

ĐỀ DỰ ĐOÁN SỐ 3 ÔN THI THPTQG TỪ NĂM 2025

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Mã đề thi 239

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh :.....

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (học sinh trả lời các câu hỏi từ 1 đến 12, mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án, mỗi phương án đúng 0,25 điểm)

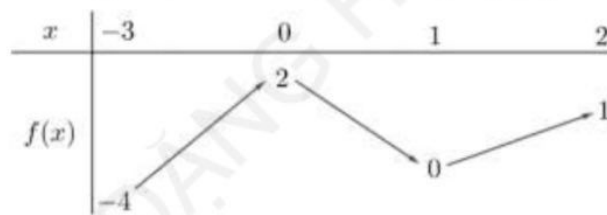
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-2; 1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$.



- A. 6. B. 7. C. 5. D. -8.

Câu 3. Biết $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$. Tìm $a + b$?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 4. Biết đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$.
C. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 1$. D. $y = x^3 - 3x^2 - x - 1$.

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

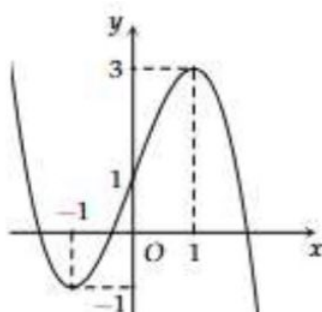
- A. $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$. B. $4x^4 - 9x + C$. C. $\frac{1}{4}x^4 + C$. D. $4x^3 - 9x + C$.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int_0^a (2x + 5)dx = a - 4$

- A. 1 B. 0 C. 2 D. Vô số

Câu 7. Mỗi ngày Ông A đều đi bộ để rèn luyện sức khoẻ. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của ông A trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2



Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 1,5. B. 0,9. C. 0,6. D. 0,3.

Câu 8. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A. 10,75. B. 4,75. C. 4,63. D. 4,38.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ với $A(0; 4; -2)$; $B(1; 1; -2)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $(1; 5; -4)$. B. $(1; -3; 0)$. C. $(-1; 3; 0)$. D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -2\right)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 1; 3)$ và vector $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến là:

- A. $2x - y + z + 2 = 0$. B. $-2x - y + z - 2 = 0$. C. $2x - y - z + 2 = 0$. D. $-2x + y + z - 2 = 0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc d ?

- A. $N(1; 0; 1)$. B. $F(3; -4; 5)$. C. $M(0; 2; 1)$. D. $E(2; -2; 3)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính là đoạn thẳng AB với $A(2; -1; 5)$ và $B(0; 1; -1)$ có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (y+3)^2 = 11$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 11$.
C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 11$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 11$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. (Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chỉ chọn đúng hoặc sai).

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) bằng $4\sqrt{5}$.
c) Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) có phương trình $x = 2$, $y = x$.

d) Đường thẳng $y = 2x - 2$ cắt (C) tại hai điểm A, B và trung điểm của AB là tâm đối xứng của đồ thị (C) .

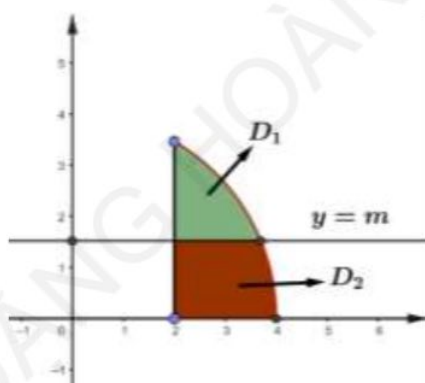
Câu 2. Khối chòm cầu có bán kính $R = 4$ và chiều cao $h = 2$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ xung quanh trục Ox .

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến đáy khối chòm cầu bằng 3.

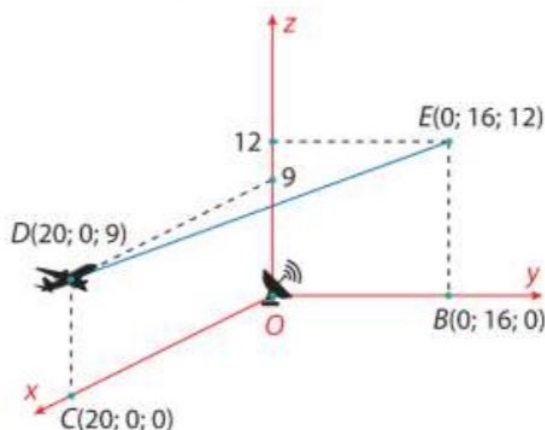
b) Thể tích của khối chòm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1 = \int_2^4 (16 - x^2) dx$.

c) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{25}$.

d) Một đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 2\sqrt{3}$) chia hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{16 - x^2}$, trục Ox và hai đường $x = 2, x = 4$ thành hai miền D_1, D_2 như hình vẽ. Quay D_1 và D_2 quanh trục Ox ta thu được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_3 và V_4 . Nếu $V_4 = 4V_3$ thì khi đó $m = \sqrt{7}$.



