

# KHẢO SÁT HÀM SỐ BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG

Khảo sát hàm số là một trong những kỹ năng quan trọng trong toán học, giúp chúng ta hiểu rõ hơn về đặc điểm, tính chất và hình dạng của đồ thị hàm số. Trong bài viết này, chúng ta sẽ khảo sát hàm số bậc bốn trùng phương, một loại hàm số đặc biệt có dạng:

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

## 1. Xác định các yếu tố cơ bản

Để khảo sát hàm số, trước tiên chúng ta cần xác định các yếu tố cơ bản như tập xác định, tính chẵn lẻ, các điểm cực trị, và đồ thị của hàm số.

### 1.1. Tập xác định

Hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  là một đa thức bậc bốn, do đó tập xác định của nó là toàn bộ trục số thực:  $D = \mathbb{R}$ .

### 1.2. Tính chẵn lẻ

Để xác định tính chẵn lẻ của hàm số, chúng ta xét  $f(-x)$ :

$$f(-x) = a(-x)^4 + b(-x)^2 + c = ax^4 + bx^2 + c = f(x)$$

Do đó, hàm số này là một hàm chẵn. Điều này có nghĩa là đồ thị của hàm số đối xứng qua trục tung  $Oy$ .

## 2. Tính đạo hàm và tìm cực trị

### 2.1. Đạo hàm cấp 1

Để tìm các điểm cực trị của hàm số, ta tính đạo hàm cấp 1:

$$y' = \frac{d}{dx}(ax^4 + bx^2 + c) = 4ax^3 + 2bx$$

### 2.2. Tìm điểm cực trị

Để tìm các điểm cực trị, ta giải phương trình  $y' = 0$ :

$$\begin{aligned}4ax^3 + 2bx &= 0 \\x(4ax^2 + 2b) &= 0\end{aligned}$$

Do đó, ta có hai nghiệm:

$$x = 0$$

$$4ax^2 + 2b = 0$$

$$x^2 = -\frac{b}{2a}$$

Vì  $x^2$  luôn không âm, nên phương trình  $4ax^2 + 2b = 0$  chỉ có nghiệm khi  $\frac{b}{2a} \leq 0$ .

### 2.3. Xét dấu đạo hàm

Để xác định loại cực trị tại các điểm tìm được, ta xét dấu đạo hàm  $y'$ :

Với  $x = 0$ :  $y'(0) = 0$

Với  $x \neq 0$ , xét dấu của  $4ax^2 + 2b$ :

- Nếu  $a > 0$ , thì  $4ax^2 + 2b$  là một hàm số bậc hai với hệ số bậc hai dương, do đó đồ thị của nó là một parabol mở lên và có thể có hai nghiệm, không nghiệm, hoặc một nghiệm kép phụ thuộc vào giá trị của  $b$ .
- Nếu  $a < 0$ , thì  $4ax^2 + 2b$  là một hàm số bậc hai với hệ số bậc hai âm, do đó đồ thị của nó là một parabol mở xuống và tương tự có thể có hai nghiệm, không nghiệm, hoặc một nghiệm kép phụ thuộc vào giá trị của  $b$ .

## 3. Đồ thị hàm số

Để vẽ đồ thị hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$ , chúng ta thực hiện các bước sau:

- Xác định giao điểm với các trục tọa độ:
  - Giao điểm với trục  $Oy$  tại  $y = c$
  - Giao điểm với trục  $Ox$  bằng cách giải phương trình  $ax^4 + bx^2 + c = 0$
- Xác định các điểm cực trị và tính giá trị tại các điểm đó.
- Vẽ đồ thị dựa trên các điểm giao và điểm cực trị.

Ví dụ: Xét hàm số  $y = x^4 - 4x^2 + 3$ :

- Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$
- Tính chẵn lẻ: Hàm số chẵn
- Tìm cực trị: Giải phương trình  $y' = 0$ :

