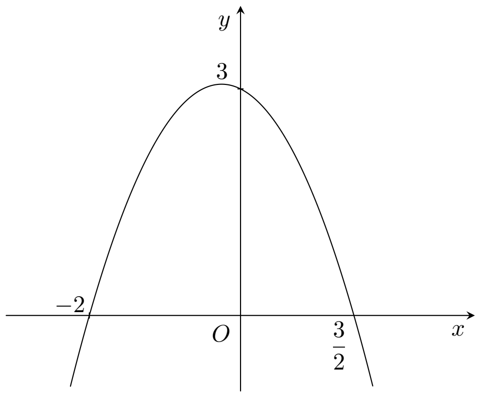
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		5		6		$+\infty$
$-x^2+11x-30$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 5] \cup [6; +\infty)$.

Bài 66.

1. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai $y = f(x)$ như hình bên. Hãy tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$.
2. Cho bất phương trình $2x^2 + 2(m-3)x + 3(m^2-3) \geq 0$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.



Hướng dẫn giải.

1. Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

   Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-2; \dfrac{3}{2}\right]$.

2. Để tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 + 2(m-3)x + 3(m^2-3) \geq 0$ là $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ (m-3)^2 - 6(m^2-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5m^2 - 6m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \geq \dfrac{9}{5}. \end{array}\right.$$

Bài 67. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải.

- **Trường hợp 1.** Nếu $m = 0$, phương trình đã cho trở thành $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.
- **Trường hợp 2.** Nếu $m \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai có

$$\Delta' = (m-1)^2 - m(m-3) = m + 1.$$

  Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy với $m \in \{-1, 0\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 68. Bằng cách lập bảng xét dấu, hãy giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$.

b) $(x^2 - 5x + 4)(2 - 5x + 2x^2) > 0$.

Hướng dẫn giải.

1. Tam thức bậc hai $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{-1}{3}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; \dfrac{-1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

2.
- Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x + 4$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$ và $x_2 = 4$.
- Tam thức bậc hai $g(x) = 2 - 5x + 2x^2$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2$ và $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Bài 69. Chứng minh $3x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 2y + 3 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải. Xét biểu thức

$$\begin{aligned} f(x; y) &= 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 2y + 3 \\ &= 3x^2 - (2y + 4)x + 2y^2 - 2y + 3. \end{aligned}$$

Ta xem $f(x; y)$ là một tam thức bậc hai thẹo biến x, xem y là tham số.
Tam thức này có biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta_x &= [-(2y + 4)]^2 - 4 \cdot 3(2y^2 - 2y + 3) \\ &= -20y^2 + 40y - 20. \end{aligned}$$

Mà Δ_x cũng lại là một tam thức bậc hai thẹo biến y có $\Delta_y = 40^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (-20) = 0$ và hệ số $a_{\Delta_x} = -20 < 0$.
Suy ra $\Delta_x \leq 0, \forall y \in \mathbb{R}$.
Do $\begin{cases} \Delta_x \leq 0 \\ a_{f(x;y)} = 3 > 0 \end{cases}$ nên $f(x; y) \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.