Câu 3: Giả sử một máy bay thương mại M đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB . Tại D , máy bay bay cách mặt đất là 9000m và tại E là 12000m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C là 20000m, cách B là 16000m và $\angle BOC = 90^\circ$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: 1000m) với O là vị trí đặt radar, B thuộc tia Oy , C thuộc tia Ox , khi đó ta có tọa độ các điểm như hình vẽ sau:

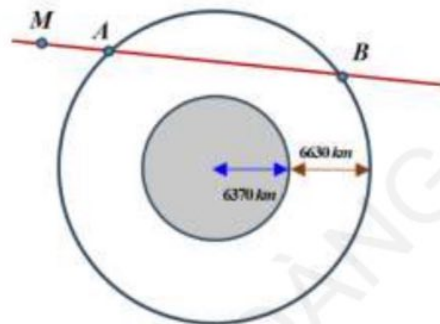


a) Tại D , máy bay cách radar 29000m (làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị mét).

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DE . Khi máy bay bay đến điểm I , máy bay cách mặt đất 10500m.

- c) Trên đoạn đường bay từ D đến E , máy bay sẽ đi qua điểm $P(16;3,2;9,6)$.
- d) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của radar (làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét) là 22000m. Biết bán kính hoạt động của radar là 20000m.

Câu 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6630 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6370 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng đi qua hai điểm $M(-12;29;10)$ và $N(0;12;5)$

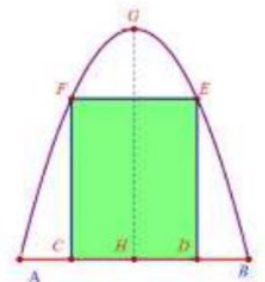


- a) Trong hệ trục tọa độ đã cho thiên thạch di chuyển trên đường thẳng có phương tham số
- $$\begin{cases} x = -12 - 12t \\ y = 29 + 17t \\ z = 10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
- b) Quãng đường mà thiên thạch di chuyển trong vùng theo dõi của hệ thống quan sát là 21401km (làm tròn đến hàng đơn vị).
- c) Vị trí mà thiên thạch gần Trái Đất nhất là điểm $H\left(-30; \frac{109}{2}; \frac{25}{2}\right)$
- d) Thiên thạch trên không thể va vào trái đất.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. (Học sinh trả lời các câu hỏi từ 1 đến 6 mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm)

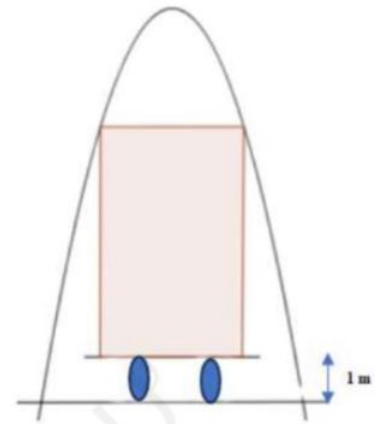
Câu 1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của P với $P = 2x + y$.

Câu 2. [Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền (đơn vị triệu) để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



Câu 3. Một lớp học có 60% học sinh giỏi môn Toán, 40% học sinh giỏi môn Văn, và 35% học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ lớp đó. Biết rằng học sinh này giỏi môn Toán, tính xác suất để học sinh đó cũng giỏi môn Văn. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- Câu 4.** Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao $9m$, khoảng cách giữa hai chân cổng là $6m$. Để vận chuyển thùng hàng hình hộp chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao $1m$. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



- Câu 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước ra đa phát hiện một chiếc máy bay quân sự di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(600;400;5)$ đến điểm $B(960;600;13)$ trong 20 phút. Giả sử sau 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí $A(600;400;5)$ máy bay di chuyển đến vị trí $C(x;y;z)$. Tính $2x+y-z$?
- Câu 6.** Hệ Thống Định Vị Vệ Tinh Toàn Cầu Beidou (Bắc Đẩu) hiện tại có 35 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất khoảng 35000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6,4$ (nghìn km). Với hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(30;0;0)$, $B(0;30;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng phần chục).