$$4x^3 - 8x = 0$$

$$x(4x^2 - 8) = 0$$

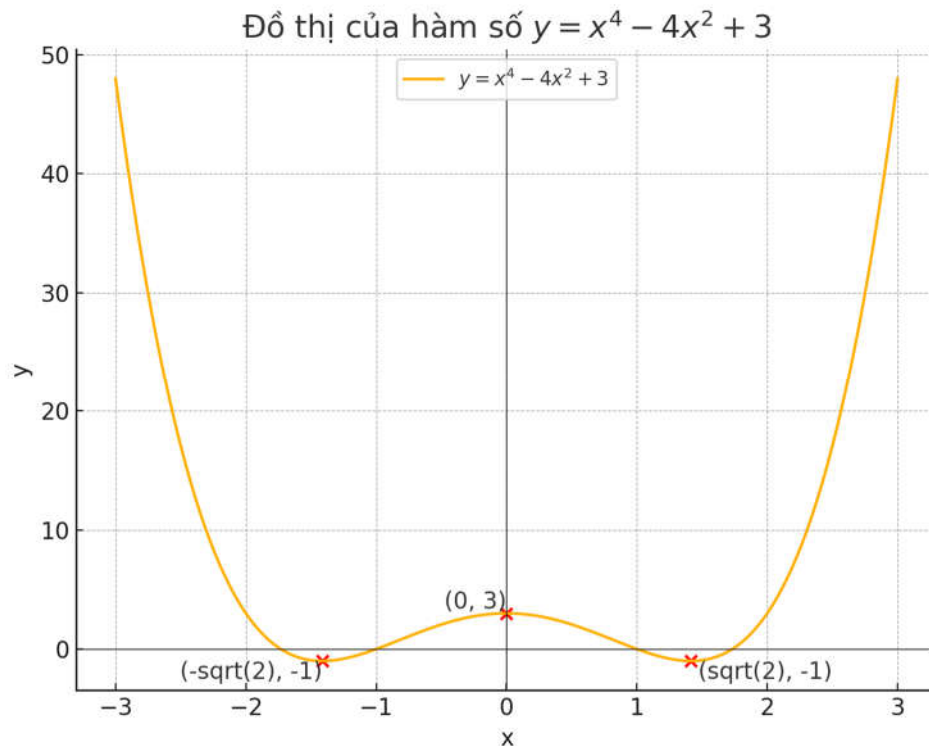
$$x = 0, x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

- Tính giá trị tại các điểm cực trị:

$$x = 0: y(0) = 3$$

$$x = \pm\sqrt{2}: y(\sqrt{2}) = y(-\sqrt{2}) = -1$$

Dựa vào các thông tin trên, ta có thể vẽ đồ thị của hàm số.



## 4. Kết luận

Khảo sát hàm số bậc bốn trùng phương giúp chúng ta hiểu rõ hơn về đặc điểm của nó, bao gồm tính chẵn lẻ, các điểm cực trị, và đồ thị của hàm số. Qua ví dụ cụ thể, chúng ta có thể áp dụng các bước khảo sát để xác định các yếu tố quan trọng và vẽ đồ thị một cách chính xác.

## 5. Một số ứng dụng

Hàm số bậc bốn trùng phương có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác. Dưới đây là một số ứng dụng cụ thể:

### 5.1. Vật lý

Trong cơ học, hàm số bậc bốn trùng phương có thể xuất hiện khi phân tích các hệ thống dao động phi tuyến. Ví dụ, khi xét đến năng lượng thế của một hệ thống dao động, hàm thế năng có thể được biểu diễn dưới dạng hàm bậc bốn trùng phương để mô tả các lực phi tuyến tác động lên hệ thống.

Trong động lực học chất lỏng, các phương trình bậc bốn có thể xuất hiện khi nghiên cứu dòng chảy qua các vật thể có hình dạng phức tạp hoặc trong các bài toán liên quan đến sự ổn định của dòng chảy.

## 5.2. Kinh tế học

Trong kinh tế học, hàm số bậc bốn trùng phương có thể được sử dụng để mô hình hóa các bài toán tối ưu hóa. Chẳng hạn, khi phân tích lợi nhuận hoặc chi phí trong một doanh nghiệp, các hàm bậc bốn có thể biểu diễn mối quan hệ phi tuyến giữa các yếu tố đầu vào và đầu ra.

Hàm số bậc bốn cũng có thể được sử dụng để mô hình hóa hành vi của thị trường tài chính, chẳng hạn như mô tả các xu hướng và biến động của giá cổ phiếu theo thời gian.

## 5.3. Kỹ thuật

Trong kỹ thuật, các hàm bậc bốn trùng phương có thể được sử dụng để mô hình hóa ứng suất và biến dạng trong các vật liệu dưới tác động của lực. Điều này giúp các kỹ sư thiết kế các cấu trúc an toàn và hiệu quả.

Trong các hệ thống điều khiển tự động, hàm bậc bốn có thể xuất hiện khi phân tích và thiết kế các bộ điều khiển phi tuyến. Điều này giúp tối ưu hóa hiệu suất của hệ thống và giảm thiểu sai lệch.

## 5.4. Sinh học

Trong sinh học, hàm số bậc bốn trùng phương có thể được sử dụng để mô hình hóa sự tăng trưởng của quần thể sinh vật. Các mô hình này giúp các nhà nghiên cứu dự đoán sự phát triển của quần thể trong các điều kiện môi trường khác nhau.

*Tham khảo thêm các bài viết về toán học ở: [Trường THPT Sài Gòn](#)*