---- HẾT ----

ĐÁP ÁN ĐỀ DỰ ĐOÁN SỐ 3 ÔN THI THPTQG TỪ NĂM 2025

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (học sinh trả lời các câu hỏi từ 1 đến 12, mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án, mỗi phương án đúng 0,25 điểm)

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$

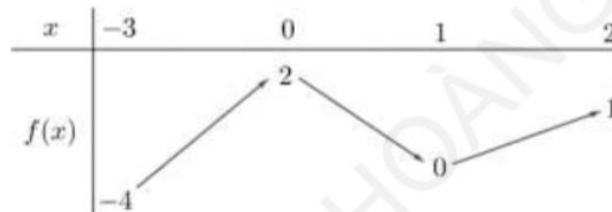
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-2; +\infty)$. **D.** $(-2; 1)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 2: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$.



- A.** 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -8.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.(-4) = -8$.

Câu 3: [Mức độ 2] Biết $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 1}$. Tìm $a + b$?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 2x - 2 + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{2}{x - 1}. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} = 0$$

Vậy đường tiệm cận xiên đồ thị hàm số có phương trình $y = x + 2$.

Nên $a = 1; b = 2 \Rightarrow a + b = 3$

Câu 4: [Mức độ 1] Biết đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở 4 phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A.** $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$.
C. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - x - 1$.

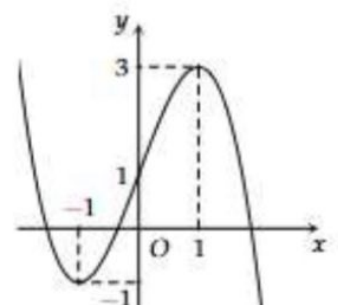
Lời giải

Ta có: Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Suy ra $a < 0$ loại phương án

A, D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; 3)$. Loại C

Vậy đáp án đúng là B.



Câu 5. [Mức độ 1] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

- A.** $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$. **B.** $4x^4 - 9x + C$. **C.** $\frac{1}{4}x^4 + C$. **D.** $4x^3 - 9x + C$.

Lời giải

$$\int (2x^3 - 9)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 9x + C = \frac{x^4}{2} - 9x + C.$$

Câu 6. [Mức độ 1] Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int_0^a (2x + 5)dx = a - 4$

- A.** 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** Vô số

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^a (2x + 5)dx = a - 4 \Leftrightarrow (x^2 + 5x) \Big|_0^a = a - 4 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Câu 7. [Mức độ 1] Mỗi ngày Ông A đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của ông A trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	[2, 7; 3, 0)	[3, 0; 3, 3)	[3, 3; 3, 6)	[3, 6; 3, 9)	[3, 9; 4, 2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A.** 1,5. **B.** 0,9. **C.** 0,6. **D.** 0,3.

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là: $4,2 - 2,7 = 1,5(km)$

Câu 8. [Mức độ 2] Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)	[15, 5; 18, 5)	[18, 5; 21, 5)	[21, 5; 24, 5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

- A.** 10,75. **B.** 4,75. **C.** 4,63. **D.** 4,38.

Lời giải

Cỡ mẫu là $n = 56$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_{14} + x_{15}}{2}$. Do x_{14}, x_{15} đều thuộc nhóm $[12, 5; 15, 5)$ nên nhóm này chứa

Q_1 . Do đó, $p = 2; a_2 = 12,5; m_2 = 12; m_1 = 3; a_3 - a_2 = 3$ và ta có

$$Q_1 = 12,5 + \frac{56 - 3}{12} \cdot 3 = 15,25$$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{42} + x_{43}}{2}$. Do x_{42}, x_{43} đều thuộc nhóm $[18, 5; 21, 5)$ nên nhóm này chứa Q_3 . Do đó, $p = 4; a_4 = 18,5; m_4 = 24; m_1 + m_2 + m_3 = 3 + 12 + 15 = 30; a_5 - a_4 = 3$ và ta có

$$Q_3 = 18,5 + \frac{3 \cdot 56 - 30}{24} \cdot 3 = 20.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 4,75$

- Câu 9.** [Mức độ 1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC với $A(0;4;-2)$; $B(1;1;-2)$.
Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là:
- A. $(1;5;-4)$. **B. $(1;-3;0)$.** C. $(-1;3;0)$. D. $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};-2\right)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1;-3;0)$.

- Câu 10.** [Mức độ 1] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;3)$ và vector $\vec{n} = (2;-1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến là:
- A. $2x - y + z + 2 = 0$.** B. $-2x - y + z - 2 = 0$. C. $2x - y - z + 2 = 0$. D. $-2x + y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến là:

$$2(x+2) - (y-1) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z + 2 = 0$$

- Câu 11.** [Mức độ 1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc d ?
- A. $N(1;0;1)$. B. $F(3;-4;5)$. **C. $M(0;2;1)$.** D. $E(2;-2;3)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $N(1;0;1)$ vào phương trình $d \Rightarrow \frac{1-1}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{1-1}{2}$ thỏa mãn nên loại A.

Thay tọa độ điểm $F(3;-4;5)$ vào phương trình $d \Rightarrow \frac{3-1}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{5-1}{2}$ thỏa mãn nên loại B.

Thay tọa độ điểm $M(0;2;1)$ vào phương trình $d \Rightarrow \frac{0-1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{1-1}{2}$ không thỏa mãn nên chọn C.

Thay tọa độ điểm $E(2;-2;3)$ vào phương trình $d \Rightarrow \frac{2-1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{3-1}{2}$ thỏa mãn nên loại D.

- Câu 12.** [Mức độ 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có đường kính là đoạn thẳng AB với $A(2;-1;5)$ và $B(0;1;-1)$ có phương trình là
- A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 11$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 11$.
C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 11$. **D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 11$.**

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{11}$.

Độ dài bán kính của mặt cầu (S) có đường kính AB là $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{11}$.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) có đường kính AB là $I(1;0;2)$.

Do đó phương trình mặt cầu có tâm $I(1;0;2)$ bán kính $R = \sqrt{11}$ là $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 11$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. (Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chỉ chọn đúng hoặc sai).

Câu 1. [NB-TH-TH-VD] Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) bằng $4\sqrt{5}$.
- c) Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) có phương trình $x = 2, y = x$.
- d) Đường thẳng $y = 2x - 2$ cắt (C) tại hai điểm A, B và trung điểm của AB là tâm đối xứng của đồ thị (C) .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

a) Sai.

Do hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

b) Đúng.

Đồ thị hàm số (C) có điểm cực tiểu $A(0; -2)$, điểm cực đại $B(4; 6)$.

Vậy khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) bằng

$$AB = \sqrt{(4 - 0)^2 + (6 + 2)^2} = 4\sqrt{5}.$$

c) Đúng.

$+\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - x) = 0$ nên đồ thị (C) có tiệm cận xiên $y = x$.

$+\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty$ nên đồ thị (C) có tiệm cận đứng: $x = 2$.

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $A(0; -2), B(4; 6)$.

Khi đó trung điểm của AB là $I(2; 2)$.

Mặt khác đồ thị có hai đường tiệm cận có phương trình $x = 2$, $y = 2$ suy ra tâm đối xứng của đồ thị là $I(2; 2)$.

Vậy trung điểm của AB là tâm đối xứng của đồ thị (C) .

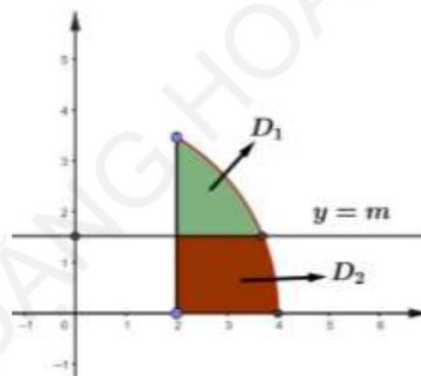
Câu 2. [NB-TH-TH-VD] Khối chòm cầu có bán kính $R = 4$ và chiều cao $h = 2$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = 4$ xung quanh trục Ox .

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến đáy khối chòm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chòm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1 = \int_2^4 (16 - x^2) dx$.

c) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{25}$.

d) Một đường thẳng $y = m$ ($0 < m < 2\sqrt{3}$) chia hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{16 - x^2}$, trục Ox và hai đường $x = 2$, $x = 4$ thành hai miền D_1 , D_2 như hình vẽ. Quay D_1 và D_2 quanh trục Ox ta thu được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_3 và V_4 . Nếu $V_4 = 4V_3$ thì khi đó $m = \sqrt{7}$.



Lời giải

a) Sai.

Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến đáy khối chòm cầu bằng $4 - 2 = 2$.

b) Sai.

Công thức tính V_1 là: $V_1 = \pi \int_2^4 (\sqrt{16 - x^2})^2 dx = \pi \int_2^4 (16 - x^2) dx$.

c) Đúng.

$$V_1 = \pi \int_2^4 (16 - x^2) dx = \pi \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{40\pi}{3} \text{ (đvtt)}.$$

$$\text{Ta có: } V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{250\pi}{3} \text{ (đvtt)}. \text{ Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{40\pi}{3}}{\frac{250\pi}{3}} = \frac{4}{25}.$$

d) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm đường thẳng $y = m$ và đồ thị $y = \sqrt{16 - x^2}$:

$$\sqrt{16-x^2} = m \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{16-m^2} \text{ (N)} \\ x = -\sqrt{16-m^2} \text{ (L)} \end{cases}$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay D_1 quanh Ox :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_2^{\sqrt{16-m^2}} \left[\left(\sqrt{16-x^2} \right)^2 - m^2 \right] dx = \pi \int_2^{\sqrt{16-m^2}} (16-x^2-m^2) dx = \pi \left[(16-m^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_2^{\sqrt{16-m^2}} \\ &= \pi \left[\frac{2}{3}(16-m^2)\sqrt{16-m^2} - 2(16-m^2) + \frac{8}{3} \right] \end{aligned}$$

Theo đề Câu ta có: $V_4 = 4V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{1}{5}V_1$

$$\Rightarrow \pi \left[\frac{2}{3}(16-m^2)\sqrt{16-m^2} - 2(16-m^2) + \frac{8}{3} \right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{40\pi}{3}$$

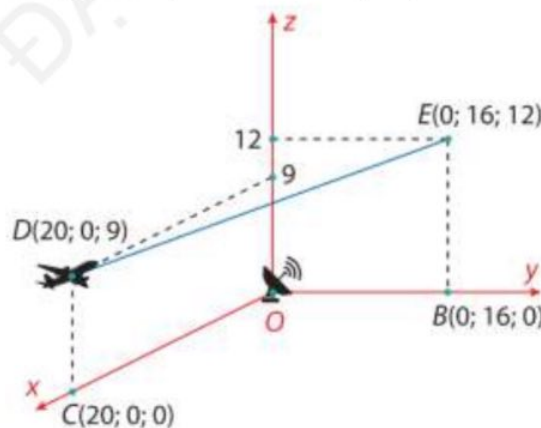
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(16-m^2)\sqrt{16-m^2} - 2(16-m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{16-m^2} - 2 = 0 \text{ (Do } m \neq \pm 4)$$

$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}$$

So điều kiện nhận $m = \sqrt{7}$.

Câu 3: [TH-TH-TH-VD] Giả sử một máy bay thương mại M đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB . Tại D , máy bay bay cách mặt đất là 9000m và tại E là 12000m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C là 20000m, cách B là 16000m và $\angle BOC = 90^\circ$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: 1000m) với O là vị trí đặt radar, B thuộc tia Oy , C thuộc tia Ox , khi đó ta có tọa độ các điểm như hình vẽ sau:



- Tại D , máy bay cách radar 29000 m (làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị mét).
- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DE . Khi máy bay bay đến điểm I , máy bay cách mặt đất 10500m.
- Trên đoạn đường bay từ D đến E , máy bay sẽ đi qua điểm $P(16; 3, 2; 9, 6)$.
- Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của radar (làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét) là 22000m. Biết bán kính hoạt động của radar là 20000m.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $\overrightarrow{OD} = (20; 0; 9)$ và $OD = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{481} \text{ km} \approx 22000 \text{ m}$.

b) Đúng.

Tọa độ trung điểm I của DE là: $\left(10; 8; \frac{21}{2}\right)$.

Khi máy bay bay đến điểm I , máy bay cách mặt đất $\frac{21}{2} \text{ km}$ hay 10500 m .

c) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{DE} = (-20; 16; 3)$.

Đường thẳng DE đi qua điểm $D(20; 0; 9)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{DE} = (-20; 16; 3)$ nên có

$$\text{phương trình tham số là: } \begin{cases} x = 20 - 20t \\ y = 16t \\ z = 9 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Thay tọa độ điểm $P(16; 3; 2; 9, 6)$ vào phương trình tham số của đường thẳng DE ta được:

$$\begin{cases} 16 = 20 - 20t \\ 3, 2 = 16t \\ 9, 6 = 9 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, 2 \\ t = 0, 2 \\ t = 0, 2 \end{cases}$$

Như vậy $P \in DE$.

Do đó trên đoạn đường bay từ D đến E , máy bay sẽ đi qua điểm $P(16; 3; 2; 9, 6)$.

d) Sai.

Gọi $H(20 - 20t; 16t; 9 + 3t) \in DE$ là hình chiếu của O trên DE .

Hai vectơ $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = (20 - 20t; 16t; 9 + 3t) \\ \overrightarrow{DE} = (-20; 16; 3) \end{cases}$ vuông góc với nhau nên

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \Leftrightarrow -20(20 - 20t) + 16 \cdot 16t + 3(9 + 3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{373}{665}.$$

Khi đó $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{1168}{133}; \frac{5968}{665}; \frac{7104}{665}\right)$ và

$$OH = \sqrt{\left(\frac{1168}{133}\right)^2 + \left(\frac{5968}{665}\right)^2 + \left(\frac{7104}{665}\right)^2} = \sqrt{\frac{180736}{665}} = \frac{16\sqrt{469490}}{665}.$$

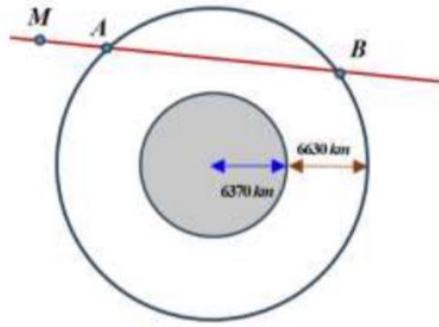
Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của ra đa là:

$$2\sqrt{20^2 - OH^2} = 2\sqrt{20^2 - \frac{180736}{665}} = \frac{584\sqrt{665}}{665} \approx 22600 \text{ m}$$

(kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét)

Câu 4. [NB-TH-TH-VD] Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6630 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6370 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi

trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng đi qua hai điểm $M(-12; 29; 10)$ và $N(0; 12; 5)$



- a) Trong hệ trục tọa độ đã cho thiên thạch di chuyển trên đường thẳng có phương tham số
- $$\begin{cases} x = -12 - 12t \\ y = 29 + 17t \\ z = 10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
- b) Quãng đường mà thiên thạch di chuyển trong vùng theo dõi của hệ thống quan sát là 21401 km (làm tròn đến hàng đơn vị).
- c) Vị trí mà thiên thạch gần Trái Đất nhất là điểm $H\left(-30; \frac{109}{2}; \frac{25}{2}\right)$
- d) Thiên thạch trên không thể va vào trái đất.

Lời giải

a. Đúng.

Do đường thẳng d đi qua M, N nên $\overrightarrow{MN}(-12; 17; 5)$ là vector chỉ phương của d ;

d đi qua điểm $M(-12; 29; 10)$ nên có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -12 - 12t \\ y = 29 + 17t \\ z = 10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. Đúng.

Hệ thống quan sát là thuộc khối cầu tâm O và có bán kính $6370 + 6630 = 13000$ (km) ứng với 13 đơn vị trên hệ trục tọa độ có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 169$.

Xét giao điểm của đường thẳng d mà thiên thạch di chuyển với mặt cầu trên ta có

$$\Leftrightarrow (-12 - 12t)^2 + (29 + 17t)^2 + (10 + 5t)^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 144 + 288t + 144t^2 + 841 + 986t + 289t^2 + 100 + 100t + 25t^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 144 + 288t + 144t^2 + 841 + 986t + 289t^2 + 100 + 100t + 25t^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 458t^2 + 1374t + 916 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$t = -1 \Rightarrow A(0; 12; 5)$$

$$t = -2 \Rightarrow B(12; -5; 0)$$

Như vậy quãng đường mà thiên thạch di chuyển trong vùng quan sát là $AB = \sqrt{458} \approx 21,4009$ đơn vị. Đổi về 1 đơn vị bằng 1000 km ta được 21401 km.

c) Sai.

Thiên thạch gần Trái Đất nhất tại điểm H là hình chiếu vuông góc của tâm O lên đường thẳng d .
Vì $H \in d \Rightarrow H(-12-12t; 29+17t; 10+5t)$.

$$\text{Vì } OH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow -12(-12-12t) + 17(29+17t) + 5(10+5t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Do đó } H\left(6; \frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

d) Đúng.

Thiên thạch trên không thể va vào trái đất.

$$\text{Ta có khoảng cách ngắn nhất từ tâm trái đất đến thiên thạch là } OH = \frac{\sqrt{218}}{2} \approx 7,38$$

Khi đó khoảng cách từ thiên thạch đến tâm trái đất khoảng 7380 km lớn hơn bán kính trái đất là 6370 km nên không thể va vào trái đất.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. (Học sinh trả lời các câu hỏi từ 1 đến 6 mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm)

Câu 1. [Mức độ 3] Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất của P với $P = 2x + y$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \frac{x+y}{1-xy} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ 1-xy > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + x + y + xy - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + (x+y) = \log_3(1-xy) + (1-xy) \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_3 t + t \quad (t > 0)$$

$$\text{Vì } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0 \text{ nên hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó từ } (*) \Leftrightarrow f(x+y) = f(1-xy) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{Ta có } P = 2x + y = 2x + \frac{1-x}{1+x} \text{ với } x \in [0; 1].$$

$$P' = 2 + \frac{-2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in [0; 1] \\ x=-2 \notin [0; 1] \end{cases}$$

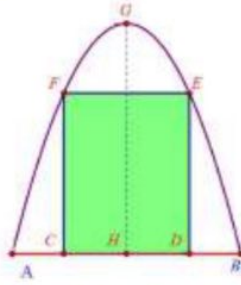
Với $x=0$ thì $P=1$.

Với $x=1$ thì $P=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P=2$ xảy ra khi $x=1$ và $y=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Đáp số: 2.

Câu 2. [Mức độ 3] Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1200000 \text{ đồng}/m^2$, còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là $900000 \text{ đồng}/m^2$. Hỏi tổng số tiền (đơn vị triệu) để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



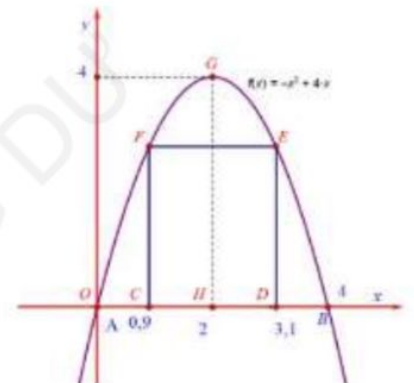
Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.

Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$



Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả cổng là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(m)$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}$.

$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400 \text{ đồng}$.

Đáp số: 11,4

Câu 3. [Mức độ 2] Một lớp học có 60% học sinh giỏi môn Toán, 40% học sinh giỏi môn Văn, và 35% học sinh giỏi cả hai môn Toán và Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ lớp đó. Biết rằng học sinh này giỏi môn Toán, tính xác suất để học sinh đó cũng giỏi môn Văn. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố "chọn được học sinh giỏi môn Toán".

Gọi B là biến cố "chọn được học sinh giỏi môn Văn".

Ta có:

$$P(A) = 0,6, P(B) = 0,4 \quad P(BA) = 0,35$$

Theo công thức xác suất có điều kiện ta được: $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,6} \approx 0,58$.

Đáp số: 0,58.

Câu 4. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao $9m$, khoảng cách giữa hai chân cổng là $6m$. Để vận chuyển thùng hàng hình hộp chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao $1m$. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Giả sử Parabol có dạng : $y = -ax^2 + 9$.

Do khoảng cách giữa hai chân cổng là $6m$ nên $x \in [-3; 3]$. Thay $x = 3, y = 0$ vào phương trình Parabol, ta có:

$$0 = -a \cdot 3^2 + 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = -x^2 + 9.$$

Gọi hình chữ nhật là mặt cắt của thùng hàng có chiều cao h và chiều dài đáy là $2x$.

Do xe kéo có chiều cao $1m$ nên điều kiện để thùng hàng đi qua được cổng là

$$y = -x^2 + 9 \geq h + 1 \Rightarrow 0 < h \leq -x^2 + 8 \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{2}.$$

Diện tích mặt cắt là $S = h \cdot 2x \leq (-x^2 + 8)2x = -2x^3 + 16x$.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 16x$ trên khoảng $(0; 2\sqrt{2})$.

$$f'(x) = -6x^2 + 16.$$

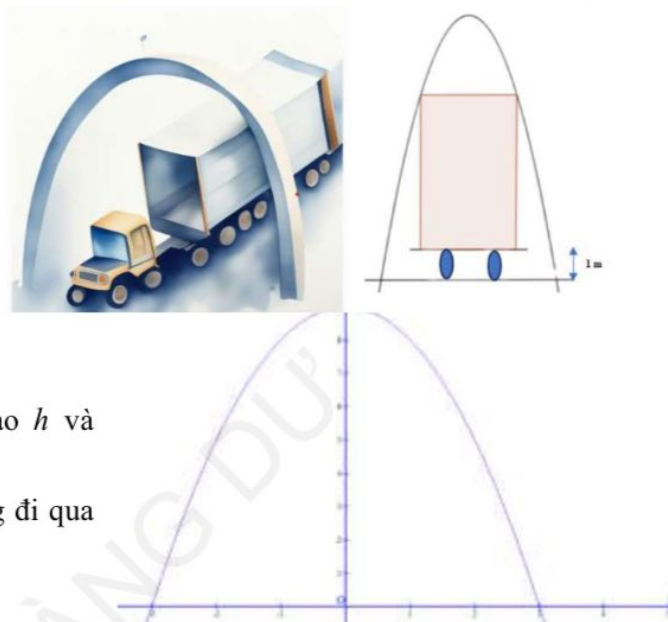
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{64\sqrt{6}}{9}$	0

Suy ra : $\max_{(0; 2\sqrt{2})} f(x) = f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{64\sqrt{6}}{9} \approx 17,4$.

Vậy $\max_{(0; 2\sqrt{2})} S(x) \approx 17,4$



Đáp án: 17,4

Câu 5. [Mức độ 3] Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước ra đa phát hiện một chiếc máy bay quân sự di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(600;400;5)$ đến điểm $B(960;600;13)$ trong 20 phút. Giả sử sau 5 phút tính từ lúc máy bay ở vị trí $A(600;400;5)$ máy bay di chuyển đến vị trí $C(x;y;z)$. Tính $2x+y-z$?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (360;200;8)$.

Do máy bay quân sự di chuyển với vận tốc và hướng không đổi nên ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng và $AB = 4AC$ Ta có: $\overrightarrow{AC} = (x-600; y-400; z-5)$

$$\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 360 = 4(x-600) \\ 200 = 4(y-400) \\ 8 = 4(z-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 690 \\ y = 450 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy: $2x+y-z = 2.690 + 450 - 7 = 1823$.

Đáp số: 1823.

Câu 6. [Mức độ 3] Hệ Thống Định Vị Vệ Tinh Toàn Cầu Beidou (Bắc Đẩu) hiện tại có 35 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách Trái Đất khoảng 35000 km, ta coi Trái Đất là khối cầu có bán kính $R = 6,4$ (nghìn km). Với hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm Trái Đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(30;0;0)$, $B(0;30;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt Trái Đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 40,96$.

Ta có $MA+MB = \sqrt{(x-30)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-30)^2 + z^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$\begin{aligned} MA+MB &= \sqrt{(x-30)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-30)^2 + z^2} \geq \sqrt{(x+y-60)^2 + (x+y)^2 + 4z^2} \\ &\geq \sqrt{(x+y-60)^2 + (x+y)^2}. \end{aligned}$$

Điều kiện để $MA+MB = \sqrt{(x+y-60)^2 + (x+y)^2}$ là khi $z=0$, khi đó $x^2 + y^2 = 40,96$

Mặt khác, vì $M(x;y;z)$ thuộc mặt cầu tâm O , bán kính bằng 6,4 nên $-6,4 \leq x;y;z \leq 6,4$ do đó $x+y > -12,8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $x+y \leq \sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)} = \sqrt{2.40,96} = \sqrt{81,92}$.

Đặt $t = x+y \Rightarrow -12,8 < t \leq \sqrt{81,92}$, khi đó

$$f(t) = MA+MB = \sqrt{(t-60)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 120t + 60^2}.$$

$$f'(t) = \frac{2t-60}{\sqrt{2t^2 - 120t + 60^2}}.$$

Dễ thấy khi $-12,8 < t \leq \sqrt{81,92}$ thì hàm số $f'(t) \leq 0$.

Do đó $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $-12,8 < t \leq \sqrt{81,92}$ khi $t = \sqrt{81,92}$ và bằng $f(\sqrt{81,92}) \approx 51,7$.

Đáp số: 51,7